8.2 习题

2024 年 11 月 9 日

8.2.1

令

$$S = \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteqq X, A\text{是有限集} \right\}$$

★ $\Rightarrow$

如果 X 是有限集，这是命题是显然的。

如果 X 是可数集。因为 X 是可数集，那么存在双射函数 $g : \mathbb{N} \to X$，又因为级数 $\sum\limits_{x \in X} f(x)$ 绝对收敛，那么

$$\sum_{x \in X} |f(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} |f(g(n))|$$

任意元素 $e \in S, e = \sum\limits_{x \in A} |f(x)| : A \subseteqq X$，所以有一个有限集 $N', A = g(N')$，因为 N' 是有限集，所有存在自然数 k，使得 $max(N') \leq k$，于是，

$$e = \sum_{x \in A} |f(x)| = \sum_{n \in N'} |f(g(n))| \leq \sum_{n=0}^{k} |f(g(n))| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f(g(n))|$$

所以，e 是有限的，由 e 的任意性可知，集合 S 有上界，所以，

$$\sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteqq X, A\text{是有限集} \right\} < \infty$$

★ $\Leftarrow$

反证法，假设级数 $\sum\limits_{x \in X} f(x)$ 绝对发散。

因为

$$\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)| : A\subseteq X, A\text{是有限集}\right\}<\infty$$

设 $\sup S\le M$。因为 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 绝对发散，所以存在自然数 N 使得

$$\sum_{n=0}^{N}|f(g(n))|>M$$

令 $A=g(n\in\mathbb{N}:0\le n\le N)$，因为 A 是有限集，且 $A\in S$，所以

$$\sum_{x\in A}|f(x)|=\sum_{n=0}^{N}|f(g(n))|\le M$$

存在矛盾。