17.3 习题

张志聪

2025 年 5 月 9 日

17.3.1

v 是零向量，等式显然成立，接下来我们讨论 v 不是零向量的情况。

f 在 x_0 处可微，所以由定义 17.2.2（可微性），我们有

$$\lim_{x \to x_0; x \in E - \{x_0\}} \frac{\|f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

令 $x = x_0 + tv$，则当 $x \to x_0$ 时，$t \to 0$（只关注 $t > 0$）。代入后：

$$\lim_{t \to 0; t > 0} \frac{\|f(x_0 + tv) - (f(x_0) + f'(x_0)(tv))\|}{\|tv\|} = 0$$

$$\lim_{t \to 0; t > 0} \frac{\|f(x_0 + tv) - f(x_0) - f'(x_0)(tv)\|}{\|tv\|} = 0$$

对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对所有的 $x \in B(x_0, \delta)\ \{x_0\}$（即：$(x_0 + tv) \in B(x_0, \delta)\ \{x_0\}$）。都有

$$\frac{\|f(x_0 + tv) - f(x_0) - f'(x_0)(tv)\|}{\|tv\|} < \epsilon$$

$$\frac{\|f(x_0 + tv) - f(x_0) - tf'(x_0)(v)\|}{t\|v\|} < \epsilon$$

$$\frac{\|\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)(v)\|}{\|v\|} < \epsilon$$

$$\|\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)(v)\| < \epsilon\|v\|$$

（变换过程中，$f'(x_0)$ 的线性性来自可微性的定义）

由 $\epsilon > 0$ 是任意值，$\|v\|$ 是定值，可知

$$\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = f'(x_0)(v)$$
$$\Longrightarrow$$
$$D_v f(x_0) = f'(x_0)(v)$$

17.3.2

- (a) 偏导数 $\Longrightarrow$ 方向导数

  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ 存在，由偏导数的定义可知，

  $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{t\to 0; t\neq 0, x_0+te_j\in E} \frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t}$$

  所以（右极限等于 x_0 处极限），

  $$\begin{aligned}\lim_{t\to 0; t\neq 0, x_0+te_j\in E} \frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t} &= \lim_{t\to 0; t>0, x_0+te_j\in E} \frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t} \\ &= D_{e_j} f(x_0)\end{aligned}$$

  又因为（左极限等于 x_0 处极限）

  $$\lim_{t\to 0; t\neq 0, x_0+te_j\in E} \frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0; t<0, x_0+te_j\in E} \frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t}$$

  令 $t=-t'$，则当 $t\to 0, t<0$ 时，$t'\to 0, t'>0$。代入后

  $$\begin{aligned}\lim_{t\to 0; t<0, x_0+te_j\in E} \frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t} &= \lim_{t'\to 0; t'>0, x_0+(-1)t'e_j\in E} \frac{f(x_0+(-t')e_j)-f(x_0)}{(-1)t'} \\ &= \lim_{t'\to 0; t'>0, x_0+t'(-e_j)\in E} (-1)\frac{f(x_0+t'(-e_j))-f(x_0)}{t'} \\ &= -D_{(-e_j)} f(x_0)\end{aligned}$$

- (b) 方向导数 $\Longrightarrow$ 偏导数

  $D_{e_j} f(x_0)$ 存在，由方向导数的定义，我们有

  $$\begin{aligned}D_{e_j} f(x_0) &= \lim_{t\to 0; t>0, x_0+te_j\in E} \frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j^+}(x_0)\end{aligned}$$

即 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ 的右极限存在，且等于 $D_{e_j}f(x_0)$。

同理可得，

$$-D_{(-e_j)}f(x_0) = \lim_{t'\to 0;t'>0,x_0+t'(-e_j)\in E}(-1)\frac{f(x_0+t'(-e_j))-f(x_0)}{t'}$$

令 $t'=-t$，则当 $t'\to 0, t'<0$ 时，$t\to 0, t<0$。代入后

$$\begin{aligned}-D_{(-e_j)}f(x_0) &= (-1)\lim_{t'\to 0;t'>0,x_0+t'(-e_j)\in E}\frac{f(x_0+t'(-e_j))-f(x_0)}{t'}\\ &= \lim_{t\to 0;t<0,x_0+te_j\in E}\frac{f(x_0+te_j)-f(x_0)}{t}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j^-}(x_0)\end{aligned}$$

即 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ 的左极限存在，且等于 $-D_{(-e_j)}f(x_0)$。

题设知 $D_{e_j}f(x_0)$ 和 $D_{(-e_j)}f(x_0)$ 互为相反数,所以,$D_{e_j}f(x_0) = -D_{(-e_j)}f(x_0)$。
于是，$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ 左右极限相等，所以 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ 存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = D_{e_j}f(x_0)$$

17.3.3

- (1) 在 $(0,0)$ 处不可微。

  反证法，假设 f 在 $(0,0)$ 处可微，导数为 $L=f'(0,0)$。

  我们有（P362 有说明），

  $$f'(0,0)(x,y) = xf'(0,0)e_1 + yf'(0,0)e_2$$

  其中

  $$\begin{aligned}f'(0,0)e_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)\\ f'(0,0)e_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)\end{aligned}$$

我们先计算这两个偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) &= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (0,0)+te_1\in\mathbb{R}^2} \frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (0,0)+te_1\in\mathbb{R}^2} \frac{f(t,0)-0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (0,0)+te_1\in\mathbb{R}^2} \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) &= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (0,0)+te_2\in\mathbb{R}^2} \frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (0,0)+te_2\in\mathbb{R}^2} \frac{f(0,t)-0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (0,0)+te_2\in\mathbb{R}^2} \frac{\frac{0^3}{0^2+t^2}-0}{t} \\ &= 0\end{aligned}$$

综上可得

$$\begin{aligned}f'(0,0)(x,y) &= xf'(0,0)e_1 + yf'(0,0)e_2 \\ &= x\end{aligned}$$

于是由可微性（定义 17.2.2），我们有

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0);(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}} \frac{\|f(x,y)-f(0,0)-f'(0,0)(x,y)\|}{\|(x,y)-(0,0)\|} &= 0 \\ \lim_{(x,y)\to(0,0);(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}} \frac{\|f(x,y)-0-x\|}{\|(x,y)\|} &= 0 \\ \lim_{(x,y)\to(0,0);(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}} \frac{\|\frac{x^3}{x^2+y^2}-x\|}{\|(x,y)\|} &= 0\end{aligned}$$

(x,y) 以任何方式趋近于 $(0,0)$ 时，都等于 0。不妨假设 $y=x$ 且

$x, y \to 0$，于是

$$\begin{aligned}
\frac{\|\frac{x^3}{x^2+x^2} - x\|}{\sqrt{x^2+x^2}} &= \frac{\|\frac{x}{2} - x\|}{\sqrt{2}|x|} \\
&= \frac{|-\frac{x}{2}|}{\sqrt{2}|x|} \\
&= \frac{\frac{1}{2}|x|}{\sqrt{2}|x|} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

存在矛盾，假设不成立。

- (2) 不与定理 17.3.8 矛盾。

  任意 $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ 求偏导数（这里选择对 y 求偏导数，避免处理 3 次方）

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (x_0,y_0)+te_2\in\mathbb{R}^2} \frac{f((x_0,y_0)+te_2) - f(x_0,y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (x_0,y_0)+te_2\in\mathbb{R}^2} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (x_0,y_0)+te_2\in\mathbb{R}^2} \frac{\frac{x_0^3}{x_0^2+(y_0+t)^2} - \frac{x_0^3}{x_0^2+y_0^2}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (x_0,y_0)+te_2\in\mathbb{R}^2} \frac{\frac{x_0^3(x_0^2+y_0^2) - x_0^3[x_0^2+(y_0+t)^2]}{[x_0^2+(y_0+t)^2](x_0^2+y_0^2)}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (x_0,y_0)+te_2\in\mathbb{R}^2} x_0^3 \frac{-t^2 - 2ty_0}{t[x_0^2+(y_0+t)^2](x_0^2+y_0^2)} \\
&= \lim_{t\to 0; t\neq 0, (x_0,y_0)+te_2\in\mathbb{R}^2} x_0^3 \frac{-t - 2y_0}{[x_0^2+(y_0+t)^2](x_0^2+y_0^2)} \\
&= \frac{-2x_0^3 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}
\end{aligned}$$

  (x, y) 以任何方式趋近于 $(0,0)$，偏导数公式相同。不妨设 $y_0 = x_0$ 且 $(x_0, y_0) \to (0,0)$，那么

$$\begin{aligned}
\frac{-2x_0^3 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} &= \frac{-2x_0^4}{4x_0^4} \\
&= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

  可见 $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ 在 $(0,0)$ 处不连续。不满足定理 17.3.8 的前置条件。

17.3.4

因为对于所有的 $x \in \mathbb{R}^n, f'(x) = 0$（表示是零线性变换，任意向量 v，都有 $f'(x)v = 0$），那么，任意偏导数都有

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f'(x)e_j = 0$$

于是 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的全体偏导数都是零向量，所以，在任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 处偏导数都是连续的（总是零向量）。把 f 写成 $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= (\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x)) \\ &= (0, \cdots, 0)\end{aligned}$$

从而，每个分量的偏导数也是连续的。

设 $y_0 \neq x_0, y_0 - x_0 = v = (v_1, \cdots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$。对变量 x_1 使用平均值定理可得，存在一个介于 0 和 v_1 之间的 t_i，使得

$$f_i(x_0 + v_1 e_1) - f_i(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0 + t_i e_1)v_1 = 0,\ 1 \leq i \leq m$$

所以，$f(x_0 + v_1 e_1) - f(x_0) = 0$。

同理可得

$$f(x_0 + v_1 e_1 + v_2 e_2) - f(x_0 + v_1 e_1) = 0$$

那么以此类推有

$$f(x_0 + v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n) - f(x_0 + v_1 e_1 + \cdots + v_{n-1} e_{n-1}) = 0$$

把这 n 个等式相加，得到

$$\begin{aligned}f(x_0 + v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n) - f(x_0) &= 0 \\ f(y_0) - f(x_0) &= 0\end{aligned}$$

所以 $f(y_0) = f(x_0)$，由 y_0, x_0 的任意性可得，$f(x)$ 是常值函数。