

6.6 习题

2024 年 8 月 3 日

6.6.1

(1) 自反性

定义 $f(n) = n$ 的函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是从 \mathbb{N} 到 \mathbb{N} 的严格递增函数, 使得

$$a_n = a_{f(n)} = a_n \text{ 对所有的 } n \in \mathbb{N} \text{ 均成立}$$

由定义 6.6.1 可知, 此时 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 是 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 的一个子序列。

(2) 传递性

因为 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 的子序列, 那么存在一个函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是从 \mathbb{N} 到 \mathbb{N} 的严格递增函数, 使得

$$b_n = a_{f(n)} \text{ 对所有的 } n \in \mathbb{N} \text{ 均成立}$$

因为 $(c_n)_{n=0}^\infty$ 是 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 的子序列, 那么存在一个函数 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是从 \mathbb{N} 到 \mathbb{N} 的严格递增函数, 使得

$$c_n = b_{g(n)} \text{ 对所有的 } n \in \mathbb{N} \text{ 均成立}$$

因为 f 的值域与 g 的定义域是同一个集合, 我们可以把 g, f 复合, 得到函数 $g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 该函数是从 \mathbb{N} 到 \mathbb{N} 的严格递增函数, 使得

$$c_n = a_{(g \circ f)(n)} \text{ 对所有的 } n \in \mathbb{N} \text{ 均成立}$$

由定义 6.6.1 可知, 此时 $(c_n)_{n=0}^\infty$ 是 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 的子序列

6.6.2

略

6.6.3

证明存在性。这里采用的方法，是先构造出目标对象。这里需要考察的是，构造的目标是否满足要求。具体来说，对于本习题，需要确定构造的序列是存在的，并确定构造的序列的倒数是收敛于 0 的（习题 6.6.5 与本题类似）。

(1) 证明序列的每一项都是存在的

归纳法证明。

$j = 0$ ，因为序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是无界的，所以肯定存在 $|a_n| \geq 0$ ，取第一个满足要求的 n 即可。

说明. $j = 0$ 时，如果 $a_{n_0} = 0$ ，会导致错误，所以 b_0 应该是要限制为非零的。

归纳假设， $j - 1$ 时，项是存在的。

j 时，由于序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是无界的，所以肯定存在 $|a_n| \geq j$ ，这个 n 是一个集合，该集合是自然数的子集，使用公理 3.5（分类公理），可以得到所有元素都大于 n_{j-1} 的集合 A ，取该集合的下确界作为 n_j （这个下确界肯定是存在的，因为集合是有下界的。定理 5.5.9 的推论）。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/b_n$ 存在且等于 0。

对任意 $\epsilon > 0$ ，都存在 $\epsilon \geq 1/j$ （因为 $1/j$ 递增且极限为 0），由 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 的构造方式，可知，取 n_j 时， $|b_j| = |a_{n_j}| \geq j$ ，且由序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是递增的，可知，当 $n \geq n_j$ 时， $|b_n| \leq 1/j$ 均成立，于是 $|1/b_n| \leq 1/j \leq \epsilon$ 对 $n \geq n_j$ 均成立。

由 ϵ 的任意性，可知， $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/b_n$ 存在且等于 0。

6.6.4

(a) \Rightarrow (b)

序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L ，那么，对任意 $\epsilon > 0$ ，存在 $N \geq 0$ ，使得 $|a_n - L| \leq \epsilon$ 对 $n \geq N$ 均成立。

由子序列的定义（定义 6.6.1）可知，序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的任意子序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ ，都会存在一个严格递增的函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 使得

$$b_n = a_{f(n)} \text{ 对所有的 } n \in \mathbb{N} \text{ 均成立}$$

由 f 的定义可知 $f(n) \geq n$, 所以 $n \geq N$ 时, $f(n) \geq N$, 所以 $|b_n - L| = |a_{f(n)} - L| \leq \epsilon$ 对 $n \geq N$ 均成立。所以, 序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L 。

由于 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是任意的子序列, 所以命题得证。

(b) \Rightarrow (a)

由自反性可知 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 也是 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的子序列, 题设已经说明 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L 。

6.6.5

(a) \Rightarrow (b)

(1) 证明序列的每一项都是存在的

$j = 0$ 时, 定义 $a_{n_0} = a_0$ 。

当 $j \neq 0, j \geq 0$ 时, 现在要证明 a_{n_j} 是存在的。由 L 是极限点, 所以取 $\epsilon = 1/j > 0$, 对每一个 $N = n_{j-1}$, 存在 $n \geq N$ 使得 $|a_n - L| \leq \epsilon$, 满足该条件的 n 是一个集合, 我们取其中最小值, 此时的最小值就是 n_j 且可知 a_{n_j} 是存在的。(这段表述的目的, 就是说明题中提示的 n_j 构造方式是正确的)

(2) 序列的收敛性

对任意实数 $\epsilon > 0$, 存在 $1/j \leq \epsilon$ (存在的原因是 $1/j$ 收敛于 0)。通过序列 $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ 的构造方式, 可知, 只要证明存在 $N, n = N$ 有 $|a_n - L| \leq 1/j$, 那么, 就有 $n > N$ 有 $|a_n - L| < 1/j$, 即: $n \geq N$ 有 $|a_n - L| \leq 1/j$ 。接下来只要证明这个 N 是存在的即可。由构造方式可知 $|a_{n_j} - L| \leq 1/j \leq \epsilon$, 所以, 可取 $N = n_j$, 即 N 是存在的。

(b) \Rightarrow (a)

设收敛于 L 的子序列是 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, 因为是子序列, 存在一个严格递增的函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 使得

$$b_m = a_{f(n)} \text{ 对所有的 } n \in \mathbb{N} \text{ 均成立}$$

(注意: 这里为了讨论的方便, 把子序列的下标改为 m) 因为收敛于 L , 那么, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $M \geq 0$, $|b_m - L| \leq \epsilon$ 对 $m \geq M$ 均成立, 因为 f 是严格递增的函数, 且没有上界, 对每一个 N , 都存在 n 使得 $f(n) \geq \max(M, N)$, 因为 $f(n) \geq M$, 所以,

$$|b_m - L| \leq \epsilon$$

$$|a_{f(n)} - L| \leq \epsilon$$

由 ϵ 的任意性, 可知, L 是 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的极限点。