

## 8.3 习题

张志聪

2024 年 11 月 23 日

### 8.3.1

对  $n$  进行归纳。

归纳基始,  $n = 0$ , 此时,  $X$  是空集,  $\#(X) = 0$ ,  $2^0 = 1$ , 这与空集的子集只有它本身是一致的。

归纳假设,  $n = k$  时,  $\#(2^X) = 2^k$ 。

当  $n = k + 1$  时, 在  $X$  中任取一个元素  $x_0$ , 此时, 设  $X' = X \setminus \{x_0\}$ 。对  $2^X$  的任意子集  $A$ :

- 如果  $x_0 \notin A$ , 此时  $A \subseteq 2^{X'}$ , 由归纳假设可知, 这样的子集有  $2^k$  个。
- 如果  $x_0 \in A$ , 定义  $A' := A \setminus \{x_0\}$ , 显然  $A' \subseteq 2^{X'}$ , 因为  $A'$  有  $2^k$  个, 所以  $A' \cup \{x_0\}$  有  $2^k$  个。

综上,  $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ 。

### 8.3.2

**说明 1.** 一开始, 觉得题目不对! 理由如下: 由题设,  $A \subseteq C$  且单射  $f: C \rightarrow A$  可知,  $f(C)$  与  $C$  是双射, 而  $f(C) \subseteq A$ , 所以只有  $C = A$  才能满足题设, 进而  $A = B = C$ 。那么,  $D_0 = B \setminus A = \emptyset$ , 就没有证明的必要了。

问题出在对习题 3.6.7 的理解上了, 这里只能证明  $\#(A) = \#(B) = \#(C)$ , 而无法证明  $A = B = C$ , 举一个反例, 自然数  $N$  与偶数集合的基数相等, 也可以构建一个单射, 但不妨碍偶数集合是自然数子集这

一事实。

(1) 命题与  $D_n \cap D_{n+1} = \emptyset$  等价。对  $n$  进行归纳。

归纳基始,  $n = 0$  时,  $D_0 := B \setminus A, D_1 := f(D_0)$ 。反证法, 假设  $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ , 由题设可知  $D_1 \subseteq A$ , 因为  $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ , 所以存在元素  $x \in D_0, D_1, A$ , 这与  $D_0 := B \setminus A$  矛盾。

归纳假设,  $n = k$  时, 命题  $D_k \cap D_{k+1} = \emptyset$  成立。

当  $n = k + 1$  时,  $D_{k+2} := f(D_{k+1})$ 。反证法, 假设  $D_{k+2} \cap D_{k+1} \neq \emptyset$ , 即存在  $d_0 \in D_{k+2}, D_{k+1}$ , 又因为  $D_{k+1} = f(D_k)$ , 于是, 存在  $x_0, x_1$  使得

$$\begin{cases} d_0 = f(x_0) \text{ 其中 } x_0 \in D_k, f(x_0) \in D_{k+1} \\ d_0 = f(x_1) \text{ 其中 } x_1 \in D_{k+1}, f(x_1) \in D_{k+2} \end{cases}$$

由归纳假设可知  $x_0 \neq x_1$ , 这与  $f$  是单射的矛盾。

(2)

- 单射; 函数  $g$  的定义域被定义成两个部分, 各自显然是单射的, 现在要证明两个部分的值域没有交集。反证法, 假设存在  $x_0 \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n, x_1 \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n, x_0 \neq x_1$ , 使得  $g(x_0) = g(x_1)$ , 即:  $f^{-1}(x_0) = x_1, f(x_1) = x_0$ 。因为  $x_0 \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ , 所以存在  $x' \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$  使得  $f(x') = x_0$ 。因为  $x_1 \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ , 所以  $x' \neq x_1$ , 于是  $f(x') = f(x_1)$ , 这与  $f$  是单射矛盾。
- 满射; 对任意  $y \in B$ , 如果  $y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ , 由  $f$  的定义可知,  $f(y) \in A, f(y) \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ , 满足  $g$  的定义, 于是  $f^{-1}(f(y)) = y$ ; 如果  $y \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ , 有  $g(y) = y$ ;

### 8.3.3

说明 2. 这个习题, 容易觉得无需证明,

$$\begin{cases} \#(A) \leq \#(B) \\ \#(A) \geq \#(B) \end{cases}$$

得到  $\#(A) = \#(B)$  是显然。但是，这里是把基数看做自然数了（满足三歧性，但本书中  $+\infty, +\infty + 1$  的排序是没有定义的，即无穷值间的比较是未定义的，书中只定义了  $+\infty = +\infty$ ，命题 6.2.5），这个假设不成立的。

既然存在不确定的地方，我们只能老老实实利用基数相等的定义证明了。

目标是构造一个双射函数  $g: A \rightarrow B$ 。利用习题 8.3.2，只需找到满足条件的  $A, B, C$  与  $f$  即可。不妨设  $f_1: A \rightarrow B$  的单射， $f_2: B \rightarrow A$  的单射。显然， $A, f_1(A)$  的基数相同， $f_1(A) \subseteq B$ ，于是，如下定义，即可满足条件：

$$\begin{cases} A := f_1(A) \\ B := B \\ C := B \\ f := f_2 \end{cases}$$

### 8.3.4

(1) 由  $2^X$  的定义可知，任意  $x \in X$  都有  $x \in 2^X$ ，于是定义  $f: X \rightarrow 2^X$  如下，

$$f(x) := x$$

显然， $f$  是单射，根据习题 3.6.7 可知， $X$  的基数小于或等于  $2^X$  的基数，由定理 8.3.1 可知，他们的基数不相等，由此可知， $X$  基数严格小于  $2^X$  的基数。

(2) 由题设可知，存在单射  $f_1: A \rightarrow B$ ，且  $\#(A) \neq \#(B)$ ，单射  $f_2: B \rightarrow C$ ，且  $\#(B) \neq \#(C)$ 。于是定义函数  $f: f_2 \circ f_1: A \rightarrow C$ ，显然， $f$  是单射，在逻辑学中相等具有传递性（附录 A.7），于是， $A$  基数严格小于  $C$  的基数。

### 8.3.5

**说明 3.** 这道题没太看懂。我是这样理解的：“ $X$  是可数的无限集，则幂集  $2^X$  不是可数的无限集”，由定理 8.3.1 可知，这个命题是显然的。