9.4 习题

张志聪

2024 年 12 月 4 日

9.4.1

按照定义 9.4.1 可知（a）等价于 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$（定义 9.3.6），即：$(a) \Leftrightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

- (b) $\Rightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

  （b）满足 9.3.9（b），所以 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$。

- (c) $\Rightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 成立，那么 $|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$ 成立，于是满足定义 9.3.6，所以 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$。

- (d) $\Rightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

  因为 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$，所以 $|x - x_0| \le \delta$ 命题成立，于是 $|x - x_0| < \delta$ 时命题也成立。

  于是满足定义 9.3.6，所以 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$。

9.4.2

例 9.4.2、例 9.4.3 已经说明了证明过程，唯一的区别是定义域的不同的。

9.4.3

任意 $x_0 \in R$，设序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是任意一个完全由 R 中元素构成并且收敛于 x_0 的序列。

对任意 $\epsilon > 0$，我们希望

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le \epsilon \\ |a^x - a^{x_0}| &\le \epsilon \\ a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1| &\le \epsilon \\ |a^{x-x_0} - 1| &\le \epsilon/a^{x_0} \end{aligned}$$

- 当 $x - x_0 > 0$，由引理 6.5.3 可知，存在正整数 N'，使得

  $$|a^{x-x_0} - 1| \le \epsilon/a^{x_0}$$

  当 $x - x_0 \le 1/N'$ 时成立。

  所以当 $\delta' = 1/N'$ 时，$|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta'$ 的 $x \in R$ 均成立。

- 当 $x - x_0 < 0$，由引理 6.5.3 和极限定律可知，$\lim_{n\to\infty} x^{-(1/n)} = 1$，类似地，存在正整数 N''，使得

  $$|a^{x-x_0} - 1| \le \epsilon/a^{x_0}$$

  当 $x - x_0 \ge -(1/N'')$ 即 $x_0 - x \le 1/N''$ 时成立。

  所以当 $\delta'' = 1/N''$ 时，$|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta''$ 的 $x \in R$ 均成立。

取 $\delta = min(\delta', \delta'')$ 时，$|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in R$ 均成立。所以 f 在 x_0 处沿着 R 收敛于 $f(x_0)$。于是 f 在每一个点 $x_0 \in R$ 处都连续。

9.4.4

任意 $x_0 \in (0, +\infty)$，对任意 $\epsilon > 0$，

$$\begin{aligned} &|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon \\ &|x^p - x_0^p| \le \epsilon \\ &|(\frac{x}{x_0})^p - 1| \le \epsilon/x_0^p \end{aligned}$$

说明 1. 到这里，也就知道书中那样提示的原因了，接下来，我们先按照提示证明：

$$\lim_{x\to 1} x^p = 1$$

因为 $\lim_{x\to 1} x = 1$,所以利用极限定理(命题 *9.3.14*)可知证明 $\lim_{x\to 1} x^n = 1$ 对所有的非负整数 n 均成立（对 n 进行归纳即可）;

于是 $\lim_{x\to 1} x^n = 1$ 对所有的负整数 n 均成立（因为 $x^n = 1/x^{-n}$ 然后利用极限定理可证）;

由命题 *5.4.12* 和命题 *4.4.1* 可知，存在整数 n 使得 $n \le p < n+1$，这里以 $n \ge 0, x > 1$ 为例（其他情况类似，不做赘述），因为 $x^n \le x^p < x^{n+1}$，于是由习题 *9.3.5*（夹逼定理的连续形式）可得 $\lim_{x\to 1} x^p = 1$。

所以，$\lim_{\frac{x}{x_0}\to 1} (\frac{x}{x_0})^p = 1$ （不妨把 $x' := \frac{x}{x_0}$ 整体看做自变量），所以存在 $\delta > 0$ 使得

$$|(\frac{x}{x_0})^p - 1| \le \epsilon / x_0^p$$

即

$$|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$$

对所有满足 $|\frac{x}{x_0} - 1| < \delta$ 即 $(|x - x_0| \le \delta x_0)$ 的 $x \in (0, +\infty)$ 均成立。

所以 f 在 x_0 处沿着 $(0, +\infty)$ 收敛于 $f(x_0)$，于是 f 在每一个点 $x_0 \in (0, +\infty)$ 处都连续。

9.4.5

对任意 $\epsilon > 0$，只要能找到 $\delta > 0$ 使得

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| \le \epsilon$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X$ 均成立，即可证明复合函数 $g \circ f : X \to Y$ 在 x_0 处是连续的。

为了表述方便，定义

$$
\begin{aligned}
y_x &:= f(x) \\
y_0 &:= f(x_0) \\
r_x &:= (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y_x) \\
r_0 &:= (g \circ f)(x_0) = f(f(x_0)) = g(y_0)
\end{aligned}
$$

因为 g 在 $f(x_0)$ 处是连续的，所以，存在 $\delta_g > 0$ 使得

$$|g(y) - g(y_0)| \le \epsilon$$

对所有满足 $|y - y_0| \le \delta_g$ 的 $y \in Y$ 均成立。

又因为 f 在 x_0 处是连续的，所以，存在 $\delta_f > 0$ 使得

$$|y_x - y_0| \le \delta_g$$

对所有满足 $|x - x_0| \le \delta_f$ 的 $x \in X$ 均成立。

综上，取 $\delta = \delta_f$ 时，对满足 $|x - x_0| \le \delta$ 且 $x \in X$ 的 x 来说，

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\le \delta_g \\
&\Rightarrow \\
|y_x - y_0| &\le \delta_g
\end{aligned}
$$

进而 $|g(y_x) - g(y_0)| \le \epsilon$。于是可得，复合函数 $g \circ f : X \to Y$ 在 x_0 处是连续的。

9.4.6

任意 $x_0 \in Y$。

对任意一个由 Y 中元素构成的且满足 $\lim\limits_{x \to x_0} a_n = x_0$ 的序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$，因为 $Y \subseteq X$，所以序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 中的项也是 X 中元素，因为 $f : X \to Y$ 是连续函数，由命题 9.4.7（b）可知，$\lim\limits_{x \to x_0} f(a_n) = f(x_0)$，再次利用命题 9.4.7（b）可知 $f|_Y$ 在 x_0 处是连续的。

于是 f 在 Y 上是连续的。

说明 2. 这个习题给了一个启发，就算 Y 是一个孤立的点，也是连续的，也是严格符合定义的。

9.4.7