6.5 习题

2024 年 7 月 28 日

6.5.1

有理数 $q > 0$，可以表示成正整数 a/b 的形式，其中 $a, b > 0$。
由定义 5.6.7 可知 $n^q = (n^{1/b})^a$，所以 $1/n^q = (1/n^{1/b})^a$。
由推论 6.5.1 可知 $\lim_{n\to\infty} 1/n^{1/b} = 0$。由极限定律（定理 6.1.19）可知

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} 1/n^q \\
&= \lim_{n\to\infty} (1/n^{1/b})^a \\
&= (\lim_{n\to\infty} 1/n^{1/b})^a \\
&= 0^a \\
&= 0
\end{aligned}$$

6.5.2

（1）$|x| < 1$ 时。
如果 $0 < x < 1$，则由命题 6.3.10 可知极限 $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$。
如果 $x = 0$，则对任意 n 都有 $x^n = 0^n = 0$，于是极限 $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$。
如果 $-1 < x < 0$，则 $-1(-x)^n \le x^n \le (-x)^n$，则由极限定律可知

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} -1(-x)^n = 0 \\ \lim_{n\to\infty} (-x)^n = 0 \end{cases}$$

由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty} (x)^n = 0$。
（2）$x = 1$ 时。

对任意 n 都有 $x^n = 1^n = 1$，于是极限 $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$。

（3.1）$x = -1$ 时。

当 n 是偶数时，$x^n = (-1)^n = 1$，于是存在极限点 1。

当 n 是奇数时，$x^n = (-1)^n = -1$，于是存在极限点 -1。

极限点不是唯一的，由命题 6.4.5 可知，此时 $\lim_{n\to\infty} x^n$ 不存在。

（3.2）$|x| > 1$ 时。

（3.2.1）当 $x > 1$ 时。

由习题 6.3.4 可知 $x > 1$ 时，序列 x^n 是发散的。

（3.3.2）当 $x < -1$ 时。

反证法，假设极限 $\lim_{n\to\infty} x^n$ 存在。

不妨设极限 $\lim_{n\to\infty} x^n$ 等于 c，那么，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $n \geq N$ 都有 $|x^n - c| \leq \epsilon$ 均成立。又因为

$$
\begin{aligned}
&|(-x)^n - |c|| \\
&= ||x^n| - |c|| \\
&\leq |x^n - c| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}
$$

由此可知，$\lim_{n\to\infty} (-x)^n$ 收敛于 $|c|$，这与其是发散的这一事实矛盾。

6.5.3