

11.4 习题

张志聪

2024 年 12 月 23 日

11.4.1

仿照定理 11.4.3 的证明, 做以下说明:

对任意 $\epsilon > 0$, 由 $\int_I f = \int_I \underline{f}$ 可知, 存在一个分段常数函数 $\underline{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 I 上从下方控制 f , 并且有

$$\int_I \underline{f} \geq \int_I f - \epsilon$$

类似地, 我们能够找到一个分段常数函数 $\underline{g} : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 I 上从下方控制 g , 并且有

$$\int_I \underline{g} \geq \int_I g - \epsilon$$

而且我们还能找到分段常数函数 \bar{f} 和 \bar{g} 分别在 I 上从上方控制 f 和 g , 并且有

$$\int_I \bar{f} \leq \int_I f + \epsilon$$

和

$$\int_I \bar{g} \leq \int_I g + \epsilon$$

• (a)

由以上说明, 可得 $\underline{f} + \underline{g}$ 在 I 上从下方控制 $f + g$, 而 $\bar{f} + \bar{g}$ 在 I 上从上方控制 $f + g$, 所以有

$$\int_I \underline{f} + \underline{g} \leq \int_I f + g \leq \int_I \bar{f} + \bar{g}$$

从而

$$0 \leq \overline{\int_I f} + g - \int_{\underline{I}} f - g \leq \int_I \bar{f} + \bar{g} - \int_I \underline{f} - \underline{g}$$

- (b)
- (c)