8.1 习题

2024 年 10 月 4 日

8.1.1

★ $\Leftarrow$

由命题 3.6.14（c）知 X 不能为有限集，所以 X 是无限集（因为集合要么是无限的，要么是有限的）。

★ $\Rightarrow$

方法 1

在无限集 X 中，一定能取出一列互不相同的元素 $a_1, a_2, \ldots$。事实上, 在 X 中任取一个元素, 记为 a_1，因为 X 是无限集, 集合 $X - \{a_1\}$ 显然不空, 这时再从集合 $X - \{a_1\}$ 取一个元素 a_2, 同样,$X - \{a_1, a_2\}$ 不会是空集，可以不停地做下去, 将从 X 中取出一列互不相同的元素 $a_1, a_2, \ldots$, 记余集为 $\hat{X} := X - \{a_1, a_2, \ldots\}$。在 X 中取出一个真子集

$$Y =: \hat{X} \cup \{a_2, a_3, \ldots\}$$

定义函数 $f : X \to Y$ 如下：

$$f(a_i) = a_{i+1}, a_i \in \{a_1, a_2, \ldots\}$$
$$f(x) = x, x \in \hat{X}$$

显然 f 是双射，所以 X, Y 有相同的基数。

注意 方法 1 是非严格的证明，文中的“不停地”不够准确，引理 8.5.14 中有说明

方法 2

todo 还未找到

8.1.2

（1）如果 X 是有限集合，则由自然数的三歧性，经过有限次比较，就可以得到最小元素存在。

（2）X 是无限集

★ **最大下界方式**

因为 X 是自然数集的非空子集，则 $x \in X, x \leq 0$，即：集合 X 有下界，由定理 5.5.9 可知集合 X 有最大下界，不妨设为 m。

现在需要证明 $m \in X$。

反证法，假设 $m \notin X$。

由假设可知任意 $x \in X, x > m$。因为 $m \geq \lfloor m \rfloor$（注 4.4.2 中 $\lfloor m \rfloor$ 表示 m 的整数部分），于是 $x > \lfloor m \rfloor$，由命题 2.2.12（e）可知 $x \geq \lfloor m \rfloor + 1$，那么，$\lfloor m \rfloor + 1$ 也是 X 的下界，而 $\lfloor m \rfloor + 1 > m$，这与 m 是 X 的最大下界矛盾。

★ **无穷递降原理方式**

假设 X 没有最小元素，即：任意 $x \in X$，存在 $x' \in X, x' < x$。

现在构造出序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$。因为 X 是非空的，所以存在 $x_0 \in X$，定义 $a(0) := x_0$，递归定义 $a(n+1) := x_{n+1} < a(n)$，由之前的说明可知 x_{n+1} 是存在的。

显然这个序列与无穷递降原理矛盾。