

11.2 习题

张志聪

2024 年 12 月 22 日

11.2.1

划分 P' 比 P 更细, 由命题 11.1.14 可知, 任意 $J \subseteq P'$, 都存在 $K \subseteq P$ 使得 $J \subseteq K$ 。此时 $J \subseteq K \subseteq P$, 由于 f 是关于 P 上的分段常数函数, 那么 f 在 K 上是常值的, 于是 f 在 J 上也是常值的。

由 J 的任意性可知, f 也是关于 P' 上的分段常数函数。

11.2.2

由于 f, g 都是 I 上的分段常数函数, 于是存在 I 上的划分 P_f, P_g 分别使得 f 是关于 P_f 上的分段常数函数, g 是关于 P_g 上的分段常数函数。

由引理 11.1.18 可知, $P := P_f \# P_g$ 是 I 的划分, 且比 P_f 和 P_g 更细。由引理 11.2.7 可知, f, g 都是关于 P 的分段常数函数, 那么, 由定义 11.2.3, 对任意 $J \subseteq P$, $f|_J$ 是常数函数, $g|_J$ 是常数函数, 于是 $(f - g)|_J$ 也是常量函数, 由 J 的任意性可知, $f - g$ 是关于 P 的分段常数函数, 由定义 11.2.5 可知, $f - g$ 是 I 上的分段函数。

其他情况类似。

11.2.3

令 $Q := P \# P'$, 由引理 11.2.7 可知, f 是关于 Q 上的分段常数函数。

接下来证明:

$$p.c. \int_{[P]} f = p.c. \int_{[Q]} f \quad (1)$$

$$p.c. \int_{[P']} f = p.c. \int_{[Q]} f \quad (2)$$

对任意 $K \in P$, 定义

$$Q_K := \{X \in Q : X \subseteq K\}$$

证明 $K = Q_K$ 。反证法, 假设 $K \neq Q_K$ 。由 Q_K 的构造方式, 易知 $Q_K \subseteq K$, 如果假设成立, 那么, 存在 $x \in K, x \notin Q_K$ 。

Q 中一定存在 J 使得 $x \in J$, 由 Q 比 P 更细, 可知存在 $W \in P$ 使得 $J \subseteq W$, 由划分的定义可知 $W = K$, 因为如果 $W \neq K$, 则与定义 11.1.10 (划分) 中每个元素恰好属于 P 中的一个有界区间矛盾, 存在了两个区间都包含 x 。于是可知 $J \in Q_K$, 与假设矛盾。

由 $K = Q_K$ 可知, $p.c. \int_{[K]} f = p.c. \int_{[Q_K]} f$, 由 K 的任意性, 可知 (1) 式成立。

类似地, 可证 (2) 式成立。

11.2.4

设 P_f, P_g 是满足条件的划分, 即 f, g 分别是关于 P_f, P_g 的分段常数函数。令 $P := P_f \# P_g$, 由引理 11.1.18 和命题 11.2.13 可知,

$$\begin{aligned} p.c. \int_I f &= p.c. \int_{[P]} f \\ p.c. \int_I g &= p.c. \int_{[P]} g \end{aligned}$$

• (a)

由定义 11.2.9 可知,

$$p.c. \int_I (f + g) = \sum_{J \in P} (F_J + G_J) |J|$$

其中 F_J, G_J 表示 f, g 分别在 J 上的常数值。由命题 7.1.11 可知,

$$\begin{aligned}
p.c. \int_I (f + g) &= \sum_{J \in P} (F_J + G_J) |J| \\
&= \sum_{J \in P} F_J |J| + \sum_{J \in P} G_J |J| \\
&= p.c. \int_{[P]} f + p.c. \int_{[P]} g \\
&= p.c. \int_I f + p.c. \int_I g
\end{aligned}$$

- (b)

证明与 (a) 类似, 略

- (c)

利用 (a),(b) 可证, 略

- (d)

由定义 11.2.9 可知,

$$p.c. \int_I f = \sum_{J \in P} F_J |J|$$

其中 F_J 表示 f 在 J 上的常数值。

由题设可知, $F_J \geq 0$, 又由定义 11.1.8 可知 $|J| \geq 0$, 于是, 任意 $J \in P$ 都有 $F_J |J| \geq 0$, 所以,

$$\sum_{J \in P} F_J |J| \geq 0$$

即:

$$p.c. \int_I f \geq 0$$

- (e)

证明框架: 对 P 的基数 n 进行归纳。略

- (f)

由定义 11.2.9 可知,

$$p.c. \int_I f = \sum_{J \in P} F_J |J|$$

其中 F_J 表示 f 在 J 上的常数值, 又 f 是常量函数 $f(x) = c$, 所以总是 $F_J = c$, 于是,

$$\begin{aligned} p.c. \int_I f &= \sum_{J \in P} F_J |J| \\ &= \sum_{J \in P} c |J| \\ &= c \sum_{J \in P} |J| \\ &= c |I| \end{aligned}$$

最有一个等式利用了定理 11.1.13

• (g)

$$J_L := \{x \in J : x \leq \min(P); x \notin P\}$$

$$J_R := \{x \in J : x \geq \max(P); x \notin P\}$$

$\{J_L, P, J_R\}$ 划分是符合定义 11.1.10 (划分) 的。

于是,

$$\begin{aligned} p.c. \int_J F &= \sum_{K \in J} C_K |K| \\ &= \sum_{K \in J_L} C_K |K| + \sum_{K \in P} C_K |K| + \sum_{K \in J_R} C_K |K| \\ &= 0 + \sum_{K \in P} C_K |K| + 0 \\ &= \sum_{K \in P} C_K |K| \\ &= p.c. \int_I f \end{aligned}$$

其中, $K \in J, C_K$ 表示 F 在 K 上的常数值。而 $x \in J_L$ 时, $C_K = 0$, 即此时的 $C_J = 0$; $x \in J_R$ 时, $C_K = 0$, 即此时的 $C_J = 0$ 。

- (h)

-

$$J_P := \{J \cap X : X \in P\}$$

$$K_P := \{K \cap X : X \in P\}$$

可见 J_P, K_P 分别是 J, K 的划分。

对任意 $X \in J_P$, 按照 J_P 的构造方式存在 $Y \in P$ 使得 $X \subseteq Y$, 因为 f 是关于 P 的分段常数函数, 所以 f 在 Y 上都是常值的, 那么在 X 上也是常值的, 由定义 11.2.3 可得 $f|_J$ 是关于 J_P 的分段常数函数。于是 $f|_J$ 是 J 上的分段常数函数。

类似地, $f|_K$ 是 K_P 上的分段常数函数。

- 定义

$$F(x) := \begin{cases} f_J(x) & x \in J \\ 0 & x \in I \setminus J \end{cases}$$

$$G(x) := \begin{cases} f|_K(x) & x \in K \\ 0 & x \in I \setminus K \end{cases}$$

于是 $f = F + G$, 利用 (a)(g) 可得,

$$\begin{aligned} p.c. \int_I f &= p.c. \int_I (F + G) \\ &= p.c. \int_I F + p.c. \int_I G \\ &= p.c. \int_J f|_J + p.c. \int_K f|_K \end{aligned}$$