5.3 文中的为什么

2024 年 5 月 23 日

$-LIM_{n\to\infty}a_n = LIM_{n\to\infty}(-a_n)$

证明：

由实数负运算的定义可知，

$$\begin{aligned}-LIM_{n\to\infty}a_n &= (-1)\times LIM_{n\to\infty}a_n \\ &= LIM_{n\to\infty} -1 \times LIM_{n\to\infty}a_n \\ &= LIM_{n\to\infty}(-a_n) \qquad \text{【实数乘法定义】}\end{aligned}$$

序列 $0.1, 0.01, 0.001, ...$ **等价于零序列** $(0)_{n=1}^{\infty}$

证明：

其实序列 $0.1, 0.01, 0.001, ...$ 就是 $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$，对任意有理数 $\epsilon > 0$，当 $N \geq \frac{1}{\epsilon}$（有命题 4.4.1 保证 N 是存在的），使得对所有 $n \geq N$ 有，

$$|1/n - 0| = 1/n \leq \epsilon$$

所以序列 $0.1, 0.01, 0.001, ...$ 与零序列 $(0)_{n=1}^{\infty}$ 对任意 ϵ 是最终 $\epsilon-$ 接近的，所以两者是等价的。

如何推导？

证明：

这里要先证明，有理数 x, y 具有以下性质 $|x| - |y| \leq |x - y|$。

$x = x - y + y$，然后由命题 4.3.3（b）(绝对值的三角不等式) 可知，

$$\begin{aligned}|x| &\leq |x - y| + |y| \\ |x| - |y| &\leq |x - y| \qquad \text{【命题 4.2.9（d）】}\end{aligned}$$

于是性质 $|x|-|y|\leq|x-y|$ 得证。

利用刚才的性质，可得，

$$\begin{aligned}|b_{n_0}|-|b_n| &\leq |b_{n_0}-b_n| \\ |b_{n_0}|-|b_n| &\leq \frac{1}{2}\epsilon \\ \epsilon \leq |b_{n_0}| &\leq \frac{1}{2}\epsilon+|b_n| \\ \epsilon &\leq \frac{1}{2}\epsilon+|b_n| \\ \frac{1}{2}\epsilon &\leq |b_n|\end{aligned}$$

5.3.4

证明：

$(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 等价于 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$，即两个序列对 $\epsilon>0$ 是最终 $\epsilon-$ 接近的，有因为 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是有界的，由习题 5.2.2 可知 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 也是有界的。

5.3.5

证明：

要证明 $LIM_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，也就是要证明 $LIM_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ 与 $LIM_{n\to\infty}0$ 的等价性。

对任意 $\epsilon>0$，当 $n\leq\frac{1}{\epsilon}$ 有，

$$|\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}\leq\epsilon$$

所以两者是等价的，于是命题得证。