17.1 习题

张志聪

2025 年 5 月 7 日

17.1.1

略

17.1.2

证明 TS 是否满足线性变换的定义（定义 17.1.6）。

- （可加性）对任意的 $x, x' \in \mathbb{R}^p$，都有 $TS(x+x') = TS(x) + TS(x')$。

  因为 T, S 都是线性变换，我们有

$$\begin{aligned} TS(x+x') &= T(S(x+x')) \\ &= T(S(x) + S(x')) \\ &= T(S(x)) + T(S(x')) \\ &= TS(x) + TS(x') \end{aligned}$$

- （齐次性）对于任意的 $x \in \mathbb{R}^p$ 和任意的 $c \in \mathbb{R}$，都有 $TS(cx) = cTS(x)$。

  因为 T, S 都是线性变换，我们有

$$\begin{aligned} TS(cx) &= T(S(cx)) \\ &= T(cS(x)) \\ &= cT(S(x)) \end{aligned}$$

17.1.3

由定义 17.1.11 可知，AB 是一个 $m \times p$ 的矩阵。我们需证明对任意 $x = (x_r)_{1 \le r \le p} \in \mathbb{R}^p$，都有

$$L_A L_B(x) = L_{AB}(x)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

由矩阵的乘积的定义（定义 17.1.11），我们有

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$。

$$\begin{aligned} L_{AB}(x) &= L_{AB}(x_r)_{1 \le r \le p} \\ &= \left(\sum_{r=1}^{p} c_{ir} x_r \right)_{1 \le i \le m} \\ &= \left(\sum_{r=1}^{p} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jr}) x_r \right)_{1 \le i \le m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_A L_B(x) &= L_A(L_B(x)) \\
&= L_A\left(\left(\sum_{r=1}^{p} b_{jr} x_r\right)_{1\le j\le n}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{r=1}^{p} b_{jr} x_r\right)\right)_{1\le i\le m} \\
&= \left(\sum_{r=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jr}) x_r\right)_{1\le i\le m} \\
&= L_{AB}(x)
\end{aligned}$$

17.1.4

符号 $\|\|$ 和 $\|\|_2$ 都是表示范数的。但它们的含义具体取决于上下文。因为 Tx 属于欧几里得空间里的元素，所以这里是欧几里得范数。即：

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

(1) $\|Tx\| \le M\|x\|$。

由引理 17.1.13 可知，恰好存在一个 $m \times n$ 矩阵 A 使得 $T = L_A$。不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\|Tx\| &= \|L_A x\| \\
&= \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)_{1\le i\le m} \right\| \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2} \\
&\le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 x_j^2} \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2 x_j^2} \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2} \\
&\le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2} \\
&= \|x\| \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2} \\
&= M\|x\|
\end{aligned}
$$

其中 $M = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}^2}$。

(2) 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的每一个线性变换都是连续的。

由 P253 可知，本书在默认情况下，只要提到度量空间 $\mathbb{R}^n$，指的都是欧几里得度量 (也称 l^2 度量)。

P252 的定义可知，任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 有 $d_l^2(x, y) = \|x - y\|$。

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是度量空间 $(\mathbb{R}^n, d_{l^2})$ 中收敛于 x_0 的序列。T 是任意 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性变换。

对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 1$，使得只要 $n \geq N$，就有

$$d_{l^2}(x^{(n)}, x_0) = \|x^{(n)} - x_0\| \leq \epsilon$$

利用 (1)，我们有

$$\begin{aligned} d_{l^2}(T(x^{(n)}), T(x_0)) &= \|T(x^{(n)} - x_0)\| \\ &\leq M\|x^{(n)} - x_0\| \\ &\leq M\epsilon \end{aligned}$$

由于 M 是定值且 ϵ 是任意的，因此 $(T(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $T(x_0)$。又因为 x_0 是任意的，因此 T 是连续的。