17.5 注释

张志聪

2025 年 5 月 12 日

说明 1. *定理 17.5.4（克莱罗定理）证明过程中的，有*

$$f(\delta e_i + \delta e_j) - f(\delta e_j) = \int_0^\delta \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i e_i + \delta e_j) d_{x_i}$$

证明：

要利用定理 11.9.4（微积分第二基本定理），我们先要确定 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i e_i + \delta e_j)$ 的原函数。

先解释下右侧的表达式，方便理解。首先

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

是一个 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的函数。于是右侧就是沿着路径 $\gamma(t) = te_i + \delta e_j$ $(t \in [0, \delta])$ 的积分，即 $\int_0^\delta \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \gamma(t) dt$。

将 f 的第 j 个变量固定为 δ，其余变量（除了 x_i）固定为 0，为了找到原函数，我们定义一个辅助函数

$$g(x_i) := f(x_i e_i + \delta e_j),\ x_i \in [0, \delta]$$

g 是一元函数，而且其导数为：

$$\begin{aligned}
g'(x_i) &= \lim_{x\to x_i}\frac{g(x)-g(x_i)}{x-x_i} \\
&= \lim_{t\to 0;t\neq 0}\frac{g(x_i+t)-g(x_i)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0;t\neq 0}\frac{f((x_i+t)e_i+\delta e_j)-f(x_ie_i+\delta e_j)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0;t\neq 0}\frac{f(x_ie_i+\delta e_j+te_i)-f(x_ie_i+\delta e_j)}{t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_ie_i+\delta e_j)
\end{aligned}$$

g 就是原函数。

然后，利用利用定理 11.9.4（微积分第二基本定理）

$$\begin{aligned}
&\int_0^\delta \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_ie_i+\delta e_j) \\
&= \int_0^\delta g'(x_i) \\
&= g(\delta)-g(0) \\
&= f(\delta e_i+\delta e_j)-f(\delta e_j)
\end{aligned}$$

说明 2. 定理 *17.5.4*（克莱罗定理）证明过程中的，$f\in C^2, f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，我们有，由平均值定理可知，对于每一个 x_i，都存在一个 $0\le r\le\delta$，使得

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_ie_i+\delta e_j)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_ie_i)=\delta\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_ie_i+re_j)$$

证明：

令 $g := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_ie_i+te_j), t\in[0,\delta]$，令 $w=\frac{\partial f}{\partial x_i}; h := x_ie_i+te_j$，于是

$g = w \circ h$，使用链式法则，并令 $e_j = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$。

$$\begin{aligned} g'(t) &= w'(x_i e_i + t e_j) h'(t) \\ &= w'(x_i e_i + t e_j) e_j \\ &= \frac{\partial w}{\partial x_j}(x_i e_i + t e_j) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i e_i + t e_j) \end{aligned}$$

接下来，对平均值定理的使用就无需赘述了。