

12.1 习题

张志聪

2025 年 2 月 13 日

12.1.1

令 $a_n = d(x_n, x) = |x_n - x|$, 于是 $(a_n)_{n=m}^\infty$ 是一个实数序列。
 $(x_n)_{n=m}^\infty$ 收敛与 x

\Leftrightarrow

对任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, $|x_n - x| \leq \epsilon$

\Leftrightarrow

对任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, $a_n \leq \epsilon$

\Leftrightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

12.1.2

需要证明这里的度量 $d(x, y) := |x - y|$ 满足定义 12.1.2。

命题 4.3.3(a), 满足了定义 12.1.2 中的公理 (a),(b) (因为任意 $x, y \in \mathbb{R}$, $x - y$ 都是实数);

命题 4.3.3(f), 满足了定义 12.1.2 中的公理 (c);

命题 4.3.3(g), 满足定义 12.1.2 中的公理 (d)。

12.1.3

- (a)

把离散度量 d_{disc} 做一点修改: 当 $x = y$ 时, $d_{disc}(x, y) := 2$ 。

- (b)

把离散度量 d_{disc} 做一点修改：当 $x \neq y$ 时， $d_{disc}(x, y) := 0$ 。

- (c)

定义 $X := \mathbb{R} - \{0\}$ 并且度量 d 如下：

$$\begin{aligned} d(x, x) &:= 0 \\ d(x, y) &:= |x| \text{ if } x \neq y \end{aligned}$$

- (d)

定义 $X := \{a, b, c\}$ 并且度量 d 如下：

$$\begin{aligned} d(x, x) &:= 0 \text{ if } x \in X \\ d(a, b) &= d(b, a) = 1, d(b, c) = d(c, b) = 1 \\ d(a, c) &= d(c, a) = 3 \end{aligned}$$

12.1.4

任意 $x, y \in Y; x, y \in X$ ，所以 $d|_{Y \times Y}(x, y) = d(x, y)$ ，因为 d 满足所有的公理，那么 $d|_{Y \times Y}$ 也满足所有的公理。

12.1.5

(1) 恒等式

证明框架：对 n 进行归纳，证明略

(2) 推导出柯西-施瓦茨不等式

证明框架：对恒等式开方，且 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$ 可证。

(3) 证明三角不等式

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 + 2a_i b_i \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \\
 &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \\
 &= \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \right)^2
 \end{aligned}$$

12.1.6

- 公理 (a)

当 $x = y$ 时, 对任意第 i 个坐标分量都有 $(x_i - y_i)^2 = 0$, 所以

$$\begin{aligned}
 d_{l^2}(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n 0 \right)^{1/2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- 公理 (b)

当 $x \neq y$ 时, 存在第 i 个坐标分量使得 $(x_i - y_i)^2 > 0$, 所以 $d_{l^2}(x, y) > 0$ 。

- 公理 (c)

任意的 $x, y \in X$, 它们的任意第 i 个坐标分量都有 $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$, 所以 $d_{l^2}(x, y) = d_{l^2}(y, x)$ 。

- 公理 (d)

定义 $x_i - y_i = a_i, y_i - z_i = b_i$ 于是

$$\begin{aligned}
 d_{l^2}(x, z) &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right)^{1/2} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 \right)^{1/2} \\
 &= d_{l^2}(x, y) + d_{l^2}(y, z)
 \end{aligned}$$

综上所述可得

$$d_{l^2}(x, z) \leq d_{l^2}(x, y) + d_{l^2}(y, z)$$

12.1.7

- 公理 (a)

当 $x = y$ 时, 对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = 0$, 所以

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 = 0$$

- 公理 (b)

当 $x \neq y$ 时, 存在第 i 个坐标分量使得 $|x_i - y_i| > 0$, 其他坐标分量 j 都有 $|x_j - y_j| \geq 0$, 所以 $d_{l^1}(x, y) > 0$ 。

- 公理 (c)

对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$, 所以

$$d_{l^1}(x, y) = d_{l^1}(y, x)$$

- 公理 (d)

对任意第 i 个坐标分量, 由命题 4.3.3(g) 可知,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

所以,

$$d_{l^1}(x, z) \leq d_{l^1}(x, y) + d_{l^1}(y, z)$$

12.1.8

(1) 第一个不等式

$$d_{l^2}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

$$d_{l^1}(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$$

两边同时取平方

$$(d_{l^2}(x, y))^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$$

$$(d_{l^1}(x, y))^2 = (|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|) (|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|)$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq n, i \neq j} |x_i - y_i| |x_j - y_j|$$

由上式可得

$$(d_{l^2}(x, y))^2 \leq (d_{l^1}(x, y))^2$$

$$\implies$$

$$d_{l^2}(x, y) \leq d_{l^1}(x, y)$$

(2) 第二个不等式

$$d_{l^1}(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

利用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} d_{l^1}(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \left| \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n 1 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{n} d_{l^2}(x, y) \end{aligned}$$

12.1.9

- 公理 (a)

当 $x = y$ 时, 对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = 0$, 所以

$$\sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} = 0$$

- 公理 (b)

当 $x \neq y$ 时, 存在第 i 个坐标分量使得 $|x_i - y_i| > 0$, 所以

$$\sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} > 0$$

- 公理 (c)

对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$, 所以

$$d_{l^\infty}(x, y) = d_{l^\infty}(y, x)$$

- 公理 (d)

对任意第 i 个坐标分量, 由命题 4.3.3(g) 可知,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

所以,

$$d_{l^\infty}(x, z) \leq d_{l^\infty}(x, y) + d_{l^\infty}(y, z)$$

12.1.10

设 $\sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} = r$ 。

(1) 第一个不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}d_{l^2}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n r^2 \right)^{1/2} \\ &= r \\ &= d_{l^\infty}(x, y)\end{aligned}$$

(2) 第二个不等式

存在一个 i 使得 $|x_i - y_i| = r$ 。反证法，对任意 i 都有

$$|x_i - y_i| < r$$

有定义可知，度量都是有限维的，即 n 不会是 $+\infty$ ，取 $m = \max|x_i - y_i|, 1 \leq i \leq n$ （引理 5.1.14），此时 $m < r$ 且 m 是上界，这与 r 是最小上界矛盾（定义 5.5.5）。

所以

$$d_{l^2}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \geq (r^2)^{1/2} = r = d_{l^\infty}(x, y)$$

12.1.11

略

12.1.12

为了利用式 (12.1)、(12.2)，我们的证明步骤如下（需要保证是环状的）

$$\begin{aligned}(d) &\implies (c) \implies (b) \implies (a) \\ (a) &\implies (d)\end{aligned}$$

- (b) \implies (a)

(b) 成立, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{l^1}(x^{(k)}, x) = 0$, 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在一个 $N \geq m$ 使得 $d_{l^1}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。

由式 12.1 可知

$$d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq d_{l^1}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$$

对所有的 $k \geq N$ 均成立。于是 (a) 成立。

- (c) \implies (b)

任意 $\epsilon > 0$ 于是 $\epsilon' = \frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon > 0$ (注意这里的 n 是固定值), 因为 (c) 成立, 所以存在一个 $N \geq m$ 使得 $d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon'$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。

由式 12.2 可知

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}}d_{l^2}(x^{(k)}, x) &\leq d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon' = \frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon \\ \implies \\ d_{l^2}(x^{(k)}, x) &\leq \epsilon \end{aligned}$$

- (d) \implies (c)

(d) 成立, 那么对任意 $1 \leq i \leq n, \epsilon > 0$ 存在一个 $N \geq m$ 使得 $|x_i^{(k)} - x_i| \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。

由 l^∞ 度量的定义可知 $d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) = \sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。于是 (c) 成立。

- (a) \implies (d)

(a) 成立, 那么对任意 $\epsilon > 0$ 存在一个 $N \geq m$ 使得 $d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。即 (注意: 以下的 $x_i^{(k)}$ 要看做实数, 不能看做“点”)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i)^2 \right)^{1/2} &\leq \epsilon \\ \sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i)^2 &\leq \epsilon^2 \end{aligned}$$

那么, 对每一个 $1 \leq i \leq n$ 都有

$$\begin{aligned}(x_i^{(k)} - x_i)^2 &\leq \epsilon^2 \\ \implies \\ |x_i^{(k)} - x_i| &\leq \epsilon\end{aligned}$$

对所有的 $k \geq N$ 均成立。

所以 (d) 成立。

12.1.13

反证法, 假设 d_{disc} 收敛于 x , 但 N 不存在。那么, 任意 $N \geq m$ 都至少存在一个 $n \geq N$ 使得

$$x^{(n)} \neq x$$

由离散度量 d_{disc} 的定义可知, 此时 $d_{disc}(x, x^{(n)}) = 1$ 。由于 N 的任意性可知, 定义 12.1.14 (度量空间中序列的收敛) 中的定义无法满足, 与假设 d_{disc} 收敛于 x 矛盾。

12.1.14

为了推出矛盾, 我们假设 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 依度量 d 同时收敛于 x, x' , 设 $\epsilon = d(x, x')/3$ 。注意, 因为 $x \neq x'$, 所以 ϵ 是正的。由 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 依度量 d 收敛于 x 可知, 存在一个 $N \geq m$ 使得 $d(x^{(n)}, x) \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。类似地, 存在一个 $M \geq m$ 使得 $d(x^{(n)}, x') \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq M$ 均成立。特别地, 如果令 $n := \max(N, M)$, 那么有 $d(x^{(n)}, x) \leq \epsilon$ 和 $d(x^{(n)}, x') \leq \epsilon$, 于是根据三角不等式 (定义 12.1.2 公理 (d)) 可得, $d(x, x') \leq 2\epsilon = 2d(x, x')/3$ 。所以 $d(x, x') \leq 2d(x, x')/3$, 这和 $d(x, x') > 0$ 矛盾。所以度量空间中的序列不能同时收敛于两个不同的点。

12.1.15

(1) d_l 是 X 上的度量。

- 公理 (a)

如果序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是相等的, 那么对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n = b_n$, 所有

$$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| = 0$$

- 公理 (b)

序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 不相等, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n - b_n| \geq 0$, 且两个序列不相等, 所以至少存在一个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - b_n| > 0$, 所以

$$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| > 0$$

- 公理 (c)

序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$, 所以

$$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = d_{l^1}((b_n)_{n=0}^{\infty}, (a_n)_{n=0}^{\infty})$$

- 公理 (d)

序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$$

于是

$$\begin{aligned} d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty}) &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - c_n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n - c_n| \\ &= d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) + d_{l^1}((b_n)_{n=0}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty}) \end{aligned}$$

(2) d_{l^∞} 是 X 上的度量。

- 公理 (a)

如果序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是相等的, 那么对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n = b_n$, 于是 $|a_n - b_n| = 0$, 所有

$$d_{l^{\infty}}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| = 0$$

- 公理 (b)

序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 不相等, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n - b_n| \geq 0$, 且两个序列不相等, 所以至少存在一个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - b_n| > 0$, 所以

$$d_{l^{\infty}}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| > 0$$

- 公理 (c)

序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$, 所以

$$d_{l^{\infty}}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = d_{l^{\infty}}((b_n)_{n=0}^{\infty}, (a_n)_{n=0}^{\infty})$$

- 公理 (d)

序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$$

于是 (有用到引理 6.4.13 (比较原理))

$$\begin{aligned} d_{l^{\infty}}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty}) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - c_n| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \end{aligned}$$

接下来, 我们需要证明

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n - c_n|$$

不妨设 $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n|, p := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|, q := \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n - c_n|$
反证法, 假设 $M \neq p + q$, 那么 $M > p + q$ 或者 $M < p + q$, 我们以

$M > p + q$ 为例, 于是存在 $m, M > m > p + q$, 由最小上界的性质可知 (命题 6.3.6), 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - b_n| + |b_n - c_n| > m > p + q$$

于是 $|a_n - b_n| > p$ 或 $|b_n - c_n| > q$, 这与 p, q 是最小上确界矛盾。

所以

$$\begin{aligned} d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty) &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n - c_n| \\ &= d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty) + d_{l^\infty}((b_n)_{n=0}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty) \end{aligned}$$

(3) 存在一个由 X 中元素构成的序列 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ (即序列的序列), 它依度量 d_{l^∞} 收敛但不依度量 d_{l^1} 收敛。

这里可以手动构造一个

$$\begin{aligned} (a_n)_{n=0}^\infty, a_n &= 1/k \\ x^{(k)} &= (a_n)_{n=0}^\infty \end{aligned}$$

于是 $x^{(k)}$ 收敛于 $1/k$, 序列 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ 依度量 d_{l^∞} 收敛于 $(a_n)_{n=0}^\infty, a_n = 0$, 但不依度量 d_{l^1} 收敛, 这里简单说明下原因, 因为两个点 $x^{(p)}, x^{(q)}$, 每个坐标分量 i 都有

$$|x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| = |1/p - 1/q| = \frac{1}{pq}$$

而每个点的坐标分量个数是 ∞ , 所以 $d_{l^1}(x^{(p)}, x^{(q)}) = \infty$

(4) 任何一个依度量 d_{l^1} 收敛的序列都依度量 d_{l^∞} 收敛。

不妨设序列依度量 d_{l^1} 收敛于 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 那么对于任意 $\epsilon > 0$ 存在一个 N , 使得

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i - x_i| \leq \epsilon$$

对 $n \geq N$ 均成立。

于是可得

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i - x_i| \leq \epsilon$$

所以, 序列依度量 d_{l^∞} 收敛于 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 。

12.1.16

由 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于点 $x \in X$, 对于任意 $\epsilon > 0$, $\frac{1}{2}\epsilon > 0$, 存在一个 $N \geq 1$ 使得

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

类似地, 存在 $M \geq 1$ 使得

$$d(y_n, y) \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $n \geq M$ 均成立。

取 $m = \max(N, M)$ 使得

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \\ &\implies \\ d(x_n, y_n) - d(x, y) &\leq d(x_n, x) + d(y, y_n) \leq \epsilon \end{aligned}$$

对所有的 $n \geq m$ 均成立。

由 ϵ 的任意性和 $d(x, y)$ 是常量可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$