

## 6.1 习题

2024 年 6 月 16 日

### 6.1.1

证明框架如下：由于  $n, m$  都是自然数，且  $m > n$ ，所以存在正自然数  $k$  使得  $k = m - n$ ，对  $k$  进行归纳。

### 6.1.2

证明：

与定义 6.1.5 说的是一个意思，证明略

### 6.1.3

证明：

充分性：

如果  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛与  $c$ ，那么对任意的  $\epsilon > 0$ ，该序列都是最终  $\epsilon$ - 接近  $c$  的，所以存在  $N \geq m$  使得  $|a_n - c| \leq \epsilon$  对所有的  $n \geq N$  均成立。由题设可知  $m' > m$ ，于是存在  $N' := \max(m', N)$ ,  $N' \geq m'$ ，使得  $|a_n - c| \leq \epsilon$  对所有的  $n \geq N'$  均成立，由于  $\epsilon$  是任意的，由习题 6.1.2 可知， $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$  收敛与  $c$ 。

必要性：

$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$  收敛与  $c$ ，那么对任意的  $\epsilon > 0$ ，该序列都是最终  $\epsilon$ - 接近  $c$  的。所以存在  $N \geq m'$  使得  $|a_n - c| \leq \epsilon$  对所有的  $n \geq N$  均成立。由于  $m' > m$ ，所以  $N \geq m$ ，该性质对序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  也成立，由于  $\epsilon$  是任意的，由习题 6.1.2 可知， $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛与  $c$ 。

### 6.1.4

证明:

$(a_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $c$ , 于是对任意  $\epsilon > 0$ , 存在一个  $N \geq m$  使得  $|a_n - c| \leq \epsilon$  对所有的  $n \geq N$  均成立, 由于  $k \geq 0$  是一个非负整数, 所以  $n + k \geq N$ , 于是  $|a_{n+k} - c| \leq \epsilon$  对所有的  $n \geq N$  均成立, 由习题 6.1.2 可知,  $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$  收敛与  $c$ 。

### 6.1.5

证明:

要证明序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是柯西序列, 则对于任意  $\epsilon > 0$ , 我们需要证明序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是最终  $\epsilon$ - 接近的。于是设  $\epsilon > 0$  是一个任意的实数, 那么  $\epsilon/2 > 0$ 。因为  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是收敛的实数序列, 不妨设收敛于实数  $L$ , 可知  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是最终  $\epsilon$ - 接近与  $L$  的, 于是存在一个  $N \geq m$  使得  $d(a_n, L) \leq \epsilon/2$  对所有的  $n \geq N$  均成立。任意  $j, k \geq N$ , 有  $d(a_j, L) \leq \epsilon/2$ ,  $d(a_k, L) \leq \epsilon/2$ , 于是根据三角不等式可得,  $d(a_j, a_k) \leq \epsilon$ , 因此  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是最终  $\epsilon$ - 接近的。由于  $\epsilon$  是任意选取的, 因此  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是柯西序列。

### 6.1.6

证明:

证明为什么  $a_n > L + \epsilon/2$  或  $a_n < L - \epsilon/2$ , 其余的按书中的提示证明就可以了。

序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  不是最终  $\epsilon$ - 接近与  $L$  的, 即对任意的  $N \geq m$  都存在  $|a_n - L| > \epsilon$  对所有的  $n \geq N$  均成立。

序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是柯西序列, 所以存在  $N_0$  使得  $|a_j - a_k| \leq \epsilon/2$  对所有的  $j, k \geq N_0$  均成立。

固定  $a_n = j_k$ , 所以,

$$\begin{aligned} |a_j - a_n| &\leq \epsilon/2 \\ \Rightarrow a_n - \epsilon/2 &\leq a_j \leq a_n + \epsilon/2 \end{aligned}$$

又因为,  $|a_n - L| > \epsilon$  所以  $a_n > \epsilon + L$  或  $a_n < L - \epsilon$ 。

如果  $a_n > \epsilon + L$ , 那么,

$$\begin{aligned} a_n - \epsilon/2 &\leq a_j \\ L + \epsilon - \epsilon/2 &< a_j \\ L + \epsilon/2 &< a_j \end{aligned}$$

如果  $a_n < L - \epsilon$ , 那么,

$$\begin{aligned} a_j &\leq a_n + \epsilon/2 \\ a_j &< L - \epsilon + \epsilon/2 \\ a_j &< L - \epsilon/2 \end{aligned}$$

### 6.1.7

证明:

证明方法与命题 6.1.4 的类似。

首先假设  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是定义 5.1.12 意义下的有界序列, 那么存在有理数  $M$ , 该序列以  $M$  为界, 由于有理数  $M$  也是实数, 所以  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是定义 6.1.16 意义下的有界序列。

现在假设是定义 6.1.16 下的有界序列, 那么存在实数  $M$ , 该序列以  $M$  为界, 根据命题 5.4.12 可知, 存在一个比  $M$  大的有理数  $M'$ , 由于  $M'$  是有理数, 且  $M < M'$ , 所有该序列也以  $M'$  为界, 所以  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是定义 5.1.12 意义下的有界序列。

### 6.1.8

(a)

我们必须证明  $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $x + y$ 。换言之, 对于任意的  $\epsilon > 0$ , 我们需要证明序列  $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$  是最终  $\epsilon$ - 接近  $x + y$  的。

因为  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $x$  且  $\epsilon/2 > 0$ , 则序列是最终  $\epsilon/2$ - 接近  $x$ , 即存在  $N_a \geq m$  使得  $|a_n - x| \leq \epsilon/2$  对所有的  $n \geq N_a$  均成立。

同理对序列  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  存在  $N_b \geq m$  使得  $|b_n - y| \leq \epsilon/2$  对所有的  $n \geq N_b$  均成立。

取  $N := \max(N_a, N_b)$ , 于是对所有的  $n \geq N$  都有,

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (x + y)| &= |(a_n - x) + (b_n - y)| \\ &\leq |a_n - x| + |b_n - y| = /epsilon \end{aligned}$$

因此  $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$  是最终  $\epsilon$ - 接近  $x + y$  的。由于  $\epsilon$  是任意的, 所以  $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $x + y$