

3.6 为什么

2024 年 3 月 4 日

注 3.6.3

①单射

对任意 $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, f(x_1) = 2x_1, f(x_2) = 2x_2$, 乘法是交换的 (引理 2.3.2) 如果 $f(x_1) = f(x_2)$ 则 $2x_1 = 2x_2$, 由乘法的消去律 (推论 2.3.7) 可知, $x_1 = x_2$, 与题设矛盾, 所以 f 是单射的。

②满射

对任意 $y \in Y$, 由于 Y 是偶数集, 所以 Y 总的元素都需要符合偶数的定义, 即: 对任意的 Y 中元素 y , 当且仅当 $y=2n$, n 是自然数。由此可得 f 是满射。

注 3.6.6

需要找到 $X = \{i \in N : i < n\} \rightarrow Y = \{i \in N : 1 \leq i \leq n\}$ 的双射函数
f. 我们定义 $f : X \rightarrow Y, \{f(x) : x \in X, f(x) = x++\}$

现在证明 f 是双射函数。

①单射

对任意 $i_1 \in X, i_2 \in X, i_1 \neq i_2, f(i_1) = i_1++, f(i_2) = i_2++$, 若 $f(i_1) = f(i_2)$, 则 $i_1++ = i_2++$, 由洛必达公理 2.4 可知 $i_1 = i_2$, 与 $i_1 \neq i_2$ 矛盾, 所以 $f(i_1) \neq f(i_2)$, 所以 f 是单射的

②满射

对任意 $y \in Y$, 可知 y 是正数, 而正数可以由一个自然数加 1 得到, 假设 $y = b++$, 又 $y \leq n$, 所以 $b < n$, 所以 $b \in X$, 所以 f 是满射

至此, 命题得证

引理 3.6.8

证明：不存在从空集到一个非空集合的双射

由函数的满射定义可知，对值域中的任意元素 y ，定义域中都存在一个元素 x ，使得函数 $y=f(x)$ ，而如果定义域是空集，那么 x 是不存在的，所以无法满足满射定义。