6.3 为什么

2024 年 7 月 1 日

1.$0 < x < 1$**，那么序列** $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ **是单调递减的。**

需要证明 $x^n \geq x^{n+1}$：

$$x^n - x^{n+1}$$
$$= x^n(1-x) < 0$$

所以 $x^n \geq x^{n+1}$

2. 定义 5.2.6 中定义的等价序列，如果有极限，则极限是相同的。

设序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是等价序列，并且 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x，现在需要证明：$(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 也收敛与 x。

任意实数 $\epsilon > 0$，$\epsilon/2 > 0$，所以存在 $N \geq 0$ 对任意 $n \geq N$ 有

$$|a_n - x| \leq \epsilon/2$$
$$d(a_n, x) \leq \epsilon/2$$

又因为序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是等价序列，所以是最终 $\epsilon/2-$ 接近的，即存在 $N' \geq n$ 使得，

$$|b_n - a_n| \leq \epsilon/2$$
$$d(b_n, a_n) \leq \epsilon/2$$

由命题 4.3.3（g）【准确的说是实数版本，并把 y 看做 a_n】所以，

$$\begin{aligned} d(b_n - x) &\le d(a_n, x) + d(b_n, a_n) \\ &\le \epsilon \end{aligned}$$

所以序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 最终 $\epsilon-$ 接近于 x。由 ϵ 的任意性可知，序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x。