17.4 习题

张志聪

2025 年 5 月 10 日

17.4.1

先证明可微性，再证明导数作为关于 $\mathbb{R}^n$ 的函数是连续的。

设 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性变换，令 $L = T$，于是，对任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|T(x) - T(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &= \lim_{x \to x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|T(x - x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\
&= \lim_{x \to x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|T(x - x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\
&= \lim_{x \to x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{0}{\|x - x_0\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以 T 在 x_0 处是可微的，并且导数为 T。而且引理 17.2.4 也保证了导数的唯一性。

又由 x_0 的任意性可知，T 在任意一点 x 处的导数都是 T，即 $T'(x) = x$，可见导数函数是定值，所以其是连续的。

17.4.2

要证明 f 在 x_0 连续，我们需要证明

$$\lim_{x \to x_0; x \in E - \{x_0\}} f(x) = f(x_0)$$