15.7 习题

张志聪

2025 年 4 月 19 日

15.7.1

- (a)

  利用引理 15.6.6 和习题 15.6.16 中的 $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$。

$$\begin{aligned}
\sin(x)^2 + \cos(x)^2 &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2e^{ix-ix}}{-4} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} + 2e^{ix-ix}}{4} \\
&= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{-4} + \frac{-2}{-4} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4} + \frac{2}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned}
sin'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
&= cos(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
cos'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}
\end{aligned}
$$

令 $m = n - 1$，即 $n = m + 1$，利用命题 7.4.3（级数的重排序），

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^{2(m+1)-1}}{(2(m+1)-1)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m} x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= -sin(x)
\end{aligned}
$$

- (c)

$$
\begin{aligned}
sin(-x) &= \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} \\
&= -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
&= -sin(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
cos(-x) &= \frac{e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}}{2} \\
&= \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} \\
&= cos(x)
\end{aligned}
$$

- (d)

$$
\begin{aligned}
cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\
&- \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{4} \\
&- \frac{e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{-4} \\
&= \frac{2e^{ix}e^{iy} + 2e^{-ix}e^{-iy}}{4} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{2} \\
&= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2} \\
&= cos(x+y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\
&+ \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{4i} \\
&+ \frac{e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{4i} \\
&= \frac{2e^{ix}e^{iy} - 2e^{-ix}e^{-iy}}{4i} \\
&= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} \\
&= sin(x+y)
\end{aligned}
$$

- (e)

$$
\begin{aligned}
cos(0) &= \frac{e^{i\times 0}+e^{-i\times 0}}{2i} \\
&= \frac{1+1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

由 (a) 可知，$sin(0) = 1 - cos(0)^2 = 1 - 1 = 0$

- (f)

$$
\begin{aligned}
cos(x) + isin(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + i^2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i^2} \\
&= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{2e^{ix}}{2} \\
&= e^{ix}
\end{aligned}
$$

同理可得，

$$
\begin{aligned}
cos(x) - isin(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} - i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} - i^2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i^2} \\
&= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{2e^{-ix}}{2} \\
&= e^{-ix}
\end{aligned}
$$

15.7.2

（1）

反证法，假设 c 不存在，即，对任意 $c > 0$，存在 $0 < |y - x_0| < c$，使得 $f(y) = 0$。

因为 f 在 x_0 处是可微的，那么，

$$\lim_{x \to x_0; x \in \mathbb{R} - x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

于是，对 $\epsilon = \frac{1}{2}f(x_0)$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $|x - x_0| < \delta$，就有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \frac{1}{2}f'(x_0)$$

由假设可知，取 $c = \delta$，那么，存在 $0 < |y - x_0| < c$，使得 $f(y) = 0$。综上，我们有

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} - f'(x_0) \right| &< \frac{1}{2}f'(x_0) \\
\left| \frac{0 - 0}{y - x_0} - f'(x_0) \right| &< \frac{1}{2}f'(x_0) \\
f'(x_0) &< \frac{1}{2}f'(x_0)
\end{aligned}$$

存在矛盾。

（2）

因为 $sin(x) = 0, sin'(0) = cos(0) = 1$，所以，由（1）可知，存在 $c > 0$ 使得只要 $0 < |0 - x| = |x| < c$，$sin(x) \neq 0$。

即 $-c < x < 0$ 或 $0 < x < c$，都有 $sin(x) \neq 0$。

15.7.3

- (a)

$$\begin{aligned}
cos(x + \pi) &= cos(x)cos(\pi) - sin(x)sin(\pi) \\
&= cos(x)(-1) - sin(x)0 \\
&= -cos(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
sin(x+\pi) &= sin(x)cos(\pi) + cos(x)sin(\pi) \\
&= sin(x)(-1) + cos(x)0 \\
&= -sin(x)
\end{aligned}
$$

特别地，

$$
\begin{aligned}
cos(x+2\pi) &= cos((x+\pi)+\pi) \\
&= -cos(x+\pi) \\
&= cos(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
sin(x+2\pi) &= sin((x+\pi)+\pi) \\
&= -sin(x+\pi) \\
&= sin(x)
\end{aligned}
$$

- (b)
  - $\Rightarrow$

    由书中的讨论可知，$sin(0)=0, sin(\pi)=0$ 且 $x \in (0,\pi), sin(x) \neq 0$。

    对任意 x 都可以表示成 $x = n\pi + x_0$，其中 $x_0 \in [0,\pi)$，n 是整数。

    由 (a) 可知，

    $$sin(x) = (-1)^n sin(x_0)$$

    综上，只有 $x_0 = 0$ 时，$sin(x) = 0$。此时，$x/\pi = n$ 是一个整数。
  - $\Leftarrow$

    因为 $x = n\pi$，其中 n 是整数，所以，

    $$
    \begin{aligned}
    sin(x) &= sin(n\pi) \\
    &= sin(0+n\pi) \\
    &= (-1)^n 0 \\
    &= 0
    \end{aligned}
    $$

- (c)

  因为

$$\begin{aligned} sin(\pi) &= sin(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) \\ &= sin(\frac{1}{2}\pi)cos(\frac{1}{2}\pi) + cos(\frac{1}{2}\pi)sin(\frac{1}{2}\pi) \\ &= 2sin(\frac{1}{2}\pi)sin(\frac{1}{2}\pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  因为 $sin(\frac{1}{2}\pi) > 0$，所以，$cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$。又由 $sin(\frac{1}{2}\pi)^2 + cos(\frac{1}{2}\pi)^2 = 1$ 可得，$sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$。

  又我们有，

$$\begin{aligned} sin(x + \frac{1}{2}\pi) &= sin(x)cos(\frac{1}{2}\pi) + cos(x)sin(\frac{1}{2}\pi) \\ &= cos(x) \end{aligned}$$

  综上，由 (b) 可知，(c) 成立。

15.7.4