

3.6 习题

2024 年 3 月 15 日

3.6.1

证明.

① X 和 X 有相等的基数。

构造一个从 X 到 X 的函数 f , 使得 $f(x)=x$ ($\{x \in X\}$)。函数 f 是双射函数, 是显而易见的, 这里不做证明了。

② 如果 X 和 Y 有相等的基数, 那么 Y 和 X 有相等的基数。

有 X 和 Y 有相等的基数, 可知存在一个双射: $f: X \rightarrow Y$ 。那么存在 f 的逆 $f^{-1}: Y \rightarrow X$, 由逆的定义可知 f^{-1} 是双射函数。

③ 如果 X 和 Y 有相等的基数且 Y 和 Z 有相等的基数, 那么 X 和 Z 有相等的基数。

由 X 和 Y 有相等的基数, 可知存在一个双射: $f: X \rightarrow Y$ 。由 Y 和 Z 有相等的基数, 可知存在一个双射: $g: Y \rightarrow Z$ 。那么 g 和 f 的复合函数为 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 。

由习题 3.3.7 可知 $g \circ f$ 是双射函数。由此可知存在一个双射: $g \circ f: X \rightarrow Z$, 所以 X 和 Z 有相等的基数。

3.6.2

证明.

① 充分性: 一个集合 X 的基数为 0, 则 X 是空集。

那么存在从 X 到 $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$ 的双射: $f: X \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$ 。而 $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$ 是 \emptyset , 即 $f: X \rightarrow \emptyset$ 。如果 X 不是空集, 那么则存在一个 $x \in X$ 使得 $f(x) \in \emptyset$, 这显然是不成立的, 所以 X 是空集

② 必要性: X 是空集, 则 X 的基数为 0。

若 X 是空集, 由习题 3.3.3 知 $f: \emptyset \rightarrow \emptyset$ 为双射, 而 $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\} = \emptyset$, 即存在双射函数 $f: \emptyset \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$, 由定义 3.6.5 可知集合 X 基数为 0.

3.6.3

证明.

对 n 进行归纳:

$n=0$ 时, f 是空函数, 命题空成立。

归纳假设 $n=k$ 时, 命题成立。

下面我们证明该命题对于 $k++$ 也为真。设集合 $N_k = \{i \in N: 1 \leq i \leq k\}$, $N_{k++} = \{i \in N: 1 \leq i \leq k++\}$ 。函数 $f_{k++}: N_{k++} \rightarrow N$ 是一个函数, 我们可以由 f_{k++} 定义出一个函数 $f_k: N_k \rightarrow N$, 对任意 $i \in N_k$, $f_k(i) = f_{k++}(i)$ 。由归纳假设可知, 存在一个自然数 M 使得 $f_k(i) \leq M, i \in N_k$, 即 $f_{k++}(i) \leq M, i \in N_k$, 此时我们可以取 $f_{k++}(k++), M$ 中的较大值为 M' , 由此可知该 M' 使得 $f_{k++}(i) \leq M', i \in N_{k++}$ 。归纳法完成。

3.6.4

(a) 设 X 是一个有限集, 设 x 是一个对象并且 x 不是 X 中的元素。那么 $X \cup \{x\}$ 是有限的, 且 $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$

证明.

X 是有限集, 不妨设 X 的基数是自然数 n 。因此存在从 X 到 $\{i \in N: 1 \leq i \leq n\}$ 的双射函数 f 。定义出一个函数 $g: X \cup \{x\} \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq n+1\}$, 使得 $g(x) = n+1$, $g(i) = f(i), i \in X$ 。 g 是双射函数, 由此可知 $X \cup \{x\}$ 的基数是 $n+1$, 所以 $X \cup \{x\}$ 是有限的, 且 $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$

(b) 设 X 和 Y 都是有限集, 那么 $X \cup Y$ 是有限的, 且 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$ 。另外, 如果 X 和 Y 是不相交的 (即 $X \cap Y = \emptyset$), 那么 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$

证明.

X 和 Y 都是有限集, 不妨设 X 和 Y 的基数分别为 n 和 m 。通过对 n 进行归纳, 完成证明:

$n=0$ 时, 即 X 的基数是 0, 也就是说 $X = \emptyset$, $X \cup Y = \emptyset \cup Y = Y$, 此时 (b) 命题显然是成立的。

归纳假设 $n=k$ 时, (b) 命题成立。

现在需证明 $n=k++$, 任取 $x \in Y, Z = Y \setminus \{x\}$, 由引理 3.6.9 可知, Z 的基数为 k , 由归纳假设可知, X 与 Z 满足命题 (b), 由此可知 $X \cup Z$ 是有限的;

$X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\}$, ① $X \cap Y = \emptyset$, 由此可知 $x \notin X \cup Z$, 且 $\#(X \cup Z) = \#(X) + \#(Z)$ 。由命题 (a) 可知 $X \cup Z \cup \{x\}$ 是有限的, 且 $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$, 即 $X \cup Y$ 是有限的, 且 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 = \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$, 即 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$;

② $X \cap Y \neq \emptyset$

如果 $x \in X \cup Z$ 则 $X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\} = X \cup Z$, 即 $X \cup Y = X \cup Z$ 由于同一集合只有几个基数, 所以 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Y)$ 。

如果 $x \notin X \cup Z$, (由 $X \cap Y \neq \emptyset$, 则 $X \cap Z \neq \emptyset$, 所以 $\#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Z)$) 由命题 (a) 可知 $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$, 即 $X \cup Y$ 是有限的, 且 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 \leq \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$, 即 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$;

综上, $n=k++$ 情况也成立, 至此, (b) 命题成立。

(c) 设 X 是一个有限集, Y 是 X 的一个子集。那么 Y 是有限的, 且 $\#(Y) \leq \#(X)$ 。另外, 如果 $Y \neq X$ (即 Y 是 X 的一个真子集), 那么我们有 $\#(Y) < \#(X)$ 。