16.1 习题

张志聪

2025 年 4 月 23 日

16.1.1

（1）k 的存在性。

对任意实数 x，令 $A := \{l \in \mathbb{Z} : l \leq x\}, k := \sup(A)$。

由命题 5.4.12（负实数有类似的命题）可知，存在有理数 q 和整数 N 使得

$$q \leq x \leq N$$

由命题 4.4.1 可知，存在一个整数 M 使得 $M \leq q$，于是

$$M \leq x \leq N$$

于是 A 非空，且有上界。

接下来，证明上确界是存在的，且上确界属于 A。换言之，任意一个元素为整数的非空有界集合都有一个最大元素。

由命题 5.5.9（最小上界的存在性）可知，A 存在上确界，设 k 是 A 的上确界。

反证法，假设 $k \notin A$。

任取 $a_0 \in A$（因为 A 是非空，所以 a_0 是存在的。）因为 $k \notin A, a_0 \in A$，所以存在 $a_1 \in A$，且 $a_1 > a_0$（否则 $a_0 = k$ 就是上确界了，与假设矛盾）。因为 $a_1 > a_0$，所以，$a_1 \geq a_0 + 1$（A 中的元素都是整数）。递归地构造出 $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$。

所以，对任意 $n \geq 1$，都有 $a_n \geq a_0 + n$。于是，只要 n 足够大，就可以取到 $a_n > k$，这与 k 是 A 的上确界矛盾。

综上，整数 k 是存在的。

（2）$y \in [0,1)$。

接下来，证明：令 $y = x - k$，$y \in [0,1)$。

如果，$y \geq 1$，那么，$x = k + y \geq k + 1$，这与 k 是 A 的上确界矛盾（因为 $k+1 \in A$）。

同理，$y < 0$，$x = k + y < k$，同样与 k 是 A 的上确界矛盾。（因为 $k \notin A$。）

综上，$y \in y \in [0,1)$。