3.6 习题

2024 年 3 月 7 日

3.6.1

证明.

①X 和 X 有相等的基数。

构造一个从 X 到 X 的函数 f，使得 $f(x)=x$（$\{x \in X\}$）。函数 f 是双射函数，是显而易见的，这里不做证明了。

②如果 X 和 Y 有相等的基数，那么 Y 和 X 有相等的基数。

有 X 和 Y 有相等的基数，可知存在一个双射：$f : X \to Y$。那么存在 f 的逆 $f^{-1} : Y \to X$，由逆的定义可知 f^{-1} 是双射函数。

③如果 X 和 Y 有相等的基数且 Y 和 Z 有相等的基数，那么 X 和 Z 有相等的基数。

由 X 和 Y 有相等的基数，可知存在一个双射：$f : X \to Y$。由 Y 和 Z 有相等的基数，可知存在一个双射：$g : Y \to Z$。那么 g 和 f 的复合函数为 $g \circ f : X \to Z$。

由习题 *3.3.7* 可知 $g \circ f$ 是双射函数。由此可知存在一个双射：$g \circ f : X \to Z$，所以 X 和 Z 有相等的基数。

3.6.2

证明.

①充分性：一个集合 X 的基数为 *0*，则 X 是空集。

那么存在从 X 到 $\{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$ 的双射：$f : X \to \{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$。而 $\{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$ 是 $\varnothing$，即 $f : X \to \varnothing$。如果 X 不是空集，那么则存在一个 $x \in X$ 使得 $f(x) \in \varnothing$，这显然是不成立的，所以 X 是空集

②必要性：X 是空集，则 X 的基数为 *0*。

若 X 是空集，由习题 *3.3.3* 知 $f:\varnothing\to\varnothing$ 为双射，而 $\{i\in N:1\leq i\leq 0\}=\varnothing$，即存在双射函数 $f:\varnothing\to\{i\in N:1\leq i\leq 0\}$，由定义 *3.6.5* 可知集合 X 基数为 *0.*

3.6.3

证明.

对 n 进行归纳：

n=*0* 时，f 是空函数，命题空成立。

归纳假设 n=k 时，命题成立。

下面我们证明该命题对于 k++ 也为真。设集合 $N_k=\{i\in\mathsf{N}:1\leq i\leq k\}, N_{k++}=\{i\in\mathsf{N}:1\leq i\leq k++\}$。函数 $f_{k++}:N_{k++}\to N$ 是一个函数，我们可以由 f_{k++} 定义出一个函数 $f_k:N_k\to N$，对任意 $i\in N_k, f_k(i)=f_{k++}(i)$。由归纳假设可知，存在一个自然数 M 使得 $f_k(i)\leq M, i\in N_k$，即 $f_{k++}(i)\leq M, i\in N_k$，此时我们可以取 $f_{k++}(k++), M$ 中的较大值为 M'，由此可知该 M' 使得 $f_{k++}(i)\leq M', i\in N_{k++}$。归纳法完成。