7.5 习题

2024 年 10 月 4 日

7.5.1

记 $L' := \liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$，因为 $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ 总是正的，所以 $L' \geq 0$。

设 $\epsilon > 0$，由命题 6.4.12（a）可知存在一个 $N \geq m$ 使得 $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq L' - \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。所以 $c_{n+1} \geq c_n(L' - \epsilon)$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。根据归纳法（对 n 进行归纳），这表明

$$c_n \geq c_N(L' - \epsilon)^{n-N}$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

如果我们记 $A := c_N(L' - \epsilon)^{-N}$，那么

$$c_n \geq A(L' - \epsilon)^n$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

从而

$$c_n^{1/n} \geq A^{1/n}(L' - \epsilon)$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

而根据极限定律（定理 6.1.19）和引理 6.5.3，我们有

$$\lim_{n\to\infty} A^{1/n}(L' - \epsilon) = L' - \epsilon$$

于是由比较原理（引理 6.4.13）可知，

$$\liminf_{n\to\infty} c_n^{1/n} \geq L' - \epsilon$$

而上式对任意的 $\epsilon > 0$ 都成立，因此

$$\liminf_{n\to\infty} c_n^{1/n} \geq L'$$

（为什么？见下方的“说明”）这就是要证明的结论。

说明. 反证法，假设 $\liminf_{n\to\infty} c_n^{1/n} = K < L'$，那么取 $\delta = (L'-K)/2 > 0$，由命题 6.4.12（b）可知，存在一个 $N_1 \geq m$，使得 $c_n < K+\delta$ 对所有的 $n \geq N_1$ 均成立。

取 $\epsilon = \delta/2$，$L'-\epsilon > K+\delta$ 是显然的。

$$\liminf_{n\to\infty} c_n^{1/n} \geq L' - \epsilon$$

可知，存在一个 $N_2 \geq m$，使得 $c_n \geq L'-\epsilon$ 对所有的 $n \geq N_2$ 均成立。

取 $N = max(N_1, N_2)$，此时对所有的 $n \geq N$ 有

$$c_n \geq L' - \epsilon \tag{1}$$

$$c_n < K + \delta \tag{2}$$

与 $L'-\epsilon > K+\delta$ 矛盾。

7.5.2

比值判别法。

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{|(n+1)^q x^{n+1}|}{|n^q x^n|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} |(\frac{n+1}{n})^q x| \\
&= 1^q |x| \\
&= |x|
\end{aligned}$$

因为 $|x| < 1$，有推论 7.5.3（比值判别法）可知级数是绝对收敛的。于是级数也是条件收敛的。又由推论 7.2.6（零判别法）可知 $\lim_{n\to\infty} n^q x^n = 0$

注意 上面的等式使用了以下命题：

如果序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的收敛于 x，那么 $(a_n^r)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x^r，其中 r 是实数。

结论是显然的，但我想到的证明过程比较复杂，要使用公理 8.1（选择公理），感兴趣的可以看看，个人认为可能不是最优解。

（ps：先想想，实在没有别的方法了，再说）

7.5.3

$(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 定义如下：$(1)_{n=m}^{\infty}$；

$(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 定义如下：$(\frac{1}{n^2})_{n=m}^{\infty}$