7.1 习题

2024 年 10 月 2 日

7.1.1

【a】

由定义 7.1.1 可知，

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$
$$= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=n+1}^{p} a_i$$
$$= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p$$

$$\sum_{i=m}^{p} a_i$$
$$= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p$$

于是，

$$\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{p} a_i$$
$$= \sum_{i=m}^{p} a_i$$

【b】【c】【d】的证明与【a】类似，证明略

【e】

归纳法证明。

归纳基始 $m = n$，此时，

$$|\sum_{i=m}^{n} a_i| = |a_m|$$

$$\sum_{i=m}^{n} |a_i| = |a_m|$$

满足 $|\sum_{i=m}^{n} a_i| \leq \sum_{i=m}^{n} |a_i|$

归纳假设 $m < n = j - 1$ 时，命题成立。

$n = j++$ 时，由（a）可知，

$$\begin{aligned}
&|\sum_{i=m}^{j} a_i| \\
&= |\sum_{i=m}^{j-1} a_i + a_j| \\
&\leq |\sum_{i=m}^{j-1} a_i| + |a_j|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=m}^{j} |a_i| \\
&= \sum_{i=m}^{j-1} |a_i| + |a_j| \\
&\geq |\sum_{i=m}^{j-1} a_i| + |a_j| && \text{【归纳假设保证的】}
\end{aligned}$$

于是 $|\sum_{i=m}^{j} |a_i| \geq |\sum_{i=m}^{j-1} a_i| + |a_j| \geq |\sum_{i=m}^{j} a_i|$

归纳完毕。

【f】与**【e】**类似，可通过归纳法证明。

7.1.2

【a】 由于 X 是空集，所以定义 7.1.6 中的 $n=0$，于是，取一个从 $\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le 0\}$ 到 X 的双射 g，所以，

$$\begin{aligned}&\sum_{x\in X}f(x)\\&=\sum_{i=1}^{0}f(g(i))\\&=0\end{aligned}$$

【b】

定义双射函数 $g:\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le 1\}\to X$ 如下：当 $i=1, g(x)=x_0$。于是，

$$\begin{aligned}&\sum_{x\in X}f(x)\\&=\sum_{i=1}^{1}f(g(i))\\&=f(g(1))\\&=f(x_0)\end{aligned}$$

【c】 设 X 有 n 个元素，

取一个从 $\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}$ 到 Y 的双射函数 h，于是函数 $g\circ h$ 是从 $\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}$ 到 X 的双射函数；

取一个从 $\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}$ 到 X 的双射函数 h'。

由命题 7.1.8 可知，

$$\sum_{i=1}^{n}f(h'(i))=\sum_{i=1}^{n}f(g\circ h(i))$$

于是，

$$\sum_{x\in X}f(x)=\sum_{y\in Y}f(g(x(y)))$$

【d】

题设中，对每一个整数 $i\in X$ 都指定了一个实数 a_i，其实是定义了一个函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 如下：$i\in X, f(i)=a_i$。

所以，

$$\sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{i=n}^{m} f(i)$$

由引理 7.1.4 （b）可知，

$$\sum_{i=n}^{m} f(i) = \sum_{j=1}^{m-(n-1)} f(j+(n-1))$$

此时，定义一个从 $Y := \{j \in \mathbb{N} : 1 \le j \le m-(n-1)\}$ 到 X 的双射函数 g 如下：

$$g(j) = j + (n-1)$$

于是，

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m-(n-1)} f(j+(n-1)) \\
&= \sum_{j=1}^{m-(n-1)} f(g(j)) \\
&= \sum_{x \in X} f(x) && \textbf{定义 7.1.6}
\end{aligned}$$

【e】

设 X, Y 的元素个数分别为 n, m，选取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n+m\}$ 到 $X \cup Y$ 的双射函数 g，并且限定 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n\}$ 的值域是 X，

$\{i \in \mathbb{N} : n+1 \leq i \leq n+m\}$ 的值域是 Y。于是，

$$\begin{aligned}
&\sum_{z \in X \cup Y} f(z) \\
&= \sum_{i=1}^{n+m} f(g(i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(g(i)) + \sum_{i=n+1}^{n+m} f(g(i)) && \textbf{引理 7.1.4 (a)} \\
&= \sum_{x \in X}^{n} f(x) + \sum_{y \in Y}^{n} f(y) && \textbf{命题 7.1.11(d)}
\end{aligned}$$

【f】

设 X 有 n 个元素，取一个从选取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 到 X 的双射函数 h，于是，

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(h(i)) + g(h(i))) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(h(i)) + \sum_{i=1}^{n} g(h(i)) && \textbf{引理 7.1.4（c）} \\
&= \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x) && \textbf{定义 7.1.6}
\end{aligned}$$

【g】

设 X 的元素个数为 n。

把定义函数 $g = cf$，并取一个从选取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 到 X

的双射函数 h。此时，

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in X} cf(x)\\
&=\sum_{x\in X} g(x)\\
&=\sum_{i=1}^{n} g(h(i))\\
&=\sum_{i=1}^{n} cf(h(i))\\
&=c\sum_{i=1}^{n} f(h(i))\\
&=c\sum_{x\in X}^{n} f(x)
\end{aligned}$$

【h】

设 X 的元素个数为 n，取一个从 $\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}$ 到 X 的双射函数 h。

对 n 进行归纳。

当 $n=0$ 时，

$$\sum_{x\in X} f(x)=\sum_{x\in X} g(x)=0$$

此时，命题成立。

当 $n=j-1$ 时，归纳假设命题成立。

当 $n=j$ 时，

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in X} f(x)\\
&=\sum_{i=1}^{j} f(h(i))\\
&=\sum_{i=1}^{j-1} f(h(i))+f(h(j))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\in X} g(x)\\
&=\sum_{i=1}^{j} g(h(i))\\
&=\sum_{i=1}^{j-1} g(h(i))+g(h(j))
\end{aligned}
$$

由归纳假设可知 $\sum\limits_{i=1}^{j-1} f(h(i)) \le \sum\limits_{i=1}^{j-1} g(h(i))$；又因为 $f(h(j)) \le g(h(j))$，于是，

$$\sum_{i=1}^{j-1} f(h(i))+f(h(j)) \le \sum_{i=1}^{j-1} g(h(i))+g(h(j))$$

即：

$$\sum_{x\in X} f(x) \le \sum_{x\in X} g(x)$$

【i】

与（h）类似，使用归纳法证明。略

7.1.3

嫌麻烦!!! 略

7.1.4

$\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j}$

对 n 进行归纳。

$n=0$ 时，$(x+y)^0=1$。

又

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{0} \frac{0!}{j!(0-j)!} x^j y^{0-j} \\
&= \frac{0!}{0!(0-0)!} x^0 y^{0-0} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

故，$n=0$ 时，命题成立。

归纳假设 n 时，命题成立。

对 $n+1$，

$$
\begin{aligned}
&(x+y)^{n+1}\\
&=(x+y)^n(x+y)\\
&=(\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^jy^{n-j})(x+y)\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^{j+1}y^{n-j}+\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^jy^{n-j+1}\\
&=(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^{j+1}y^{n-j}+\sum_{j=n}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^{j+1}y^{n-j})\\
&+(\sum_{j=1}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^jy^{n-j+1}+\sum_{j=0}^{0}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^jy^{n-j+1})\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^{j+1}y^{n-j}+x^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^jy^{n-j+1}+y^{n+1}\\
&=\sum_{j=1}^{n}\frac{n!}{(j-1)!(n+1-j)!}x^jy^{n-j+1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^jy^{n-j+1}+x^{n+1}+y^{n+1}\\
&=(\sum_{j=0}^{n-1}(\frac{n!}{(j-1)!(n+1-j)!}+\frac{n!}{j!(n-j)!})x^jy^{n+1-j})+x^{n+1}+y^{n+1}\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}(\frac{n!j}{j!(n+1-j)!}+\frac{n!(n-j+1)}{j!(n-j+1)!})x^jy^{n+1-j}+x^{n+1}+y^{n+1}\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!}x^jy^{n+1-j}+x^{n+1}+y^{n+1}\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!}x^jy^{n+1-j}+\sum_{j=n+1}^{n+1}\frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!}x^jy^{n+1-j}+\sum_{j=0}^{0}\frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!}x^jy^{n+1-j}\\
&=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!}x^jy^{n+1-j}
\end{aligned}
$$

归纳完成，命题得证。

7.1.5

设 X 的基数为 K，通过对 K 进行归纳，来证明该命题。

归纳基始 $K=0$，有命题 7.1.11 可知，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{x\in X}a_n(x)$$
$$=\lim_{n\to\infty}0$$
$$=0$$

又因为

$$\sum_{x\in X}\lim_{n\to\infty}a_n(x)$$
$$=0$$

所以，$K=0$ 时，命题成立。

归纳假设 $K=k$ 时，命题成立。

$K=k+1$，取一个从 $\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le k+1\}$ 到 X 的双射 g，所以，

$$\sum_{x\in X}\lim_{n\to\infty}a_n(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{k+1}\lim_{n\to\infty}a_n(g(i))$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\lim_{n\to\infty}a_n(g(i))+\sum_{i=k+1}^{k+1}\lim_{n\to\infty}a_n(g(i))$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{x\in X-\{g(k+1)\}}a_n(x)+\sum_{i=k+1}^{k+1}\lim_{n\to\infty}a_n(g(i))$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{x\in X-\{g(k+1)\}}a_n(x)+\lim_{n\to\infty}a_n(g(k+1))$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sum_{x\in X-\{g(k+1)\}}a_n(x)+a_n(g(k+1))) \qquad \textbf{定理 6.1.19（a）}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sum_{x\in X-\{g(k+1)\}}a_n(x)+\sum_{i=k+1}^{k+1}a_n(g(i)))$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sum_{x\in X-\{g(k+1)\}}a_n(x)+\sum_{x\in\{g(k+1)\}}a_n(x))$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{x\in X}a_n(x)$$

归纳完成，命题得证。