19.2 习题

张志聪

2025 年 6 月 2 日

19.2.1

- (a)

  (1)

  因为 0 是从下方控制 f 的非负简单函数，因此可得

  $$0 \leq \int_{\Omega} f \leq +\infty$$

  (2)

  - $\Rightarrow$

    考虑集合

    $$A := \{x \in \Omega : f(x) > 0\}$$

    我们要证明这个集合的测度为零。

    对于任意的 $n \in \mathbb{N}^{+}$，定义

    $$A_n := \{x \in \Omega : f(x) > \frac{1}{n}\}$$

    显然 $A_n \subseteq A$，并且

    $$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

    因为在 A_n 上，$f(x) \geq \frac{1}{n}$，于是我们有

    $$\int_{\Omega} f \geq \int_{A_n} f \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} m(A_n) \geq 0$$

（注意没有用到 (c)，因为这个可以通过定义 19.2.2 和命题 19.1.10 推出）

通过题设可知，$\int_\Omega f = 0$，所以

$$\frac{1}{n}m(A_n) \leq 0$$

$$\implies$$

$$m(A_n) = 0$$

于是，我们有

$$m(A) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0$$

命题得证。

– $\Leftarrow$

设

$$A = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$$

由题设可知

$$m(A) = 0$$

于是由命题 19.1.10(a) 可知，对所有 s 是一个非负简单函数，并且 s 从下方控制 f 的函数，我们有

$$\int_\Omega s = 0$$

所以

$$\int_\Omega f = 0$$

- (b)

考虑集合

$$A = \{\int_\Omega s : s\text{是一个非负简单函数，并且 } s \text{ 是从下方控制 } f\}$$

$$B = \{\int_\Omega s : s\text{是一个非负简单函数，并且 } s \text{ 是从下方控制 } cf\}$$

对任意 s 从下方控制 f 时，cs 也从下方控制 cf（反之亦成立）。而且由命题 19.1.10(c) 可知，

$$\int_\Omega cs = c\int_\Omega s$$

于是可得

$$\begin{gathered} x \in A \\ \Leftrightarrow \\ cx \in B \end{gathered}$$

所以

$$\sup(B) = c\sup(A)$$

即：

$$\int_\Omega cf = c\int_\Omega f$$

- (c)

  考虑集合

  $$\begin{aligned} A &= \{\int_\Omega s : s\text{是一个非负简单函数，并且 } s \text{ 是从下方控制 } f\} \\ B &= \{\int_\Omega s : s\text{是一个非负简单函数，并且 } s \text{ 是从下方控制 } g\} \end{aligned}$$

  由题设可知，对任意 s 从下方控制 f 时，s 也从下方控制 g。于是可得

  $$x \in A \implies x \in B \implies A \subseteq B$$

  于是我们有

  $$sup(A) \le sup(B)$$

  即

  $$\int_\Omega f \le \int_\Omega g$$

- (d)

  考虑集合

  $$A := \{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$$

  有题设可知 $m(A) = 0$。

  对任意 $\epsilon > 0$，由定义 19.2.2（通过上确界的方式定义的）可知，存在一个非负简单函数 s，使得

  $$\int_\Omega f - \epsilon < \int_\Omega s$$

  定义一个 s' 从下方控制 g，

  $$s'(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A \\ s(x) & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

  于是可得

  $$\int_\Omega s' \leq \int_\Omega g$$

  令 $h = s - s'$，于是由命题 19.1.10(a) 可知

  $$\int_\Omega h = 0$$

  因为 $s = h + s'$，于是由命题 19.1.10(b) 可知

  $$\int_\Omega s = \int_\Omega h + \int_\Omega s' = \int_\Omega s'$$

  综上可得

  $$\int_\Omega f - \epsilon < \int_\Omega s' \leq \int_\Omega g$$

  由 ϵ 的任意性可得

  $$\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$$

  类似地，可得

  $$\int_\Omega g \leq \int_\Omega f$$

  所以

  $$\int_\Omega g = \int_\Omega f$$

- (e)

  命题有些错误，应该是：

  如果 $\Omega' \subseteq \Omega$ 是一个可测集，那么 $\int_{\Omega'} f = \int_\Omega f_{\chi_{\Omega'}} \le \int_\Omega f$，其中 $f_{\chi_{\Omega'}}$ 表示只在 Ω' 上保留 f 的值，其它地方为 0。

  (1) 先证明 f 是非负简单函数时，命题成立。

  因为在 Ω 上，$f \ge f_{\chi_{\Omega'}}$，由命题 19.1.10(d) 可得

  $$\int_\Omega f_{\chi_{\Omega'}} \le \int_\Omega f$$

  因为 f 是非负简单函数，设 $f(\Omega') = \{c_1, c_2, \cdots, c_N\}$，定义：

  $$E_j := \{x \in \Omega' : f(x) = c_j\}, \quad 1 \le j \le N$$

  这些集合两两不交，且 $\bigcup_{j=1}^N E_j = \Omega'$。由引理 19.1.9，$\int_{\Omega'} f$ 可表示为

  $$\int_{\Omega'} f = \sum_{j=1}^N c_j m(E_j)$$

  记 $E_0 = \Omega \setminus \Omega'$，由题设可知 E_0 是可测集（因为可以被 f^{-1} 表示出来，而且 f 是可测函数。），且与 $E_j, 1 \le j \le N$ 不相交，于是由引理 19.1.9，$\int_\Omega f_{\chi_{\Omega'}}$ 可表示为

  $$\begin{aligned}\int_\Omega f_{\chi_{\Omega'}} &= \sum_{j=0}^N c_j m(E_j) \\ &= 0 \times m(E_0) + \sum_{j=1}^N c_j m(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^N c_j m(E_j) \\ &= \int_{\Omega'} f\end{aligned}$$

  (2) f 是非负可测函数，命题成立。

  因为在 Ω 上，$f \ge f_{\chi_{\Omega'}}$，由 (c) 可得

  $$\int_\Omega f_{\chi_{\Omega'}} \le \int_\Omega f$$

对任意 $\epsilon > 0$，存在一个非负简单函数 s，并且从下方控制 f，使得

$$\int_{\Omega'} f - \epsilon < \int_{\Omega'} s$$

令

$$s'(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \Omega \setminus \Omega' \\ s(x) & \text{if } x \notin \Omega' \end{cases}$$

于是 s' 是一个非负简单函数，并且从下方控制 $f_{\chi_{\Omega'}}$，所以

$$\int_{\Omega} s' \leq \int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}}$$

又由 (1) 可知

$$\int_{\Omega'} s = \int_{\Omega} s'$$

综上可得

$$\int_{\Omega'} f - \epsilon < \int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_{\Omega'} f \leq \int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}}$$

类似的，存在一个非负简单函数 s，并且从下方控制 $f_{\chi_{\Omega'}}$，使得

$$\int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}} - \epsilon < \int_{\Omega} s$$

令

$$s'(x) = s(x) \quad x \in \Omega'$$

由于 s 是从下方控制 $f_{\chi_{\Omega'}}$，于是 $\Omega \setminus \Omega'$ 上 $s(x) = 0$，于是由 (1)，我们有

$$\int_{\Omega'} s' = \int_{\Omega} s$$

又因为 s' 从下方控制 f，所以

$$\int_{\Omega'} s' \leq \int_{\Omega'} f$$

综上可得

$$\int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}} - \epsilon < \int_{\Omega'} f$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}} \le \int_{\Omega'} f$$

综上，我们有

$$\int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}} = \int_{\Omega'} f$$

19.2.2

对任意 $\epsilon > 0$，存在非负简单函数 s_f, s_g，分别从下方控制 f, g，使得

$$\int_{\Omega} f - \frac{1}{2}\epsilon < \int_{\Omega} s_f$$

$$\int_{\Omega} g - \frac{1}{2}\epsilon < \int_{\Omega} s_g$$

因为

$$s_f(x) \le f(x)$$

$$s_g(x) \le g(x)$$

于是，我们有

$$(s_f + s_g)(x) \le (f + g)(x)$$

即非负简单函数 $s_f + s_g$ 从下方控制 $f + g$，于是我们有

$$\int_{\Omega} s_f + s_g \le \int_{\Omega} (f + g)$$

由命题 19.1.10 可知，

$$\int_{\Omega} s_f + s_g = \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} g$$

综上可得

$$\int_{\Omega} f + \int_{\Omega} g - \epsilon < \int_{\Omega} s_f + \int_{\Omega} s_g = \int_{\Omega} s_f + s_g \le \int_{\Omega} (f + g)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_{\Omega} f + \int_{\Omega} g \le \int_{\Omega} (f + g)$$

19.2.3

考虑序列 $(F_N)_{N=1}^{\infty}$，其中

$$F_N := \sum_{n=1}^{N} g_n$$

因为 f_n 都是非负可测函数，于是我们有

$$0 \leq F_1 \leq F_2 \leq \cdots$$

且有推论 18.5.7 可知，F_N 都是非负可测函数。于是利用定理 19.2.9，我们有

$$\int_{\Omega} \sup_N F_N = \sup_N \int_{\Omega} F_N$$

因为 $(F_N)_{N=1}^{\infty}$ 是单调的递增序列，于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n = \lim_{N\to\infty} F_N = \sup_N F_N$$

（第二个等式的证明在 19-2-comment.tex 中有）
于是

$$\int_{\Omega} \sup_N F_N = \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} g_n$$

同理可得（考虑 $\int_{\Omega} F_N = \sum_{n=1}^{N} \int_{\Omega} g_n$），

$$\sup_N \int_{\Omega} F_N = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} g_n$$

综上，我们有

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} g_n$$