

19.1 习题

张志聪

2025 年 6 月 1 日

19.1.1

(1)

因为 f 是简单函数, 设 $f(\Omega) = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, 定义:

$$E_j := \{x \in \Omega : f(x) = c_j\}, \quad 1 \leq j \leq N$$

这些集合两两不交, 且 $\bigcup_{j=1}^N E_j = \Omega$ 。

同理, 设 $g(\Omega) = \{d_1, d_2, \dots, d_M\}$, 定义:

$$X_k := \{x \in \Omega : g(x) = d_k\}, \quad 1 \leq k \leq M$$

这些集合也两两不交, 且 $\bigcup_{k=1}^M X_k = \Omega$ 。

考虑集合:

$$W := \{W_{j,k} := E_j \cap X_k : 1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq M\}$$

由于交集运算, $W_{j,k}$ 两两不交, 且它们的并集仍为 Ω , 因此 W 构成了 Ω 的一个有限划分。

对任意 $x \in \Omega$, 存在唯一的 j, k 使得 $x \in W_{j,k}$, 此时有:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = c_j + d_k$$

因为 $c_j + d_k$ 的可能取值至多为 $N \times M$ 个有限个数, 所以 $f+g$ 的取值是有限的。

因此, $f+g$ 是简单函数。

(2)

特别地 cf 也是简单函数。此时 $cf(\Omega) = \{c \times c_1, c \times c_2, \dots, c \times c_N\}$, 满足简单函数的定义。

19.1.2

因为 f 是简单函数, 设 $f(\Omega) = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, 定义:

$$E_j := \{x \in \Omega : f(x) = c_j\}, \quad 1 \leq j \leq N$$

这些集合两两不交, 且 $\bigcup_{j=1}^N E_j = \Omega$ 。

因为 f 是可测函数, 所以对任意 $1 \leq j \leq N$, $f^{-1}(c_j) = E_j$ 都是可测集合。

对于任意 $x \in \Omega$, 存在 E_j 使得 $x \in E_j$, 此时 $f(x) = c_j$, 又因为对

$$\sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x)$$

当 $i \neq j$ 时, 由特征函数的定义可知 $c_i \chi_{E_i} = 0$;

当 $i = j$ 时, 由特征函数的定义可知 $c_i \chi_{E_i} = c_j$;

所以

$$\sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x) = c_j$$

综上所述可得

$$f(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x)$$

由 x 的任意性可知, $f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}$

19.1.3

设 $(f_n)_{n=1}^\infty$ 是函数序列, 其中 $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sup\{\frac{j}{2^n} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^n} \leq \min(f(x), 2^n)\}$$

接下来证明该序列是否满足所需的性质。

(1) 证明 $f_1(x) \geq 0$ 。

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sup\{\frac{j}{2^1} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^1} \leq \min(f(x), 2^1)\} \\ &= \sup\{\frac{j}{2} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2} \leq \min(f(x), 2)\} \end{aligned}$$

因为 f 是非负的, 所以 $\min(f(x), 2) \geq 0$ 。

现在证明 $f_1(x) \geq 0$, 反证法, 假设 $f_1(x) < 0$, 即

$$f_1(x) = \sup\{\frac{j}{2} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2} \leq \min(f(x), 2)\} < 0$$

当 $j = 0$ 时, $0 \in \{\frac{j}{2} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2} \leq \min(f(x), 2)\}$, 这与上确界 $f_1(x) < 0$ 矛盾, 假设不成立。

(2) 证明 $(f_n)_{n=1}^\infty$ 序列是递增的, 即 $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ 。

我们有

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sup\{\frac{j}{2^n} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^n} \leq \min(f(x), 2^n)\} \\ f_{n+1}(x) &= \sup\{\frac{j}{2^{n+1}} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^{n+1}} \leq \min(f(x), 2^{n+1})\} \end{aligned}$$

因为 $2^n < 2^{n+1}$, 所有

$$\min(f(x), 2^n) \leq \min(f(x), 2^{n+1})$$

反证法, 假设 $f_n(x) > f_{n+1}(x)$, 即存在 $y \in \{\frac{j}{2^n} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^n} \leq \min(f(x), 2^n)\}$ 使得

$$y > f_{n+1}(x)$$

y 可表示成 $\frac{j_0}{2^n}$ 的形式, 即 $y = \frac{j_0}{2^n}$, 于是我们有

$$\frac{j_0}{2^n} > f_{n+1}(x)$$

于是可得

$$\frac{j_0}{2^n} \leq \min(f(x), 2^n) \leq \min(f(x), 2^{n+1})$$

这表明 $\frac{j_0}{2^n} = \frac{2j_0}{2^{n+1}} \in \{\frac{j}{2^{n+1}} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^{n+1}} \leq \min(f(x), 2^{n+1})\}$, 于是存在矛盾。

(3) 证明 $(f_n)_{n=1}^\infty$ 序列逐点收敛于 f 。

对任意 $x_0 \in \Omega, \epsilon > 0$ 。我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$$

因为 $f(x_0)$ 是定值, 所以存在 $N \geq 1$ 使得只要 $n \geq N$, 就有

$$2^n \geq f(x_0)$$

于是可得, 当 $n \geq N$ 时,

$$\min(f(x_0), 2^n) = f(x_0)$$

存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $\frac{k}{2^n} \leq f_n(x_0) < \frac{k+1}{2^n}$ (参考习题 5.5.2), 又有

$$\begin{aligned} \frac{k}{2^n} &\in \left\{ \frac{j}{2^n} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^n} \leq \min(f(x_0), 2^n) = f(x_0) \right\} \\ \frac{k+1}{2^n} &> \min(f(x_0), 2^n) = f(x_0) \end{aligned}$$

综上可得, 存在 $n \geq N$ 使得

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{2^n}$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

所以存在 $N' \geq N$, 使得

$$\frac{1}{2^n} < \epsilon$$

综上, 对任意 $x_0 \in \Omega, \epsilon > 0$, 存在 N' , 使得只要 $n \geq N'$, 就有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

所以 $(f_n)_{n=1}^\infty$ 序列逐点收敛于 f 。