17.2 习题

张志聪

2025 年 5 月 7 日

17.2.1

- (a) $\implies$ (b)

  f 在 x_0 处可微，所以由牛顿逼近法（命题 10.1.7）可得，对任意的 $\epsilon > 0$ 都存在一个 $\delta > 0$ 使得，只要 $x \in E$ 且 $|x - x_0| \le \delta$，就有

  $$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \le \epsilon |x - x_0|$$

  令函数 $h : E - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ 为 $h(x) = \frac{|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))|}{|x - x_0|}$，所以（因为符合定义 9.3.6）

  $$\lim_{x \to x_0; x \in E - \{x_0\}} h(x) = 0$$
  $$\lim_{x \to x_0; x \in E - \{x_0\}} \frac{|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))|}{|x - x_0|} = 0$$

- (b) $\implies$ (a)

  $$\lim_{x \to x_0; x \in E - \{x_0\}} \frac{|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))|}{|x - x_0|} = 0$$

  那么，对任意 $\epsilon > 0$ 都存在一个 $\delta > 0$ 使得，只要 $x \in E - \{x_0\}$ 且 $|x - x_0| \le \delta$，就有

  $$\left| \frac{|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))|}{|x - x_0|} - 0 \right| \le \epsilon$$
  $$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \le \epsilon |x - x_0|$$

  特别地，$x = x_0$ 时，$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \le \epsilon |x - x_0|$ 也成立。由命题 10.1.7（牛顿逼近法）可知 (a) 成立。

17.2.2 $\circledast$

反证法，如果 $L_1 \neq L2$，那么存在一个向量 v 使得 $L_1 v \neq L_2 v$。这个向量 v 一定不是零向量（因为由线性变换的可加性，对任意的线性变换 T，都有 $T(0) = 0$）。

由 f 在 x_0 处可微，那么对任意 $\epsilon = \frac{\|L_1(v) - L_2(v)\|}{2\|v\|} > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得只要 $|x - x_0| \leq \delta$，就有

$$\frac{\|f(x) - f(x_0 - L_1(x - x_0))\|}{\|x - x_0\|} < \epsilon$$
$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} < \epsilon$$

令 $x = x_0 + tv$（t 是标量），使得 $\|x - x_0\| < \delta$。

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - L_1(tv)\|}{\|tv\|} < \epsilon$$
$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - L_2(tv)\|}{\|tv\|} < \epsilon$$

因为

$$\begin{aligned}\|L_1(tv) - L_2(tv)\| &= \|L_1(tv) - (f(x) + f(x_0)) + (f(x) + f(x_0)) - L_2(tv)\| \\ &\leq \|L_1(tv) - (f(x) + f(x_0))\| + \|(f(x) + f(x_0)) - L_2(tv)\|\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{\|L_1(tv) - L_2(tv)\|}{\|tv\|} = \frac{\|L_1(v) - L_2(v)\|}{\|v\|} \\ &\leq \frac{\|f(x) - (f(x_0) + L_1(tv))\|}{\|tv\|} + \frac{\|f(x) - (f(x_0) + L_2(tv))\|}{\|tv\|} \\ &\leq 2\epsilon = \frac{\|L_1(v) - L_2(v)\|}{\|v\|}\end{aligned}$$

存在矛盾。