17.4 习题

张志聪

2025 年 5 月 11 日

17.4.1

先证明可微性，再证明导数作为关于 $\mathbb{R}^n$ 的函数是连续的。

设 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性变换，令 $L = T$，于是，对任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|T(x) - T(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &= \lim_{x \to x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|T(x - x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\
&= \lim_{x \to x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|T(x - x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\
&= \lim_{x \to x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{0}{\|x - x_0\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以 T 在 x_0 处是可微的，并且导数为 T。而且引理 17.2.4 也保证了导数的唯一性。

又由 x_0 的任意性可知，T 在任意一点 x 处的导数都是 T，即 $T'(x) = x$，可见导数函数是定值，所以其是连续的。

17.4.2

要证明 f 在 x_0 连续，我们需要证明

$$\lim_{x \to x_0; x \in E - \{x_0\}} f(x) = f(x_0)$$

对任意 $\epsilon > 0$，由于 f 在 x_0 处的可微性可知，存在 $\delta > 0$，使得只要 $\|x - x_0\| \le \delta, x \in E - \{x_0\}$，就有

$$\begin{aligned}
\frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &< \epsilon \\
\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| &< \epsilon\|x - x_0\| \\
\|f(x) - f(x_0)\| - \|f'(x_0)(x - x_0)\| \le \|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| &< \epsilon\|x - x_0\| \\
\|f(x) - f(x_0)\| - \|f'(x_0)(x - x_0)\| &< \epsilon\|x - x_0\| \\
\|f(x) - f(x_0)\| &< \epsilon\|x - x_0\| + \|f'(x_0)(x - x_0)\|
\end{aligned}$$

因为 x_0 是 E 的内点，于是 $B(x_0, min(\delta, \epsilon)) \subseteq E$，令 $x \in B(x_0, min(\delta, \epsilon))$。又由习题 17.1.4 可知，存在 $M > 0$，使得 $\|f'(x_0)(x - x_0)\| \le M\|x - x_0\|$，于是，我们有

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(x_0)\| &< \epsilon\|x - x_0\| + \|f'(x_0)(x - x_0)\| \\
&\le \epsilon^2 + M\epsilon
\end{aligned}$$

M 是定值和 ϵ 的任意性可知，f 在 x_0 处连续。

17.4.3

不妨设 $g'(f(x_0)) = L_1, f'(x_0) = L_2$。

按照可微性的定义（定义 17.2.2），我们需要证明

$$\lim_{x \to x_0; x \in E - \{x_0\}} \frac{\|g \circ f(x) - g \circ f(x_0) - L_1 L_2 (x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

因为 g 在 $f(x_0)$ 处可微，于是对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $\|y - f(x_0)\| < \delta$，就有

$$\frac{\|g(y) - g(f(x_0)) - L_1(y - f(x_0))\|}{\|y - f(x_0)\|} < \epsilon$$

又 f 在 x_0 处可微，由习题 17.4.2 可知，f 在 x_0 处连续，所以，存在 $\delta_f > 0$，使得只要 $\|x - x_0\| < \delta_f$，就有

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \delta$$

综上，当 $\|x-x_0\|<\delta_f$，我们有

$$\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-L_1(y-f(x_0))\|}{\|f(x)-f(x_0)\|}<\epsilon \tag{1}$$

f 在 x_0 处可微，存在 $\delta'>0$，使得只要 $|x-x_0|<min(\delta_f,\delta')|$，就有

$$\frac{\|f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}<\epsilon \tag{2}$$

取 $\delta=min(\delta_f,\delta'),\|x-x_0\|<\delta$，式（1）（2）同时成立。

对任意 $v\in R^m,w\in R^n$，由习题 17.1.4 可知，存在 $M_1,M_2>0$ 使得

$$\|L_1v\|\leq M_1\|v\|$$
$$\|L_2w\|\leq M_2\|w\|$$

当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\|g\circ f(x)-g\circ f(x_0)-L_1L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}\\
&=\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-L_1L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}\\
&=\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-L_1(f(x)-f(x_0))+L_1(f(x)-f(x_0))-L_1L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}\\
&\leq\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-L_1(f(x)-f(x_0))\|}{\|x-x_0\|}+\frac{\|L_1(f(x)-f(x_0))-L_1L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}\\
&=\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-L_1(f(x)-f(x_0))\|}{\|x-x_0\|}+\frac{\|L_1[f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)]\|}{\|x-x_0\|}\\
&\leq\frac{\epsilon\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}+\frac{M_2\|f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}\\
&\leq\frac{\epsilon\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}+\frac{M_2\epsilon\|x-x_0\|}{\|x-x_0\|}\\
&=\frac{\epsilon\|f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)+L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}+M_2\epsilon\\
&\leq\frac{\epsilon\|f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)\|+\epsilon\|L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}+M_2\epsilon\\
&\leq\frac{\epsilon^2\|x-x_0\|+\epsilon M_1\|x-x_0\|}{\|x-x_0\|}+M_2\epsilon\\
&=\epsilon(\epsilon+M_1+M_2)
\end{aligned}$$

由 ϵ 是任意的，M_1,M_2 是定值，所以

$$\lim_{x\to x_0;x\in E-\{x_0\}}\frac{\|g\circ f(x)-g\circ f(x_0)-L_1L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}=0$$

命题得证。

17.4.4