

11.3 习题

张志聪

2024 年 12 月 22 日

11.3.1

- f 从上方控制 g ，于是由定义 11.3.1 可知，对任意 $x \in I$ 都有 $f(x) \geq g(x)$ ， g 从上方控制 h ，类似的，对任意 $x \in I$ 都有 $g(x) \geq h(x)$ ，于是对任意 $x \in I$ 都有 $f(x) \geq h(x)$ ，再次利用定义 11.3.1， f 从上方控制 h
- f 从上方控制 g ，于是由定义 11.3.1 可知，对任意 $x \in I$ 都有 $f(x) \geq g(x)$ ； g 从上方控制 f ，于是由定义 11.3.1 可知，对任意 $x \in I$ 都有 $g(x) \geq f(x)$ ；综上，对任意 $x \in I$ ，都有，

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

于是可得 $f(x) = g(x)$ ，由函数相等的定义可知 $f = g$ 。

11.3.2

- $f + h$ 是否从上方控制 $g + h$?

是；证明略

- $f \cdot h$ 是否从上方控制 $g \cdot h$?

否；反例 $f(x) = 1, g(x) = -1, h(x) = -1$ ，此时，

$$f \cdot h = -1$$

$$g \cdot h = 1$$

于是任意 $x \in I$ 都有 $(f \cdot h)(x) < (g \cdot h)(x)$, $f \cdot h$ 从上方控制 $g \cdot h$ 不成立。

- cf 是否从上方控制 cg ?

否; 把上面的反例中的 $h(x) = -1$ 看做 $c = -1$ 。

11.3.3