

## 3.6 习题

2024 年 3 月 24 日

### 3.6.1

证明.

①  $X$  和  $X$  有相等的基数。

构造一个从  $X$  到  $X$  的函数  $f$ , 使得  $f(x)=x$  ( $\{x \in X\}$ )。函数  $f$  是双射函数, 是显而易见的, 这里不做证明了。

② 如果  $X$  和  $Y$  有相等的基数, 那么  $Y$  和  $X$  有相等的基数。

有  $X$  和  $Y$  有相等的基数, 可知存在一个双射:  $f: X \rightarrow Y$ 。那么存在  $f$  的逆  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , 由逆的定义可知  $f^{-1}$  是双射函数。

③ 如果  $X$  和  $Y$  有相等的基数且  $Y$  和  $Z$  有相等的基数, 那么  $X$  和  $Z$  有相等的基数。

由  $X$  和  $Y$  有相等的基数, 可知存在一个双射:  $f: X \rightarrow Y$ 。由  $Y$  和  $Z$  有相等的基数, 可知存在一个双射:  $g: Y \rightarrow Z$ 。那么  $g$  和  $f$  的复合函数为  $g \circ f: X \rightarrow Z$ 。

由习题 3.3.7 可知  $g \circ f$  是双射函数。由此可知存在一个双射:  $g \circ f: X \rightarrow Z$ , 所以  $X$  和  $Z$  有相等的基数。

### 3.6.2

证明.

① 充分性: 一个集合  $X$  的基数为  $0$ , 则  $X$  是空集。

那么存在从  $X$  到  $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$  的双射:  $f: X \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$ 。而  $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$  是  $\emptyset$ , 即  $f: X \rightarrow \emptyset$ 。如果  $X$  不是空集, 那么则存在一个  $x \in X$  使得  $f(x) \in \emptyset$ , 这显然是不成立的, 所以  $X$  是空集

② 必要性:  $X$  是空集, 则  $X$  的基数为  $0$ 。

若  $X$  是空集, 由习题 3.3.3 知  $f: \emptyset \rightarrow \emptyset$  为双射, 而  $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\} = \emptyset$ , 即存在双射函数  $f: \emptyset \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$ , 由定义 3.6.5 可知集合  $X$  基数为 0.

### 3.6.3

证明.

对  $n$  进行归纳:

$n=0$  时,  $f$  是空函数, 命题空成立。

归纳假设  $n=k$  时, 命题成立。

下面我们证明该命题对于  $k++$  也为真。设集合  $N_k = \{i \in N: 1 \leq i \leq k\}$ ,  $N_{k++} = \{i \in N: 1 \leq i \leq k++\}$ 。函数  $f_{k++}: N_{k++} \rightarrow N$  是一个函数, 我们可以由  $f_{k++}$  定义出一个函数  $f_k: N_k \rightarrow N$ , 对任意  $i \in N_k$ ,  $f_k(i) = f_{k++}(i)$ 。由归纳假设可知, 存在一个自然数  $M$  使得  $f_k(i) \leq M, i \in N_k$ , 即  $f_{k++}(i) \leq M, i \in N_k$ , 此时我们可以取  $f_{k++}(k++), M$  中的较大值为  $M'$ , 由此可知该  $M'$  使得  $f_{k++}(i) \leq M', i \in N_{k++}$ 。归纳法完成。

### 3.6.4

(a) 设  $X$  是一个有限集, 设  $x$  是一个对象并且  $x$  不是  $X$  中的元素。那么  $X \cup \{x\}$  是有限的, 且  $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$

证明.

$X$  是有限集, 不妨设  $X$  的基数是自然数  $n$ 。因此存在从  $X$  到  $\{i \in N: 1 \leq i \leq n\}$  的双射函数  $f$ 。定义出一个函数  $g: X \cup \{x\} \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq n+1\}$ , 使得  $g(x) = n+1$ ,  $g(i) = f(i), i \in X$ 。由  $g$  的定义可知其是双射函数, 且  $X \cup \{x\}$  的基数是  $n+1$ , 所以  $X \cup \{x\}$  是有限的, 且  $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$

(b) 设  $X$  和  $Y$  都是有限集, 那么  $X \cup Y$  是有限的, 且  $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$ 。另外, 如果  $X$  和  $Y$  是不相交的 (即  $X \cap Y = \emptyset$ ), 那么  $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$

证明.

$X$  和  $Y$  都是有限集, 不妨设  $X$  和  $Y$  的基数分别为  $m$  和  $n$ 。通过对  $n$  进行归纳, 完成证明:

$n=0$  时, 即  $Y$  的基数是 0, 也就是说  $Y = \emptyset$ ,  $X \cup Y = X \cup \emptyset = X$ , 此时 (b) 命题显然是成立的。

归纳假设  $n=k$  时, (b) 命题成立。

现在需证明  $n=k++$ , 任取  $x \in Y, Z = Y \setminus \{x\}$ , 由引理 3.6.9 可知,  $Z$  的基数为  $k$ , 由归纳假设可知,  $X$  与  $Z$  满足命题 (b), 由此可知  $X \cup Z$  是有限的;

$$X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\}.$$

①  $X \cap Y = \emptyset$ , 由此可知  $x \notin X \cup Z$ , 且由归纳假设知  $\#(X \cup Z) = \#(X) + \#(Z)$ 。由命题 (a) 可知  $X \cup Z \cup \{x\}$  是有限的, 且  $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$ , 即  $X \cup Y$  是有限的, 且  $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 = \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$ , 即  $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$ ;

②  $X \cap Y \neq \emptyset$

如果  $x \in X \cup Z$  则  $X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\} = X \cup Z$ , 即  $X \cup Y = X \cup Z$  由于同一集合只有一个基数, 所以  $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z)$ , 又由归纳假设可知  $\#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Z)$ , 所以  $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$ 。

如果  $x \notin X \cup Z$ , (由  $X \cap Y \neq \emptyset$ , 则必须  $X \cap Z \neq \emptyset$  否则与假设矛盾, 所以  $\#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Z)$ ) 由命题 (a) 可知  $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$ , 即  $X \cup Y$  是有限的, 且  $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 \leq \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$ , 即  $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$ ;

综上,  $n=k++$  情况也成立, 至此, (b) 命题成立。

(c) 设  $X$  是一个有限集,  $Y$  是  $X$  的一个子集。那么  $Y$  是有限的, 且  $\#(Y) \leq \#(X)$ 。另外, 如果  $Y \neq X$  (即  $Y$  是  $X$  的一个真子集), 那么我们有  $\#(Y) < \#(X)$ 。

证明.

对  $X$  的基数进行归纳。

$X$  的基数为  $0$ , 即  $X = \emptyset$ , 此时  $Y$  是  $X$  的子集, 则  $Y = \emptyset$ , 很明显  $Y$  是有限的 (基数是  $0$ ), 且  $\#(Y) \leq \#(X)$ 。而命题的后半部分, 因为空集不存在真子集, 所以空成立。

归纳假设  $n=k$  时,  $X$  的基数为  $k$ , 命题 (c) 成立。

现需证明  $n=k++$ , 命题 (c) 成立。若  $Y = X$  显然  $\#(Y) \leq \#(X)$ ; 若  $Y \neq X$ , 则存在  $x \in X$ , 使得  $Y \subseteq (X \setminus x)$ , 由归纳假设可知  $\#(Y) \leq \#(X \setminus x)$ , 由引理 3.6.9 可知  $\#(Y) < \#(X)$ 。

综上命题 (c) 成立。

(d) 如果  $X$  是一个有限集, 并且  $f: X \rightarrow Y$  是一个函数, 那么  $f(X)$

是一个有限集并且满足  $\#(f(X)) \leq \#(X)$ 。另外，如果  $f$  是一对一的，那么  $\#(f(X)) = \#(X)$ 。

**证明.**

对  $X$  的基数  $n$  进行归纳；

归纳基始  $n=0$ ，即  $X = \emptyset$ ，由定义 3.4.1 (集合的像) 可知  $f(X) = \emptyset$ ，即  $\#(f(X)) = 0$ ，此时命题 (d) 成立

$n=k++$  时，设  $X' = X \setminus \{x\}$ ，由归纳假设可知  $\#(f(X')) \leq \#(X')$ ，

①  $f(X') = f(X)$ ，则  $\#(f(X)) = \#(f(X')) \leq \#(X') < \#(X)$ 。此时  $f$  不是双射，命题后半部分空成立。

②  $f(X') \subsetneq f(X)$  则  $f(x) \notin f(X')$ ，且  $f(X) = f(X') \cup f(x)$ ，由命题 (a) 可知  $\#(f(X)) = \#(f(X')) + 1$ ，有  $\#(X) = \#(X') + 1$ ，所以由归纳假设  $\#(f(X')) \leq \#(X')$  可知  $\#(f(X')) + 1 \leq \#(X') + 1$ ，即  $\#(f(X)) \leq \#(X)$ ；若  $f$  是一对一的，则  $X' \setminus \{x\} \rightarrow Y \setminus \{f(x)\}$  也是一对一，由归纳假设知  $\#(f(X')) = \#(X')$ ，由此可知  $\#(f(X')) + 1 = \#(X') + 1$ ， $\#(f(X)) = \#(X)$ 。综上， $n=k++$  时命题 (d) 成立。

至此，命题成立

(e) 设  $X$  和  $Y$  都是有限集，那么笛卡尔积  $X \times Y$  是有限的并且  $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$ 。

**证明.**

设  $X, Y$  的基数分别为  $n, m$ ，对  $n$  进行归纳。

归纳基始  $n=0$ ，即  $X$  是空集，有笛卡尔积的定义可知， $X \times Y = \emptyset$ ，由此可知  $\#(X \times Y) = 0$ ，且  $X \times Y$  是有限的。又  $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y) = 0$ ，所以  $n=0$  时，命题 (e) 成立。

$n=k++$  时，设对任意  $x \in X$ ，构造  $X' = X \setminus \{x\}$ ，由习题 3.5.5 可知  $X \times Y = (X' \cup \{x\}) \times (Y \cup Y) = (X' \times Y) \cup (\{x\} \times Y)$ ，由笛卡尔积的定义可知  $(X' \times Y) \cap (\{x\} \times Y) = \emptyset$ ，由 (b) 可知， $\#((X' \times Y) \cup (\{x\} \times Y)) = \#(X' \times Y) + \#(\{x\} \times Y)$  由归纳假设可知  $\#(X' \times Y) = \#(X') \times \#(Y)$ ，现在只需证明  $\#(\{x\} \times Y) = \#(Y)$ ，命题就能完成证明。(在直觉上是显然的，但为了严谨性，还是需要证明)，要想证明基数相同，按照定义 3.6.1 只需找到从  $(\{x\} \times Y)$  到  $Y$  的一个双射函数  $f: (\{x\} \times Y) \rightarrow Y$ 。可以定义  $f$  如下： $f((x, y)) = y, (x, y) \in (\{x\} \times Y)$ ，这里的  $f$  是双射性是显然的，为了简洁不做说明了。由此可知  $\#(X \times Y) = \#(X' \times Y) + \#(\{x\} \times Y) = \#(X' \times Y) + \#(Y)$

$= \#(X') \times \#(Y) + \#(Y) = (\#(X') + +) \times \#(Y) = \#(X) \times \#(Y)$ ,  $n=k++$  时命题 (e) 成立。

至此归纳完成, 命题 (e) 得到证明。

(f) 设  $X$  和  $Y$  都是有限集, 那么集合  $Y^X$  (在公理 3.10 中被定义) 是有限的, 并且  $\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$

**证明.**

公理 3.10 中对幂集公理的定义, 很难定量分析, 我们使用其他公理对幂集公理重新定义。

$I$  为一个集合, 并对每一个元素  $y_0 \in I$  均有一个集合  $A_{y_0}$ ,  $A_{y_0} = \{f \text{ 是 } X \text{ 到 } Y \text{ 的函数}, f(x_0) = y_0\} : y_0 \in Y\}$  幂集定义如下:  $W = \bigcup_{y \in I} A_y = \bigcup \{A_y : y \in I\}$

现在需要证明该定义和幂集公理的等价性。

$f \in W \Leftrightarrow$  存在  $y \in I$  使得  $f \in A_y$ , 由此可知  $f$  是  $X$  到  $Y$  的函数, 所以  $f \in Y^X$ 。

$f \in Y^X$ , 由于  $f$  是  $X$  到  $Y$  的函数, 则对  $x_0 \in X$  有  $y = f(x_0)$ ,  $y \in Y$ , 所以  $f \in A_y$ , 所以  $f \in W$ 。

综上可证该定义和幂集公理的等价性。

设  $X, Y$  的基数分别为  $n, m$ , 通过对  $n$  进行归纳, 证明该命题。

归纳基始  $n=0$ , 即  $X = \emptyset$ , 而  $f : \emptyset \rightarrow Y$  的函数, 由函数相等的定义可知是唯一的, 所以  $\#(Y^X) = 1, \#(Y)^{\#(X)} = m^0 = 1$ , 由此可知  $\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$ , 在  $n=0$  时命题 (f) 成立

$n=k++$  时, 设  $X' = X \setminus \{x_0\}, x_0 \in X$ , 证明  $\#(A_{y_0}) = \#(Y^{X'})$ , 函数  $G : A_{y_0} \rightarrow Y^{X'}$ , 定义如下:  $g = G(f), x \in X', f(x) = g(x)$ 。

证明函数  $G$  的定义是合法, 即证明  $g$  的唯一性, 假设存在  $g$  满足定义, 即对任意  $f \in A_{y_0}$ , 存在  $g'(x) = f(x) = g(x)$ , 由函数相等的定义可知  $g = g'$ ,  $g$  的唯一性得证。

证明  $G$  是双射的, 先证明单射, 如果  $G$  不是单射, 则存在  $f_1 \neq f_2$ , 有相同的函数值  $g$ , 由于  $f_1 \neq f_2$  所以存在  $x \in X', f_1(x) \neq f_2(x)$ , 有  $G$  的定义可知  $g(x) = f_1(x) = f_2(x)$ , 这与  $f_1(x) \neq f_2(x)$  矛盾, 所以  $G$  是单射。

证明  $G$  是满射的, 对任意函数值  $g \in Y^{X'}$ , 可以定义出一个函数  $f : X \rightarrow Y, f(x_0) = y, f(x) = g(x)$ , 该函数  $f \in A_{y_0}$ , 所以  $G$  是满射的。

由此可知  $\#(A_{y_0}) = \#(Y^{X'}) = m^k$

由  $A_y$  的定义方式可知是不相交的, 即对任意  $y_0 \neq y_1, A_{y_0} \cap A_{y_1} = \emptyset$ , 由 (b) 可知  $\#(W) = \sum_{y \in I} \#(A_y) = m \times \#(Y^{X'}) = m \times (m^k) = m^{k++}$ , 由此可知  $n=k++$  命题 (f) 也成立。

至此命题 (f) 成立。

### 3.6.5

证明.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \quad (1)$$

$$B \times A = \{(b, a) : b \in B, a \in A\} \quad (2)$$

现在定义函数  $f : A \times B \rightarrow B \times A, f(a, b) := (b, a)$ 。

接下来要证明  $f$  的双射性 (为了简洁不做说明了)。

由命题 3.6.14 可知

$$\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B) \quad (3)$$

$$\#(B \times A) = \#(B) \times \#(A) \quad (4)$$

又因为  $A \times B, B \times A$  之间存在一个双射  $f$ , 所以两个集合之间有相同的基数, 由此通过 (3) (4) 可知  $\#(A) \times \#(B) = \#(B) \times \#(A)$

### 3.6.6

证明.

①构造双射

由公理 3.10 (幂集公理) 可知,

$$(A^B)^C = \{f : f \text{ 是一个定义域为 } C, \text{ 值域为 } A^B \text{ 的函数}\} \quad (5)$$

$$A^{B \times C} = \{g : g \text{ 是一个定义域为 } B \times C, \text{ 值域为 } A \text{ 的函数}\} \quad (6)$$

定义函数  $G : (A^B)^C \rightarrow A^{B \times C}$  如下:  $G(f) := g, f, g$  满足以下性质: 对任意  $b \in B, c \in C$  有  $[f(c)](b) = g(b, c)$

现需证明  $G$  是满足函数定义的, 对相同的输入只存在唯一的函数值。

函数  $f$  对任意  $b \in B, c \in C$  存在  $g, g'$  使得  $[f(c)](b) = g(b, c) = g'(b, c)$ , 对任意  $b \in B, c \in C, g(b, c) = g'(b, c)$  通过函数相等的定义可知  $g = g'$ 。

现需证明  $G$  是双射函数。对任意  $f \neq f'$ ,

$$[f(c)](b) = g(b, c) \quad (7)$$

$$[f'(c)](b) = g'(b, c) \quad (8)$$

由于  $f \neq f'$  所以存在  $(b', c')$  使得  $f(b', c') \neq f'(b', c')$ , 可得  $g(b', c') \neq g'(b', c')$ , 所以  $g \neq g'$ , 所以  $G$  是单射函数。

$g \in A^{B \times C}$ , 对某个  $c_0 \in C$  我们定义函数  $h_0 : B \rightarrow A, h_0(b) := g(b, c_0)$ ; 再对每个  $c \in C$  我们定义函数  $f : C \rightarrow A^B, f(c) := h_c$ 。此时对任意  $c \in C, b \in B$  有  $[f(c)](b) = h_c(b) = g(b, c)$ 。故  $G(f) = g$ 。故  $G$  是满射的

$$\textcircled{2} (a^b)^c = a^{bc}$$

设  $A, B, C$  的基数分别为  $a, b, c$ , 由命题 3.6.14 可知

$$\#((A^B)^C) = \#(A^B)^{\#(C)} = (\#(A)^{\#B})^{\#(C)} = (a^b)^c \quad (9)$$

$$\#(A^{B \times C}) = \#A^{\#(B \times C)} = \#A^{\#(B) \times \#(C)} = a^{bc} \quad (10)$$

又  $(A^B)^C, A^{B \times C}$  基数相同, 所以  $(a^b)^c = a^{bc}$

$$\textcircled{3} a^b \times a^c = a^{b+c}$$

通过构造明确的双射来证明: 集合  $A^B \times A^C$  和集合  $A^{B \cup C}$  有相同的基数。由公理 3.10 (幂集公理) 和定义 3.5.4 (笛卡尔积) 可知

$$A^B \times A^C = \{(f, f') : f \in A^B, f' \in A^C\} \quad (11)$$

$$A^{B \cup C} = \{g : g \text{ 是定义域为 } B \cup C \text{ 值域为 } A \text{ 的函数}\} \quad (12)$$

定义函数  $G : A^B \times A^C \rightarrow A^{B \cup C}$  如下:

$G(f, f') := g$ ,  $f, f', g$  满足如下性质: 对任意  $b \in B, c \in C$  有