5.1 习题

2024 年 5 月 18 日

5.1.1

证明：

由柯西序列的定义可知，设 $\epsilon = 1 > 0$，则存在一个 $N \geq 0$ 使得 $d(a_j, a_k) \leq \epsilon$ 对所有的 $j, k \geq N$ 均成立。由此可以把柯西序列看成两个部分，

$$a_1, a_2, a_2, ..., a_{N-1}$$
$$(a_n)_{n=N}^{\infty}$$

有引理 5.1.14（有限序列是有界的）可知对于序列 $a_1, a_2, a_2, ..., a_{N-1}$ 是有界的，即存在有理数 $M \geq 0$ 使得该序列以 M 为界。

对于序列 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$，该序列也是有界的，因为由 $d(a_j, a_k) \leq \epsilon$ 对所有的 $j, k \geq N$ 均成立，取 $j = N, i \geq N$ 可知，

$$d(a_N, a_i) \leq \epsilon$$
$$|a_N - a_i| \leq \epsilon$$
$$|a_i| - |a_N| \leq |a_N - a_i| \leq \epsilon$$
$$|a_i| \leq |a_N| + \epsilon$$

由 i 的任意性可得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是有界的，

综上，序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有界的。