11.4 注释

张志聪

2024 年 12 月 24 日

说明 1. 设 $\epsilon > 0$，由 $\int_I f = \underline{\int}_I f$ 可知，存在一个分段常数函数函数 $\underline{f} : I \to \mathbb{R}$ 在 I 上从下方控制 f，并且有

$$\int_I \underline{f} \geq \int_I f - \epsilon$$

反证法，不存在满足条件的函数 $\overline{f}$。因为 f 是有界函数，那么，在 I 上从下方控制 f 的分段常数函数一定是存在的，由假设可知，对任意 g 是在 I 上从下方控制 f 的分段常数函数，都有

$$p.c. \int_I g \leq \int_I f - \epsilon$$

而 f 是黎曼可积的，于是

$$\int_I f = \underline{\int}_I f = sup\{p.c. \int_I g : g在I上从下方控制f的分段常数函数\}$$

因为 $\int_I f - \epsilon$ 是任意 $p.c. \int_I g$ 的上界，且

$$\int_I f - \epsilon < \int_I f$$

这与 $\int_I f$ 是最小上界矛盾。