

9.3 习题

张志聪

2024 年 12 月 3 日

9.3.1

- (a) \Rightarrow (b)

对任意 $\epsilon > 0$, 由 (a) f 在 x_0 处沿着 E 收敛于 L 可知, 都存在 $\delta > 0$ 使得 f 被限制在集合 $\{x \in E : |x - x_0| < \delta\}$ 上时, f 是 ϵ - 接近于 L 的, 即 $|f(x) - L| \leq \epsilon$ 。

由于 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 收敛于 x_0 , 那么存在正整数 N , 使得

$$|a_n - x_0| \leq \frac{1}{2}\delta$$

对 $n \geq N$ 均成立。又因为此时 $a_n \in \{x \in E : |x - x_0| < \delta\}$, 所以

$$|f(a_n) - L| \leq \epsilon$$

由 ϵ 的任意性, 可得 $f((a_n))_{n=0}^\infty$ 收敛于 L 。

- (b) \Rightarrow (a)

反证法, 假设 (a) 不成立, 即对某一个 $\epsilon_0 > 0$ 不存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x) - L| \leq \epsilon_0$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 对 $x \in E$ 均成立。

那么, 对于任意的正整数 n , 设 X_n 表示集合

$$X_n := \{x : |f(x) - L| > \epsilon_0, |x - x_0| < 1/n\}$$

是非空集合 (其中 $|x - x_0| < 1/n$ 由 x_0 是附着点保证, $|f(x) - L| > \epsilon_0$ 由假设 (a) 不成立保证)。

利用选择公理，能够找到一个序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 使得 $a_n \in X_n$ 对所有的 $n \geq 1$ 均成立（特别的， a_0 可以任选 E 中的一个元素）。于是这里构造的序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x_0 ，由题设 (b) 可知，序列 $f((a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L ，即存在正整数 N ，使得

$$|f(a_n) - L| \leq \epsilon_0$$

对 $n \geq N$ 均成立。因为 $a_n \in X_n$ 所以 $|f(a_n) - L| > \epsilon_0$ ，存在矛盾。

9.3.2

说明 1. 书中的证明个人感觉是有问题的，理由如下：

引理 9.1.14 只说明了收敛于 x_0 序列的存在性，极端情况下可能只有一个，而命题 9.3.9 (b) 说的是任意序列，两者是有区别的。

接下来的证明，我会避免使用引理 9.1.14

因为证明方式都是一致的，只以乘法为例。

设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是任意一个完全由 E 中元素构成并且收敛于 x_0 的序列（引理 9.1.14 只是保证这个序列的存在性，只是一个特例）。

因为 f 在 x_0 处沿着 E 有极限 L ，由命题 9.3.9 (b) 可知，序列 $f((a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L 。类似地， $g((a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 M 。根据序列的极限定律（定理 6.1.19），我们推导出 $((fg)(a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 LM 。再次由命题 9.3.9 (b) 可知， fg 在 x_0 处沿着 E 有极限 LM 。

9.3.3

• \Rightarrow

因为 $E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq E$ ，因为是 E 的子集，且 x_0 也是其附着点，所以也收敛于 L 。

• \Leftarrow

按照定义 9.3.5 证明。

对任意 $\epsilon > 0$ ，存在一个 $\delta' > 0$ 使得

$$|f(x) - L| \leq \epsilon$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta'$ 的 $x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 均成立。

取 $\delta'' = \min(\delta, \frac{1}{2}\delta')$ (这里用 $\frac{1}{2}\delta'$ 是因为有个细节要处理, 在定义 9.3.6 中是 $|x - x_0| < \text{某个值}$, 而在定义 9.1.8 (附着点) 中是 $|x - x_0| \leq \text{某个值}$, 需要处理边界问题), 因为 x_0 是 E 的附着点, 所以存在 $x \in E$ 使得

$$|x - x_0| \leq \delta''$$

此时的 x 也满足 $|x - x_0| < \delta'$ 和 $x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 所以 δ'' 使得

$$|f(x) - L| \leq \epsilon$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta''$ 的 $x \in E$ 均成立。所以 f 在 x_0 处沿着 E 也是极限 L 。