

11.1 习题

张志聪

2024 年 12 月 20 日

11.1.1

X 空集或单点集，命题显然是真的。

X 非空且不是单点集，证明如下：

- $(a) \implies (b)$

因为 X 是有界的，由命题 5.5.9（最小上界的存在性）可知， X 存在最小上界 M 与最大下界 m ，此时 X 只会是以下情况中的一个： $[m, M]$ 、 (m, M) 、 $[M, m)$ 、 $(m, M]$ ，否则不满足连通性。

反证法，假设 $x, y \in X, x < y$ ，存在介于 x, y 之间的元素 $c \in X$ ，但不属于 $[m, M]$ 、 (m, M) 、 $[M, m)$ 、 $(m, M]$ ，于是可得 $c < m$ 或 $c > M$ ，这与 M, m 是 X 的最小上界，最大下界矛盾。

$[m, M]$ 、 (m, M) 、 $[M, m)$ 、 $(m, M]$ 都是有界区间，于是 (b) 成立。

- $(b) \implies (a)$

由定义 9.1.1（区间）和例 9.1.3 中有界区间的定义，可知