11.10 注释

张志聪

2025 年 4 月 30 日

1

说明 1. 通过命题 *11.10.6*，推导出以下命题（同济大学高等数学-定积分的换元法，即黎曼积分的换元法）：

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

- （*1*）$\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$；
- （*2*）$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi=[a,b]$，则有

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[\alpha,\beta]} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

这里对 φ 的前置条件是不全的，以下条件是必须的：

- （1）φ 是可导的；
- （2）φ 是单调的；

证明：

以 φ 单调递增为例，$\varphi=[\alpha,\beta]\to[a,b]$，又因为 f 在 $[a,b]$ 上是连续的，所以 f 是 $[a,b]$ 上黎曼可积的函数，利用命题 11.10.6 可知，

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f &= \int_{[\alpha,\beta]} f\circ\varphi d\varphi \\ &= \int_{[\alpha,\beta]} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\end{aligned}$$