12.4 习题

张志聪

2025 年 1 月 19 日

12.4.1

$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 是 (X,d) 中收敛于极限 x_0 的序列，由收敛的定义（定义 12.1.14）可知，对任意 $\epsilon>0$，存在一个 $N\geq m$ 使得

$$d(x^{(n)},x_0)\leq\epsilon$$

对所有的 $n\geq N$ 均成立。

如果 $(x^{n_j})_{j=1}^{\infty}$ 是 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 的子序列，令 $N'=N-m$，由定义 12.4.1 可知

$$n_{N'}\geq N$$

于是

$$d(x^{(n_j)},x_0)\leq\epsilon$$

对所有的 $j\geq N'$ 均成立，所以子序列收敛于 x_0。

12.4.2

- $\Rightarrow$

  先构造出子序列，注意要满足子序列定义，然后证明该子序列收敛于 L。

  （1）以递归的方式定义：

  $j=1$ 时，定义 $x^{n_1}=x^{(m)}$。

归纳假设，n_j 时，项 $x^{(n_j)}$ 是存在的。

$j+1$ 时，由 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 L，所以取 $\epsilon = 1/(j+1) > 0$，存在 $n \geq n_j$ 使得 $d(x^{(n)}, L) \leq \epsilon$，满足该条件的 $x^{(n)}$ 是一个非空集合，任取一个作为 $x^{(n_{j+1})}$。

（2）序列的收敛性

对任意 $\epsilon > 0$，存在 $1/j \leq \epsilon$（存在的原因是 $1/j$ 收敛于 0）。通过序列 $(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$ 的构造方式可知，取 $N = j$，$n \geq N$ 使得 $d(x^{(n_n)}, L) \leq \epsilon$，序列收敛得证。

- $\Leftarrow$

  任意 $N \geq m$ 和 $\epsilon > 0$，由子序列 $(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$ 收敛于 L，那么存在 $N' \geq 1, j \geq max(N', N) \geq N$ 使得

  $$d(x^{(n_j)}, L) \leq \epsilon$$

  由子序列定义（定义 12.4.1）可知，$n_j \geq j \geq N$，于是由之前的说明可知，存在一个 $n = n_j \geq N$，使得

  $$d(x^{(n)}, L) \leq \epsilon$$

  命题得证。

12.4.3

任意 $\epsilon > 0, \frac{1}{2}\epsilon > 0$，$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x_0，那么存在 $N \geq m$ 使得

$$d(x^{(n)}, x_0) < \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

所以，对 $j, k \geq N$ 有

$$d(x^{(j)}, x_0) < \frac{1}{2}\epsilon$$
$$d(x^{(k)}, x_0) < \frac{1}{2}\epsilon$$

由三角不等式可知，

$$d(x^{(j)}, x^{(k)}) < \epsilon$$

对所有的 $j,k \geq N$ 均成立。

综上可知，$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列。

12.4.4

对任意的 $\epsilon > 0$，由于原序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列，所以存在一个 $N' \geq m$ 使得

$$d(x^{(j)}, x^{(k)}) < \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $j,k \geq N'$ 均成立。

由命题 12.4.5 可知，x_0 也是原序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 的一个极限点，令 $N = N'$，都存在一个 $n' \geq N$ 使得

$$d(x^{(n')}, x_0) < \frac{1}{2}\epsilon$$

对任意 $n \geq N$ 我们有，

$$\begin{aligned} d(x^{(n)}, x_0) &\leq d(x^{(n)}, x^{(n')}) + d(x^{(n')}, x_0) \\ &< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

（注意，这里的 n, n' 满足 $n, n' \geq N'$ 要求）于是，原序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x_0。

12.4.5

（1）

令 $E := \{x^{(n)} : n \geq m\}$。

任意半径 $r > 0$，$B(L,r) := \{x \in X : d(L,x) < r\}$，

因为 L 是序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 的一个极限点，那么对任意的 $N \geq m$，存在一个 $n \geq N$ 使得

$$d(L, x^{(n)}) < r$$

所以，$x^{(n)} \in B(L,r)$，于是 $x^{(n)} \in B(L,r) \cap E$，所以 $B(L,r) \cap E \neq \varnothing$。

综上，由 r 的任意性可得，L 是集合 $\{x^{(n)}: n \geq m\}$ 的附着点。

（2）逆命题成立么？

不成立，比如 $x^{(m)}$ 就是集合 $\{x^{(n)}: n \geq m\}$ 的附着点，但是 $x^{(m)}$ 却不一定是集合 $\{x^{(n)}: n \geq m\}$ 的极限点。

12.4.6

假设柯西序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 L, L' 且 $L \neq L'$。

序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 L，那么对 $\epsilon = \frac{1}{3}d(L-L') > 0$，存在 $N \geq m$ 使得

$$d(x^{(n)}, L) < \epsilon$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

类似地，存在 $N' \geq m$ 使得

$$d(x^{(n)}, L') < \epsilon$$

对所有的 $n \geq N'$ 均成立。

取 $M = max(N, N')$，于是对所有的 $n \geq M$ 都有

$$\begin{cases} d(x^{(n)}, L) < \epsilon \\ d(x^{(n)}, L') < \epsilon \end{cases}$$

但上式不可能同时成立，如果成立会导致以下矛盾：

$$d(L, L') \leq d(x^{(n)}, L) + d(x^{(n)}, L') < 2\epsilon = \frac{2}{3}d(L, L')$$

12.4.7

- (a)

$$\begin{gathered} (Y, d|_{Y\times Y})\text{是完备的} \\ \Longrightarrow \\ \text{柯西序列} \Leftrightarrow \text{收敛序列} \end{gathered}$$

反证法，假设 Y 不是闭集，那么，由命题 12.2.15(d) 可知，存在一个 Y 中的收敛序列的极限值不属于 Y，由引理 12.4.7 可知收敛序列是柯西序列，即存在一个 Y 中的柯西序列不在 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 中收敛，这与定义 12.4.10 矛盾。

- (b)

  设 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 是 Y 中任意柯西序列，由于 Y 是 X 的子集，而 (X, d) 又是完备度量空间，所以序列收敛，不妨设收敛于 $x_0, x_0 \in X$。又因为 Y 是 X 的一个闭子集，由命题 12.2.15(d) 可得 $x_0 \in Y$。

  综上，由序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 的任意性可得，Y 中的柯西序列在 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 中都是收敛的。

  所以，子空间 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 也是完备的。

12.4.8

- (a)

  - 自反性

    $d(x, x) = 0$ 保证了自反性的正确性，证明略

  - 对称性

    $d(x, y) = d(y, x)$ 保证了对称性的正确性，证明略

  - 传递性

    $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 保证了传递性的正确性，证明略

- (b)
- (c)
- (d)
- (e)
- (f)