11.1 习题

张志聪

2024 年 12 月 21 日

11.1.1

X 空集或单点集，命题显然是真的。

X 非空且不是单点集，证明如下：

- $(a) \implies (b)$

  因为 X 是有界的，由命题 5.5.9（最小上界的存在性）可知，X 存在最小上界 M 与最大下界 m，此时 X 只会是以下情况中的一个：$[m, M]$、(m, M)、$[M, m)$、$(m, M]$，否则不满足连通性。

  反证法，假设 $x, y \in X, x < y$，存在介于 x, y 之间的元素 $c \in X$，但不属于 $[m, M]$、(m, M)、$[M, m)$、$(m, M]$，于是可得 $c < m$ 或 $c > M$，这与 M, m 是 X 的最小上界，最大下界矛盾。

  $[m, M]$、(m, M)、$[M, m)$、$(m, M]$ 都是有界区间，于是 (b) 成立。

- $(b) \implies (a)$

  由定义 9.1.1（区间）和例 9.1.3 中有界区间的定义，可知有界区间，一定是有界的并且是连通的。

11.1.2

反证法，假设 $X = I \cap J$，X 不是有界区间。

由引理 11.1.4 可知，X 不会是有界的并且是连通的。因为任意 $x \in X$ 都有 $x \in I \cap J$，而 I 与 J 都是有界的，所以 X 也是有界的。

如果假设成立，那么 X 不是连通的，即存在 $x, y \in X, x < y$ 的元素，有界区间 $[x, y]$ 不是 X 的子集。即存在 $c \in [x, y]$ 但 $c \notin X$。

因为 $x,y\in X$，所以 $x,y\in I$，由 I 是连通的可知 $c\in I$。类似地，$c\in J$，综上 $c\in I\cap J$，即 $c\in X$，这与 $c\notin X$ 矛盾。

11.1.3

说明 1. *没采用书中提示的证明方式，主要是没搞懂 $\sup I_j$ 的含义，可能是定义 8.5.12 中严格上界的意思。不用在这概念，也能证明。*

反证法，不存在形如 $I_j=(c,b)$ 或 $I_j=[c,b)$ 的区间 I_j，其中 $a\leq c\leq b$。

现在证明如果没有形如 I_j 的区间，那么 I 会存在一个洞。

I_i 是 I 划分中的任意区间元素，I_j 的左右端点 L,R 满足，

$$\begin{cases} a\leq L\leq b \\ a\leq R\leq b \\ L\leq R \end{cases}$$

因为 I_i 都不是形如 $[c,b)$ 和 (c,b) 的区间，由此可知，

$$R<b$$

由于 I_i 的任意性和划分的基数是有限的，可取所有 I_i 的右端点的最大值为 M，满足

$$M<b$$

取 $x\in(M,b)$，此时 x 不在任何一个划分元素中，与定义 11.1.10（划分）矛盾。

11.1.4

先证明 $P\#P'$ 也是 I 的一个划分。

反证法，假设 $P\#P'$ 不是 I 的一个划分。由定义 11.1.16（公共加细）可知，$P\#P'$ 中的元素都会是 I 的子集，于是如果假设成立，

- 存在 $x\in I$，$x\notin P\#P'$。

由定义 11.1.10（划分）可知，P 中存在元素 P_i，使得 $x \in P_i$。类似地，P' 中存在元素 P_i'，使得 $x \in P_i'$。综上可得 $x \in P_i \cap P_i'$。

由定义 11.1.16（公共加细）可知，$P_i \cap P_i' \in P\#P'$，此时可得 $x \in P\#P'$，存在矛盾。

- 存在 $x \in I$，x 属于 $P\#P'$ 中的多个元素。

  由定义 11.1.16（公共加细）可知，有多个属于 P 的区间包含 x，这与定义 11.1.10（划分）矛盾。

接下来证明，$P\#P'$ 比 P 更细，也比 P' 更细。

$P\#P'$ 中的任意元素 X，由定义 11.1.16（公共加细）可知，存在 $K \in P$，$J \in P'$ 使得 $X \subseteq K, X \subseteq J$，由 X 的任意性，结合定义 11.1.14 可知，$P\#P'$ 比 P 更细，也比 P' 更细。