15.5 习题

张志聪

2025 年 4 月 12 日

15.5.1

- (a)

  （1）绝对收敛。

  任意 $x \in \mathbb{R}$，都有

  $$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}|}{|\frac{x^n}{(n)!}|} &= \limsup_{n\to\infty} |\frac{x}{n+1}| \\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

  由推论 7.5.3（比值判别法）可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛。

  （2）

  由命题 7.2.9(绝对收敛判别法) 可知，绝对收敛的级数，也是条件收敛的。

  （3）收敛半径是 ∞

  $$\limsup_{n\to\infty} |\frac{1}{n!}| \le \limsup_{n\to\infty} |\frac{1}{n}| = 0$$

  于是可得，收敛半径 $R = \infty$。

  （4）exp 是 $(-\infty, \infty)$ 上的实解析函数。

  由习题 15.2.8(f) 可知直接得到。

- (b)

  由定理 15.1.6(d) 可知，exp 在 $\mathbb{R}$ 上可微。又因为

$$\begin{aligned}(\exp(x))' &= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

  设 $n' = n - 1$，于是

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{x^{n'}}{n'!} \\ &= \exp(x)\end{aligned}$$

- (c)

  由定理 15.1.6(c) 可知，exp 在 $\mathbb{R}$ 上连续。又由 (b) 可知，$\exp(x)$ 是 $\exp(x)$ 的原函数。

  于是利用定理 11.9.4（微积分第二基本定理）可得

$$\int_{[a,b]} \exp(x)dx = \exp(b) - \exp(a)$$

- (d)

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

  利用二项式公式（习题 7.1.4）可知直接得到

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j}\end{aligned}$$

约分掉 $n!$ 可得

$$\exp(x+y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j y^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

由于 exp 函数在 $\mathbb{R}$ 上绝对收敛的，所以可以使用定理 8.2.2（富比尼定理）

$$\exp(x+y)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{x^j y^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

令 $m=n-j$，于是可得，

$$\exp(x+y)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^j y^m}{j!m!}$$

分离成两个级数：

$$\begin{aligned}\exp(x+y)&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\\&=\exp(x)\exp(y)\end{aligned}$$

- (e)

（1）$\exp(0)=1$

$$\exp(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!}=1$$

（2）$\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$。

因为

$$\begin{aligned}&\exp(0)=1=\exp(x-x)=\exp(x)\exp(-x)\\&\implies\\&\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}\end{aligned}$$

（3）$\exp(x)>0$。

由于（2）易得，任意 x，都有 $\exp(x) \neq 0$。

于是我们有，

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \exp(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x) \\ &= \exp(\frac{1}{2}x)\exp(\frac{1}{2}x) \\ &= \exp(\frac{1}{2}x)^2 \\ &> 0\end{aligned}$$

- (f)

  由 (b)(e) 和命题 10.3.3 可以得到该结论。

15.5.2

（1）先按照书中提示，先证明对于所有的 $k = 1, 2, 3, ...$，都有 $(n+k)! > 2^k n!$。

对 k 进行归纳。

$k = 1$ 时，$(n+k)! = (n+1)! = (n+1)n!$，因为 $n \geq 3$，所以 $n+1 > 2^k = 2^1 = 2$，所以 $(n+k)! > 2^k n!$ 成立。

归纳假设 $k = j$ 时，$(n+j)! > 2^j n!$ 成立。

$k = j+1$ 时，

$$(n+j+1)! = (n+j)!(n+j+1)$$

由归纳假设和 $n+j+1 > 2$ 可得，

$$(n+j)!(n+j+1) > 2^j n! \times 2 = 2^{j+1} n!$$

即

$$(n+j+1)! > 2^{j+1} n!$$

归纳完成。

（2）证明 $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ... < \frac{1}{n!}$。

由（1）可知，

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+...<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k n!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k$$

由引理 7.3.3 可知，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k n!}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

于是可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k &= 2-\sum_{k=0}^{0}(\frac{1}{2})^k \\ &= 2-1 \\ &= 1\end{aligned}$$

综上可得

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+...<\frac{1}{n!}$$

（3）任意的 $n\geq 3$，$n!e$ 都不是整数。

$$n!\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}=n!\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}+n!\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!}$$

因为 $m\leq n$，都有 $\frac{n!}{m!}$ 是正整数。所以

$$n!\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}$$

是正整数。

又由（2）可知，

$$0<n!\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!}<1$$

综上，命题成立。

（4）推导出 e 是无理数。

反证法，假设 e 不是无理数，又因为 $e>0$，所以存在正整数 a,b，使得 $e=\frac{a}{b}$。

于是，我们有，

$$\frac{a}{b} = e$$
$$\Longrightarrow$$
$$a = be$$
$$\Longrightarrow$$
$$a(b-1)! = b!e$$

因为 $a(b-1)!$ 是正整数，所以 $b!e$ 也是正整数，这与（3）矛盾。

注意：这里有个细节，就是 $b \geq 3$ 不一定成立的困惑，这个无需考虑，只需做扩分操作即可。

15.5.3

- (a) x 是自然数。对 x 进行归纳。

  （1）$x = 0$ 时，由定理 15.5.2(e) 可知，$\exp(0) = 1$，又 $e^0 = 1$，所以命题成立。

  （2）归纳假设，$x = k$ 时，$\exp(k) = e^k$ 成立。

  （3）$x = k + 1$ 时，结合归纳假设和定理 15.5.2(d)，得

  $$\exp(k+1) = \exp(k)\exp(1) = e^k e = e^{k+1}$$

  归纳完成。

- (b) x 是整数。

  由 (a) 可知，我们只需讨论 x 是负整数的情况。

  设 $-x < 0$，于是 $x > 0$，

  $$\begin{aligned}\exp(-x) &= \frac{1}{\exp(x)} \\ &= \frac{1}{e^x} \\ &= e^{-x}\end{aligned}$$

  综上，命题成立。

- (c) x 是有理数。

  x 可以表示成 $\frac{a}{b}$，其中 a, b 都是整数，且 $b > 0$。

  $$\exp(x)^b = \exp(\frac{a}{b}b) = \exp(a) = e^a$$
  $$\Longrightarrow$$
  $$\exp(x) = e^{\frac{a}{b}} = e^x$$

  综上，命题成立。

- (d) x 是实数。

  对任意实数 x，存在序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$，使得 $x = \lim_{n\to\infty} a_n$。

  由定义 6.7.2 可知，$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{a_n}$。

  又因为 $e^{a_n} = \exp(a_n)$，对所有的 n 均成立，又因为 exp 是连续的，利用命题 9.4.7 可知，

  $$\lim_{n\to\infty} \exp(a_n) = \exp(x)$$

  综上可得，

  $$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n\to\infty} e^{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp(a_n) \\ &= \exp(x) \end{aligned}$$

15.5.4

- （a）f 是无限可微的。

  - $x < 0$

    $f^{(k)}(x) = 0^{(k)} = 0$。

  - $x > 0$

    导数通项式：$f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)\exp(\frac{-1}{x})}{x^{2k}}$，其中 $P_k(x)$ 是一个关于 x 的多项式。

    可以通过归纳法证明，证明略。

- $x=0$

  对 k 进行归纳。

  （1）$k=1$ 时，左极限为 0，我们主要讨论右极限。右极限：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0;x\in(0,+\infty)}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\lim_{x\to 0;x\in(0,+\infty)}\frac{f(x)}{x}\\&=\lim_{x\to 0;x\in(0,+\infty)}\frac{\exp(\frac{-1}{x})}{x}\\&=\lim_{x\to 0;x\in(0,+\infty)}\frac{\frac{1}{\exp(\frac{1}{x})}}{x}\\&=\lim_{x\to 0;x\in(0,+\infty)}\frac{1}{\exp(\frac{1}{x})x}\\&=\lim_{x\to 0;x\in(0,+\infty)}\frac{\frac{1}{x}}{\exp(\frac{1}{x})}\end{aligned}$$

  定义函数 $\phi:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ 为 $\phi(x)=\frac{1}{x}$。

  于是我们有

$$\lim_{x\to 0;x\in(0,+\infty)}\phi(x)=+\infty$$

  于是可得，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0;x\in(0,+\infty)}\frac{\frac{1}{x}}{\exp(\frac{1}{x})}\\&=\lim_{\phi(x)\to+\infty;x\in(0,+\infty)}\frac{\phi(x)}{\exp(\phi(x))}\\&=0\end{aligned}$$

  （注意：第一个等式使用了一个小命题，在 10-5-comment.tex 的”3 定理” 中有说明。第二个等式使用了习题 15.5.8）。

  （2）归纳假设 $k\le n$ 时，命题成立。

  （3）$k=n+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}\\
&=\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \frac{f^{(n)}(x)-0}{x-0}\\
&=\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \frac{f^{(n)}(x)}{x}\\
&=\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \frac{\frac{P_n(x)\exp(\frac{-1}{x})}{x^{2n}}}{x}\\
&=\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \frac{P_n(x)\exp(\frac{-1}{x})}{x^{2n+1}}\\
&=\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} P_n(x)\frac{\frac{1}{x}^{2n+1}}{\exp(\frac{1}{x})}
\end{aligned}
$$

因为 $P_n(x)$ 是连续的，所以 $\lim\limits_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} P_n(x)=P_n(0)$，再次利用习题 15.5.8 可知，$\lim\limits_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \frac{\frac{1}{x}^{2n+1}}{\exp(\frac{1}{x})}=0$。

综上，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} P_n(x)\frac{\frac{1}{x}^{2n+1}}{\exp(\frac{1}{x})}\\
&=\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} P_n(x)\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)}\frac{\frac{1}{x}^{2n+1}}{\exp(\frac{1}{x})}\\
&=P_n(0)\times 0\\
&=0
\end{aligned}
$$

即 $f^{(n+1)}(x)=0$。

归纳完成。

- （b）f 在 0 处不是实解析的。

  反证法，假设 f 在 0 处是实解析的。即存在收敛半径大于或等于 $r>0$ 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-0)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在 $(-r,r)$ 上收敛于 f。

  利用泰勒公式（推论 15.2.10），我们有泰勒公式

$$
f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n, x\in(-r,r)
$$

因为任意 $n \geq 0$，$f^{(n)}(0) = 0$，所以

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0, x \in (-r, r)$$

而任意 $x \in (-r, r)$，利用定理 15.5.2(e) 可得

$$f(x) = \exp(-1/x) > 0$$

存在矛盾。

15.5.5

- (a)

  对任意 $x \in (0, +\infty)$，存在 $y \in \mathbb{R}$ 使得 $\exp(y) = x$，利用定理 10.4.2 可知，

  $$\begin{aligned} \ln'(x) &= \frac{1}{\exp'(y)} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

  因为 $\ln(x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的原函数，于是利用微积分基本定理可得，

  $$\int_{[a,b]} \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$$

- (b)

  因为 $\exp(\ln(x)) = x, \exp(\ln(y)) = y$，于是

  $$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(\exp(\ln(x)) \exp(\ln(y))) \\ &= \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) \\ &= \ln(x) + \ln(y) \end{aligned}$$

- (c)

  （1）因为 $\exp(0) = 1$，于是

  $$\ln(1) = \ln(\exp(0)) = 0$$

（2）设 $\exp(y) = x$，于是

$$-\ln(x) = \ln(\exp(y)) = -y$$

又因为

$$\begin{aligned}-y = \ln(\exp(-y)) &= \ln(\frac{1}{\exp(y)}) \\ &= \ln(\frac{1}{x})\end{aligned}$$

- (d)

设 $\exp(z) = x$，于是

$$y\ln(x) = yz$$

又因为

$$\begin{aligned}\ln(x^y) &= \ln(\exp(z)^y) \\ &= \ln(\exp(yz)) \\ &= yz\end{aligned}$$

- (e)

（1）

利用引理 7.3.3 可得，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(-1, 1)$ 上逐点收敛于 $\frac{1}{1-x}$。

由定理 15.1.6(c) 可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 一致收敛于某个函数 f。由习题 14.2.2(a)，和逐点收敛函数的唯一性可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 一致收敛于 $\frac{1}{1-x}$。

于是由定理 15.1.6(e) 可知，

$$\begin{aligned}\int_{[0,x]} \frac{1}{1-y}dy &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1} - (0-0)^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\int_{[0,x]} \frac{1}{1-y}dy &= -\ln(1-y)|_0^x \\ &= -\ln(1-x)\end{aligned}$$

综上可得，

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

（2）

令 $y = 1-x, x \in (-1,1)$，于是 $y \in (0,2)$。

于是利用（1），我们有

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \ln(1-x) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-y)^n}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(y-1)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(y-1)^n}{n}\end{aligned}$$

15.5.6

任意实数 $x_0 \in (0,+\infty)$ 都存在自然数 N 使得 $N-1 < x_0 < N+1$（可以利用命题 4.4.1 和命题 5.4.12，完成证明）。

接下来证明，ln 在 x_0 处是解析的，并且存在幂级数展开式。

证明思路：与习题 15.5.5(e)（2）类似，都是通过变换，满足已有定理的定义域。

令 $y = \frac{x}{x_0}, x \in (0, 2x_0)$，于是 $y \in (0,2)$。

利用定理 15.5.6(e) 可得

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \ln(\frac{x}{x_0}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{x}{x_0}-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nx_0^n}(x-x_0)^n\end{aligned}$$

又因为，

$$\ln(\frac{x}{x_0}) = \ln(xx_0^{-1}) = \ln(x) - \ln(x_0)$$

综上可得，

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nx_0^n}(x-x_0)^n \\ &= \ln(x_0)(x-x_0)^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nx_0^n}(x-x_0)^n\end{aligned}$$

命题成立。

15.5.7

$$\begin{aligned}(f(x)e^{-x})' &= f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x}(-1) \\ &= e^{-x}(f'(x)-f(x)) \\ &= 0\end{aligned}$$

由此可得 $f(x)e^{-x}$ 是常数，设为 C。又因为 $f(x)$，e^{-x} 都是正实数，所以 $C > 0$。

于是

$$\begin{aligned}f(x)e^{-x} &= C \\ f(x) &= Ce^x\end{aligned}$$

15.5.8

直接使用洛必达定理的推广，本书中没有讲到这个推广。我在 10-5-comment.tex 中的“2.4”中添加了这个推广。

因为 $x \to +\infty$，e^x 及 x^m 都趋于无穷大，所以，利用洛必达定理可得，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{mx^{m-1}}$$

多次使用洛必达定理，可以得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{mx^{m-1}}=...=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{m!}=+\infty$$

15.5.9

$P(x)$ 是多项式,所以我们可以找到一个正整数 $k\geq 0$ 和实数 $a_0,a_1,\ldots,a_k$ 使得

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$$

对 k 进行归纳。

（1）$k=0$ 时，$P(x)$ 是常数或 $P(x)=a_0$，于是 $|P(x)|=|a_0|$ 是一个常数，由 $x\to+\infty$，e^{cx} 趋于无穷大可得，命题成立。

（2）归纳假设，$k=n$ 时，命题成立。

（3）$k=n+1$ 时，$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}$。

15.5.10

（1）利用 $\exp,\ln$ 的连续性证明。

可以仿照推论 13.2.3 的证明。

我们有，

$$\exp(y\ln(x))=e^{y\ln(x)}=(e^{\ln(x)})^y=x^y$$

先证明 $y\ln(x)$ 是连续的。

对任意 $(x_0,y_0)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$，设 $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ 是 $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ 中收敛于 (x_0,y_0) 的点，其中 $x^{(n)}=(x_n,y_n)$，利用命题 12.1.18(d) 可知，$(x_n)_{n=1}^\infty$ 收敛于 x_0，$(y_n)_{n=1}^\infty$ 收敛于 y_0。

于是利用定理 6.1.19（极限定律）我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_n \ln(x_n) &= \lim_{n\to\infty} y_n \lim_{n\to\infty} \ln(x_n) \\ &= y_0 \ln(x_0)\end{aligned}$$

所以，$y\ln(x)$ 是连续的。

由于 exp 函数是连续的，利用推论 13.1.7 可知，$\exp(y\ln(x))$ 是连续的。

（2）挑战一下

todo 还没思路。