3.6 为什么

2024 年 3 月 2 日

注 3.6.3

①单射

对任意 $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, f(x_1) = 2x_1, f(x_2) = 2x_2$，乘法是交换的（引理 2.3.2）如果 $f(x_1) = f(x_2)$ 则 $2x_1 = 2x_2$，由乘法的消去律 (推论 2.3.7) 可知，$x_1 = x_2$，与题设矛盾，所以 f 是单射的。

②满射

对任意 $y \in Y$，由于 Y 是偶数集，所以 Y 总的元素都需要符合偶数的定义，即：对任意的 Y 中元素 y，当且仅当 y=2n，n 是自然数。由此可得 f 是满射。

注 3.6.6

需要找到 $X = \{i \in N : i < n\} \to Y = \{i \in N : 1 \leq i \leq n\}$ 的双射函数 f. 我们定义 $f : X \to Y, \{f(x) : x \in X, f(x) = x{+}{+}\}$

现在证明 f 值域是 Y，f 是双射函数。

（1）f 的值域是 Y

若 n=0，则 X 与 Y 都是空集，无需说明。

若 n>0 时，对任意 $i \in X$，有 $i < n$，由自然数序的定义（定义 2.2.11）可知 $i{+}{+} \leq n$（其实通过定义无法直接获得该结论，习题 2.2.3 中有证明），若 i 的最小值是 0，有 $f(0) = 1, 1 \leq 1$，即：$1 \leq f(i) \leq n$，所以 f 的值域为 Y。

（2）f 是双射函数

①单射

对任意 $i_1 \in X, i_2 \in X, i_1 \neq i_2, f(i_1) = i_1 ++, f(i_2) = i_2 ++$，若 $f(i_1) = f(i_2)$，则 $i_1 ++ = i_2 ++$，由洛必达公理 2.4 可知 $i_1 = x_2$，与 $i_1 \neq i_2$ 矛盾，所以 $f(i_1) \neq f(i_2)$，所以 f 是单射的

②满射

对任意 $y \in Y$，可知 y 是正数，而正数可以由一个自然数加 1 得到，假设 $y = b++$，又 $y \leq n$，所以 $b < n$，所以 $b \in X$，所以 f 是满射

至此，命题得证