# 6.4 习题

2024 年 7 月 6 日

## 6.4.1

（1）序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $c$，那么对任意实数 $\epsilon > 0$，都是最终 $\epsilon-$ 接近于 $c$ 的，即: 能够找到某个 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 $c$ 的。并且对于任意 $N' \geq m$，取 $N_0 := max(N, N')$，此时 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 $c$ 的，即：$a_n$ 是 $\epsilon-$ 接近于 $c$，对 $n \geq N_0$ 均成立，所以 $c$ 是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N'}^{\infty}$ 的。由 $\epsilon$ 的任意性，可知 $c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

（2）反证法，存在另一个极限点 $d$，且 $d \neq c$。$(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $c$，那么对实数 $\epsilon > 0$，是最终 $\epsilon-$ 接近于 $c$ 的。即: 能够找到 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 $c$ 的。

同时 $d$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点，那么，$d$ 是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的，那么存在一个 $n \geq N$ 使得 $a_n$ 是 $\epsilon-$ 接近于 $d$ 的，如果 $d > c$，取 $0 < \epsilon < (d-c)/2$，此时，$|a_n - d| \leq \epsilon$ 与 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 无法同时满足，即 $a_n$ 无法同时 $\epsilon-$ 接近于 $c, d$。

$d \leq c$ 同理。

## 6.4.2

这里只说明极限点和上极限，因为下极限的证明可以用上极限类推。

设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个实数序列，$c$ 是一个实数，且 $m' \geq m$ 是一个整数。

（1）与习题 6.1.3 类似的结论

（1.1）$c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 极限点，当且仅当 $c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 极限点。

$\Rightarrow$ $c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 极限点，那么，“对任意 $\epsilon > 0$，对每一个 $N \geq m$，$c$ 都是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的”，我们把引号中的性质定义声明为 $P(N)$，即

对任意 $N$，只要 $N \geq m$ 都具有性质 $P$。因为 $m' \geq m$，于是对任意 $N$，$N \geq m' \geq m$ 都具有性质 $P$，所以 $c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点。

$\Leftarrow$ $c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点。对任意 $\epsilon > 0$，对每一个 $N$，如果 $N \geq m'$，由于 $c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点，那么，$c$ 都是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的；如果 $m \leq N < m'$，我们要证明此时 $c$ 也是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$，即：要证明存在一个 $n \geq N$ 使得 $a_n$ 是 $\epsilon-$ 接近于 $c$。我们可以取 $n \geq m'$，那么 $n$ 也是大于 $N$，还是由 $c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点，保证了 $n$ 的存在性。

综上 $c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

（1.2）$c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限，当且仅当 $c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限。

$\Rightarrow$ $c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限，即：序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的下确界是 $c$。序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集。

反证法，假设 $c$ 不是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限，设 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限是 $c'$【这里其实要证明 $c'$ 的存在性。可以通过以下命题得到 $c'$ 是存在的：**有上界序列存在实数上极限，否则上极限不是实数，而是 $+\infty$**】。

如果 $c' > c$，那么，存在 $m \leq N_0 < m'$ 使得 $c \leq a_{N_0}^+ < c'$，因为 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的子集，所以 $sup((a_n)_{n=m'}^{\infty}) \leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，又因为 $c' \leq sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})$，于是 $c' \leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，即：$c' < a_{N_0}^+$。这与 $c < a_{N_0}^+$ 矛盾。

如果 $c > c'$，因为序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集，所以 $inf((a_N^+)_{N=m'}^{\infty}) \geq inf((a_N^+)_{N=m}^{\infty})$，这与 $c > c'$ 矛盾。

综上，$c = c'$。

$\Leftarrow$ $c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限，即：序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 的下确界是 $c$。序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集。

反证法，假设 $c$ 不是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限，设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限是 $c'$。

如果 $c > c'$，那么，存在 $m \leq N_0 < m'$ 使得 $c' \leq a_{N_0}^+ < c$，因为 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的子集，所以 $sup((a_n)_{n=m'}^{\infty}) \leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，又因为 $c \leq sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})$，于是 $c \leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，即：$c < a_{N_0}^+$。这与 $c' \leq a_{N_0}^+ < c$ 矛盾。

如果 $c < c'$，因为序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集，所以 $inf((a_N^+)_{N=m'}^{\infty}) \geq inf((a_N^+)_{N=m}^{\infty})$，这与 $c < c'$ 矛盾。

综上，$c = c'$。