

## 4.1 习题

2024 年 3 月 30 日

文中的减号占位符，不好表示，习题中的所有减号占位符都用减号代替，看官注意分辨。

### 4.1.1

证明.

① 自反性

设  $a - b$  是任意整数，现证明  $a - b = a - b$ 。由于  $a + b = a + b$ ，所以  $a - b = a - b$

② 对称性

设  $a - b = c - d$ ，现证明  $c - d = a - b$ 。由于  $a - b = c - d$ ，所以  $a + d = c + b$ ，由自然数相等的对称性可知  $c + b = a + d$ ，所以  $c - d = a - b$ 。

### 4.1.2

证明.

$-(a - b) = b - a$ ,  $-(a' - b') = b' - a'$ ，又  $(a - b) = (a' - b')$  则  $a + b' = a' + b$ ，由于加法是可以交换的（命题 2.2.4）所以  $b' + a = b + a'$ ，由此可得  $-(a' - b') = -(a - b)$ ，又由整数相等的对称性可得  $-(a - b) = -(a' - b')$ 。

### 4.1.3

证明.

因为  $a$  是整数, 不妨设  $a = x - y$ , 其中  $x, y$  是自然数, 则

$$\begin{aligned} & (-1) \times a \\ &= (0 - 1) \times (x - y) \\ &= (0 \times x + 1 \times y) - (0 \times y + 1 \times x) \\ &= (0 + y) - (0 + x) \\ &= y - x \\ &= -a \end{aligned}$$

### 4.1.4

记  $x = a - b, y = c - d, z = e - f$  其中  $a, b, c, d, e, f$  是自然数

$$\textcircled{1} \quad x + y = y + x$$

证明.

$$x + y = (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) \quad y + x = (c - d) + (a - b) = (c + a) - (d + b)$$

由于加法是可交换 (命题 2.2.4) 可知  $a + c = c + a, b + d = d + b$ , 又由自然数相等的替换公理可得  $(a + c) - (b + d) = (c + a) - (d + b)$ , 由此可知

$$x + y = y + x$$

$$\textcircled{2} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

证明.

$$\begin{aligned}
& (x+y)+z \\
&= ((a-b)+(c-d))+(e-f) \\
&= ((a+c)-(b+d))+(e-f) \\
&= (a+c+e)-(b+d+f) \\
& x+(y+z) \\
&= (a-b)+((c-d)+(e-f)) \\
&= (a-b)+((c+e)-(d+f)) \\
&= (a+c+e)-(b+d+f)
\end{aligned}$$

由整数相等的定义可知  $(x+y)+z=x+(y+z)$

$$\textcircled{3} \quad x+0=0+x=x$$

证明.

可以把 0 看做整数  $0-0$ , 由 $\textcircled{1}$ 可知  $x+0=0+x$ ,

$$\begin{aligned}
& 0+x \\
&= (0-0)+(a-b) \\
&= (0+a)-(0+b) \\
&= a-b \\
&= x
\end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad x+(-x)=(-x)+x=0$$

证明.

由 $\textcircled{1}$ 可知  $x+(-x)=(-x)+x$ , 可以把 0 看做整数  $0-0$ , 现在证明整数  $x+(-x)=0-0$

$$\begin{aligned}
& x+(-x) \\
&= (a-b)+(b-a) \\
&= (a+b)-(b+a) \\
& (a+b)+0=(b+a)+0
\end{aligned}$$

由整数相等的定义可知  $x + (-x) = (-x) + x = 0$

$$\textcircled{5} \quad xy = yx$$

证明.

$$\begin{aligned} & xy \\ &= (a - b)(c - d) \\ &= (ac + bd) - (ad + bc) \\ & yx \\ &= (c - d)(a - b) \\ &= (ca + db) - (cb + da) \end{aligned}$$

由于加法是可以交换的, 乘法也是可以交换的, 所以

$$\begin{aligned} &= (ca + db) - (cb + da) \\ &= (ac + bd) - (ad + bc) \end{aligned}$$

于是  $xy = yx$

$$\textcircled{7} \quad x1 = 1x = x$$

证明.

由 $\textcircled{5}$  可知  $x1 = 1x$ , 又

$$\begin{aligned} & x1 \\ &= (a - b) \times (1 - 0) \\ &= (a \times 1 + b \times 0) - (a \times 0 + b \times 1) \\ &= (a + 0) - (0 + b) \\ &= a - b \\ &= x \end{aligned}$$

$$\textcircled{8} \quad x(y + z) = xy + xz$$

证明.

$$\begin{aligned}x(y+z) &= (a-b)[(c-d)+(e-f)] \\&= (a-b)[(c+e)-(d+f)] \\&= [a(c+e)+b(d+f)]-[a(d+f)+b(c+e)] \\&= (ac+ae+bd+bf)-(ad+af+bc+be)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}xy+xz &= (a-b)(c-d)+(a-b)(e-f) \\&= [(ac+bd)-(ad+bc)]+[(ae+bf)-(af+be)] \\&= [(ac+bd)+(ae+bf)]-[(ad+bc)+(af+be)] \\&= (ac+ae+bd+bf)-(ad+bc+af+be)\end{aligned}$$

于是  $x(y+z)=xy+xz$