15.5 习题

张志聪

2025 年 4 月 7 日

15.5.1

- (a)

（1）绝对收敛。

任意 $x \in \mathbb{R}$，都有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}|}{|\frac{x^n}{(n)!}|} &= \limsup_{n\to\infty} |\frac{x}{n+1}| \\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

由推论 7.5.3（比值判别法）可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛。

（2）

由命题 7.2.9(绝对收敛判别法) 可知，绝对收敛的级数，也是条件收敛的。

（3）收敛半径是 ∞

$$\limsup_{n\to\infty} |\frac{1}{n!}| \le \limsup_{n\to\infty} |\frac{1}{n}| = 0$$

于是可得，收敛半径 $R = \infty$。

（4）exp 是 $(-\infty, \infty)$ 上的实解析函数。

由习题 15.2.8(f) 可知直接得到。

- (b)

  由定理 15.1.6(d) 可知，exp 在 $\mathbb{R}$ 上可微。又因为

$$
\begin{aligned}
(\exp(x))' &= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

  设 $n' = n - 1$，于是

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{x^{n'}}{n'!} \\
&= \exp(x)
\end{aligned}
$$

- (c)

  由定理 15.1.6(c) 可知，exp 在 $\mathbb{R}$ 上连续。又由 (b) 可知，$\exp(x)$ 是 $\exp(x)$ 的原函数。

  于是利用定理 11.9.4（微积分第二基本定理）可得

$$
\int_{[a,b]} \exp(x)dx = \exp(b) - \exp(a)
$$

- (d)

$$
\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}
$$

  利用二项式公式（习题 7.1.4）可知直接得到

$$
\begin{aligned}
\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j}
\end{aligned}
$$

约分掉 $n!$ 可得

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j y^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

由于 exp 函数在 $\mathbb{R}$ 上绝对收敛的，所以可以使用定理 8.2.2（富比尼定理）

$$\exp(x+y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{x^j y^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

令 $m = n - j$，于是可得，

$$\exp(x+y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^j y^m}{j!m!}$$

分离成两个级数：

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!} \\ &= \exp(x)\exp(y)\end{aligned}$$

- (e)

（1）$\exp(0) = 1$

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!} = 1$$

（2）$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$。

因为

$$\begin{aligned}&\exp(0) = 1 = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x) \\ &\implies \\ &\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}\end{aligned}$$

（3）$\exp(x) > 0$。

由于（2）易得，任意 x，都有 $\exp(x) \neq 0$。

于是我们有，

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \exp(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x) \\ &= \exp(\frac{1}{2}x)\exp(\frac{1}{2}x) \\ &= \exp(\frac{1}{2}x)^2 \\ &> 0\end{aligned}$$

- (f)

  由 (b)(e) 和命题 10.3.3 可以得到该结论。

15.5.2

（1）先按照书中提示，先证明对于所有的 $k = 1, 2, 3, ...$, 都有 $(n+k)! > 2^k n!$。

对 k 进行归纳。

$k = 1$ 时，$(n+k)! = (n+1)! = (n+1)n!$，因为 $n \geq 3$，所以 $n+1 > 2^k = 2^1 = 2$，所以 $(n+k)! > 2^k n!$ 成立。

归纳假设 $k = j$ 时，$(n+j)! > 2^j n!$ 成立。

$k = j+1$ 时，

$$(n+j+1)! = (n+j)!(n+j+1)$$

由归纳假设和 $n+j+1 > 2$ 可得，

$$(n+j)!(n+j+1) > 2^j n! \times 2 = 2^{j+1} n!$$

即

$$(n+j+1)! > 2^{j+1} n!$$

归纳完成。

（2）证明 $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ... < \frac{1}{n!}$。

由（1）可知，

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+...<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k n!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k$$

由引理 7.3.3 可知，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k n!}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

于是可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k&=2-\sum_{k=0}^{0}(\frac{1}{2})^k\\&=2-1\\&=1\end{aligned}$$

综上可得

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+...<\frac{1}{n!}$$

（3）任意的 $n\geq 3$，$n!e$ 都不是整数。

$$n!\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}=n!\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}+n!\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!}$$

因为 $m\leq n$，都有 $\frac{n!}{m!}$ 是正整数。所以

$$n!\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}$$

是正整数。

又由（2）可知，

$$0<n!\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!}<1$$

综上，命题成立。

（4）推导出 e 是无理数。

反证法，假设 e 不是无理数，又因为 $e>0$，所以存在正整数 a,b，使得 $e=\frac{a}{b}$。

于是，我们有，

$$\frac{a}{b} = e$$
$$\Longrightarrow$$
$$a = be$$
$$\Longrightarrow$$
$$a(b-1)! = b!e$$

因为 $a(b-1)!$ 是正整数，所以 $b!e$ 也是正整数，这与（3）矛盾。

注意：这里有个细节，就是 $b \geq 3$ 不一定成立的困惑，这个无需考虑，只需做扩分操作即可。

15.5.3

- (a) x 是自然数。对 x 进行归纳。

  （1）$x = 0$ 时，由定理 15.5.2(e) 可知，$\exp(0) = 1$，又 $e^0 = 1$，所以命题成立。

  （2）归纳假设，$x = k$ 时，$\exp(k) = e^k$ 成立。

  （3）$x = k + 1$ 时，结合归纳假设和定理 15.5.2(d)，得

  $$\exp(k+1) = \exp(k)\exp(1) = e^k e = e^{k+1}$$

  归纳完成。

- (b) x 是整数。

  由 (a) 可知，我们只需讨论 x 是负整数的情况。

  设 $-x < 0$，于是 $x > 0$，

  $$\begin{aligned}\exp(-x) &= \frac{1}{\exp(x)} \\ &= \frac{1}{e^x} \\ &= e^{-x}\end{aligned}$$

  综上，命题成立。

- (c) x 是有理数。

  x 可以表示成 $\frac{a}{b}$，其中 a, b 都是整数，且 $b > 0$。

  $$\begin{aligned} &\exp(x)^b = \exp(\frac{a}{b}b) = \exp(a) = e^a \\ &\implies \\ &\exp(x) = e^{\frac{a}{b}} = e^x \end{aligned}$$

  综上，命题成立。

- (d) x 是实数。

  对任意实数 x，存在序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$，使得 $x = \lim_{n\to\infty} a_n$。

  由定义 6.7.2 可知，$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{a_n}$。

  又因为 $e^{a_n} = \exp(a_n)$，对所有的 n 均成立，又因为 exp 是连续的，利用命题 9.4.7 可知，

  $$\lim_{n\to\infty} \exp(a_n) = \exp(x)$$

  综上可得，

  $$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n\to\infty} e^{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp(a_n) \\ &= \exp(x) \end{aligned}$$

15.5.4