# 11.9 习题

张志聪

2025 年 1 月 6 日

## 11.9.1

由命题 11.6.1 可知，单调函数 $f$ 在 $[0,1]$ 上是黎曼可积的。于是由定理 11.9.1 可知，$F$ 函数在 $[0,1]$ 上是连续的。有一点需要注意，虽然 $f$ 在有理数点不连续，但不能以此来推断 $F$ 函数在有理数点处不可微。

- $q \in (0,1)$

  $q$ 同时是 $[0,1]\cap(q,+\infty)$ 和 $[0,1]\cap(-\infty,q)$ 的附着点，$\frac{F(x)-F(q)}{x-q}$ 在 $q$ 处可微分（即存在极限），当且仅当左右极限存在且相等。我们按照这个框架来证明。（书中 P189 处有说明）

  由习题 9.8.5 可知，存在一个某个自然数 $n$ 使得 $q = q(n)$。

  当 $x > q$ 时，由习题 9.8.5(b) 可知

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-F(q)}{x-q} &= \frac{\int_{[q,x]} f}{x-q} \\ &\geq \frac{\left(f(q)+2^{-n}\right)(x-q)}{x-q} \\ &= f(q)+2^{-n}\end{aligned}$$

  当 $x < q$ 时，类似地

$$\frac{F(x)-F(q)}{x-q} \leq f(q)$$

  于是

$$\lim_{x\to q; x\in(q,1]} \geq f(q)+2^{-n}$$
$$\lim_{x\to q; x\in[0,q)} \leq f(q)$$

综上，$F$ 在 $q$ 处不可微。

- $q = 0$ or $q = 1$ 通过左右极限的方式无法证明，当前还未找到解决方法。

## 11.9.2

（1）方法 1，利用推论 10.2.9 如果 $I$ 是空集或者单点集，那么结论是平凡的。

设 $x_0 \in I$，任意 $x \in I, x \neq x_0$。因为 $F, G$ 都是 $f$ 的原函数，由定义 11.9.3 可知，$F, G$ 都在 $I$ 上可微，于是由推论 10.2.9 可知，存在 $y \in [x, x_0]$（这里假设 $x > x_0$，$x < x_0$ 同理）使得

$$\begin{aligned}
(F-G)'(y) &= \frac{(F-G)(x)-(F-G)(x_0)}{x-x_0} \\
F'(y)-G'(y) &= \frac{(F-G)(x)-(F-G)(x_0)}{x-x_0} \\
f(y)-f(y) &= \frac{(F-G)(x)-(F-G)(x_0)}{x-x_0} \\
0 &= \frac{(F-G)(x)-(F-G)(x_0)}{x-x_0} \\
0 &= (F-G)(x)-(F-G)(x_0) \\
F(x)-G(x) &= F(x_0)-G(x_0)
\end{aligned}$$

令 $C = F(x_0) - G(x_0)$，于是任意 $x \in I$ 且 $x \neq x_0$ 都有

$$F(x) = G(x) + C$$

当 $x = x_0$

$$\begin{aligned}
&G(x_0) + C \\
&= G(x_0) + F(x_0) - G(x_0) \\
&= F(x_0)
\end{aligned}$$

综上，命题得证。

（2）方法 2

任意 $x \in I$，我们有

$$
\begin{aligned}
(F-G)'(x) &= F'(x) - G'(x) \\
&= f(x) - f(x) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

令 $h: I \to \mathbb{R}, h = (F-G)'(x)$，于是 $h$ 是 $I$ 上的常数函数，常数值为 0，所以 $h$ 是黎曼可积的。设 $x_0 \in I$，任意 $x \in I, x \neq x_0$，我们有（这里假设 $x > x_0$，$x < x_0$ 同理）

$$
\int_{[x_0,x]} h = (F-G)(x) - (F-G)(x_0) = 0
$$

$$
F(x) - G(x) = F(x_0) - G(x_0)
$$

令 $C = F(x_0) - G(x_0)$，于是任意 $x \in I$ 且 $x \neq x_0$ 都有

$$
F(x) = G(x) + C
$$

当 $x = x_0$

$$
\begin{aligned}
&G(x_0) + C \\
&= G(x_0) + F(x_0) - G(x_0) \\
&= F(x_0)
\end{aligned}
$$

综上，命题得证。

## 11.9.3

- $\Leftarrow$

  $f$ 是 $[a,b]$ 上的单调递增函数，由命题 11.6.1 可知，$f$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的。

  于是由定理 11.9.1（微积分第一基本定理）可知，$f$ 在 $x_0$ 处连续，则 $F$ 在 $x_0$ 处可微。

- $\Rightarrow$

反证法，假设 $f$ 在 $x_0$ 处不连续，那么有定义 9.3.6 和 $f$ 是单调递增函数可知，存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得时

$$f(x) > f(x_0) + \epsilon_0, if\ x > x_0$$
$$f(x) < f(x_0) - \epsilon_0, if\ x < x_0$$

我们有

$$\begin{cases} F'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \\ F'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \end{cases}$$

结合两组式子，我们有

$$F'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) - \epsilon$$
$$F'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \geq f(x_0) + \epsilon$$

于是

$$F'(x_0^-) \neq F'(x_0^+)$$

与题设 $F$ 在 $x_0$ 处可微矛盾。

特别地，$x = a\ or\ x = b$ 还未找到证明方法。