10.2 注释

张志聪

2025 年 4 月 11 日

1

本科高等数学有一个重要的定理：“柯西中值定理”，这里做一个补充。

说明 1. 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

- （*1*）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
- （*2*）在开区间 (a,b) 内可导；
- （*3*）对任一 $x \in (a,b)$，$F'(x) \neq 0$，

那么在 (a,b) 内至少有一个 ξ，使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \tag{1}$$

成立。

证明：
注意这里无法直接使用推论 10.2.9（中值定理）。
接下来的证明方法与同济版本一致。
设函数

$$\begin{aligned}\phi(x) &= F(x)\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} - f(x) \\ &= \frac{F(x)f(b)-F(x)f(a)-f(x)F(b)+f(x)F(a)}{F(b)-F(a)}\end{aligned}$$

因为

$$\phi(a) = \frac{F(a)f(b) - F(a)f(a) - f(a)F(b) + f(a)F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{F(a)f(b) - f(a)F(b)}{F(b) - F(a)}$$
$$\phi(b) = \frac{F(b)f(b) - F(b)f(a) - f(b)F(b) + f(b)F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{-F(b)f(a) + f(b)F(a)}{F(b) - F(a)}$$

于是我们有

$$\phi(a) = \phi(b)$$

利用定理 10.2.8（罗尔定理）可得，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\phi'(\xi) = 0$，即：

$$F'(\xi)\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} - f'(\xi) = 0$$
$$\Longrightarrow$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$