11.6 习题

张志聪

2025 年 1 月 3 日

11.6.1

证明框架参考了命题 11.5.3 的证明。

如果 I 是一个单点集或者空集，那么结论是平凡的。如果 I 是一个闭区间，那么根据命题 11.6.1 可以得到结论。于是我们假设 I 是形如 $(a,b], (a,b)$ 或 $[a,b)$ 的区间，其中 $a < b$。

设 M 是 f 的界，所以对所有的 $x \in I$ 均有 $-M \le f(x) \le M$。现在设 $0 < \epsilon < (b-a)/2$ 是一个很小的数。当 f 被限制在区间 $[a+\epsilon, b-\epsilon]$ 上时，它就是单调有界的，从而再次利用 11.6.1 可知，它是黎曼可积的。特别地，我们能够找到一个分段常数函数 $h : [a+\epsilon, b-\epsilon]$ 上从上方控制 f，并且有

$$\int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} h \le \int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} f + \epsilon$$

定义 $\widetilde{h} : I \to \mathbb{R}$ 为

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), x \in [a+\epsilon, b-\epsilon] \\ M, x \in I \setminus [a+\epsilon, b-\epsilon] \end{cases}$$

$\widetilde{h}$ 显然是 I 上从上方控制 f 的分段常数函数。根据定理 11.2.16 可知，

$$\int_I \widetilde{h} = \epsilon M + \int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} h + \epsilon M \le \int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} f + (2M+1)\epsilon$$

特别地

$$\overline{\int}_I f \le \int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} f + (2M+1)\epsilon$$

类似地，有

$$\underline{\int}_I f \geq \int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} f - (2M+1)\epsilon$$

从而

$$\overline{\int}_I f - \underline{\int}_I f \leq (4M+2)\epsilon$$

综上由 ϵ 的任意性且 $\overline{\int}_I f - \underline{\int}_I f$ 与 ϵ 无关可得，f 是黎曼可积的。

11.6.2

（1）分段单调函数的定义参考定义 11.5.4：

设 I 是有一个有界区间，并设 $f: I \to \mathbb{R}$。我们称 f 在 I 上是有界分段单调函数，当且仅当存在一个 I 的划分 P，使得对于所有的 $J \in P$，$f|_J$ 都是 J 上的单调有界函数。

（2）由（1）可知存在一个 I 的划分 P，使得对于所有的 $J \in P$，$f|_J$ 都是 J 上的单调有界函数。于是对任意 $J \in P$，由推论 11.6.3 可知 $f|_J$ 在 J 上是黎曼可积的。剩余部分的证明与习题 11.5.1 类似，这里不做赘述。

11.6.3

注意这里无法假设 N 是正整数。

- $\Rightarrow$

  因为 $x \geq 0, f(x) \geq 0$，可知 $\int_{[0,N]} f$ 是关于实数 N 的单调递增函数，由定理 5.5.9（最小上界的存在性）可知只要证明其有上界，则最小上界存在且有限。

  由推论 11.6.3 可知 $\int_{[0,N]} f$ 在 $[0,N]$ 上是黎曼可积的。

  由推论 5.4.12 和命题 4.4.1 可知，对实数 N 存在一个自然数 n 使得 $n \leq N < n+1$，现在把 $[0,N]$ 划分成 $n+1$ 个半开区间

  $$\{[0,1),[1,2),...,[n-1,n),[n,N]\}$$

由命题 11.3.12 可知

$$\begin{aligned}\overline{\int}_{[0,N]} f &\leq \sum_{j=0}^{n}\left(\sup_{x\in[j,j+1)} f(x)\right) + \sup_{x\in[n,N]} f(x) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n+1} f(j)\end{aligned}$$

以上最后一个等式由 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个单调递增的函数保证的。

因为对任意的 $x\in[0,+\infty), f(x)\geq 0$，由定理 11.4.1(d) 可知

$$\int_{[0,N]} f \geq 0$$

综上，对任意 $N>0$ 都有

$$0 \leq \underline{\int}_{[0,N]} f \leq \overline{\int}_{[0,N]} f \leq \sum_{j=0}^{n+1} f(j)$$

即

$$0 \leq \int_{[0,N]} f \leq \sum_{j=0}^{n+1} f(j)$$

不妨设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ 收敛于 L，于是对任意 N 都有

$$0 \leq \int_{[0,N]} f \leq L$$

$\int_{[0,N]} f$ 是有界的，于是命题成立。

- $\Leftarrow$

  反证法，假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ 是发散的。那么，对任意实数 M 都存在正整数 N 使得

  $$\sum_{n=0}^{N} > M$$

  现在把 $[0,N]$ 划分成 $N+1$ 个半开区间

  $$\{[0,1),[1,2),...,[n-1,n),[n,N),\{N\}\}$$

由命题 11.3.12 可知

$$\begin{aligned}\underline{\int}_{[0,N]} f &\geq \sum_{j=0}^{N}\left(\inf_{x\in[j,j+1)} f(x)\right)\\ &\geq \sum_{j=1}^{N} f(j) = M - f(0)\end{aligned}$$

因为 M 是任取的，而 $f(0)$ 是固定值，于是可得 $\underline{\int}_{[0,N]} f$ 是无限的，这与题设矛盾。

11.6.4

（1）函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{N}\\ 0, x\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

此时 $\sup\limits_{N>0}\int_{[0,N]} f = 0$，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ 是发散的。

（2）反过来定义刚才的函数

$$f(x)=\begin{cases}0, x\in\mathbb{N}\\ x, x\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

此时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n) = 0$，而 $\sup\limits_{N>0}\int_{[0,N]} f = +\infty$。

11.6.5

令 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^q}$。

（1）$p>1$

由引理 5.6.9(d) 可知，$x>0$ 时，$\frac{1}{x^q}$ 是非负且递减的，由命题 5.4.12 可知，存在正整数 N' 使得 $q\leq N'$。

由命题 11.6.4（积分判别法）可知，只需证明 $\sup\limits_{N>1}\int_{[1,N]}\frac{1}{x^q}$ 是有界的即可证明该命题。

类似于习题 11.6.3 的证明，对任意 $N>1$，由推论 5.4.12 和命题 4.4.1 可知，对实数 N 存在一个自然数 n 使得 $n\leq N<n+1$，现在把 $[1,N]$ 划

分成 $n+1$ 个半开区间

$$\{[1,2),[2,3),...,[n-1,n),[n,N]\}$$

由命题 11.3.12 可知

$$\begin{aligned}\overline{\int}_{[1,N]} f &\leq \sum_{j=1}^{n}\left(\sup_{x\in[j,j+1)} f(x)\right) + \sup_{x\in[n,N]} f(x)\\ &\leq \sum_{j=1}^{n+1} f(j)\\ &\leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j^{N'}}\end{aligned}$$

以上第二个等式由 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个单调递增的函数保证的。
由推论 11.6.3 可知 $\int_{[1,N]} f$ 在 $[1,N]$ 上是黎曼可积的。于是

$$\underline{\int}_{[1,N]} f = \overline{\int}_{[1,N]} f$$

因为 f 是非负的，所以

$$\int_{[1,N]} f \geq 0$$

于是

$$0 \leq \int_{[1,N]} f \leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j^{N'}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{N'}}$$

由推论 7.3.7 可知 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{N'}}$ 是收敛的，综上，对任意 $N>1$ 都有 $\int_{[1,N]} f$ 是有界的，由定理 5.5.9（最小上界的存在性）可知 $\sup\limits_{N>1} \int_{[1,N]} f$ 是有限的，利用命题 11.6.4（积分判别法）可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 是收敛的。

（2）$p \leq 1$

由引理 5.6.6(e) 可知，f 是关于 p 的增函数。由命题 5.4.12（有理数对实数的界定）可知，存在正有理数 q 使得 $q \leq p$，由推论 7.3.7 可知 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^q}$ 是发散的，又对任意 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n^q}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 也是发散的。