19.2 注释

张志聪

2025 年 6 月 5 日

说明 1. 定理 *19.2.9* 的证明中："$\sup_n m(F_j \cap E_n) = m(F_j)$ **可以利用习题** ***18.2.3(a)*** **得到。**"的具体证明过程。

证明：

对每一个 n 都有

$$F_j \cap E_1 \subseteq F_j$$

而且我们有

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots$$

于是可得

$$F_j \cap E_1 \subseteq F_j \cap E_2 \subseteq \cdots$$

所以，$(m(F_j \cap E_n))_{n=1}^{\infty}$ 是单调的递增序列，于是我们有

$$\sup_n m(F_j \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} m(F_j \cap E_n)$$

由习题 18.2.3(a) 可知

$$\lim_{n\to\infty} m(F_j \cap E_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_j \cap E_n)$$

接下来证明：

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_j \cap E_n) = m(F_j)$$

为了完成证明，我们只需证明

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_j \cap E_n = F_j$$

对任意 n 都有

$$F_j \cap E_n \subseteq F_j$$
$$\Longrightarrow$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_j \cap E_n \subseteq F_j$$

对任意 $x \in F_j$，因为 $F_j \subseteq \Omega$，又因为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$，所以存在 n 使得 $x \in E_n$，于是 $x \in F_j \cap E_n \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_j \cap E_n$，所以

$$F_j \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_j \cap E_n$$

综上可得

$$F_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_j \cap E_n$$

说明 2. 引理 *19.2.10* 中：“简单函数序列 $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$ 使得 $\sup\limits_n s_n = f$。”的证明。

证明：

文中的说明存在歧义，应该是：简单函数序列 $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots$ 逐点收敛于 f，使得 $\sup\limits_n s_n = f$。

先解释下 $\sup\limits_n s_n$ 的定义：

$$(\sup_n s_n)(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n(x) \text{ 对每个 } x \in \Omega$$

即

- $\sup\limits_n s_n$ 是一个函数；

- 它在每个点 x 的取值是实数序列 $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ 的上确界（注意不是极限点。因为实数序列只要有界，就有上确界，但序列本身不一定收敛）。

对任意 $x \in \Omega$，题设可知 $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ 的单调递增的，所以 $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ 收敛于上确界 $(\sup_n s_n)(x)$。

如果 $(\sup_n s_n)(x) = +\infty$，由 $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ 逐点收敛于 f 可知，$f(x) = +\infty$，我们有

$$(\sup_n s_n)(x) = f(x) = +\infty$$

如果 $(\sup_n s_n)(x)$ 是实数，那么对任意 $\epsilon > 0$，存在 N_0，使得只要 $n \geq N_0$，就有

$$|(\sup_n s_n)(x) - s_n(x)| < \frac{1}{2}\epsilon \tag{1}$$

$(s_n)_{n=1}^{\infty}$ 逐点收敛于 f，那么存在 N_1，使得只要 $n \geq N_1$，就有

$$|f(x) - s_n(x)| < \frac{1}{2}\epsilon \tag{2}$$

综上，$n \geq \max(N_0, N_1)$，式子 (1)(2) 同时成立。

由三角不等式可知

$$|(\sup_n s_n)(x) - f(x)| < \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知，$(\sup_n s_n)(x) = f(x)$，由 x 的任意性可知，$\sup_n s_n = f$。

说明 3. 法都引理如何推导出：极限函数的积分不可能大于初始积分（的极限）。

证明：

我们需要证明以下不等式成立：

$$\int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} f_n \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n$$

我们先证明：$\lim_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$。（书中是没有的，不要实数序列与函数序列混淆）

设

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

于是，对任意 $x_0\in\Omega$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

我们有

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_n \left(\inf_{m\geq n} f_m\right)$$

于是

$$(\liminf_{n\to\infty} f_n)(x_0) = \sup_n \left(\inf_{m\geq n} f_m(x_0)\right)$$

利用实数序列的极限值等于下极限，我们有

$$\sup_n \left(\inf_{m\geq n} f_m(x_0)\right) = f(x_0)$$

由 x_0 的任意性可得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$。

于是利用法都定理可得

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$