14.7 习题

张志聪

2025 年 3 月 23 日

14.7.1

（1）f_n 一致收敛于 f。

$$
\begin{aligned}
& f_n(x) - f(x) \\
&= f_n(x) - L + \int_{[a,x_0]} g - \int_{[a,x]} g \\
&= f_n(x) - L - f_n(x_0) + f_n(x_0) + \int_{[a,x_0]} g - \int_{[a,x]} g \\
&= f_n(x_0) - L + \int_{[x_0,x]} f_n' + \int_{[a,x_0]} g - \int_{[a,x]} g \\
&= f_n(x_0) - L + \int_{[x_0,x]} f_n' - g
\end{aligned}
$$

由 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = L$ 可得，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N_1 > 0$，使得只要 $n \geq N_1$，就有

$$|f_n(x_0) - L| < \frac{1}{2}\epsilon$$

又由 f_n' 一致收敛与 g，那么，存在 $N_2 > 0$，使得只要 $n \geq N_2$，就有

$$f_n' - g < \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{|b-a|}$$

综上可得，对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $N > max(N_1, N_2)$，使得只要 $n \geq N$，就有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_0) - L + \int_{[x_0,x]} f_n' - g| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

命题得证。

（2）f 是可微的，它的导函数是 g。

$L-\int_{[a,x_0]} g$ 是常数，所以，导数是 0；g 是连续的，由推论 11.5.2 可知，

$$\int_{[a,x]} g$$

是黎曼可积的。

又由定理 11.9.1 可知，$(\int_{[a,x]} g)' = g(x)$。

综上，命题得证。

（3）例 1.2.10 与定理 14.7.1 不矛盾的原因。

把 ϵ 看做 $\frac{1}{n}$，例 1.2.10 的操作没有按照定理 14.7.1 的操作，所以，定理 14.7.1 与例 1.2.10 不矛盾。

14.7.2