4.4 习题

2025 年 5 月 22 日

4.4.1

证明：

1. 证明 n 的存在性

由有理数的三歧性分情况讨论。

（1）$x = 0$ 时，$n = 0$ 满足命题 $n \leq x < n + 1$。

（2）x 是正有理数时，存在正整数 a, b 使得 $x = a/b$。

当 $a < b$ 时，因为 x 是正有理数，所以 $x \geq 0$，又因为，

$$\begin{aligned} 1 - x &= 1 - a/b \\ &= (b - a)/b \end{aligned}$$

由于 $b > a$ 可知，$b - a > 0$，由此可知 $1 - x$ 是正有理数，所以 $1 > x$。从而可取 $n = 0$。

当 $a > b$ 时，由命题 2.3.9 可知，存在自然数 m, r 使得 $a = mb + r$ 且 $0 \leq r < b$。因为 $a = mb + r$，所以，

$$\begin{aligned} a/b &= (mb + r)/b \\ &= m + r/b \end{aligned}$$

由于 $0 \leq r/b < 1$，所以可取 $n = m$，满足命题。

（3）x 是负有理数时，存在正整数 a, b 使得 $x = (-a)/b$。

当 $a < b$ 时，取 $n = -1$，证明过程与上面类似，不在赘述

当 $a > b$ 时，取 $n = -(m+1)$，证明过程与上面类似，不在赘述

2. 证明 n 的唯一性

假设存在整数 $n_1 \neq n_2$ 并且满足

$$n_1 \leq x < n_1 + 1 \tag{1}$$

$$n_2 \leq x < n_2 + 1 \tag{2}$$

由于 $n_1 \neq n_2$，不妨假设 $n_1 < n_2$，所以存在正自然数 $a \geq 1$ 使得 $n_2 = n_1 + a$，又由假设可知 $n_2 \leq x < n_1 + 1$，因为 $n_2 = n_1 + a$，所以

$$n_1 + a \leq x < n_1 + 1$$

由 $a \geq 1$ 可知，以上公式矛盾，所以 $n_1 < n_2$ 不成立。

同理可知 $n_1 > n_2$ 不成立。

综上 $n_1 \neq n_2$ 时无法同时满足命题，至此 n 的唯一性得证。

4.4.2

证明：

a. 不存在无穷递降的自然数列

利用反证法。假设存在无穷递降的自然数列 $a_0, a_1, a2, ...$。证明无穷递降的自然数列具有性质 p：对任意的 $k \in N$ 和任意的 $n \in N$ 都有 $a_n \geq k$，然后利用性质 p 得到矛盾，以此达到“不存在无穷递降的自然数列”的目的。

利用归纳法证明性质 p：

$k = 0$ 时，由于是自然数列，所以任意 $n \in N$ 都有 $a_n \geq 0$；

归纳假设 k 时，任意 $n \in N$ 都有 $a_n \geq k$；

$k+1$ 时，假设存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$a_n < k + 1$$
$$\Longrightarrow$$
$$a_n \leq k$$

这与归纳假设矛盾，所以找不到 n 使得 $a_n < k+1$，即任意 n 都有 $a_n \geq k+1$。

至此，性质 p 已证明完成。

令 $k = a_0$，于是由性质 p 可得，

$$a_1 \geq a_0$$

这与数列 $a_0, a_1, a_2, ...$ 是无穷递降矛盾。

b. 换成整数、正有理数无穷递降原理是否成立

证明：

不成立；整数无穷递降的数列是存在的，比如按一下方法构造 $a_0 = 0, a_1 = a_0 - 1, a_2 = a_1 - 1, ...$；

正有理数无穷递降的数列是存在的，比如按一下方法构造 $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}a_0, a_2 = \frac{1}{2}a_1, ...$；

4.4.3

证明：

一个自然数要么是偶数，要么是奇数，但不可能既是偶数也是奇数。

对自然数 n 进行归纳证明。

自然数是 0，此时是偶数，但不可能是奇数，因为 0 小于其他任意自然数，如果存在自然数 k_0 使得 $0 = 2k_0 + 1$，则表明 $0 \geq 1$。

归纳假设 n 时，n 要么是偶数，要么是奇数，但不可能既是偶数也是奇数。

$n+1$ 时，如果 n 是偶数，即存在 k_0 使得 $n = 2k_0$，此时 $n+1 = 2k_0+1$，$n+1$ 是奇数。如果 $n+1$ 同时又是偶数，即存在 k_1 使得 $n+1 = 2k_1$，所以，

$$2k_1 = 2k_0 + 1$$

于是 $k_1 > k_0$，此时 $k_1 \geq k_0 + 1$，$2k_1 \geq 2k_0 + 2$ 得到 $2k_1 > 2k_0 + 1$，由自然数序的三歧性可知，

$$2k_1 = 2k_0 + 1 \tag{3}$$

$$2k_1 > 2k_0 + 1 \tag{4}$$

不可同时成立，由此可知 $n + 1$ 不可能为偶数。

同理 n 是奇数时，$n + 1$ 只能是偶数。

综上，归纳完成。

2.p 是奇数，那么 p^2 也是奇数。

证明：

p 是奇数，所以存在自然数 k 使得 $p = 2k+1$，所以，

$$\begin{aligned} p^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

于是 p^2 是奇数。

3. 因为 $p^2 = 2q^2$，所以 $q < p$。

证明：

通过自然数序的三歧性证明。

（1）如果 $p = q$，那么 $p^2 = p^2 + p^2$，由于 p^2 是正自然数，所以 $p^2 > p^2$ 明显是错误的；

（2）如果 $p < q$。由题设，

$$p^2 = 2q^2$$

可知 $p^2 > q^2$，又因为，$p < q$ 可知

$$p^2 < qp < q^2$$

于是与 $p^2 > q^2$ 矛盾；

综上，$q < p$