15.2 习题

张志聪

2025 年 4 月 12 日

15.2.1

- $0 \le k \le n$ 时。

  对 k 采用归纳法。

  归纳基始 $k=0$，$c\frac{n!}{(n-0)!}(x-a)^{n-0} = c(x-a)^n = f(x)$，这与 $f^{(0)}(x) = f(x)$ 一致。

  归纳假设 $k=j$ 是命题成立。

  $k=j+1$ 时，

$$\begin{aligned}
f^{(j+1)}(x) &= (f^{(j)}(x))' \\
&= (c\frac{n!}{(n-j)!}(x-a)^{n-j})' \\
&= c\frac{n!}{(n-j)!}(n-j)(x-a)^{n-j-1} \\
&= c\frac{n!}{(n-(j+1))!}(n-j)(x-a)^{n-(j+1)}
\end{aligned}$$

- $k > n$ 时。

  由之前的讨论可知，

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= c\frac{n!}{(n-n)!}(x-a)^{n-n} \\
&= cn!
\end{aligned}$$

  于是可得 $k > n$ 时，$f^{(k)}(x) = 0$。

15.2.2

对任意 $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$，定义级数如下

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{1-a})^{n+1}(x-a)^n$$

接下来我们证明该级数一致收敛于某个函数，并逐点收敛于 f，由一致收敛与逐点收敛的函数相同，证明该级数一致收敛于 f。

先计算收敛半径：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(|(\frac{1}{1-a})^{n+1}| \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} |\frac{1}{1-a}|(|\frac{1}{1-a}|)^{\frac{1}{n}} \\
&= |\frac{1}{1-a}| \lim_{n\to\infty} (|\frac{1}{1-a}|)^{\frac{1}{n}} \\
&= |\frac{1}{1-a}| \times 1 \\
&= |\frac{1}{1-a}|
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} (|\frac{1}{1-a}|)^{\frac{1}{n}} = 1$ 利用了引理 6.5.2。

于是由命题 6.4.12(f) 可得，

$$\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = |\frac{1}{1-a}|$$

所以

$$R = |1-a|$$

于是令 $r = \frac{1}{2}|1-a|$，只需 $|x-a| < r$，即 $x \in (a-r, a+r)$ 时，由定理 15.1.6(c) 可知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{1-a})^{n+1}(x-a)^n$ 在 $[a-r, a+r]$ 上一致收敛于某个函数 g，因为 $(a-r, a+r) \subseteq [a-r, a+r]$，所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{1-a})^{n+1}(x-a)^n$ 在 $(a-r, a+r)$ 上也一致收敛于 g。

对任意 $x \in (a-r, a+r)$，于是可得

$$|\frac{x-a}{1-a}| < 1$$

于是利用引理 7.3.3 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{1-a})^{n+1}(x-a)^n &= \frac{1}{1-a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x-a}{1-a})^n \\ &= \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-\frac{x-a}{1-a}} \\ &= \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

于是可得级数逐点收敛于 f。

综上，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{1-a})^{n+1}(x-a)^n$ 在 $(a-1,a+1)$ 上也一致收敛于 f（注 14.2.8 中有阐述）。

由 a 的任意性可知，命题成立。

15.2.3

注意：命题中的 $r \leq R$（R 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ 的收敛半径）

对 k 进行归纳。

（1）归纳基始 $k=1$，由定理 15.1.6(d) 可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ 在区间 $(a-r,a+r)$ 上一致收敛 f'，即

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(x-a)^n\end{aligned}$$

命题成立。

（2）归纳假设 $k=j$ 时，命题成立，函数 f 在 $(a-r,a+r)$ 上都是 j 次可微的，并且 j 次导函数由下式给出：

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+j}(n+1)(n+2)...(n+j)(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+j}\frac{(n+j)!}{n!}(x-a)^n$$

（3）$k=j+1$ 时。

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}|c_{n+j}\frac{(n+j)!}{n!}|^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n\to\infty}|c_{n+j}|^{\frac{1}{n}}|\frac{(n+j)!}{n!}|^{\frac{1}{n}} \\
&= \limsup_{n\to\infty}|c_{n+j}|^{\frac{1}{n}}\limsup_{n\to\infty}|\frac{(n+j)!}{n!}|^{\frac{1}{n}} \\
&= \limsup_{n\to\infty}|c_{n+j}|^{\frac{1}{n}}\times 1 \\
&= \limsup_{n\to\infty}|c_{n+j}|^{\frac{1}{n}} = R
\end{aligned}$$

再次利用定理 15.1.6(d) 可知，函数 $f^{(j)}$ 在 $(a-R,a+R)$ 上可微，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nc_{n+j}\frac{(n+j)!}{n!}(x-a)^{n-1}$ 在区间 $(a-r,a+r)$ 上一致收敛于 $(f^{(j)})'=f^{(j+1)}$。

又因为

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}nc_{n+j}\frac{(n+j)!}{n!}(x-a)^{n-1} \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}nc_{n+1+j}\frac{(n+1+j)!}{n!}(x-a)^{n}
\end{aligned}$$

综上可得

$$f^{(j+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}nc_{n+1+j}\frac{(n+1+j)!}{n!}(x-a)^{n}$$

命题成立，归纳完成。

15.2.4

由命题 15.2.6 可知，

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+k}\frac{(n+k)!}{n!}(x-a)^{n}$$

当 $x=a$ 时，如果 $n>0$，则 $(x-a)^n=0^n=0$，于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+k}\frac{(n+k)!}{n!}(x-a)^n$ 只剩第一项，即

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}\frac{(n+k)!}{n!}0^n \\
&= c_{0+k}\frac{(0+k)!}{0!}0^0 \\
&= c_k\frac{k!}{1}\times 1 \\
&= c_k k!
\end{aligned}$$

于是可得，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 的系数为

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

综上可得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

15.2.5

（1）证明恒等式。

$$\begin{aligned}
(x-a)^n &= ((x-b)+(b-a))^n \\
&= \sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}(x-b)^m
\end{aligned}$$

注意：第二个等式使用了二项式公式，即习题 7.1.4。

（2）解释这个恒等式为什么与泰勒公式以及习题 15.2.1 是一致的。（即彼此之间不存在矛盾）

令 $f(x)=(x-a)^n$，并设 f 是在 b 处实解析的函数（习题 15.2.6 保证了这个假设是成立的），由泰勒公式可知，

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(b)}{m!}(x-b)^m$$

由习题 15.2.1 可知，

$$f^{(m)}(b) = \frac{n!}{(n-m)!}(b-a)^{n-m}$$

综上可得，

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(b)}{m!}(x-b)^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}(x-b)^m \end{aligned}$$

15.2.6

设 g 是一元多项式，所以我们可以找到一个正整数 $k \geq 0$ 和实数 $a_0, a_1, \ldots, a_k$ 使得

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$$

对任意 $b \in \mathbb{R}$，结合习题 15.2.5，我们有

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} b^{n-m}(x-b)^m$$

$j \leq k$ 时，令系数为

$$c_j = \sum_{n=0}^{k} \frac{n!}{m!(n-m)!} b^{n-m}, \quad m = j\text{且}m \leq n$$

于是可以把 $g(x)$ 表示为

$$\begin{aligned} g(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-b)^n \end{aligned}$$

其中，$n > k$ 时，$c_n = 0$。于是可得 g 在 b 处是实解析的。

由 b 的任意性可知，g 在 $\mathbb{R}$ 上是实解析的，命题成立。

15.2.7

（1）证明恒等式 $\frac{r}{r-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n r^{-n}$，$r \in (-r, r)$。

因为

$$x^n r^{-n} = (xr^{-1})^n = (\frac{x}{r})^n$$

又

$$|\frac{x}{r}| < 1$$

于是利用引理 7.3.3 可知，任意 $x \in (-r, r)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n r^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{x}{r}} = \frac{r}{r - x}$$

（2）证明恒等式

令 $f(x) = \frac{r}{r-x}, x \in (-r, r)$，于是由 (1) 可得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n r^{-n},\ \ r \in (-r, r)$$

其中幂级数第 n 个系数为 $c_n = r^{-n}$。

对 $m \geq 0$，我们有（可以通过归纳法证明），

$$f^{(m)}(x) = \frac{m!r}{(r-x)^{m+1}}$$

又

$$\begin{aligned}(\sum_{n=0}^{\infty} x^n r^{-n})^{(m)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} x^n r^{-(n+m)} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m} r^{-n}\end{aligned}$$

利用命题 15.2.6 可知，

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m} r^{-n}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{m!r}{(r-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m} r^{-n}$$

即：

$$\frac{r}{(r-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} x^{n-m} r^{-n}$$

（3）证明绝对收敛。

使用推论 7.5.3（比值判别法）

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}x^{n+1-m}r^{-(n+1)}}{\frac{n!}{m!(n-m)!}x^{n-m}r^{-n}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n+1-m)}xr^{-1} \\
&= \limsup_{n\to\infty} (1+\frac{m}{(n+1-m)})\frac{x}{r}
\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{m}{(n+1-m)} = 1$ 且 $\frac{x}{r} < 1$ 可知，

$$\limsup_{n\to\infty} (1+\frac{m}{(n+1-m)})\frac{x}{r} < 1$$

综上可得

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!}x^{n-m}r^{-n}$$

绝对收敛。

15.2.8

- (a)

  因为

  $$|a-b| \le r-s$$
  $$|a-b|+s \le r$$

  反证法，假设 $|a-b| \ge r$，于是

  $$|a-b|+s \ge r+s$$

  因为 $s>0$，所以 $|a-b|+s \le r$ 与 $|a-b|+s \ge r+s$ 矛盾，假设不成立。

- (b)

  收敛半径为：

  $$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

于是可得

$$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{R}$$

因为 $r-\epsilon<R$，所以

$$\frac{1}{r-\epsilon}>\frac{1}{R}$$

于是由上极限的定义可知，存在 N 使得

$$C_N^+\geq\frac{1}{r-\epsilon}$$

其中 $C_N^+=\sup(|c_n|^{\frac{1}{n}})_{n=N}^{\infty}$。

由上确界的定义可知，对所有的 $n\geq N$，都有

$$|c_n|^{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{r-\epsilon}$$
$$\Longrightarrow$$
$$|c_n|\leq(r-\epsilon)^{-n}$$

因为 $n<N$ 是有限的，且由推论 5.4.13（阿基米德性质）可知，对每一个 n 都存在，正整数 M_n 使得

$$|c_n|<M_n(r-\epsilon)^{-n}$$

取 $C:=max(M_0,M_2,\cdots,M_N)$（其中 $M_N=1$），我们有

$$|c_n|\leq C(r-\epsilon)^{-n}$$

- (c)

  由 (a) 可知 $|a-b|<r$，所以存在 $0<\epsilon<1$ 使得 $|a-b|<r-\epsilon$，又由 (b) 可知，存在 $C>0$ 使得对所有的正整数 $n\geq0$ 都有

  $$|c_n|\leq C(r-\epsilon)^{-n}$$

  于是可得对任意的 $n\geq m$ 都有

  $$\left|\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n\right|\leq C\left|\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}(r-\epsilon)^{-n}\right|$$

$$\sum_{n=m}^{\infty}\left|\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n\right| \le C\sum_{n=m}^{\infty}\left|\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}(r-\epsilon)^{-n}\right|$$

因为 $|b-a| \in (-r+\epsilon, r-\epsilon)$,由习题 15.2.7 可知,$C\sum_{n=m}^{\infty}\left|\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}(r-\epsilon)^{-n}\right|$ 收敛,利用推论 7.3.2(比较判别法)可知,$\sum_{n=m}^{\infty}\left|\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n\right|$ 绝对收敛，所以 $\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n$ 收敛，于是 d_m 是某个实数，所以是有意义的。

- (d)

  由 (c) 中的讨论可知，

$$\begin{aligned}
|d_m| &\le C\sum_{n=m}^{\infty}\left|\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}(r-\epsilon)^{-n}\right| \\
&= C\frac{r-\epsilon}{(r-\epsilon-|b-a|)^{m+1}} \\
&\le C\frac{r-\epsilon}{(r-\epsilon)^{m+1}} \\
&= C\frac{1}{(r-\epsilon)^m}
\end{aligned}$$

  题设 $(b-s, b+s)$ 是 $(a-r, a+r)$ 的子集可知，

$$r \ge s$$

  综上可得

$$|d_m| \le C\frac{1}{(r-\epsilon)^m} \le C\frac{1}{(s-\epsilon)^m}$$

- (e)

  （1）绝对收敛。

  因为 $x \in (b-s, b+s)$，所以

$$-s < x-b < s$$

利用 (d)，对任意 $m \geq 0$ 都有

$$|d_m||x-b|^m \leq C(s-\epsilon)^{-m}|x-b|^m$$
$$|d_m||x-b|^m \leq C\left|\frac{x-b}{s-\epsilon}\right|^m$$

由 (d) 可知，上式对任意的 ϵ 都成立，令 $|x-b| < |s-\epsilon|, \left|\frac{x-b}{s-\epsilon}\right| < 1$，于是可得

$$\sum_{m=0}^{\infty} C\left|\frac{x-b}{s-\epsilon}\right|^m$$

收敛。由比较判别法可知，

$$\sum_{m=0}^{\infty} |d_m||x-b|^m$$

收敛。

（2）一致收敛于 $f(x)$。

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} d_m(x-b)^m &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n(x-b)^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}(x-b)^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-b)^n\end{aligned}$$

（注意：其中第二个等式，求和上下限的变换十分关键，建议绘制一张坐标图，m, n 分别作为 x 轴和 y 轴）。

由上可得，在 $x \in (b-s, b+s)$ 上，无限级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} d_m(x-b)^m$ 与无限级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-b)^n$ 等价。

由题设可知，在 $(a-r, a+r)$ 上 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-b)^n$ 一致收敛于 $f(x)$，且 $(b-s, b+s)$ 是 $(a-r, a+r)$ 的子区间，所以，$\sum\limits_{m=0}^{\infty} d_m(x-b)^m$ 也一致收敛于 $f(x)$。

- (f)

对任意 $b \in (a-r, a+r)$，存在 $s > 0$ 使得 $(b-s, b+s)$ 是 $(a-r, a+r)$ 的子集，由 (e) 可知，对于所有的 $x \in (b-s, b+s)$，存在幂级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} d_m (x-b)^m$ 收敛于 f，命题得证。