19.2 习题

张志聪

2025 年 6 月 5 日

19.2.1

- (a)

  (1)

  因为 0 是从下方控制 f 的非负简单函数，因此可得

  $$0 \leq \int_{\Omega} f \leq +\infty$$

  (2)

  - $\Rightarrow$

    考虑集合

    $$A := \{x \in \Omega : f(x) > 0\}$$

    我们要证明这个集合的测度为零。

    对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，定义

    $$A_n := \{x \in \Omega : f(x) > \frac{1}{n}\}$$

    显然 $A_n \subseteq A$，并且

    $$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

    因为在 A_n 上，$f(x) \geq \frac{1}{n}$，于是我们有

    $$\int_{\Omega} f \geq \int_{A_n} f \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} m(A_n) \geq 0$$

（注意没有用到 (c)，因为这个可以通过定义 19.2.2 和命题 19.1.10 推出）

通过题设可知，$\int_\Omega f = 0$，所以

$$\frac{1}{n}m(A_n) \leq 0$$
$$\implies$$
$$m(A_n) = 0$$

于是，我们有

$$m(A) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0$$

命题得证。

- $\Leftarrow$

  设

  $$A = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$$

  由题设可知

  $$m(A) = 0$$

  于是由命题 19.1.10(a) 可知，对所有 s 是一个非负简单函数，并且 s 从下方控制 f 的函数，我们有

  $$\int_\Omega s = 0$$

  所以

  $$\int_\Omega f = 0$$

- (b)

  考虑集合

  $$A = \{\int_\Omega s : s\text{是一个非负简单函数，并且 } s \text{ 是从下方控制 } f\}$$
  $$B = \{\int_\Omega s : s\text{是一个非负简单函数，并且 } s \text{ 是从下方控制 } cf\}$$

对任意 s 从下方控制 f 时，cs 也从下方控制 cf（反之亦成立）。而且由命题 19.1.10(c) 可知，

$$\int_\Omega cs = c\int_\Omega s$$

于是可得

$$\begin{aligned} x &\in A \\ &\Leftrightarrow \\ cx &\in B \end{aligned}$$

所以

$$\sup(B) = c\sup(A)$$

即：

$$\int_\Omega cf = c\int_\Omega f$$

- (c)

  考虑集合

$$\begin{aligned} A &= \{\int_\Omega s : s\text{是一个非负简单函数，并且 } s \text{ 是从下方控制 } f\} \\ B &= \{\int_\Omega s : s\text{是一个非负简单函数，并且 } s \text{ 是从下方控制 } g\} \end{aligned}$$

  由题设可知，对任意 s 从下方控制 f 时，s 也从下方控制 g。于是可得

$$x \in A \implies x \in B \implies A \subseteq B$$

  于是我们有

$$sup(A) \leq sup(B)$$

  即

$$\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$$

- (d)

  考虑集合

  $$A := \{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$$

  有题设可知 $m(A) = 0$。

  对任意 $\epsilon > 0$，由定义 19.2.2（通过上确界的方式定义的）可知，存在一个非负简单函数 s，使得

  $$\int_\Omega f - \epsilon < \int_\Omega s$$

  定义一个 s' 从下方控制 g，

  $$s'(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A \\ s(x) & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

  于是可得

  $$\int_\Omega s' \leq \int_\Omega g$$

  令 $h = s - s'$，于是由命题 19.1.10(a) 可知

  $$\int_\Omega h = 0$$

  因为 $s = h + s'$，于是由命题 19.1.10(b) 可知

  $$\int_\Omega s = \int_\Omega h + \int_\Omega s' = \int_\Omega s'$$

  综上可得

  $$\int_\Omega f - \epsilon < \int_\Omega s' \leq \int_\Omega g$$

  由 ϵ 的任意性可得

  $$\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$$

  类似地，可得

  $$\int_\Omega g \leq \int_\Omega f$$

  所以

  $$\int_\Omega g = \int_\Omega f$$

- (e)

  命题有些错误，应该是：

  如果 $\Omega' \subseteq \Omega$ 是一个可测集，那么 $\int_{\Omega'} f = \int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}} \leq \int_{\Omega} f$，其中 $f_{\chi_{\Omega'}}$ 表示只在 Ω' 上保留 f 的值，其它地方为 0。

  (1) 先证明 f 是非负简单函数时，命题成立。

  因为在 Ω 上，$f \geq f_{\chi_{\Omega'}}$，由命题 19.1.10(d) 可得

  $$\int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}} \leq \int_{\Omega} f$$

  因为 f 是非负简单函数，设 $f(\Omega') = \{c_1, c_2, \cdots, c_N\}$，定义：

  $$E_j := \{x \in \Omega' : f(x) = c_j\}, \quad 1 \leq j \leq N$$

  这些集合两两不交，且 $\bigcup_{j=1}^{N} E_j = \Omega'$。由引理 19.1.9，$\int_{\Omega'} f$ 可表示为

  $$\int_{\Omega'} f = \sum_{j=1}^{N} c_j m(E_j)$$

  记 $E_0 = \Omega \setminus \Omega'$，由题设可知 E_0 是可测集（因为可以被 f^{-1} 表示出来，而且 f 是可测函数。），且与 $E_j, 1 \leq j \leq N$ 不相交，于是由引理 19.1.9，$\int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}}$ 可表示为

  $$\begin{aligned}\int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}} &= \sum_{j=0}^{N} c_j m(E_j) \\ &= 0 \times m(E_0) + \sum_{j=1}^{N} c_j m(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} c_j m(E_j) \\ &= \int_{\Omega'} f\end{aligned}$$

  (2) f 是非负可测函数，命题成立。

  因为在 Ω 上，$f \geq f_{\chi_{\Omega'}}$，由 (c) 可得

  $$\int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}} \leq \int_{\Omega} f$$

对任意 $\epsilon > 0$，存在一个非负简单函数 s，并且从下方控制 f，使得

$$\int_{\Omega'} f - \epsilon < \int_{\Omega'} s$$

令

$$s'(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \Omega \setminus \Omega' \\ s(x) & \text{if } x \notin \Omega' \end{cases}$$

于是 s' 是一个非负简单函数，并且从下方控制 $f_{\chi_{\Omega'}}$，所以

$$\int_{\Omega} s' \leq \int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}}$$

又由 (1) 可知

$$\int_{\Omega'} s = \int_{\Omega} s'$$

综上可得

$$\int_{\Omega'} f - \epsilon < \int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_{\Omega'} f \leq \int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}}$$

类似的，存在一个非负简单函数 s，并且从下方控制 $f_{\chi_{\Omega'}}$，使得

$$\int_{\Omega} f_{\chi_{\Omega'}} - \epsilon < \int_{\Omega} s$$

令

$$s'(x) = s(x) \quad x \in \Omega'$$

由于 s 是从下方控制 $f_{\chi_{\Omega'}}$，于是 $\Omega \setminus \Omega'$ 上 $s(x) = 0$，于是由 (1)，我们有

$$\int_{\Omega'} s' = \int_{\Omega} s$$

又因为 s' 从下方控制 f，所以

$$\int_{\Omega'} s' \leq \int_{\Omega'} f$$

综上可得

$$\int_\Omega f_{\chi_{\Omega'}} - \epsilon < \int_{\Omega'} f$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_\Omega f_{\chi_{\Omega'}} \leq \int_{\Omega'} f$$

综上，我们有

$$\int_\Omega f_{\chi_{\Omega'}} = \int_{\Omega'} f$$

19.2.2

对任意 $\epsilon > 0$，存在非负简单函数 s_f, s_g，分别从下方控制 f, g，使得

$$\int_\Omega f - \frac{1}{2}\epsilon < \int_\Omega s_f$$

$$\int_\Omega g - \frac{1}{2}\epsilon < \int_\Omega s_g$$

因为

$$s_f(x) \leq f(x)$$

$$s_g(x) \leq g(x)$$

于是，我们有

$$(s_f + s_g)(x) \leq (f+g)(x)$$

即非负简单函数 $s_f + s_g$ 从下方控制 $f+g$，于是我们有

$$\int_\Omega s_f + s_g \leq \int_\Omega (f+g)$$

由命题 19.1.10 可知，

$$\int_\Omega s_f + s_g = \int_\Omega f + \int_\Omega g$$

综上可得

$$\int_\Omega f + \int_\Omega g - \epsilon < \int_\Omega s_f + \int_\Omega s_g = \int_\Omega s_f + s_g \leq \int_\Omega (f+g)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_\Omega f + \int_\Omega g \leq \int_\Omega (f+g)$$

19.2.3

考虑序列 $(F_N)_{N=1}^{\infty}$，其中

$$F_N := \sum_{n=1}^{N} g_n$$

因为 g_n 都是非负可测函数，于是我们有

$$0 \leq F_1 \leq F_2 \leq \cdots$$

且有推论 18.5.7 可知，F_N 都是非负可测函数。于是利用定理 19.2.9，我们有

$$\int_\Omega \sup_N F_N = \sup_N \int_\Omega F_N$$

因为 $(F_N)_{N=1}^{\infty}$ 是单调的递增序列，那么它逐点收敛于可测函数 f（可测性由引理 18.5.10 保证），允许 $f(x) = +\infty$。于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n = f = \sup_N F_N$$

（第二个等式的证明在 19-2-comment.tex 中有）
于是

$$\int_\Omega \sup_N F_N = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} g_n$$

同理可得（考虑 $\int_\Omega F_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \int_\Omega g_n$），

$$\sup_N \int_\Omega F_N = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega g_n$$

综上，我们有

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega g_n$$

19.2.4

这道题有些反直觉：不等式的左侧不等于 0，希望我能描述清楚。

右侧：

对每一个 $n = 1, 2, 3, \cdots$，f_n 都是简单函数，我们有

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = 0$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

左侧：

考虑序列 $(F_N)_{N=1}^{\infty}$，其中

$$F_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$$

构造函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1, 2) \\ 0 & x \notin [1, 2) \end{cases}$$

接下来证明 $(F_N)_{N=1}^{\infty}$ 逐点收敛于函数 f。

- $x < 1$。

  任意 $N \geq 1$ 都有

  $$F_N(x) = 0 = f(x)$$

- $x \in [1, 2)$。

  任意 $N \geq 1$ 都有

  $$f_1(x) = 1 - 0 = 1$$

  其他 $f_n(x) = 0$，于是可得

  $$F_N(x) = 1 = f(x)$$

- $x > 2$ 时。

令 $m=\lfloor x \rfloor$ 于是存在 $N \geq m+1$，就有

$$f_m(x)=0-1=-1$$
$$f_{m+1}(x)=1-0=1$$

其他 $f_n(x)=0$，于是可得

$$F_N(x)=0=f(x)$$

综上可得，$(F_N)_{N=1}^{\infty}$ 逐点收敛于函数 f，于是我们有

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} f = 1$$

所以 $\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$

19.2.5

考虑集合

$$A := \{x \in \Omega : f(x) = +\infty\}$$

证明 $m(A)=0$。

反证法，假设 $m(A) \neq 0$，即 $m(A) > 0$。

构造简单函数序列 $(t_n)_{n=1}^{\infty}$，其中

$$t_n(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ n & x \in A \end{cases}$$

对每一个 t_n 都是简单函数，并在下方控制 f。

由引理 19.1.9 可知，对任意 n，我们有

$$\int_{\Omega} t_n = n \times m(A)$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} n \times m(A) = +\infty$$

又因为，对任意 n，我们有

$$\int_{\Omega} f \geq \int_{\Omega} t_n$$

所以，我们有

$$\int_{\Omega} f \geq \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} t_n = +\infty$$

这与题设 $\int_{\Omega} f$ 是有限的相互矛盾，假设不成立，命题得证。

19.2.6

先设 $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$，由题设可知，$\Omega$ 是可测的。

构造函数序列 $(g_n)_{n=1}^{\infty}$，其中

$$g_n = \chi_{\Omega_n}$$

于是我们有

$$\int_{\Omega} g_n = m(\Omega_n)$$

利用推论 19.2.11 可知，

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n)$$

以为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n)$ 是有限的，那么由引理 19.2.14 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ 是几乎处处有限。即集合

$$A := \{x \in \Omega : \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right)(x) = +\infty\}$$

的测度为零（$m(A) = 0$）。

接下来证明集合 $B := \{x \in \Omega :$ 存在无限个 n 使得 $x \in \Omega_n\}$ 的测得为零（即 $m(B) \neq 0$）。反证法，假设集合 B 的测度不为零，即 $m(B) > 0$。为了完成证明，我们只需证明

$$B \subseteq A$$

对任意 $x \in B$，那么集合 $C := \{m \in \mathbb{N}^+ : x \in \Omega_m\}$ 是无限集，又因为对任意 $m \in C$，我们有

$$g_m(x) = 1$$

进而

$$\sum_{m \in C} g_m(x) = +\infty$$

于是可得

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right)(x) \geq \sum_{m \in C} g_m(x) = +\infty$$

所以 $x \in A$，从而 $B \subseteq A$，于是 $m(B) \leq m(A)$，与 $m(A) = 0, m(B) > 0$ 矛盾。假设不成立，命题得证。

19.2.7 ⊛

设

$A := \{x \in [0,1] :$ 存在无限多个正整数 a 和 q 使得 $|x\ a/q| \leq c/q^p\}$

设 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$ 是 $[0,1]$ 的一列可测子集，并且对任意 $q \in \mathbb{N}^+$，

$$\Omega_q = \bigcup_{a=1}^{q} [\frac{a}{q} - \frac{c}{q^p}, \frac{a}{q} + \frac{c}{q^p}] \cap [0,1]$$

这里我们只需考虑 $1 \leq a \leq q$ 的情况（放在本节最后，不放在主体中，对理解整体思路有帮助。）（为什么这样构造，这是因为它有一个关键性质：如果 $x \in \Omega_q$，能够满足 $|x - \frac{a}{q}| \leq \frac{c}{q^p}$）。

对任意 Ω_q，我们有

$$\begin{aligned} m(\Omega_q) &\leq ((\frac{a}{q} + \frac{c}{q^p}) - (\frac{a}{q} - \frac{c}{q^p})) \times q \\ &= \frac{2cq}{q^p} \\ &= \frac{2c}{q^{p-1}} \end{aligned}$$

由推论 7.5.3（比值判别法）易得

$$\sum_{q=1}^{\infty} m(\Omega_q)$$

有限收敛。

由 Borel-Cantelli 引理可知，集合

$$B := \{x \in [0,1] : \text{存在无限多个 } q \text{ 使得 } x \in \Omega_q\}$$

的测度为零（即 $m(B) = 0$）。

到这一步，证明还未完成，需要证明 $A \subseteq B$。

对任意 $x \in A$，那么存在无限多个正整数 a 和 q 使得 $|x - a/q| \leq c/q^p$，对每一个具体的 a, q（其中 $1 \leq a \leq q$），有 $x \in [\frac{a}{q} - \frac{c}{q^p}, \frac{a}{q} + \frac{c}{q^p}]$，所以，$x \in \Omega_q$，进而可得 $x \in B$，于是我们有

$$A \subseteq B$$

我们有

$$\begin{aligned} 0 \leq m(A) \leq m(B) = 0 \\ \Longrightarrow \\ m(A) = 0 \end{aligned}$$

命题得证。

19.2.8

todo （没思路）

19.2.9

任意 $\epsilon > 0$，对所有的 $n = 1, 2, 3 \cdots$，考虑集合

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > \frac{1}{\epsilon 2^n}\}$$

先证明: $m(A_n) \leq \frac{\epsilon}{2^n}$。反证法，假设 $m(A_n) > \frac{\epsilon}{2^n}$。我们构造一个简单函数 s，它从下方控制 f_n：

$$s(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A_n \\ \frac{1}{\epsilon 2^n} & x \in A_n \end{cases}$$

于是，我们有

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \geq \int_{\mathbb{R}} s > \frac{1}{\epsilon 2^n}\frac{\epsilon}{2^n} = \frac{1}{4^n}$$

这与题设 $\int_{\mathbb{R}} f_n \leq \frac{1}{4^n}$ 矛盾，假设不成立，$m(A_n) \leq \frac{\epsilon}{2^n}$ 得证。

令

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

利用引理 7.3.3，我们有

$$m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

对任意 $x \in \mathbb{R} \setminus E$，那么，对任意 n，因为 $x \notin A_n$，我们有

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\epsilon 2^n}$$

于是

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\epsilon 2^n} = 0$$

由夹逼定理可得，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$。

19.2.10 ⊛

(1)

按照书中提示，先证明对于任意的正整数 m，我们能够找到一个 $N > 0$ 使得 $m(\{x \in [0,1] : f_n(x) > \frac{1}{m}\}) \leq \epsilon/2^m$ 对所有的 $n \geq N$ 都成立。

对每一个 $m \in \mathbb{N}^+$，我们都构造 $F_n^{(m)} := \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i^{(m)}$，其中 $E_n^{(m)} := \{x \in [0,1] : f_n(x) > \frac{1}{m}\}$。可见，$F_1^{(m)} \supseteq F_2^{(m)} \supseteq F_3^{(m)} \supseteq \cdots$，而且 $F_1^{(m)} \subseteq [0,1]$。

注意，上面对每个 m 都都构造了一套 $F_n^{(m)}$ 集合序列。

对任意每一个 m，由习题 18.2.3(b)，我们有

$$m(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{(m)}) = \lim_{n\to\infty} m(F_n^{(m)})$$

接下来证明

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{(m)} = \varnothing$$

反证法，假设 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n^{(m)} \neq \varnothing$，那么存在 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n^{(m)}$，即对每一个 n 都有 $x \in F_n^{(m)}$，从而 $x \in \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i^{(m)}$，我们可得，对任意 n，都有 $i \geq n$ 使得

$$\begin{aligned} x &\in E_i^{(m)} \\ &\Longrightarrow \\ f_i(x) &> \frac{1}{m} \end{aligned}$$

这与函数序列 f_n 逐点收敛于零矛盾。

因为对任意的 m 都有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n^{(m)} = \varnothing$，于是我们有

$$m(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{(m)}) = \lim_{n\to\infty} m(F_n^{(m)}) = 0$$

于是对任意 $\epsilon > 0$ 和任意正整数 m，存在 N_m 使得只要 $n \geq N_m$，就有

$$m(F_n^{(m)}) \leq \epsilon/2^m$$

构造集合 E 如下：

$$E := \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{N_m}^{(m)}$$

（形象化的理解，这一步就像剥洋葱，剥掉不要的。）

于是，我们有

$$m(E) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m(F_{N_m}^{(m)}) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon/2^m = \epsilon$$

接下来证明：$f_n(x)$ 在 $[0,1] \setminus E$ 上一致收敛于 0。

对任意 $x \in [0,1] \setminus E, \epsilon' > 0$。存在正整数 M 使得 $\frac{1}{M} \leq \epsilon'$。$x \in [0,1] \setminus E$ 可得 $x \notin E$，从而 $x \notin F_{N_M}^{(M)}$，于是当 $n \geq N_M$，我们有

$$f_n(x) \leq 1/M \leq \epsilon'$$

命题得证。

(2) 换成 $\mathbb{R}$，命题成立么？

不成立，举一个反例

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & x \notin [n, n+1] \end{cases}$$

对每一个 n，f_n 都会在 $[n, n+1]$ 上等于 1，其他地方都等于 0，所以函数序列 f_n 逐点收敛于 0。

但由于这个等于 1 的区间 $[n, n+1]$，随着 $n \to \infty$ 一直向无穷处移动，我们就无法通过抠出一个有限的集合 E，来拦截这种行为。

19.2.11

定义函数 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}+$ 如下：

$$f(n, m) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

- (1) 证明对每一个 n，$\sum\limits_{m=1}^{\infty} f(n, m)$ 都是收敛的。

  如果 $n \geq 1$，于是存在 $n = m$ 使得 $f(n, m) = 1$，其他 $f(n, m) = 0$，于是可得

  $$\sum_{m=1}^{\infty} f(n, m) = 1$$

  如果 $n < 1$，则

  $$\sum_{m=1}^{\infty} f(n, m) = 0$$

  命题得证。

- (2) 对于每一个 m，$\lim\limits_{n \to \infty} f(n, m)$。

  存在 $N > m$ 使得只要 $n \geq N$，就有

  $$f(n, m) = 0$$

于是可得

$$\lim_{n\to\infty} f(n,m) = 0$$

- (3)f 满足下面这个不等式：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(n,m) \neq \sum_{m=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f(n,m)$$

由 (1) 可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(n,m) = 1$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f(n,m) = 0$$

综上，不等式成立。

补充部分：

说明 1. 习题 *19.2.7* 中：“只需考虑 $1 \le a \le q$ 的情况”合理性证明。

证明：

$a, q \in \mathbb{N}^+$，需要满足题设：

$$|x - \frac{a}{q}| \le \frac{c}{q^p}$$
$$x - \frac{c}{q^p} \le \frac{a}{q} \le x + \frac{c}{q^p}$$

即 $\frac{a}{q} \in [x - \frac{c}{q^p}, x + \frac{c}{q^p}]$ 可满足题设。又因为 $x \in [0,1]$，于是 $\frac{a}{q} \in [-\frac{c}{q^p}, 1 + \frac{c}{q^p}]$，乘以 q 可得 $a \in [-cq^{1-p}, q + cq^{1-p}]$。题设要求 $a \in \mathbb{N}^+$，从而 $a \in [1, q + cq^{1-p}]$。

由于 $p > 2$，于是我们有

$$\lim_{q\to\infty} cq^{1-p} = 0$$

因此在 q 足够大时，$a \in [1, q+1)$，即 $a \in [1, q]$。（注意区间可以表示成 $[1, q + cq^{1-p}]_{q=1}^{\infty}$，区间是单调递增的，之前 q 不够大时的区间，最后会被覆盖。）