

6.2 为什么

2024 年 6 月 19 日

1. 设 E 是空集, 那么 $\sup(E) = -\infty$ 且 $\inf(E) = +\infty$ 。

因为 $+\infty, -\infty$ 都不是空集 E 中的元素, 由定义 6.2.6 可知, 空集被归入情形 (a), 即按照定义 5.5.10 确定 $\sup(E)$, 定义 5.5.10 直接就说明了空集 E 的 $\sup(E) = -\infty$ 。

因为 $-E$ 还是空集, 所以, $\inf(E) := -\sup(-E) = -\sup(E) = -(-\infty) = +\infty$ 。

2. 设 E 是广义实数集合, 当 E 为空集, 是上确界能够小于下确界的唯一形式。

如果 E 不是空集。如果 E 是没有上界或存在包含 $+\infty$, 那么由定义 6.2.6 和定义 5.5.10 可知, $\sup(E) = +\infty$, 那么 $\inf(E) = -\infty$, 由定义 6.2.3 (广义实数的排序) 可知, $\sup(E) > \inf(E)$ 。

如果 E 有上界, 设 $\sup(E) = M$, 反证法, 假设存在下确界 $\inf(E) = m$, 并且 $m > M$ 。任意 $x \in E$, 由上确界与下确界的定义可知,

$$m \leq x \tag{1}$$

$$x \leq M \tag{2}$$

可得 $M \geq m$, 与 $m > M$ 矛盾, 所以 $\sup(E) \geq \inf(E)$ 。