11.4 习题

张志聪

2024 年 12 月 24 日

11.4.1

仿照定理 11.4.3 的证明，做以下说明：

对任意 $\epsilon > 0$，由 $\int_I f = \underline{\int}_I f$ 可知，存在一个分段常数函数函数 $\underline{f} : I \to \mathbb{R}$ 在 I 上从下方控制 f，并且有

$$\int_I \underline{f} \geq \int_I f - \epsilon$$

类似地，我们能够找到一个分段常数函数 $\underline{g} : I \to \mathbb{R}$ 在 I 上从下方控制 g，并且有

$$\int_I \underline{g} \geq \int_I g - \epsilon$$

而且我们还能找到分段常数函数 $\overline{f}$ 和 $\bar{(}g)$ 分别在 I 上从上方控制 f 和 g，并且有

$$\int_I \overline{f} \leq \int_I f + \epsilon$$

和

$$\int_I \overline{g} \leq \int_I g + \epsilon$$

特别地，如果 $h : I \to \mathbb{R}$ 表示函数

$$h := (\overline{f} - \underline{f}) + (\overline{g} - \underline{g})$$

那么

$$\int_I h \leq 4\epsilon$$

- (a)

  由以上说明，可得 $\underline{f}+\underline{g}$ 在 I 上从下方控制 $f+g$ 的分段常数函数，而 $\overline{f}+\overline{g}$ 在 I 上从上方控制 $f+g$ 的分段常数函数，所以有

  $$\int_I(\underline{f}+\underline{g}) \leq \underline{\int}_I(f+g) \leq \overline{\int}_I(f+g) \leq \int_I(\overline{f}+\overline{g})$$

  从而

  $$0 \leq \overline{\int}_I(f+g) - \underline{\int}_I(f+g) \leq \int_I(\overline{f}+\overline{g})-(\underline{f}-\underline{g})$$

  于是

  $$0 \leq \overline{\int}_I(f+g) - \underline{\int}_I(f+g) \leq \int_I h(x)$$

  综上所述，对任意的 $\epsilon>0$，都有

  $$0 \leq \overline{\int}_I(f+g) - \underline{\int}_I(f+g) \leq 4\epsilon$$

  由于 $\overline{\int}_I(f+g)-\underline{\int}_I(f+g)$ 与 ϵ 无关（这里表达的是 ϵ 取任何值，等式都要成立），所以

  $$\overline{\int}_I(f+g) = \underline{\int}_I(f+g)$$

  因此，$f+g$ 是黎曼可积的。

  因为

  $$\int_I(\underline{f}+\underline{g}) \leq \int_I(f+g) \leq \int_I(\overline{f}+\overline{g})$$

  从而

  $$\int_I \underline{f} + \int_I \underline{g} \leq \int_I(f+g) \leq \int_I \overline{f} + \int_I \overline{g}$$

  对左右两端分别取上确界和下确界（其实这也可作为 $f+g$ 黎曼可积的证明），可得

  $$\int_I f + \int_I g \leq \int_I(f+g) \leq \int_I f + \int_I g$$

  所以

  $$\int_I(f+g) = \int_I f + \int_I g$$

- (b)

  $c = 0$，任意 $x \in I$ 都有 $cf(x) = 0$，于是 cf 是常数函数，于是 $\int_I cf = p.c. \int_I cf = 0$；

  $c > 0, c < 0$ 的证明类似，这里以 $c > 0$ 为例。

  因为

$$c\int_I \underline{f} \geq c\int_I f - c\epsilon$$
$$c\int_I \overline{f} \leq c\int_I f + c\epsilon$$

  特别地，如果 $h : I \to \mathbb{R}$ 表示函数

$$h := c\overline{f} - c\underline{f}$$

  那么

$$\int_I h \leq 2c\epsilon$$

  因为 $c\underline{f}$ 是在 I 上从下方控制 cf 的分段常数函数，$c\overline{f}$ 是从 I 上从上方控制 cf 的分段常数函数，于是

$$\int_I c\overline{f} \leq \underline{\int}_I cf \leq \overline{\int}_I cf \leq \int_I c\underline{f}$$

  从而

$$0 \leq \overline{\int}_I cf - \underline{\int}_I cf \leq \int_I (c\overline{f} - c\underline{f})$$

  于是

$$0 \leq \overline{\int}_I cf - \underline{\int}_I cf \leq \int_I h$$

  综上所述，对任意的 $\epsilon > 0$，都有

$$0 \leq \overline{\int}_I cf - \underline{\int}_I cf \leq 2c\epsilon$$

由于 $\overline{\int}_I cf, \underline{\int}_I cf$ 与 ϵ 无关，所以

$$\overline{\int}_I cf = \underline{\int}_I cf$$

因此，cf 是黎曼可积的。

$$\int_I cf = c\int_I f$$

的证明与 (a) 中的类似，这里不再赘述。

- (c)

  利用 (a)(b) 可得

$$\begin{aligned}\int_I (f-g) &= \int_I (f+(-g)) \\ &= \int_I f + \int_I (-g) \\ &= \int_I f - \int_I g\end{aligned}$$

- (d)

  定义 $\underline{f} : I \to \mathbb{R}$ 为 $\underline{f}(x) = 0$，于是 $\underline{f}$ 在 I 上从下方控制 f 的分段常数函数。从而

$$\int_I \underline{f} \leq \int_I f$$

  因为

$$\int_I \underline{f} = 0$$

  于是

$$0 \leq \int_I f$$

- (e)

  因为 $f(x) \geq g(x)$，所以 $f(x) - g(x) \geq 0$，利用 (d) 可得

$$\int_I (f-g) \geq 0$$

利用 (c) 可得

$$\int_I f - \int_I g \geq 0$$

从而

$$\int_I f \geq \int_I g$$

- (f)

  因为 f 是常数函数，由引理 11.3.7 可知

  $$\int_I f = p.c. \int_I f$$

  由定理 11.2.16(f) 可知

  $$\begin{aligned}\int_I f &= p.c. \int_I f \\ &= c|I|\end{aligned}$$

- (g)

  定义 $\underline{F}, \overline{F}$ 分别是在 J 上从下方控制和从上方控制的分段函数，如下

  $$\underline{F}(x) = \begin{cases} \underline{f}(x), x \in I \\ 0, x \notin I \end{cases}, \overline{F}(x) = \begin{cases} \overline{f}(x), x \in I \\ 0, x \notin I \end{cases}$$

  从而

  $$\int_I \underline{F} \leq \underline{\int}_I F \leq \overline{\int}_I F \leq \int_I \overline{F}$$

  利用 11.2.16(g) 可得

  $$\int_I \underline{f} \leq \underline{\int}_I F \leq \overline{\int}_I F \leq \int_I \overline{f}$$

  对左右两端分别取上确界和下确界，可得

  $$\underline{\int}_I f \leq \underline{\int}_I F \leq \overline{\int}_I F \leq \overline{\int}_I f$$

因为 f 是黎曼可积的，所以 $\int_I f = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$，所以，

$$\int_I f \leq \underline{\int}_I F \leq \overline{\int}_I F \leq \int_I f$$

综上所述，F 是黎曼可积的，且

$$\int_I F = \int_I f$$

- (h)

  由定理 11.2.16 可得

$$\int_I \overline{f} = \int_J \overline{f}|_J + \int_K \overline{f}|_K$$
$$\int_I \underline{f} = \int_J \underline{f}|_J + \int_K \underline{f}|_K$$

  两者相减

$$\begin{aligned}\int_I \overline{f} - \int_I \underline{f} &= \int_J \overline{f}|_J - \int_J \underline{f}|_J + \int_K \overline{f}|_K - \int_K \underline{f}|_K \\ &\leq 4\epsilon\end{aligned}$$

  因为任意 $x \in I$ 都有 $\overline{f}(x) \geq \underline{f}(x)$，所以

$$\begin{cases} \int_J \overline{f}|_J \geq \int_J \underline{f}|_J \\ \int_K \overline{f}|_K \geq \int_K \underline{f}|_K \end{cases}$$

  从而

$$\int_J \overline{f}|_J - \int_J \underline{f}|_J \leq 4\epsilon$$
$$\int_K \overline{f}|_K - \int_K \underline{f}|_K \leq 4\epsilon$$

  而我们有

$$\int_J \underline{f} \leq \underline{\int}_J f|_J \leq \overline{\int}_J f|_J \leq \int_J \overline{f}|_J$$
$$\int_K \underline{f} \leq \underline{\int}_K f|_K \leq \overline{\int}_J f|_K \leq \int_K \overline{f}|_K$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
0 \leq \overline{\int}_J f|_J - \underline{\int}_J f|_J \leq \int_J \overline{f}|_J - \int_J \underline{f}|_J \leq 4\epsilon \\
0 \leq \overline{\int}_K f|_J - \underline{\int}_K f|_K \leq \int_K \overline{f}|_K - \int_K \underline{f}|_K \leq 4\epsilon
\end{aligned}
$$

综上所述，对任意的 $\epsilon > 0$，都有

$$
\begin{aligned}
0 \leq \overline{\int}_J f|_J - \underline{\int}_J f|_J \leq 4\epsilon \\
0 \leq \overline{\int}_K f|_J - \underline{\int}_K f|_K \leq 4\epsilon
\end{aligned}
$$

由于 $\overline{\int}_J f|_J, \underline{\int}_J f|_J, \overline{\int}_K f|_K, \underline{\int}_K f|_K$ 与 ϵ 无关，所以

$$
\begin{aligned}
\overline{\int}_J f|_J = \underline{\int}_J f|_J \\
\overline{\int}_K f|_K = \underline{\int}_K f|_K
\end{aligned}
$$

于是 $f|_J, f|_K$ 分别在 J 和 K 上黎曼可积。

定义

$$
F(x) := \begin{cases} f|_J(x) & x \in J \\ 0 & x \in I \setminus J \end{cases}, G(x) := \begin{cases} f|_K(x) & x \in K \\ 0 & x \in I \setminus K \end{cases}
$$

于是 $f = F + G$，利用 (a)(g) 可得，

$$
\int_I f = \int_J f|_J + \int_K f|_K
$$