8.3 习题

张志聪

2024 年 11 月 22 日

8.3.1

对 n 进行归纳。

归纳基始，$n=0$，此时，X 是空集，$\#(X)=0$，$2^0=1$，这与空集的子集只有它本身是一致的。

归纳假设，$n=k$ 时，$\#(2^X)=2^k$。

当 $n=k+1$ 时，在 X 中任取一个元素 x_0，此时，设 $X'=X\setminus\{x_0\}$。对 2^X 的任意子集 A：

- 如果 $x_0\notin A$，此时 $A\subseteq 2^{X'}$，由归纳假设可知，这样的子集有 2^k 个。
- 如果 $x_0\in A$，定义 $A':=A\setminus\{x_0\}$，显然 $A'\subseteq 2^{X'}$，因为 A' 有 2^k 个，所以 $A'\cup\{x_0\}$ 有 2^k。

综上，$2^k+2^k=2^{k+1}$。

8.3.2

说明 1. 一开始，觉得题目不对！理由如下：由题设，$A\subseteq C$ 且单射 $f:C\to A$ 可知，$f(C)$ 与 C 是双射，而 $f(C)\subseteq A$，所以只有 $C=A$ 才能满足题设，进而 $A=B=C$。那么，$D_0=B\setminus A=\varnothing$，就没有证明的必要了。

问题出在对习题 *3.6.7* 的理解上了，这里只能证明 $\#(A)=\#(B)=\#(C)$，而无法证明 $A=B=C$，举一个反例，自然数 N 与偶数集合的基数相等，也可以构建一个单射，但不妨碍偶数集合是自然数子集这

一事实。

（1）命题与 $D_n \cap D_{n+1} = \varnothing$ 等价。对 n 进行归纳。

归纳基始，$n=0$ 时，$D_0 := B \setminus A, D_1 := f(D_0)$。反证法，假设 $D_0 \cap D_1 \neq \varnothing$，由题设可知 $D_1 \subseteq A$，因为 $D_0 \cap D_1 \neq \varnothing$，所以存在元素 $x \in D_0, D_1, A$，这与 $D_0 := B \setminus A$ 矛盾。

归纳假设，$n=k$ 时，命题 $D_k \cap D_{k+1} = \varnothing$ 成立。

当 $n=k+1$ 时，$D_{k+2} := f(D_{k+1})$。反证法，假设 $D_{k+2} \cap D_{k+1} \neq \varnothing$，即存在 $d_0 \in D_{k+2}, D_{k+1}$，又因为 $D_{k+1} = f(D_k)$，于是，存在 x_0, x_1 使得

$$\begin{cases} d_0 = f(x_0) \text{ 其中} x_0 \in D_k, f(x_0) \in D_{k+1} \\ d_0 = f(x_1) \text{ 其中} x_1 \in D_{k+1}, f(x_1) \in D_{k+2} \end{cases}$$

由归纳假设可知 $x_0 \neq x_1$，这与 f 是单射的矛盾。

（2）

- 单射；函数 g 的定义域被定义成两个部分，各自显然是单射的，现在要证明两个部分的值域没有交集。反证法，假设存在 $x_0 \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n, x_1 \notin \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n, x_0 \neq x_1$，使得 $g(x_0) = g(x_1)$，即：$f^{-1}(x_0) = x_1$，$f(x_1) = x_0$。因为 $x_0 \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$，所以存在 $x' \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$ 使得 $f(x') = x_0$。因为 $x_1 \notin \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$，所以 $x' \neq x_1$，于是 $f(x') = f(x_1)$，这与 f 是单射矛盾。
- 满射；对任意 $y \in B$，如果 $y \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$，由 f 的定义可知，$f(y) \in A, f(y) \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$，满足 g 的定义，于是 $f^{-1}(f(y)) = y$；如果 $y \notin \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$，有 $g(y) = y$；

8.3.3

说明 2. 这个习题，容易觉得无需证明，

$$\begin{cases} \#(A) \leq \#(B) \\ \#(A) \geq \#(B) \end{cases}$$

得到 $\#(A) = \#(B)$ 是显然。但是，这里是把基数看做自然数了（满足三歧性，但本书中 $+\infty, +\infty + 1$ 的排序是没有定义的，即无穷值间的比较是未定义的，书中只定义了 $+\infty = +\infty$，命题 *6.2.5*），这个假设不成立的。

比如：自然数集合的基数是无穷值，实数的基数也是无穷值，但他们的基数是不相等的。

于是，我们只能老老实实利用基数相等的定义证明了。

目标是构造一个双射函数 $g : A \to B$。利用习题 8.3.2，只需找到满足条件的 A, B, C 与 f 即可。不妨设 $f_1 : A \to B$ 的单射，$f_2 : B \to A$ 的单射。显然，$A, f_1(A)$ 的基数相同，$f_1(A) \subseteq B$, 于是，如下定义，即可满足条件：

$$\begin{cases} A := f_1(A) \\ B := B \\ C := B \\ f := f_2 \end{cases}$$

8.3.4

（1）由 2^X 的定义可知，任意 $x \in X$ 都有 $x \in 2^X$，于是定义 $f : X \to 2^X$ 如下，

$$f(x) := x$$

显然，f 是单射，根据习题 3.6.7 可知，X 的基数小于或等于 2^X 的基数，由定理 8.3.1 可知，他们的基数不相等，由此可知，X 基数严格小于 2^X 的基数。

（2）由题设可知，存在单射 $f_1 : A \to B$，且 $\#(A) \neq \#(B)$，单射 $f_2 : B \to C$，且 $\#(B) \neq \#(C)$。于是定义函数 $f : f_2 \circ f_1 : A \to C$，显然，$f$ 是单射，在逻辑学中相等具有传递性（附录 A.7），于是，A 基数严格小于 C 的基数。