10.1 习题

张志聪

2024 年 12 月 13 日

10.1.1

（1）f 在 x_0 处可微分，由定义 10.1.1 可知，极限

$$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

是存在的，不妨设极限是 L。由定义 9.3.6 可知，对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L|\leq\epsilon$$

对任意 $x\in\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\cap X\setminus\{x_0\}\big)$ 均成立。

任意 $y\in\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\cap Y\setminus\{x_0\}\big)$，因为 $Y\subset X$，所以 $y\in\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\cap X\setminus\{x_0\}\big)$，所以

$$|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}-L|\leq\epsilon$$

由定义 9.3.6 可知，

$$\lim_{y\to x_0;y\in Y\setminus\{x_0\}}\frac{f|_Y(y)-f|_Y(x_0)}{y-x_0}$$

的极限存在，所以 $f|_Y$ 在 x_0 处可微。

（2）与 10.1.2 不矛盾的原因：

点 3 不是 $[1,2]\cup\{3\}$ 的极限点，不满足习题 10.1.1 习题的前置条件。

10.1.2

- $(a) \implies (b)$

  f 在 X 中的 x_0 处是可微的，且导数为 L，由定义 10.1.1 可知，极限

  $$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$$

  于是，由定义 9.3.6 可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

  $$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - L| \le \epsilon$$

  对 $|x-x_0| \le \delta, x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。

  对上式进行算术运算，

  $$\begin{aligned} |\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - L| &\le \epsilon \\ |\frac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{x-x_0}| &\le \epsilon \\ |f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)| &\le \epsilon|x-x_0| \\ |f(x)-\big(f(x_0)+L(x-x_0)\big)| &\le \epsilon|x-x_0| \end{aligned}$$

  对 $|x-x_0| \le \delta, x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。当 $x = x_0$ 时，公式也成立。

- $(b) \implies (a)$

  直接进行算术运算，略

10.1.3

- 方法 1(利用极限定律，命题 9.3.14)

  不妨设 x_0 处的导数为 L，于是

  $$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$$

  即函数 f 在 x_0 处沿着 $X \setminus \{x_0\}$ 收敛于 L。

  我们易证

  $$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} x - x_0 = 0$$

即函数 g 在 x_0 处沿着 $X \setminus \{x_0\}$ 收敛于 0。

于是

$$\begin{aligned} fg &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\ &= f(x) - f(x_0) \end{aligned}$$

按照极限定律（命题 9.3.14）可得

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} fg \\ &= \lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} f(x) - f(x_0) \\ &= L \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。特别地 $x = x_0$ 时 $f(x) - f(x_0) = 0 < \delta$ 也成立。

所以由命题 9.4.7(d) 可知，f 在 x_0 处连续。

- 方法 2（利用命题 10.1.7）

  f 在 x_0 处可微，由命题 10.1.7(b) 可知，对任意的 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$，当 $x \in X$ 且 $|x - x_0| \le \delta$ 时，那么就有

  $$|f(x) - \big(f(x_0) + L(x - x_0)\big)| \le \epsilon |x - x_0|$$

  进过算术运算，

  $$\begin{aligned} |f(x) - \big(f(x_0) + L(x - x_0)\big)| &\le \epsilon |x - x_0| \\ |f(x) - f(x_0)| &\le \epsilon |x - x_0| + |L||x - x_0| \\ |f(x) - f(x_0)| &\le (\epsilon + |L|)|x - x_0| \end{aligned}$$

  取 $\delta = \frac{\epsilon}{\epsilon + |L|}$，此时 $|x - x_0| \le \frac{\epsilon}{\epsilon + |L|} = \delta$，使得

  $$|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$$

  由命题 9.4.7(d) 可知，f 在 x_0 处连续。

10.1.4

- (a)

  对任意 $\epsilon > 0$，对任意 $\delta > 0$，都存在

  $$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\&=\frac{c-c}{x-x_0}\\&=0\end{aligned}$$

  对所有满足 $|x-x_0|<\delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。于是由命题 9.4.7(c) 可得

  $$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

  即 $f'(x_0) = 0$

- (b)

  对任意 $\epsilon > 0$，对任意 $\delta > 0$，都存在

  $$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\&=\frac{x-x_0}{x-x_0}\\&=1\end{aligned}$$

  对所有满足 $|x-x_0|<\delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。于是由命题 9.4.7(c) 可得

  $$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$$

  即 $f'(x_0) = 1$

- (c)

  设 $f'(x_0) = L, g'(x_0) = M$

  f 在 x_0 处可微，由定义 10.1.1 可知，极限

  $$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$$

由定义 9.3.6 可知，对任意 $\epsilon > 0, \frac{1}{2}\epsilon > 0$，存在 $\delta_f > 0$，使得

$$|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta_f$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。

同理可得，存在 $\delta_g > 0$，使得

$$|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - M| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta_g$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。

令 $\delta = min(\delta_f, \delta_g)$，于是，

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} - (L + M)\right| \\
&= \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - M\right| \\
&\leq \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L\right| + \left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - M\right| \\
&= \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。所以 $(f + g)'(x_0) = L + M$。

于是 $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) = L + M$。

- (d)

  设 $f'(x_0) = L, g'(x_0) = M$

  f 在 x_0 处可微，由定义 10.1.1 可知，极限

$$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

  同理可得，

$$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = M$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{f(x)\big(g(x)-g(x_0)\big)+\big(f(x)-f(x_0)\big)g(x_0)}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}
\end{aligned}
$$

又 f 在 x_0 处可微，由命题 10.1.0 可知 f 在 x_0 处连续

$$
\lim_{x\to x_0;x\in X} f(x)=f(x_0)
$$

于是通过命题 9.4.7(c) 可知（$x=x_0$ 是特例），

$$
\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} f(x)=f(x_0)
$$

于是利用极限定律（命题 9.3.14）可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
&=f(x_0)M+g(x_0)L
\end{aligned}
$$

所以 $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$。

- (e)

  设函数 $h:X\to\mathbb{R}$ 为 $h(x)=c$，于是 $(cf)(x)=h(x)f(x)$，函数相等一定有相同的导数（注 10.1.4），于是利用 (d) 可得

$$
\begin{aligned}
&(cf)'(x_0)\\
&=(hf)'(x_0)\\
&=h'(x_0)f(x_0)+h(x_0)f'(x_0)\\
&=0\times f(x_0)+c\times f'(x_0)\\
&=cf'(x_0)
\end{aligned}
$$

- (f)

设函数 $h: X \to \mathbb{R}$ 为 $h(x) = -g(x)$，于是 $(f-g)(x) = (f+h)(x)$，函数相等一定有相同的导数（注 10.1.4），于是利用 (d) 可得

$$
\begin{aligned}
&(f-g)'(x_0)\\
&= (f+h)'(x_0)\\
&= f'(x_0) + h'(x_0)
\end{aligned}
$$

由 (e) 可知，$h'(x_0) = (-g)'(x_0) = -g'(x_0)$，这里把 (e) 中的 c 看做 -1。

综上可得

$$
\begin{aligned}
&(f-g)'(x_0)\\
&= f'(x_0) - g'(x_0)
\end{aligned}
$$

- (g)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{1}{g(x)} \frac{1}{g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}
\end{aligned}
$$

由于 g 在 x_0 处可微，所以

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\\
&= f'(x_0)
\end{aligned}
$$

由于 g 在 x_0 处可微，由命题 10.1.0 可知 g 在 x_0 处连续，且 $g(x)$ 在 X 上不为零，由命题 9.3.14（函数的极限定理）可得

$$
\lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0)}
$$

再次利用命题 9.3.14（函数的极限定理）可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\\
&=\frac{1}{g(x_0)}\frac{1}{g(x_0)}\big(-g'(x_0)\big)\\
&=-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}
\end{aligned}
$$

- (h)

  因为 $\big(\frac{f}{g}\big)(x)=\big(f\frac{1}{g}\big)(x)$，于是利用 (d)(g) 可知，

$$
\begin{aligned}
\big(\frac{f}{g}\big)'(x_0)&=\big(f\frac{1}{g}\big)'(x_0)\\
&=f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\big(\frac{1}{g}\big)'(x_0)\\
&=f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\big(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\big)\\
&=\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}-\frac{f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\\
&=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}
\end{aligned}
$$

10.1.5

对 n 进行归纳。

归纳基始 $n=0$ 时，$f(x)=x^0=1$，由定理 10.1.13(a) 可知 $f'(x)=0$，命题成立。

归纳假设 $n=k$ 时，命题成立。

$n=k+1$ 时，$f(x)=x^{k+1}=x^kx$，由定理 10.1.13(d) 和归纳假设可知

$$
\begin{aligned}
(x^kx)'&=(x^k)'x+x^kx'\\
&=kx^{k-1}x+x^k1\\
&=kx^k+x^k\\
&=(k+1)x^k
\end{aligned}
$$

归纳完成，命题成立。

10.1.6

因为 n 是负整数，令 $n=-k$ 是正整数，于是 $f(x)=x^n=\frac{1}{x^k}$，然后利用 10.1.13(g) 和习题 10.1.5 可知，

$$\begin{aligned}(\frac{1}{x^k})' &= -\frac{kx^{k-1}}{(x^k)^2}\\ &= -\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}}\\ &= -kx^{-k-1}\\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

10.1.7

设 g 在 y_0 处的导数为 L，f 在 x_0 处的导数为 M。

- 方法 1，牛顿逼近法（命题 10.1.7）由命题 10.1.7（牛顿逼近法）可得，对任意的 $\epsilon>0$ 都存在一个 $\delta>0$ 使得，只有 $y\in Y$ 是 $\delta-$ 接近于 y_0 的，就有

  $$\big|g(y)-\big(g(y_0)+L(y-y_0)\big)\big|\le\epsilon|y-y_0| \tag{1}$$

  因为 f 在 x_0 处可微，由命题 10.1.10 可知 f 在 x_0 处连续，于是存在 $\delta_f>0$，使得

  $$|f(x)-f(x_0)|\le\delta$$

  对所有满足 $|x-x_0|<\delta_f$ 的 $x\in X$ 均成立。

  综上，当满足 $|x-x_0|<\delta_f, x\in X$，并将 $y=f(x), y_0=f(x_0)$ 代入 (1) 式可得，

  $$\begin{aligned}\big|g(f(x))-\big(g(f(x_0))+L(f(x)-f(x_0))\big)\big| &\le\epsilon|f(x)-f(x_0)|\\ \left|\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}-\frac{L(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\right| &\le\epsilon\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\\ -\epsilon\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}-\frac{L(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} &\le\epsilon\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} -\epsilon|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}| = -\epsilon M \tag{2}$$

$$\lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} \epsilon|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}| = \epsilon M \tag{3}$$

由 ϵ 的任意性与夹逼定理，且 $\lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{L(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} = LM$ 可得，

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} - \frac{L(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} = 0 \\
&\Longrightarrow \\
&\lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = LM
\end{aligned}$$

- 方法 2，命题 9.3.9