10.2 习题

张志聪

2024 年 12 月 14 日

10.2.1

f 在 x_0 处可微，设其导数是 L，即极限

$$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

接下来证明 $L > 0$ 和 $L < 0$ 都会导致矛盾，来确定 L 只能等于 0。

定义序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 如下，

$$a_n \begin{cases} = x_0; \text{if } (x_0 + (-1)^n \frac{1}{n}) \notin (a, b) \\ = x_0 + (-1)^n \frac{1}{n}; \text{if } (x_0 + (-1)^n \frac{1}{n}) \in (a, b) \end{cases}$$

因为 $\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$，由定义 9.3.9(b) 可知，对于完全由 X 中元素构成并且收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，序列 $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ 都收敛于 L。

- $L > 0$

  那么，存在正整数 N 使得

$$\left| \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} - L \right| \le \frac{1}{2} L$$
$$\implies$$
$$\frac{1}{2} L \le \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \le \frac{3}{2} L$$
$$\implies$$
$$\frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} > 0$$

对 $n \geq N$ 均成立。

当 $a_n > x_0$ 时（由序列的构造方式可知，这样的 a_n 是存在的），$f(x) > f(x_0)$；当 $a_n < x_0$ 时（由序列的构造方式可知，这样的 a_n 是存在的），$f(x) < f(x_0)$；此时 $f(x_0)$ 既不是局部最大值，也不是局部最小值。

- $L < 0$

  同理可得，$L < 0$ 时，此时 $f(x_0)$ 既不是局部最大值，也不是局部最小值。

综上可得 $L = 0$，即 $f'(x_0) = 0$

10.2.2

函数 $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ 定义为 $f(x) = -|x|$。

与命题 10.2.6 不矛盾的原因是，不满足命题的前置条件：f 在 0 处可微。

10.2.3

$$f(x) \begin{cases} = x; \text{if } x \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1) \\ = 0; \text{if } x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

与命题 10.2.6 不矛盾的原因是，不满足命题的前置条件：f 在 0 处达到局部最大值或局部最小值。

10.2.4

因为 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数，由命题 9.6.7（最大值原理）可知，存在 $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$ 分别取到最小值和最大值。

- $g(a)$ 同时是最大值和最小值

  此时任意 $x \in [a, b]$ 都有 $g(x) = g(a)$，由定理 10.1.13(a) 可知，任意 $x_0 \in [a, b]$ 都有 $f'(x_0) = 0$。

  命题成立。

- 存在 $x_{min} \in (a,b)$ 或 $x_{max} \in (a,b)$（包含了 $g(a)$ 处是最大值或最小值这种情况）

  $x_{max} \in (a,b)$，函数 f 在 (a,b) 上可微，所以 f 在 x_{max} 处是可微的，并且 f 在 x_{max} 处是全局最大值，那么也是局部最大值，由命题 10.2.6 可知，

  $$f'(x_{max}) = 0$$

  类似的，$x_{min} \in (a,b)$，那么，

  $$f'(x_{min}) = 0$$

  综上，命题成立。

10.2.5

定义函数 $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ 为 $h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

因为 $f(x), x$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数，由命题 9.4.9 可知，函数 h 也是 $[a,b]$ 上的连续函数。

因为 $f(x), x$ 都是 (a,b) 上的可微的，由定理 10.1.13 可得，任意 $x_0 \in (a,b)$，函数 h 在 x_0 处都是可微的，于是由定义 10.1.11 可知，函数 h 在 (a,b) 上是可微的。

又因为 $h(a) = h(b)$。

由定理 10.2.7（罗尔定理）可得，存在 $x \in (a,b)$ 使得

$$h'(x) = 0$$

即：

$$\begin{aligned} h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \\ \implies \\ f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

10.2.6

对任意的 $x, y \in [a, b]$，由 $[x, y] \subseteq [a, b]$，于是由题设可得，f 在 $[x, y]$ 上连续，在 (x, y) 上可微。

利用推论 10.2.9（中值定理）可得，存在 $c \in (x, y)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

因为 f 的导数都是有界的，所以 $|f'(c)| \leq M$，即

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq M$$
$$\Longrightarrow$$
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

10.2.7

f' 是有界的，那么不妨设其上界为 M。

对任意 $\epsilon > 0$，$x, y \in R$，存在 $\delta = \frac{\epsilon}{M}$，那么，当 $|x - y| \leq \delta$（即：$\delta-$ 接近时），于是由习题 10.2.6 知得

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq M|x - y| \\ &\leq M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon \end{aligned}$$

由定义 9.9.2 可知，f 是一致连续的。