5.6 习题

2024 年 6 月 7 日

5.6.1

证明：

（a）

仿照命题 5.5.12 的证明过程。

令 $E = \{z \in R : z \geq 0且z^n \leq x\}$，由定义 5.6.4 可知 $y = x^{1/n} := sup(E)$。

利用反证法，我们要证明 $y^n < x$ 和 $y^n > x$ 都会导致矛盾。

首先假设 $y^n < x$，假设 $0 < \epsilon < 1$ 是一个较小的正数。由于 $\epsilon^n < \epsilon$。

如果 $0 < y \leq 1$，那么，

$$\begin{aligned}(y+\epsilon)^n &= \epsilon^n + k_0 y \epsilon^{n-1} + k_1 y^2 \epsilon^{n-2} + ... + y^n && (1)\\ &< \epsilon + y^n + max(k_0, k_1, ...,) y \epsilon && (2)\\ &< y^n + \epsilon[1 + max(k_0, k_1, ...,) y] && (3)\end{aligned}$$

设 $\delta = x - y^n$，取 $\epsilon < \delta/[1 + max(k_0, k_1, ...,) y]$，就可以保证 $(y+\epsilon)^n < x$，所以 $(y+\epsilon) \in E$，从而与 y 是 E 的上确界矛盾。

如果 $y > 1$，那么，

$$\begin{aligned}(y+\epsilon)^n &= \epsilon^n + k_0 y \epsilon^{n-1} + k_1 y^2 \epsilon^{n-2} + ... + y^n && (4)\\ &< \epsilon + y^n + max(k_0, k_1, ...,) y^{n-1} \epsilon && (5)\\ &< y^n + \epsilon[1 + max(k_0, k_1, ...,) y^{n-1}] && (6)\end{aligned}$$

设 $\delta = x - y^n$，取 $\epsilon < \delta/[1 + max(k_0, k_1, ...,) y^{n-1}]$，就可以保证 $(y+\epsilon)^n < x$，所以 $(y+\epsilon) \in E$，从而与 y 是 E 的上确界矛盾。

现在假设 $y^n > x$，假设 $0 < \epsilon < 1$ 是一个较小的正数。

如果 $0 < y \leq 1$，那么，

$$(y-\epsilon)^n > y^n - \epsilon^n - max(|k_0|, |k_1|, ...,)y\epsilon \tag{7}$$

$$> y^n - \epsilon[1 - max(|k_0|, |k_1|, ...,)y] \tag{8}$$

设 $\delta = y^n - x$，取 $\epsilon < \delta/[1-max(|k_0|, |k_1|, ...,)y]$，就可以保证 $(y-\epsilon)^n > x$，所以 $(y-\epsilon)$ 也是上界，这与 y 是 E 的最小上界矛盾。

如果 $y > 1$，那么，

$$(y-\epsilon)^n > y^n - \epsilon^n - max(|k_0|, |k_1|, ...,)y\epsilon \tag{9}$$

$$> y^n - \epsilon[1 - max(|k_0|, |k_1|, ...,)y^{n-1}] \tag{10}$$

设 $\delta = y^n - x$，取 $\epsilon < \delta/[1 - max(|k_0|, |k_1|, ...,)y^{n-1}]$，就可以保证 $(y-\epsilon)^n > x$，所以 $(y-\epsilon)$ 也是上界，这与 y 是 E 的最小上界矛盾。

根据这两个矛盾，我们得到 $y^n = x$，命题得证。

证明过程中 k_n 具体的值是什么不重要，这里是定性分析。

（b）

该命题说明了 y 的唯一性，即：只有 $y = x^{1/n}$，才能使得 $y^n = x$。

假设存在 y' 使得 $(y')^n = x$，那么 $(y')^n = y^n$，对 n 进行归纳，可知 $y' = y$，存在矛盾，所以 $y = y'$，即 $y = x^{1/n}$ 是唯一的。

（c）

定义 5.6.4 就保证了任何 $E = \{y \in R : y \geq 0且y^n \leq x\}$ 的上界 $M \geq 0$，因为上界要大于 E 中的任意元素。所以，E 的最小上界 $sup(E) \geq 0$，所以 $x^{1/n}$ 是非负实数。

（d）

必要性：因为 $x^{1/n} > y^{1/n}$，且由命题 5.6.3（c）可知，

$$(x^{1/n})^n > (y^{1/n})^n$$
$$\Rightarrow x > y$$

充分性：反证法，假设 $x > y$ 时，$x^{1/n} \leq y^{1/n}$。而通过 5.6.3（c）可知，

$$(x^{1/n})^n \leq (y^{1/n})^n$$
$$\Rightarrow x \leq y$$

这与 $x > y$ 矛盾。所以假设不成立，命题得证。

（e）

首先证明 $x > 1$ 时，$x^{1/n} > 1$。由（d）可知，$x > 1$ 于是 $x^{1/n} > 1^{1/n}$，又因为 $1^n = 1$，由（b）可知 $1 = 1^{1/n}$，于是，

$$x^{1/n} > 1^{1/n} = 1$$

现在证明 $x > 1$ 时，x^n 是严格递增的。只需证明对任意自然数 $k, x^k < x^{k+1}$。由于，

$$x^{k+1} - x^k = x^k(x-1) > 0$$

所以 x^n 是严格递增的。

不妨设 $k_0 < k_1$，由（a）可知，

$$(x^{1/k_0})^{k_0} = x \tag{11}$$

$$(x^{1/k_1})^{k_1} = x \tag{12}$$

由于 $x > 1, x^{1/k_1} > 1$，于是 $(x^{1/k_1})^n$ 是严格递增的，且 $k_0 < k_1$，所以 $(x^{1/k_1})^{k_0} < (x^{1/k_1})^{k_1} = x$，由此可知，

$$(x^{1/k_0})^{k_0} > (x^{1/k_1})^{k_0} \tag{13}$$

由 5.6.3（c）可知，$x^{1/k_0} > x^{1/k_1}$，所以 $x^{1/k}$ 是关于 k 的减函数得证。