

15.7 习题

张志聪

2025 年 4 月 24 日

15.7.1

- (a)

利用引理 15.6.6 和习题 15.6.16 中的 $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ 。

$$\begin{aligned}\sin(x)^2 + \cos(x)^2 &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \\&= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2e^{ix-ix}}{-4} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} + 2e^{ix-ix}}{4} \\&= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{-4} + \frac{-2}{-4} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4} + \frac{2}{4} \\&= 1\end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\&= \cos(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}
\end{aligned}$$

令 $m = n - 1$, 即 $n = m + 1$, 利用命题 7.4.3 (级数的重排序),

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^{2(m+1)-1}}{(2(m+1)-1)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}$$

• (c)

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} \\
&= -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \frac{e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}}{2} \\
&= \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

• (d)

$$\begin{aligned}
\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\
&\quad - \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{4} \\
&\quad - \frac{e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{-4} \\
&= \frac{2e^{ix}e^{iy} + 2e^{-ix}e^{-iy}}{4} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{2} \\
&= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2} \\
&= \cos(x+y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\
&\quad + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{4i} \\
&\quad + \frac{e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{4i} \\
&= \frac{2e^{ix}e^{iy} - 2e^{-ix}e^{-iy}}{4i} \\
&= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} \\
&= \sin(x+y)
\end{aligned}$$

• (e)

$$\begin{aligned}
\cos(0) &= \frac{e^{i \times 0} + e^{-i \times 0}}{2i} \\
&= \frac{1+1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

由 (a) 可知, $\sin(0) = 1 - \cos(0)^2 = 1 - 1 = 0$

• (f)

$$\begin{aligned}
\cos(x) + i\sin(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + i^2 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i^2} \\
&= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{2e^{ix}}{2} \\
&= e^{ix}
\end{aligned}$$

同理可得,

$$\begin{aligned}
\cos(x) - i\sin(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - i^2 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i^2} \\
&= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{2e^{-ix}}{2} \\
&= e^{-ix}
\end{aligned}$$

15.7.2

(1)

反证法, 假设 c 不存在, 即, 对任意 $c > 0$, 存在 $0 < |y - x_0| < c$, 使得 $f(y) = 0$ 。

因为 f 在 x_0 处是可微的, 那么,

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in \mathbb{R} - x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

于是, 对 $\epsilon = \frac{1}{2}f'(x_0)$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|x - x_0| < \delta$, 就有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \frac{1}{2}f'(x_0)$$

由假设可知, 取 $c = \delta$, 那么, 存在 $0 < |y - x_0| < c$, 使得 $f(y) = 0$ 。
 综上, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} - f'(x_0) \right| &< \frac{1}{2}f'(x_0) \\ \left| \frac{0 - 0}{y - x_0} - f'(x_0) \right| &< \frac{1}{2}f'(x_0) \\ f'(x_0) &< \frac{1}{2}f'(x_0) \end{aligned}$$

存在矛盾。

(2)

因为 $\sin(x) = 0, \sin'(0) = \cos(0) = 1$, 所以, 由 (1) 可知, 存在 $c > 0$ 使得只要 $0 < |0 - x| = |x| < c$, $\sin(x) \neq 0$ 。

即 $-c < x < 0$ 或 $0 < x < c$, 都有 $\sin(x) \neq 0$ 。

15.7.3

- (a)

$$\begin{aligned} \cos(x + \pi) &= \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) \\ &= \cos(x)(-1) - \sin(x)0 \\ &= -\cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x + \pi) &= \sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi) \\
&= \sin(x)(-1) + \cos(x)0 \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}$$

特别地,

$$\begin{aligned}
\cos(x + 2\pi) &= \cos((x + \pi) + \pi) \\
&= -\cos(x + \pi) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x + 2\pi) &= \sin((x + \pi) + \pi) \\
&= -\sin(x + \pi) \\
&= \sin(x)
\end{aligned}$$

• (b)

– \Rightarrow

由书中的讨论可知, $\sin(0) = 0, \sin(\pi) = 0$ 且 $x \in (0, \pi), \sin(x) \neq 0$ 。

对任意 x 都可以表示成 $x = n\pi + x_0$, 其中 $x_0 \in [0, \pi), n$ 是整数。

由 (a) 可知,

$$\sin(x) = (-1)^n \sin(x_0)$$

综上, 只有 $x_0 = 0$ 时, $\sin(x) = 0$ 。此时, $x/\pi = n$ 是一个整数。

– \Leftarrow

因为 $x = n\pi$, 其中 n 是整数, 所以,

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sin(n\pi) \\
&= \sin(0 + n\pi) \\
&= (-1)^n 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

- (c)

因为

$$\begin{aligned}
 \sin(\pi) &= \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) \\
 &= \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \\
 &= 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

因为 $\sin(\frac{1}{2}\pi) > 0$, 所以, $\cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$ 。又由 $\sin(\frac{1}{2}\pi)^2 + \cos(\frac{1}{2}\pi)^2 = 1$ 可得, $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$ 。

又我们有,

$$\begin{aligned}
 \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) &= \sin(x)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \\
 &= \cos(x)
 \end{aligned}$$

综上, 由 (b) 可知, (c) 成立。

15.7.4

(1) 对 y 值进行讨论。

- $y = 1$ 。

于是 $x = 0$, 取 $\theta = 0$, 于是

$$\begin{aligned}
 x &= 0 = \sin(\theta) = \sin(0) \\
 y &= 1 = \cos(\theta) = \cos(0)
 \end{aligned}$$

- $y = -1$ 。

于是 $x = 0$, 取 $\theta = \pi$, 于是

$$\begin{aligned}
 x &= 0 = \sin(\theta) = \sin(\pi) = -\sin(0) \\
 y &= -1 = \cos(\theta) = \cos(\pi) = -\cos(0)
 \end{aligned}$$

- $y \in (-1, 1)$ 。

因为 $\cos(z) = -\sin(z)$, 又所以在 $z \in (0, \pi)$, $\sin(z) > 0$, 所以 $\cos(z)$ 在 $(0, \pi)$ 中严格单调递减, 由介值定理可得, 在 $(\cos(0), \cos(\pi)) = (-1, 1)$ 中, 存在 $\theta_0 \in (0, \pi)$, 使得

$$\cos(\theta_0) = y$$

又因为

$$\sin(\theta_0)^2 = 1 - \cos(\theta_0)^2 = 1 - y^2 = x^2$$

于是, $\sin(\theta_0) = x$ 或 $\sin(\theta_0) = -x$ 。

– 如果 $\sin(\theta_0) = x$, 直接取 $\theta = \theta_0$ 即可。

– 如果 $\sin(\theta_0) = -x$ 。

取 $\theta = -\theta_0$, 于是

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos(-\theta_0) = \cos(\theta_0) = y \\ \sin(\theta) &= \sin(-\theta_0) = -\sin(\theta_0) = -(-x) = x\end{aligned}$$

又因为 $-\theta_0 \in (-\pi, 0) \subseteq (-\pi, \pi]$, 满足题设。

(2) 唯一性证明。

反证法, 假设存在 $\theta' \in (-\pi, \pi], \theta \neq \theta'$, 使得

$$x = \sin(\theta') = \sin(\theta)$$

$$y = \cos(\theta') = \cos(\theta)$$

$y = 1$ 或 $y = -1$ 时, 唯一性可以直接由定理 15.7.5(b) 推导出。我们主要考虑 $y \in (-1, 1)$ 时。

因为 $\cos(x)$ 在 $(0, \pi)$ 中严格单调递减, 所以在 $(0, \pi)$ 中最多存在一个 θ 使得 $\cos(\theta) = y$ 。

同理, $(-\pi, 0)$ 中最多存在一个 θ' 使得 $\cos(\theta') = y$ 。

又因为 $\cos(-x) = \cos(x)$, 于是可得 $\theta = -\theta'$ 。

而 $\sin(-x) = -\sin(x)$, 于是 $\sin(\theta') = -\sin(\theta)$, 这与 $\sin(\theta) = \sin(\theta')$ 矛盾。

15.7.5

- (a) $r = s$ 。

由定理 15.7.2(f) 可知,

$$re^{i\theta} = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)i$$

$$se^{i\alpha} = s\cos(\alpha) + s\sin(\alpha)i$$

因为 $re^{i\theta} = se^{i\alpha}$, 于是 $|re^{i\theta}| = |se^{i\alpha}|$ 。又因为

$$|re^{i\theta}| = \sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} = r$$

$$|se^{i\alpha}| = \sqrt{(s\cos(\alpha))^2 + (s\sin(\alpha))^2} = s$$

综上, $r = s$ 。

- (b) 存在一个整数 k 使得 $\theta = \alpha + 2\pi k$ 。

结合 (a) 可知, θ, α 要满足以下条件:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\alpha) \\ \sin(\theta) = \sin(\alpha) \end{cases}$$

如果 $\theta = \alpha$, 此时 $k = 0$, 命题成立。

如果 $\theta \neq \alpha$ 。因为 $\sin(x), \cos(x)$ 都是周期函数, 且周期为 2π , 所以, 我们可以在 $(-\pi, \pi]$ 上考虑该问题。

令 $x^2 = \sin^2(\theta), y^2 = \cos^2(\theta)$, 于是 $x^2 + y^2 = 1$ 。于是利用习题 15.7.4 可知, 恰存在一个实数 $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ 使得 $x = \sin(\vartheta), y = \cos(\vartheta)$ 。

由 ϑ 的唯一性可知, θ, α 要满足:

$$\theta = \vartheta + 2\pi k_1$$

$$\alpha = \vartheta + 2\pi k_2$$

(其中, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$)

如果不满足该条件, 会导致 ϑ 不唯一。因为存在 $k' \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\alpha + 2\pi k' \in (-\pi, \pi]$$

$$\alpha + 2\pi k' \neq \vartheta$$

(这里以 α 为例)

于是 $x = \sin(\alpha + 2\pi k'), y = \cos(\alpha + 2\pi k')$, 与 ϑ 的唯一性矛盾。

综上, 命题成立。

15.7.6

$$\begin{aligned} re^{i\theta} &= r(\cos(\theta) + \sin(\theta)i) \\ &= r\cos(\theta) + r\sin(\theta)i \end{aligned}$$

因为要满足 $z = re^{i\theta}$, 于是要保证,

$$\begin{aligned} |z| &= |re^{i\theta}| \\ &= \sqrt{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} \\ &= \sqrt{r^2} \\ &= |r| \end{aligned}$$

因为, $r > 0$, 所以, 取 $r = |z|$ 。(注意, 这里的 r 是唯一。因为如果 $r \neq |z|$, 会导致 $z = re^{i\theta}$ 无法成立。)

另外, 我们需要求出以下两个方程的解。

$$\begin{cases} r\cos(\theta) = \Re(z) \\ r\sin(\theta) = \Im(z) \end{cases}$$

两等式分别平方, 然后, 相加:

$$\begin{aligned} r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) &= (\Re(z))^2 + (\Im(z))^2 = |z|^2 \\ r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) &= |z|^2 \\ |z|^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) &= |z|^2 \\ \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) &= 1 \end{aligned}$$

由习题 15.7.4 可知, θ 存在且唯一。

15.7.7

$$\begin{aligned}\Re((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) &= \Re((e^{i\theta})^n) \\ &= \Re(e^{in\theta}) \\ &= \cos(n\theta)\end{aligned}$$

同理可得,

$$\begin{aligned}\Im((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) &= \Im((e^{i\theta})^n) \\ &= \Im(e^{in\theta}) \\ &= \sin(n\theta)\end{aligned}$$

15.7.8

- $\tan(x)$ 可微且单调递增, $\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan(x)^2$.

由于 $\sin(x), \cos(x)$ 在 R 上可微, 且 $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 上, $\cos(x) \neq 0$, 由定理 10.1.13(h), $\tan(x)$ 可微, 且

$$\begin{aligned}(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2}\end{aligned}$$

因为 $x \in (-\pi/2, \pi/2), \cos(x)^2 > 0$, 于是 $(\tan(x))' > 0$, 所以, $\tan(x)$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上是严格单调递增的。

我们有,

$$\begin{aligned}1 + \tan(x)^2 &= 1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2} \\ &= (\tan(x))'\end{aligned}$$

所以, $\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan(x)^2$ 。

- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \tan(x) = -\infty$ 。

由定理 15.7.5(c) 可知, $\cos(\pi/2) = 0$, 于是 $\sin(x) = 1 - \cos(x)^2 = 1$ 。

因为, $\cos(x), \sin(x)$ 都是连续的, 所以,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin(x) = 1$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan(x) = +\infty$$

注意: 这里不能直接使用极限定理 (定理 6.1.19) 得到, 而是利用函数在一点处收敛的定义 (定义 9.3.6), 具体证明略。

类似地,

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \tan(x) = -\infty$$

- $\tan(x)$ 实际上是 $(-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ 的双射。

由之前的讨论可知, $\tan(x)$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上是严格单调递增的, 于是, $\tan(x)$ 是 $(-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ 的双射。

- \tan^{-1} 可微的, 并且有 $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 。

由定理 10.4.2 (反函数定理) 可知, \tan^{-1} 可微, 并且对 $y = \tan(x)$ 有

$$\begin{aligned} (\tan^{-1})'(y) &= \frac{1}{\tan'(x)} \\ &= \frac{1}{1 + \tan(x)^2} \\ &= \frac{1}{1 + y^2} \end{aligned}$$

所以, $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 。

15.7.9

(1)

因为, $x \in (-1, 1)$, 所以, $|-x^2| < 1$ 。

所以,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - (-x^2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\end{aligned}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ 这个级数与标准幂级数形式 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 不一致, 但它任然是一个合法的幂级数, 但需要做如下改变:

设 $m = 2n$, 于是利用命题 7.4.3 (级数的重排序)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

其中,

$$c_m = \begin{cases} (-1)^{m/2} & \text{if } m \text{ is 偶数} \\ 0 & \text{if } m \text{ is 奇数} \end{cases}$$

(其实这个幂级数缺少奇次项, 书中定义的 $\sin(x), \cos(x)$ 幂级数表示形式, 也分别缺少奇次项和偶次项)。

利用定理 15.1.6(e) 可知,

$$\int_{[0,x]} \frac{1}{1+y^2} dy = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

令 $n = \frac{1}{2}m$, 于是再次利用命题 7.4.3 (级数的重排序)

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{x^{m+1}}{m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

又因为,

$$\begin{aligned}\int_{[0,x]} \frac{1}{1+y^2} dy &= \tan^{-1}(y)|_0^x \\ &= \tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(0) \\ &= \tan^{-1}(x) - 0 \\ &= \tan^{-1}(x)\end{aligned}$$

综上可得,

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(2)

- 使用阿贝尔定理证明。(按照提示证明, 但个人有一点问题: 这个幂级数的收敛半径不是 1)。

因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

所以, 有定理 15.3.1 (阿贝尔定理) 可得,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \tan^{-1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &\implies \\ \tan^{-1}(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\end{aligned}$$

接下来, 现在需要证明: $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ 。

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2) &= \cos(\pi/4 + \pi/4) \\ &= \cos(\pi/4)\cos(\pi/4) - \sin(\pi/4)\sin(\pi/4) \\ &= 0\end{aligned}$$

于是可得,

$$\cos(\pi/4)\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)\sin(\pi/4)$$

又因为,

$$\cos(\pi/4)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)\sin(\pi/4) = 1$$

又因为 $\cos(\pi/4) > 0, \sin(\pi/4) > 0$, 于是

$$\begin{aligned}\cos(\pi/4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\pi/4) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

因为, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, 且在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 中严格单调递增, 所以, 当且仅当 $x = \pi/4$ 时, $\tan(x) = 1$ 。

综上可得,

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

所以,

$$\pi = 4\tan^{-1}(1) = 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(3) 推导出 $4 - \frac{4}{3} < \pi < 4$ 。

- (a) $4 - \frac{4}{3} < \pi$ 。

我们从每一个部分和都是正的来证明 (要分两种情况讨论: 部分和是由偶数个项组成的以及奇数个项组成的)。

$$\begin{aligned}\pi &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &= 4 - \frac{4}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2n+1}\end{aligned}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2n+1}$ 的部分和序列为 $(S_N)_{N=2}^{\infty}$, 其中 $S_N = \sum_{n=0}^N \frac{(-4)^n}{2n+1}$ 。

我们有,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2n+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$$

于是, 问题转变成对序列 $(S_N)_{N=2}^{\infty}$ 的讨论。

当偶数个项时,

$$\begin{aligned} S_N &= \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{7}\right) + \dots + \left(\frac{4}{2(N-1)+1} - \frac{4}{2N+1}\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

(追求严谨性, 这里也可以通过归纳证明)

当奇数个项时, S_{N-1} 是偶数个项, 所以 $S_{N-1} > 0$, 于是我们有

$$\begin{aligned} S_N &= S_{N-1} + \frac{4}{2N+1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

于是, $(S_N)_{N=2}^{\infty}$, 对任意 N 都有

$$S_N > 0$$

于是,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N \geq 0$$

- (b) $\pi < 4$ 。

证明方法与 (a) 类似, 证明略。

15.7.19

- (a)

利用定理 14.5.8 (威尔斯特拉斯 M 判别法) 完成证明。

令 $f(n) = 4^{-n} \cos(32^n \pi x)$ 是有界且连续的, 又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n)\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}$, 由引理 7.3.3 (几何级数) 可知, $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}$ 收敛, 于是利用定理 14.5.8 (威尔斯特拉斯 M 判别法), $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \cos(32^n \pi x)$ 一致收敛于连续的函数 f 。

- (b)

直接利用书中的提示的小命题, 不做证明了。

$$\begin{aligned}
\left| f\left(\frac{j+1}{32^m}\right) - f\left(\frac{j}{32^m}\right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j}{32^m}) \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j}{32^m}) \right|
\end{aligned}$$

$n > m$ 时, $32^n \pi \frac{j+1}{32^m}$ 与 $32^n \pi \frac{j}{32^m}$ 都是 2π 的整数倍, 所以,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j}{32^m}) \right| &= \left| \sum_{n=m}^{\infty} 4^{-n} \times 1 - 4^{-n} \times 1 \right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

$n = m$ 时,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=m}^m 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j}{32^m}) \right| &= \left| 4^{-m} \cos(32^m \pi \frac{j+1}{32^m}) - 4^{-m} \cos(32^m \pi \frac{j}{32^m}) \right| \\
&= |4^{-m} \cos(\pi(j+1)) - 4^{-m} \cos(\pi j)| \\
&= 2 \times 4^{-m}
\end{aligned}$$

$n < m$ 时,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{m-1} 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j}{32^m}) \right| &\leq \sum_{n=1}^{m-1} 4^{-n} \frac{\pi}{32^{m-n}} \\
&= \sum_{n=1}^{m-1} 4^{-n} 4^{n-m} \frac{\pi}{(8 \times 4)^{m-n} 4^{n-m}} \\
&= \sum_{n=1}^{m-1} 4^{-m} \frac{\pi}{8^{m-n}} \\
&= 4^{-m} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\pi}{(2 \times 4)^{m-n}} \\
&< 4^{-m} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^{m-n}} \\
&\leq 4^{-m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 4^{-m}
\end{aligned}$$

综上可得,

$$\begin{aligned}
\left| f\left(\frac{j+1}{32^m}\right) - f\left(\frac{j}{32^m}\right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j}{32^m}) \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - 4^{-n} \cos(32^n \pi \frac{j}{32^m}) \right| \\
&\geq 2 \times 4^{-m} - 4^{-m} \\
&= 4^{-m}
\end{aligned}$$

• (c)

todo (没解出来)

反证法, 假设 f 是可微的, 那么 f 是连续。那么, 对任意 x_0 , f 在 x_0 是连续的。

对于, 任意 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|x - x_0| < \delta$, 就有,

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 我们有

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_1) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_2)| \\
&\leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_2)| \\
&< 2\epsilon
\end{aligned}$$

• (d)

令 $f_n = 4^{-n} \cos(32^n \pi x)$, f_n 是一个可微函数, 他的导函数 $f'_n = 4^{-n} (-32^n \pi) \sin(32^n \pi x)$ 是连续的, 其中,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} 32^n \pi \quad (1)$$

不收敛, 无法满足 14.7.3 的前置条件。