18.5 注释

张志聪

2025 年 5 月 28 日

说明 1. 证明：

$$g^{-1}((a,+\infty]) = \bigcup_{n\geq 1} f_n^{-1}((a,+\infty])$$

证明：

这是上确界函数，书中没找到明确定义的地方，这里先说明一下：

$\sup_{n\geq 1} f_n$ 表示一系列函数 f_n（其中 $n \geq 1$）的上确界函数。具体来说，对于每一个自变量 x，这个函数的值是所有函数 f_n 在 x 处的上确界（即最小的上界）。数学表达式为：

$$\left(\sup_{n\geq 1} f_n\right)(x) = \sup(f_1(x), f_2(x), \cdots)$$

- 从右到左

  设任意 $x_0 \in g^{-1}((a,+\infty])$，那么 $g(x_0) \in (a,+\infty]$，由上确界函数的定义可知，存在 $f_n(x_0) = g(x_0)$，从而 $g^{-1}((a,+\infty]) \subseteq \bigcup_{n\geq 1} f_n^{-1}((a,+\infty])$。

- 从左到右

  设任意 $x_0 \in \bigcup_{n\geq 1} f_n^{-1}((a,+\infty])$，那么存在某个 n，使得 $f_n(x_0) \in (a,+\infty]$，于是我们有

  $$g(x_0) \geq f_n(x_0) > a$$

  所以 $x_0 \in g^{-1}((a,+\infty])$，从而 $\bigcup_{n\geq 1} f_n^{-1}((a,+\infty]) \subseteq g^{-1}((a,+\infty])$。