★定义8.2.1定义明确性

假设双射函数 $h:\mathbb{N}\to X$。需要证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(g(n)) = \sum_{m=0}^{\infty} f(h(m))$$

可以定义 a_n 为

$$a_n := f(g(n))$$

现在，根据命题 7.4.3 只需要找到一个双射。

定义 $w:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为

$$w(m) := h^{-1}\circ g(m)$$

因为 g 是 $\mathbb{N}\to X$ 的双射，且 h 是 $\mathbb{N}\to X$ 的双射，那么 h^{-1} 是 $\mathbb{N}\to X$ 的双射，所以，这两个函数的复合函数 w 是双射函数。又因为

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(h(m)) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{w(m)}$$

由命题 7.4.3 可知

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{w(m)}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f(g(n)) = \sum_{m=0}^{\infty} f(h(m))$$

★定理8.2.2

（1）书中

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} \leq \sum_{(n,m)\in X} f(n,m)$$

应该是错的，这里应该是相等的，即：

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} = \sum_{(n,m)\in X} f(n,m)$$

（2）书中“当 $M\to\infty$ 时，对上面的式子取上确界可得（利用极限定律并对 N 使用归纳法）”

应该是错的，这里是对 M 进行归纳，N 是看做固定值的。

（3）证明：$\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m)$ 是绝对收敛的，那么 $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f_+(n,m)$ 和 $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f_-(n,m)$ 也都是绝对收敛的。

反证法，假设 f_+ 是发散的，由 $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m)$ 的部分和 S_N 等于 $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f_+(n,m)$ 的部分和 S_{N+}，$\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f_-(n,m)$ 的部分和 S_{N-} 相加，即：

$$S_N = S_{N+} + S_{N-}$$

（注意：这里的部分和都是序列每项取绝对值的部分和）。

由于 $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ 收敛，所以，对任意 $\epsilon > 0$，都存在一个整数 M'，当 $N \geq M'$ 使得

$$|S_N - L| \leq \epsilon \tag{1}$$

当如果 f_+ 是发散的，那个，存在一个整数 M''，当 $N \geq M''$ 使得

$$S_{N+} > L + \epsilon$$

又因为 $S_{N-} \geq 0$，所以，取 $M = max(M', M'')$，当 $N \geq M$ 使得

$$\begin{aligned} |S_N - L| &= |S_{N+} + S_{N-} - L| \\ &> \epsilon \end{aligned}$$

显然，与（1）式存在矛盾。所以 f_+ 是收敛的。同理可证 f_- 收敛。

（4）最后一句话，有个需要证明的部分。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(n,m) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f_+(n,m) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f_-(n,m)$$

其中，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_+(n,m)$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_-(n,m)$ 绝对收敛的。

感觉是结论是明显的，但这里有以下问题：

- 书中没有明确定义双重级数。
- 回到定义 7.2.2（级数的收敛），部分和 $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N}\sum\limits_{m=0}^{\infty} f(n,m)$ 因为其包含一个无限级数，处理起来没有想象中那么简单。

不妨设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_+(n,m)$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_-(n,m)$ 的部分和分别是 S_{N+}，S_{N-}。
那么，如果能证明：

$$S_N = S_{N+} + S_{N-}$$

则利用极限定律，可以完成证明。

对 m 进行归纳，$m=0$ 时，由命题 7.1.11（b）可知

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{0} f(n,m) \\
&= \sum_{n=0}^{N} f(n,0) \\
S_{N+} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{0} f_+(n,m) \\
&= \sum_{n=0}^{N} f_+(n,0) \\
S_{N-} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{0} f_-(n,m) \\
&= \sum_{n=0}^{N} f_-(n,0)
\end{aligned}$$

因为 $f(n,0)=f_+(n,0)+f_-(n,0)$，由引理 7.1.4（c）可知

$$S_N = S_{N+} + S_{N-}$$

归纳假设 $m=k$ 时，命题成立。

$m=k+1$ 时，由引理 7.1.4（a）可知

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{k+1} f(n,m) \\
&= \sum_{n=0}^{N}\big(\sum_{m=0}^{k} f(n,m) + f(n,k+1)\big)
\end{aligned}$$

同理可知

$$
\begin{aligned}
S_{N+} &= \sum_{n=0}^{N}\big(\sum_{m=0}^{k} f_+(n,m) + f_+(n,k+1)\big) \\
S_{N-} &= \sum_{n=0}^{N}\big(\sum_{m=0}^{k} f_-(n,m) + f_-(n,k+1)\big)
\end{aligned}
$$

因为 $k \in \mathbb{N}$（即：是有限值），所以

$$
\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N}\big(\sum_{m=0}^{k} f(n,m) + f(n,k+1)\big) \\
&= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{k} f(n,m) + \sum_{n=0}^{N} f(n,k+1)
\end{aligned}
$$

同理 S_{N+}, S_{N-} 同样成立。

利用归纳假设，可以证得 $S_N = S_{N+} + S_{N-}$。

至此，归纳完成。

然后利用极限定律，即可完成证明。

（5）前提一定要是绝对收敛么？

是的。首先第二个等式用到了命题 7.4.3，而该命题的前提就是要求级数是绝对收敛的。

对于第一个等式，在刚刚（3）中，f 是绝对收敛，则 f_+, f_- 也是绝对收敛的。而在 f 是条件收敛的情况下，是没有这个性质的，这里举一个反例

$$
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n
$$

由命题 7.2.12（交错级数判别法）可知，该级数收敛。而级数 $f_+ := \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ 是调和函数，是发散的（推论 7.3.7）。