

9.5 习题

张志聪

2024 年 12 月 4 日

9.5.1

(1)

仿照定义 9.3.5 (函数在一点处收敛)

- $\lim_{x \rightarrow a; x \in E} f(x) = +\infty$, 当且仅当对于任意的 $M > 0$, 都存在一个 $\delta > 0$, 使得 $f(x) > M$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in E$ 均成立。
- $\lim_{x \rightarrow a; x \in E} f(x) = -\infty$, 当且仅当对于任意的 $M < 0$, 都存在一个 $\delta > 0$, 使得 $f(x) < M$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in E$ 均成立。

(2)

- $f(0+) = +\infty$
任意 $M > 0$, 存在 $\delta = 1/M$, 使得 $f(x) > M$ 对所有满足 $|x - 0| < \delta$ 的 $x \in E \cap (0, +\infty)$ 均成立。
- $f(0-) = -\infty$
任意 $M < 0$, 存在 $\delta = 1/M$, 使得 $f(x) < M$ 对所有满足 $|x - 0| < \delta$ 的 $x \in E \cap (-\infty, 0)$ 均成立。

(3)

仿照命题 9.3.9, 下面两个命题在逻辑上是等价的。

- (a) f 在 x_0 处沿着 E 收敛于 $+\infty$ (或 $-\infty$)。
- (b) 对于任意的一个完全由 E 中的元素构成并且收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, 序列 $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ 也收敛于 $+\infty$ (或 $-\infty$)。

证明方式与习题 9.3.1 类似, 不做赘述。