15.7 习题

张志聪

2025 年 4 月 24 日

15.7.1

- (a)

  利用引理 15.6.6 和习题 15.6.16 中的 $\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)$。

$$\begin{aligned}\sin(x)^2+\cos(x)^2 &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\\ &= \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2e^{ix-ix}}{-4}+\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2e^{ix-ix}}{4}\\ &= \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{-4}+\frac{-2}{-4}+\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{4}+\frac{2}{4}\\ &= 1\end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned}sin'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\\ &= cos(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
cos'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}
\end{aligned}
$$

令 $m = n - 1$，即 $n = m + 1$，利用命题 7.4.3（级数的重排序），

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^{2(m+1)-1}}{(2(m+1)-1)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m} x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= -sin(x)
\end{aligned}
$$

- (c)

$$
\begin{aligned}
sin(-x) &= \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} \\
&= -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
&= -sin(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
cos(-x) &= \frac{e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}}{2} \\
&= \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} \\
&= cos(x)
\end{aligned}
$$

- (d)

$$
\begin{aligned}
cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\
&- \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{4} \\
&- \frac{e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{-4} \\
&= \frac{2e^{ix}e^{iy} + 2e^{-ix}e^{-iy}}{4} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{2} \\
&= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2} \\
&= cos(x+y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\
&+ \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{4i} \\
&+ \frac{e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{4i} \\
&= \frac{2e^{ix}e^{iy} - 2e^{-ix}e^{-iy}}{4i} \\
&= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} \\
&= sin(x+y)
\end{aligned}
$$

- (e)

$$
\begin{aligned}
cos(0) &= \frac{e^{i\times 0}+e^{-i\times 0}}{2i} \\
&= \frac{1+1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

由 (a) 可知，$sin(0) = 1 - cos(0)^2 = 1 - 1 = 0$

- (f)

$$
\begin{aligned}
cos(x) + isin(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + i^2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i^2} \\
&= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{2e^{ix}}{2} \\
&= e^{ix}
\end{aligned}
$$

同理可得，

$$
\begin{aligned}
cos(x) - isin(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} - i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} - i^2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i^2} \\
&= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{2e^{-ix}}{2} \\
&= e^{-ix}
\end{aligned}
$$

15.7.2

（1）

反证法，假设 c 不存在，即，对任意 $c > 0$，存在 $0 < |y - x_0| < c$，使得 $f(y) = 0$。

因为 f 在 x_0 处是可微的，那么，

$$\lim_{x\to x_0;x\in\mathbb{R}-x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

于是，对 $\epsilon=\frac{1}{2}f(x_0)$，存在 $\delta>0$，使得只要 $|x-x_0|<\delta$，就有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\frac{1}{2}f'(x_0)$$

由假设可知，取 $c=\delta$，那么，存在 $0<|y-x_0|<c$，使得 $f(y)=0$。综上，我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}-f'(x_0)\right|&<\frac{1}{2}f'(x_0)\\ \left|\frac{0-0}{y-x_0}-f'(x_0)\right|&<\frac{1}{2}f'(x_0)\\ f'(x_0)&<\frac{1}{2}f'(x_0)\end{aligned}$$

存在矛盾。

（2）

因为 $sin(x)=0, sin'(0)=cos(0)=1$，所以，由（1）可知，存在 $c>0$ 使得只要 $0<|0-x|=|x|<c$，$sin(x)\neq 0$。

即 $-c<x<0$ 或 $0<x<c$，都有 $sin(x)\neq 0$。

15.7.3

- (a)

$$\begin{aligned}cos(x+\pi)&=cos(x)cos(\pi)-sin(x)sin(\pi)\\&=cos(x)(-1)-sin(x)0\\&=-cos(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sin(x+\pi) &= sin(x)cos(\pi) + cos(x)sin(\pi) \\ &= sin(x)(-1) + cos(x)0 \\ &= -sin(x) \end{aligned}$$

特别地，

$$\begin{aligned} cos(x+2\pi) &= cos((x+\pi)+\pi) \\ &= -cos(x+\pi) \\ &= cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sin(x+2\pi) &= sin((x+\pi)+\pi) \\ &= -sin(x+\pi) \\ &= sin(x) \end{aligned}$$

- (b)
  - $\Rightarrow$

    由书中的讨论可知，$sin(0) = 0, sin(\pi) = 0$ 且 $x \in (0,\pi), sin(x) \neq 0$。

    对任意 x 都可以表示成 $x = n\pi + x_0$，其中 $x_0 \in [0,\pi)$，n 是整数。

    由 (a) 可知，

    $$sin(x) = (-1)^n sin(x_0)$$

    综上，只有 $x_0 = 0$ 时，$sin(x) = 0$。此时，$x/\pi = n$ 是一个整数。
  - $\Leftarrow$

    因为 $x = n\pi$，其中 n 是整数，所以，

    $$\begin{aligned} sin(x) &= sin(n\pi) \\ &= sin(0+n\pi) \\ &= (-1)^n 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (c)

  因为

$$\begin{aligned}sin(\pi) &= sin(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi)\\&= sin(\frac{1}{2}\pi)cos(\frac{1}{2}\pi) + cos(\frac{1}{2}\pi)sin(\frac{1}{2}\pi)\\&= 2sin(\frac{1}{2}\pi)sin(\frac{1}{2}\pi)\\&= 0\end{aligned}$$

  因为 $sin(\frac{1}{2}\pi) > 0$，所以，$cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$。又由 $sin(\frac{1}{2}\pi)^2 + cos(\frac{1}{2}\pi)^2 = 1$ 可得，$sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$。

  又我们有，

$$\begin{aligned}sin(x + \frac{1}{2}\pi) &= sin(x)cos(\frac{1}{2}\pi) + cos(x)sin(\frac{1}{2}\pi)\\&= cos(x)\end{aligned}$$

  综上，由 (b) 可知，(c) 成立。

15.7.4

（1）对 y 值进行讨论。

- $y = 1$。

  于是 $x = 0$，取 $\theta = 0$，于是

$$\begin{aligned}x = 0 = sin(\theta) = sin(0)\\y = 1 = cos(\theta) = cos(0)\end{aligned}$$

- $y = -1$。

  于是 $x = 0$，取 $\theta = \pi$，于是

$$\begin{aligned}x = 0 = sin(\theta) = sin(\pi) = -sin(0)\\y = -1 = cos(\theta) = cos(\pi) = -cos(0)\end{aligned}$$

- $y \in (-1, 1)$。

  因为 $cos^(z) = -sin(z)$，又所以在 $z \in (0, \pi)$，$sin(z) > 0$，所以 $cos(z)$ 在 $(0, \pi)$ 中严格单调递减，由介质定理可得，在 $(cos(0), cos(\pi)) = (-1, 1)$ 中，存在 $\theta_0 \in (0, \pi)$，使得

  $$cos(\theta_0) = y$$

  又因为

  $$sin(\theta_0)^2 = 1 - cos(\theta_0)^2 = 1 - y^2 = x^2$$

  于是，$sin(\theta_0) = x$ 或 $sin(\theta_0) = -x$。

  - 如果 $sin(\theta_0) = x$，直接取 $\theta = \theta_0$ 即可。
  - 如果 $sin(\theta_0) = -x$。

    取 $\theta = -\theta_0$，于是

    $$cos(\theta) = cos(-\theta_0) = cos(\theta_0) = y$$
    $$sin(\theta) = sin(-\theta_0) = -sin(\theta_0) = -(-x) = x$$

    又因为 $-\theta_0 \in (-\pi, 0) \subseteq (-\pi, \pi]$，满足题设。

（2）唯一性证明。

反证法，假设存在 $\theta' \in (-\pi, \pi], \theta \neq \theta'$，使得

$$x = sin(\theta') = sin(\theta)$$
$$y = cos(\theta') = cos(\theta)$$

$y = 1$ 或 $y = -1$ 时，唯一性可以直接由定理 15.7.5(b) 推导出。我们主要考虑 $y \in (-1, 1)$ 时。

因为 $cos(x)$ 在 $(0, \pi)$ 中严格单调递减，所以在 $(0, \pi)$ 中最多存在一个 θ 使得 $cos(\theta) = y$。

同理，$(-\pi, 0)$ 中最多存在一个 θ' 使得 $cos(\theta') = y$。

又因为 $cos(-x) = cos(x)$，于是可得 $\theta = -\theta'$。

而 $sin(-x) = -sin(x)$，于是 $sin(\theta') = -sin(\theta)$，这与 $sin(\theta) = sin(\theta')$ 矛盾。

15.7.5

- (a) $r = s$。

  由定理 15.7.2(f) 可知，

  $$re^{i\theta} = rcos(\theta) + r\sin(\theta)i$$
  $$se^{i\alpha} = scos(\alpha) + s\sin(\alpha)i$$

  因为 $re^{i\theta} = se^{i\alpha}$，于是 $|re^{i\theta}| = |se^{i\alpha}|$。又因为

  $$|re^{i\theta}| = \sqrt{(rcos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} = r$$
  $$|se^{i\alpha}| = \sqrt{(rcos(\alpha))^2 + (r\sin(\alpha))^2} = s$$

  综上，$r = s$。

- (b) 存在一个整数 k 使得 $\theta = \alpha + 2\pi k$。

  结合 (a) 可知，θ, α 要满足以下条件：

  $$\begin{cases} cos(\theta) = cos(\alpha) \\ sin(\theta) = sin(\alpha) \end{cases}$$

  如果 $\theta = \alpha$，此时 $k = 0$，命题成立。

  如果 $\theta \neq \alpha$。因为 $sin(x), cos(x)$ 都是周期函数，且周期为 2π，所以，我们可以在 $(-\pi, \pi]$ 上考虑该问题。

  令 $x^2 = sin^2(\theta), y^2 = cos^2(\theta)$，于是 $x^2 + y^2 = 1$。于是利用习题 15.7.4 可知，恰存在一个实数 $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ 使得 $x = sin(\vartheta), y = cos(\vartheta)$。

  由 ϑ 的唯一性可知，θ, α 要满足:

  $$\theta = \vartheta + 2\pi k_1$$
  $$\alpha = \vartheta + 2\pi k_2$$

  （其中，$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$）

  如果不满足该条件，会导致 ϑ 不唯一。因为存在 $k' \in \mathbb{Z}$ 使得

  $$\alpha + 2\pi k' \in (-\pi, \pi]$$
  $$\alpha + 2\pi k' \neq \vartheta$$

（这里以 α 为例）

于是 $x = sin(\alpha + 2\pi k'), y = cos(\alpha + 2\pi k')$，与 ϑ 的唯一性矛盾。

综上，命题成立。

15.7.6

$$\begin{aligned} re^{i\theta} &= r(cos(\theta) + sin(\theta)i) \\ &= rcos(\theta) + rsin(\theta)i \end{aligned}$$

因为要满足 $z = re^{i\theta}$，于是要保证，

$$\begin{aligned} |z| &= |re^{i\theta}| \\ &= \sqrt{r^2cos^2(\theta) + r^2sin^2(\theta)} \\ &= \sqrt{r^2} \\ &= |r| \end{aligned}$$

因为，$r > 0$，所以，取 $r = |z|$。（注意，这里的 r 是唯一。因为如果 $r \neq |z|$，会导致 $z = re^{i\theta}$ 无法成立。）

另外，我们需要求出以下两个方程的解。

$$\begin{cases} rcos(\theta) = \Re(z) \\ rsin(\theta) = \Im(z) \end{cases}$$

两等式分别平方，然后，相加：

$$\begin{aligned} r^2cos^2(\theta) + r^2sin^2(\theta) = (\Re(z))^2 + (\Im(z))^2 &= |z|^2 \\ r^2(cos^2(\theta) + sin^2(\theta)) &= |z|^2 \\ |z|^2(cos^2(\theta) + sin^2(\theta)) &= |z|^2 \\ cos^2(\theta) + sin^2(\theta) &= 1 \end{aligned}$$

由习题 15.7.4 可知，θ 存在且唯一。

15.7.7

$$\begin{aligned}\Re((cos(\theta)+isin(\theta))^n) &= \Re((e^{i\theta})^n)\\ &= \Re(e^{in\theta})\\ &= cos(n\theta)\end{aligned}$$

同理可得，

$$\begin{aligned}\Im((cos(\theta)+isin(\theta))^n) &= \Im((e^{i\theta})^n)\\ &= \Im(e^{in\theta})\\ &= sin(n\theta)\end{aligned}$$

15.7.8

- $\tan(x)$ 可微且单调递增，$\frac{d}{dx}tan(x) = 1 + tan(x)^2$。

  由于 $sin(x), cos(x)$ 在 R 上可微，且 $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 上，$con(x) \neq 0$，由定理 10.1.13(h)，$tan(x)$ 可微，且

  $$\begin{aligned}(tan(x))' &= (\frac{sin(x)}{con(x)})'\\ &= \frac{cos(x)cos(x) - sin(x)(-sin(x))}{con(x)^2}\\ &= \frac{1}{cos(x)^2}\end{aligned}$$

  因为 $x \in (-\pi/2, \pi/2), cos(x)^2 > 0$，于是 $(tan(x))' > 0$，所以，$tan(x)$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上是严格单调递增的。

  我们有，

  $$\begin{aligned}1 + tan(x)^2 &= 1 + \frac{sin(x)^2}{cos(x)^2}\\ &= \frac{cos(x)^2 + sin(x)^2}{cos(x)^2}\\ &= \frac{1}{cos(x)^2}\\ &= (tan(x))'\end{aligned}$$

所以，$\frac{d}{dx}tan(x) = 1 + tan(x)^2$。

- $\lim\limits_{x \to \pi/2} tan(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to -\pi/2} tan(x) = -\infty$。

  由定理 15.7.5(c) 可知，$cos(\pi/2) = 0$，于是 $sin(x) = 1 - cos(x)^2 = 1$。因为，$cos(x), sin(x)$ 都是连续的，所以，

$$\lim_{x \to \pi/2} cos(x) = 0$$
$$\lim_{x \to \pi/2} sin(x) = 1$$

  于是，

$$\lim_{x \to \pi/2} tan(x) = +\infty$$

  注意：这里不能直接使用极限定理（定理 6.1.19）得到，而是利用函数在一点处收敛的定义（定义 9.3.6），具体证明略。

  类似地，

$$\lim_{x \to -\pi/2} tan(x) = -\infty$$

- $tan(x)$ 实际上是 $(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ 的双射。

  由之前的讨论可知，$\tan(x)$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上是严格单调递增的，于是，$tan(x)$ 是 $(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ 的双射。

- tan^{-1} 可微的，并且有 $\frac{d}{dx}tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$。

  由定理 10.4.2（反函数定理）可知，tan^{-1} 可微，并且对 $y = tan(x)$ 有

$$\begin{aligned}(tan^{-1})'(y) &= \frac{1}{tan'(x)} \\ &= \frac{1}{1 + tan(x)^2} \\ &= \frac{1}{1 + y^2}\end{aligned}$$

  所以，$\frac{d}{dx}tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$。

15.7.9

（1）

因为，$x \in (-1,1)$，所以，$|-x^2| < 1$。

所以，

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-(-x^2)} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\end{aligned}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 这个级数与标准幂级数形式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 不一致，但它任然是一个合法的幂级数，但需要做如下改变：

设 $m = 2n$，于是利用命题 7.4.3（级数的重排序）

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

其中，

$$c_m = \begin{cases}(-1)^{m/2} & \text{if } m \text{ is 偶数} \\ 0 & \text{if } m \text{ is 奇数}\end{cases}$$

（其实这个幂级数缺少奇次项，书中定义的 $sin(x), cos(x)$ 幂级数表示形式，也分别缺少奇次项和偶次项）。

利用定理 15.1.6(e) 可知，

$$\int_{[0,x]} \frac{1}{1+y^2} dy = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

令 $n = \frac{1}{2}m$，于是再次利用命题 7.4.3（级数的重排序）

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{x^{m+1}}{m+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

又因为，

$$\begin{aligned}\int_{[0,x]} \frac{1}{1+y^2}dy &= tan^{-1}(y)|_0^x \\ &= tan^{-1}(x) - tan^{-1}(0) \\ &= tan^{-1}(x) - 0 \\ &= tan^{-1}(x)\end{aligned}$$

综上可得，

$$tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

（2）

- 使用阿贝尔定理证明。（按照提示证明，但个人有一点问题：这个幂级数的收敛半径不是 1）。

  因为

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

  所以，有定理 15.3.1（阿贝尔定理）可得，

  $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} tan^{-1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &\Longrightarrow \\ tan^{-1}(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\end{aligned}$$

  接下来，现在需要证明: $tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$。

$$\begin{aligned}cos(\pi/2) &= cos(\pi/4 + \pi/4) \\ &= cos(\pi/4)cos(\pi/4) - sin(\pi/4)sin(\pi/4) \\ &= 0\end{aligned}$$

于是可得，

$$cos(\pi/4)cos(\pi/4) = sin(\pi/4)sin(\pi/4)$$

又因为，

$$cos(\pi/4)cos(\pi/4) + sin(\pi/4)sin(\pi/4) = 1$$

又因为 $cos(\pi/4) > 0, sin(\pi/4) > 0$，于是

$$cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

因为，$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$，且在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 中严格单调递减，所以，当且仅当 $x = \pi/4$ 时，$tan(x) = 1$。

综上可得，

$$tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

所以，

$$\pi = 4tan^{-1}(1) = 4 \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

（3）推导出 $4 - \frac{4}{3} < \pi < 4$。

- (a) $4 - \frac{4}{3} < \pi$。

  我们从每一个部分和都是正的来证明（要分两种情况讨论：部分和是由偶数个项组成的以及奇数个项组成的）。

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$
$$= 4 - \frac{4}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2n+1}$$

  $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2n+1}$ 的部分和序列为 $(S_N)_{N=2}^{\infty}$，其中 $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{(-4)^n}{2n+1}$。

  我们有，

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2n+1} = \lim_{N\to+\infty} S_N$$

于是，问题转变成对序列 $(S_N)_{N=2}^{\infty}$ 的讨论。

当偶数个项时，

$$\begin{aligned} S_N &= (\frac{4}{5} - \frac{4}{7}) + ... + (\frac{4}{2(N-1)+1} - \frac{4}{2N+1}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

（追求严谨性，这里也可以通过归纳证明）

当奇数个项时，S_{N-1} 是偶数个项，所以 $S_{N-1} > 0$，于是我们有

$$\begin{aligned} S_N &= S_{N-1} + \frac{4}{2N+1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

于是，$(S_N)_{N=2}^{\infty}$，对任意 N 都有

$$S_N > 0$$

于是，

$$\lim_{N\to+\infty} S_N \geq 0$$

- (b)$\pi < 4$。

  证明方法与 (a) 类似，证明略。

15.7.10

- (a)

  利用定理 14.5.8（威尔斯特拉斯 M 判别法）完成证明。

  令 $f_(n) = 4^{-n}cos(32^n\pi x)$ 是有界且连续的，又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_(n)||_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}$，由引理 7.3.3（几何级数）可知，$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}$ 收敛，于是利用定理 14.5.8（威尔斯特拉斯 M 判别法），$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}cos(32^n\pi x)$ 一致收敛于连续的函数 f。

- (b)

  直接利用书中的提示的小命题，不做证明了。

$$\left|f(\frac{j+1}{32^m}) - f(\frac{j}{32^m})\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} cos(32^n \pi \frac{j}{32^m})\right|$$
$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - 4^{-n} cos(32^n \pi \frac{j}{32^m})\right|$$

$n > m$ 时，$32^n\pi\frac{j+1}{32^m}$ 与 $32^n\pi\frac{j}{32^m}$ 都是 2π 的整数倍，所以，

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} 4^{-n} cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - 4^{-n} cos(32^n \pi \frac{j}{32^m})\right| = \left|\sum_{n=m}^{\infty} 4^{-n} \times 1 - 4^{-n} \times 1\right|$$
$$= 0$$

$n = m$ 时，

$$\left|\sum_{n=m}^{m} 4^{-n} cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - 4^{-n} cos(32^n \pi \frac{j}{32^m})\right| = \left|4^{-m} cos(32^m \pi \frac{j+1}{32^m}) - 4^{-m} cos(32^m \pi \frac{j}{32^m})\right|$$
$$= \left|4^{-m} cos(\pi(j+1)) - 4^{-m} cos(\pi j)\right|$$
$$= 2 \times 4^{-m}$$

$n < m$ 时，

$$\left|\sum_{n=1}^{m-1} 4^{-n} cos(32^n \pi \frac{j+1}{32^m}) - 4^{-n} cos(32^n \pi \frac{j}{32^m})\right| \le \sum_{n=1}^{m-1} 4^{-n} \frac{\pi}{32^{m-n}}$$
$$= \sum_{n=1}^{m-1} 4^{-n} 4^{n-m} \frac{\pi}{(8 \times 4)^{m-n} 4^{n-m}}$$
$$= \sum_{n=1}^{m-1} 4^{-m} \frac{\pi}{8^{m-n}}$$
$$= 4^{-m} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\pi}{(2 \times 4)^{m-n}}$$
$$< 4^{-m} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^{m-n}}$$
$$\le 4^{-m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$
$$= 4^{-m}$$

综上可得，

$$
\begin{aligned}
\left|f(\frac{j+1}{32^m})-f(\frac{j}{32^m})\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}4^{-n}cos(32^n\pi\frac{j+1}{32^m})-\sum_{n=1}^{\infty}4^{-n}cos(32^n\pi\frac{j}{32^m})\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty}4^{-n}cos(32^n\pi\frac{j+1}{32^m})-4^{-n}cos(32^n\pi\frac{j}{32^m})\right| \\
&\geq 2\times 4^{-m}-4^{-m} \\
&= 4^{-m}
\end{aligned}
$$

- (c)

  反证法，假设 f 是可微的，那么 f 是连续。

  设对任意 $x_0\in\mathbb{R}, f'(x_0)=L$，由牛顿逼近法（命题 10.1.7）可知，对 $\epsilon=1$，存在 $\delta>0$，使得只要 $|x-x_0|<\delta$，就有

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)| &\leq \epsilon|x-x_0| \\
|f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)| &\leq |x-x_0| \\
|f(x)-f(x_0)| &\leq |x-x_0|(|L|+1)
\end{aligned}
$$

  因为 $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{1}{32^m}=0$，所以存在 M，使得 $m\geq M$，就有

$$
\frac{1}{32^m}<\delta
$$

  又因为存在 j 使得 $j\leq 32^m x_0\leq j+1$，于是 $\frac{j}{32^m}\leq x_0\leq\frac{j+1}{32^m}$。

  令 $x_1=\frac{j}{32^m}, x_2=\frac{j+1}{32^m}$，于是

$$
\begin{aligned}
|f(x_1)-f(x_0)| &\leq (x_0-\frac{j}{32^m})(|L|+1) \\
|f(x_2)-f(x_0)| &\leq (\frac{j+1}{32^m}-x_0)(|L|+1) \\
&\Longrightarrow \\
|f(x_1)-f(x_2)| &\leq \frac{1}{32^m}(|L|+1)
\end{aligned}
$$

  由于 (b) 可知，

$$
|f(x_1)-f(x_2)|\geq 4^{-m}
$$

题设中 m 是任意的，但当 m 足够大时（还要满足 $m \geq M$），以下等式成立：

$$
\begin{aligned}
&8^m \geq |L| + 1 \\
&\Longrightarrow \\
&4^{-m} \geq \frac{1}{32^m}(|L| + 1)
\end{aligned}
$$

于是出现矛盾。

- (d)

  令 $f_n = 4^{-n}cos(32^n \pi x)$,$f_n$ 是一个可微函数,他的导函数 $f_n' = 4^{-n}(-32^n\pi)sin(32^n\pi x)$ 是连续的，其中，

  $$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}32^n\pi$$

  不收敛，无法满足 14.7.3 的前置条件。