5.4 习题

2024 年 5 月 25 日

5.4.1

1. 实数的三歧性

证明：

按照以前的思路，先证明（a）（b）（c）至少有一个为真，其次证明（a）（b）（c）最多有一个为真。

按照实数的构造方式，对任意实数 x，该实数 x 要么是零，要么不是零，不可能同时成立。

这是因为任意实数都是通过柯西序列构造的，两个柯西序列要么等价的，要么不是，我们固定一个序列是 $(0)_{n=1}^{\infty}$，那么其他的柯西序列要么与其等价，即也等于实数 0，要么不等价，即不等于实数 0。

如果 $x \neq 0$ 那么由引理 5.3.14 可知 x 一定存在某个远离 0 的柯西序列，由此可知 x 可能是正的或负的，也可能都是；

至此（a）（b）（c）至少有一个为真成立。

现在证明（a）（b）（c）最多有一个为真。

（a）（b）（c）分别对应：

$$x = LIM_{n\to\infty} 0 \tag{1}$$

$$x = LIM_{n\to\infty} a_n \qquad \text{正远离 } 0 \tag{2}$$

$$x = LIM_{n\to\infty} b_n \qquad \text{负远离 } 0 \tag{3}$$

如果（a）（b）同时成立，此时，存在 $c > 0$ 使得 $a_n \geq c$，那么对任意 $n \geq 1$ 均有

$$|a_n - 0| = |a_n| > c$$

所以两个系列不能对任意 $c > \epsilon > 0$ 都是最终 $\epsilon-$ 接近的，所以（a）（b）不能同时成立。

同理（a）（c）不能同时成立。

如果（b）（c）同时成立，此时，此时，存在 $c_0 > 0$ 使得 $a_n \geq c_0$，存在 $c_1 \geq 0$ 使得 $b_n \leq -c_1$，那么对任意 $n \geq 1$ 均有

$$\begin{aligned} |a_n| - |b_n| &\leq |a_n - b_n| \\ |a_n| &\leq |a_n - b_n| + |b_n| \\ c_0 &\leq |a_n - b_n| + |b_n| \\ c_0 - |a_n - b_n| &\leq |b_n| \\ c_0 - |a_n - b_n| &\leq -c_1 \\ c_0 + c_1 &\leq |a_n - b_n| \end{aligned}$$

所以两个系列不能对任意 $c_0+c_1 > \epsilon > 0$ 都是最终 $\epsilon-$ 接近的，所以（b）（c）不能同时成立。

至此（a）（b）（c）最多有一个为真。

2. 实数 x 是负的，当且仅当 $-x$ 是正的。

证明：

x 是负的，所以它可以写成某个负远离 0 的序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 的形式极限 $x = LIM_{n\to\infty} a_n$。由实数的负运算可知 $-LIM_{n\to\infty} a_n = LIM_{n\to\infty} - a_n$，由序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是负远离 0 可知，存在有理数 $c > 0$ 使得 $a_n \leq -c$ 对所有的 $n \geq 1$ 均成立，所以

$$\begin{aligned} a_n &\leq -c \\ -a_n &\geq c && \text{习题 4.2.6} \end{aligned}$$

于是序列 $-(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是正远离 0 的，所以其形式极限 $-x$ 是正的。

3. 如果 x 和 y 都是正的，那么 $x + y$ 和 xy 都是正的。

证明：

不妨设 $x = LIM_{n\to\infty} a_n, y = LIM_{n\to\infty} b_n$。因为 x, y 是正的，所以它们都是正远离 0 的，于是存在有理数 $c_0, c_1 > 0$ 使得对任意 $n \geq 1$ 都有

$$|a_n| \geq c_0 \tag{4}$$

$$|b_n| \geq c_1 \tag{5}$$

又

$$
\begin{aligned}
x+y &= LIM_{n\to\infty}a_n + LIM_{n\to\infty}b_n \\
&= LIM_{n\to\infty}a_n + b_n
\end{aligned}
$$

因为

$$|a_n+b_n| = |a_n| + |b_n| \geq c_0 + c_1 > 0$$

所以 $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ 序列正远离 0，所以其极限形式 $x+y = LIM_{n\to\infty}a_n + b_n$ 是正的。

又

$$xy = LIM_{n\to\infty}a_nb_n$$

因为

$$|a_nb_n| = |a_n||b_n| \geq c_0c_1 > 0$$

所以 $(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 序列正远离 0，所以其极限形式 $xy = LIM_{n\to\infty}a_nb_n$ 是正的。

5.4.2

证明：

元证明：命题 4.2.4 所有的代数定律不仅对实数也是成立的，且实数的三歧性和序的定义都是与有理数一致，于是有理数通过以上性质得到的命题 4.2.9 对于实数也应该是成立的。

说明. 元证明，就是对证明本身的说明。逻辑学中有元对象与目标对象的概念，目标对象是直接讨论的对象，元对象是对目标对象进行讨论或分析的更高层次的对象。这里的元证明与元对象类似，目标对象是直接讨论的对象即：实数。