

10.1 习题

张志聪

2024 年 12 月 12 日

10.1.1

(1) f 在 x_0 处可微分, 由定义 10.1.1 可知, 极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

是存在的, 不妨设极限是 L 。由定义 9.3.6 可知, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| \leq \epsilon$$

对任意 $x \in ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \setminus \{x_0\})$ 均成立。

任意 $y \in ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap Y \setminus \{x_0\})$, 因为 $Y \subset X$, 所以 $y \in ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \setminus \{x_0\})$, 所以

$$\left| \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} - L \right| \leq \epsilon$$

由定义 9.3.6 可知,

$$\lim_{y \rightarrow x_0; y \in Y \setminus \{x_0\}} \frac{f|_Y(y) - f|_Y(x_0)}{y - x_0}$$

的极限存在, 所以 $f|_Y$ 在 x_0 处可微。

(2) 与 10.1.2 不矛盾的原因:

点 3 不是 $[1, 2] \cup \{3\}$ 的极限点, 不满足习题 10.1.1 习题的前置条件。

10.1.2

- (a) \implies (b)

f 在 X 中的 x_0 处是可微的, 且导数为 L , 由定义 10.1.1 可知, 极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

于是, 由定义 9.3.6 可知, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| \leq \epsilon$$

对 $|x - x_0| \leq \delta, x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。

对上式进行算术运算,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| &\leq \epsilon \\ \left| \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{x - x_0} \right| &\leq \epsilon \\ |f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)| &\leq \epsilon |x - x_0| \\ |f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| &\leq \epsilon |x - x_0| \end{aligned}$$

对 $|x - x_0| \leq \delta, x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。当 $x = x_0$ 时, 公式也成立。

- (b) \implies (a)

直接进行算术运算, 略

10.1.3

- 方法 1(利用极限定律, 命题 9.3.14)

不妨设 x_0 处的导数为 L , 于是

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

即函数 f 在 x_0 处沿着 $X \setminus \{x_0\}$ 收敛于 L 。

我们易证

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} x - x_0 = 0$$

即函数 g 在 x_0 处沿着 $X \setminus \{x_0\}$ 收敛于 0。

于是

$$\begin{aligned}fg &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\&= f(x) - f(x_0)\end{aligned}$$

按照极限定律（命题 9.3.14）可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} fg &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} f(x) - f(x_0) \\&= L \times 0 \\&= 0\end{aligned}$$

于是对任意 $\epsilon > 0$ ，都存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。特别地 $x = x_0$ 时 $f(x) - f(x_0) = 0 < \delta$ 也成立。

所以由命题 9.4.7(d) 可知， f 在 x_0 处连续。

• 方法 2（利用命题 10.1.7）

f 在 x_0 处可微，由命题 10.1.7(b) 可知，对任意的 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ ，当 $x \in X$ 且 $|x - x_0| \leq \delta$ 时，那么就有

$$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \leq \epsilon|x - x_0|$$

进过算术运算，

$$\begin{aligned}|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| &\leq \epsilon|x - x_0| \\|f(x) - f(x_0)| &\leq \epsilon|x - x_0| + |L||x - x_0| \\|f(x) - f(x_0)| &\leq (\epsilon + |L|)|x - x_0|\end{aligned}$$

取 $\delta = \frac{\epsilon}{\epsilon + |L|}$ ，此时 $|x - x_0| \leq \frac{\epsilon}{\epsilon + |L|} = \delta$ ，使得

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

由命题 9.4.7(d) 可知， f 在 x_0 处连续。

10.1.4

- (a)

对任意 $\epsilon > 0$, 对任意 $\delta > 0$, 都存在

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{c - c}{x - x_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。于是由命题 9.4.7(c) 可得

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

即 $f'(x_0) = 0$

- (b)

对任意 $\epsilon > 0$, 对任意 $\delta > 0$, 都存在

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{x - x_0}{x - x_0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。于是由命题 9.4.7(c) 可得

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

即 $f'(x_0) = 1$

- (c)

设 $f'(x_0) = L, g'(x_0) = M$

f 在 x_0 处可微, 由定义 10.1.1 可知, 极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

由定义 9.3.6 可知, 对任意 $\epsilon > 0, \frac{1}{2}\epsilon > 0$, 存在 $\delta_f > 0$, 使得

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta_f$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。

同理可得, 存在 $\delta_g > 0$, 使得

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - M \right| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta_g$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。

令 $\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$, 于是,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} - (L + M) \right| \\ &= \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - M \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| + \left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - M \right| \\ &= \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。所以 $(f + g)'(x_0) = L + M$ 。

于是 $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) = L + M$ 。

• (d)

设 $f'(x_0) = L, g'(x_0) = M$

f 在 x_0 处可微, 由定义 10.1.1 可知, 极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

同理可得,

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = M$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) + (f(x) - f(x_0))g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

又 f 在 x_0 处可微, 由命题 10.1.0 可知 f 在 x_0 处连续

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X} f(x) = f(x_0)$$

于是通过命题 9.4.7(c) 可知 ($x = x_0$ 是特例),

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} f(x) = f(x_0)$$

于是利用极限定律 (命题 9.3.14) 可得

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= f(x_0)M + g(x_0)L
\end{aligned}$$

所以 $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ 。

• (e)

设函数 $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $h(x) = c$, 于是 $(cf)(x) = h(x)f(x)$, 函数相等一定有相同的导数 (注 10.1.4), 于是利用 (d) 可得

$$\begin{aligned}
& (cf)'(x_0) \\
&= (hf)'(x_0) \\
&= h'(x_0)f(x_0) + h(x_0)f'(x_0) \\
&= 0 \times f(x_0) + c \times f'(x_0) \\
&= cf'(x_0)
\end{aligned}$$

• (f)

设函数 $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $h(x) = -g(x)$, 于是 $(f - g)(x) = (f + h)(x)$, 函数相等一定有相同的导数 (注 10.1.4), 于是利用 (d) 可得

$$\begin{aligned}(f - g)'(x_0) &= (f + h)'(x_0) \\ &= f'(x_0) + h'(x_0)\end{aligned}$$

由 (e) 可知, $h'(x_0) = (-g)'(x_0) = -g'(x_0)$, 这里把 (e) 中的 c 看做 -1 。

综上可得

$$\begin{aligned}(f - g)'(x_0) &= f'(x_0) - g'(x_0)\end{aligned}$$

• (g)

$$\begin{aligned}& \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{1}{g(x)} \frac{1}{g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}\end{aligned}$$

由于 g 在 x_0 处可微, 所以

$$\begin{aligned}& \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)\end{aligned}$$

由于 g 在 x_0 处可微, 由命题 10.1.0 可知 g 在 x_0 处连续, 且 $g(x)$ 在 X 上不为零, 由命题 9.3.14 (函数的极限定理) 可得

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0)}$$

再次利用命题 9.3.14 (函数的极限定理) 可得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{1}{g(x)} \frac{1}{g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x_0)} \frac{1}{g(x_0)} (-g'(x_0)) \\ &= -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \end{aligned}$$

• (h)

因为 $(\frac{f}{g})(x) = (f\frac{1}{g})(x)$, 于是利用 (d)(g) 可知,

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\ &= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\ &= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right) \\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \end{aligned}$$