14.3 习题

张志聪

2025 年 3 月 16 日

14.3.1

反证法，假设 f 不在 x_0 处连续。那么，存在 $\epsilon_0 > 0$，任意 $x \in X$ 都有 $d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon_0$。

因为序列一致收敛于 f，所以存在 $N > 0$ 使得只要 $n \geq N, x \in X$ 就有 $d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < \frac{1}{4}\epsilon_0$。

有每一个 n，函数 $f^{(n)}$ 都在 x_0 处连续，那么对 $n \geq N$, 都存在 $\delta > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有 $d_Y(f^{(n)}(x), f^{(n)}(x_0)) < \frac{1}{4}\epsilon_0$。

综上，$n \geq N$ 和 $x \in X$ 且 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有

$$\begin{aligned}
d_Y(f(x), f(x_0)) &\leq d_Y(f(x), f^{(n)}(x)) + d_Y(f^{(n)}(x), f(x_0)) \\
&\leq d_Y(f(x), f^{(n)}(x)) + d_Y(f^{(n)}(x), f^{(n)}(x_0)) + d_Y(f^{(n)}(x_0), f(x_0)) \\
&\leq \frac{1}{4}\epsilon_0 + \frac{1}{4}\epsilon_0 + \frac{1}{4}\epsilon_0 = \frac{3}{4}\epsilon_0 \\
&< \epsilon_0
\end{aligned}$$

（注意以上没有考虑 $n < N$，因为我们只是想说明 ϵ_0 是 $d_Y(f(x), f(x_0))$ 的上界，是否有更小的上界或更大的上界，这里我们不用关心。）

存在矛盾。

14.3.2

（1）先证明 $\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x)$ 的存在性。

利用 Y 的完备性进行证明。设 $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ 是 E 上收敛于 x_0 的序列，我们要证明 $(f(x_m))_{m=1}^{\infty}$ 是 Y 上的柯西序列即可完成证明。

对任意 $\epsilon>0$，由对每一个 n，极限 $\lim_{x\to x_0;x\in E} f^{(n)}(x)$ 都存在，不妨设收敛于 L_n。那么，存在 $\delta>0$，使得只要 $d_X(x,x_0)<\delta$，就有 $d_Y(f^{(n)}(x),L_n)<\frac{1}{4}\epsilon$。

因为 $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ 是 E 上收敛于 x_0 的序列，所以存在 $M>1$，使得对所有的 $p,q\geq M$ 都有 $d_X(x_p,x_q)<\delta$。

于是，对所有的 $p,q\geq M$ 我们有

$$d_Y(f^{(n)}(x_p),f^{(n)}(x_q))\leq d_Y(f^{(n)}(x_p),L_n)+d_Y(f^{(n)}(x_q),L_n)<\frac{1}{8}\epsilon+\frac{1}{8}\epsilon=\frac{1}{4}\epsilon$$

因为 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 f，所以存在 $N>0$ 使得对所有的 $n\geq N$ 和 $x\in E$ 都有 $d_Y(f^{(n)}(x),f(x))<\frac{1}{4}\epsilon$，那么对每一个 n 都有

综上，对所有的 $p,q\geq M,n\geq N$，此时 $d_X(x_p,x_q)<\delta$，于是我们有

$$\begin{aligned}d_Y(f(x_p),f(x_q))&\leq d_Y(f(x_p),f^{(n)}(x_p))+d_Y(f^{(n)}(x_p),f(x_q))\\&\leq d_Y(f(x_p),f^{(n)}(x_p))+d_Y(f^{(n)}(x_p),f^{(n)}(x_q))+d_Y(f^{(n)}(x_q),f(x_p))\\&\leq\frac{1}{4}\epsilon+\frac{1}{4}\epsilon+\frac{1}{4}\epsilon=\frac{3}{4}\epsilon\\&<\epsilon\end{aligned}$$

（注意以上没有考虑 $n<N$，因为我们只是想说明 ϵ 是 $d_Y(f(x_p),f(x_q))$ 的上界，是否有更小的上界或更大的上界，这里我们不用关心。）

于是可得，$(f(x_m))_{m=1}^{\infty}$ 是 Y 上的柯西序列。

（2）证明 $(\lim_{x\to x_0;x\in E} f^{(n)}(x))_{n=1}^{\infty}$ 的极限等于 $\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x)$。

不妨设 $\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x)=L$，$\lim_{x\to x_0;x\in E} f^{(n)}(x)=L_n$，于是，我们需要证明：$\lim_{n\to\infty} L_n=L$。

对任意 $\epsilon>0$，因为 $\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x)=L$，那么，存在 $\delta>0$，使得只要 $x\in E$ 且 $d_X(x,x_0)<\delta$，就有 $d_Y(f(x),L)<\frac{1}{3}\epsilon$。

因为 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 f，所以存在 $N>0$ 使得对所有的 $n\geq N$ 和 $x\in E$ 都有 $d_Y(f^{(n)}(x),f(x))<\frac{1}{3}\epsilon$。

又因为对每一个 n，$\lim_{x\to x_0;x\in E} f^{(n)}(x)=L_n$，所以存在 $\delta_n>0$ 使得只要 $x\in E$ 且 $d_X(x,x_0)<\delta_n$，就有 $d_Y(f^{(n)}(x),L_n)<\frac{1}{3}\epsilon$。

综上，存在 $N>0$ 使得对每一个 $n\geq N$ 和 $d_X(x,x_0)<min(\delta,\delta_n)$，我

们有

$$\begin{aligned}d_Y(L_n, L) &\leq d_Y(L_n, f(x)) + d_Y(f(x), L)\\ &\leq d_Y(f^{(n)}(x), L_n) + d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) + d_Y(f(x), L)\\ &< \epsilon\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可知，$\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L$。

注意：以上证明除了要求 $n \geq N$，还要求 $d_X(x, x_0) < min(\delta, \delta_n)$，可能会感到疑惑，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$ 的收敛性不仅和 n 有关，还和 x 的值有关，其实这里的 x 是可以任取的，其不会影响 ϵ 是 $d_Y(L_n, L)$ 的上界。

14.3.3

因为在例 1.2.8 中，函数 $f = x^n$ 是逐点收敛的，而不是一致收敛的。

14.3.4

由推论 14.3.2 可知，f 在 X 上连续。对任意 $\epsilon > 0, y \in X$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $d_X(x, y) < \delta$，就有

$$d_Y(f(x), f(y)) < \frac{1}{2}\epsilon$$

因为 $f^{(n)}$ 一致收敛于 f，那么，存在 $N > 0$，使得只要 $n \geq N$ 和 $y \in X$，就有

$$d_Y(f^{(n)}(y), f(y)) < \frac{1}{2}\epsilon$$

因为 $x^{(n)}$ 是 X 中收敛于 x 的点列。所以存在 $N' > 0$ 使得只要 $n \geq N'$ 就有

$$d_X(x^{(n)}, x) < \delta$$

综上，$n > max(N, N')$，就有

$$\begin{gathered}d_Y(f^n(x^{(n)}), f(x)) \leq d_Y(f^{(n)}(y), f(y)) + d_Y(f(x), f(y))\\ < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon\end{gathered}$$

于是可得

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x^{(n)}) = f(x)$$

14.3.5

例 14.2.4 中的例子就能说明此事。

$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$ 收敛于 1。我们有

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq f(1) = 1$$

14.3.6

序列 $f^{(n)}$ 一致收敛于 f。那么，对 $\epsilon = 1 > 0$，存在 $N > 0$ 使得对所有的 $n \geq N$ 和 $x \in X$ 都有

$$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < \epsilon$$

因为对每一个 n,函数 $f^{(n)}$ 在 X 上都是有界的,所以对每一个 n,$x \in X$，都有

$$f^{(n)}(x) \in B(Y, d_Y)(y_n, R_n)$$

即

$$d_Y(f^{(n)}(x), y_n) < R_n$$

其中 $y_n \in Y, R_n \in \mathbb{R}$。

综上，对 $n > N$ 使得对所有的 $n \geq N$ 和 $x \in X$ 都有

$$d_Y(f(x), y_n) \leq d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) + d_Y(f^{(n)}(x), y_n)$$

特别地 $n = N$

$$d_Y(f(x), y_N) \leq d_Y(f^{(N)}(x), f(x)) + d_Y(f^{(N)}(x), y_N) < R_N + \epsilon$$

定义 $r = R_N + \epsilon$，对所有的 $x \in X$ 都有 $f(x) \in B(Y, d_Y)(y_N, r)$，命题得证。

14.3.7

习题 14.2.2(c) 就能说明此时。在 $(-1, 1)$ 上，$f(x) = x^n$ 是有界的，$g(x) = x/(1-x)$ 在 $(-1, 1)$ 上却是无界的，因为 $\lim\limits_{x\to-1} x/(1-x) = \infty$。

14.3.8

因为 $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ 都是一致有界的，由命题 14.3.6 可知，函数 f, g 都是有界的，所以存在 $M' > 0$ 使得对所有的 $x \in X$ 都有 $f(x) < M', g(x) < M'$。

对任意 $\epsilon > 0$，因为 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 f，那么，对 $\frac{\epsilon}{2M'} > 0$ 存在 $N_1 > 0$ 使得只要 $n > N_1, x \in X$，就有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2M'}$$

类似地，对 $\frac{\epsilon}{2M} > 0$ 存在 $N_2 > 0$ 使得只要 $n > N_2, x \in X$，就有

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2M}$$

令 $N = max(N_1, N_2)$，使得只要 $n > N, x \in X$，就有

$$\begin{aligned}
|f_n g_n(x) - fg(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\
&= |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \\
&\leq |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x)| + |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \\
&= |f_n(x)(g_n(x) - g(x))| + |g(x)(f_n(x) - f(x))| \\
&< M\frac{\epsilon}{2M} + M'\frac{\epsilon}{2M'} = \epsilon
\end{aligned}$$

命题得证。