

7.1 习题

2024 年 8 月 3 日

7.1.1

【a】

由定义 7.1.1 可知,

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^n a_i \\ &= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^p a_i \\ &= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^p a_i \\ &= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=n+1}^p a_i \\ &= \sum_{i=m}^p a_i\end{aligned}$$

【b】【c】【d】的证明与**【a】**类似，证明略
【e】

归纳法证明。

归纳基始 $m = n$ ，此时，

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=m}^n a_i \right| &= |a_m| \\ \sum_{i=m}^n |a_i| &= |a_m| \end{aligned}$$

满足 $\left| \sum_{i=m}^n a_i \right| \leq \sum_{i=m}^n |a_i|$

归纳假设 $m < n = j - 1$ 时，命题成立。

$n = j + 1$ 时，由 (a) 可知，

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=m}^j a_i \right| &= \left| \sum_{i=m}^{j-1} a_i + a_j \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=m}^{j-1} a_i \right| + |a_j| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^j |a_i| &= \sum_{i=m}^{j-1} |a_i| + |a_j| \\ &\geq \left| \sum_{i=m}^{j-1} a_i \right| + |a_j| \quad \text{【归纳假设保证的】} \end{aligned}$$

于是 $\left| \sum_{i=m}^j a_i \right| \geq \left| \sum_{i=m}^{j-1} a_i \right| + |a_j| \geq \sum_{i=m}^j |a_i|$
 归纳完毕。

【f】与**【e】**类似，可通过归纳法证明。