4.3 习题

2024 年 5 月 3 日

说明. 本节的证明过程中，用到了一些命题，在书中没有提到，这里提前列出，并证明它。

A. 正有理数 $\geq$ 零 $\geq$ 负有理数

证明：

不妨设 x, y 是任意有理数，并且 x 是正有理数，y 是负有理数，所以存在 a, b, c, d 正整数，使得 $x = a/b, y = (-c)/d$，现在只需证明 $x \geq 0 \geq y$。

$$\begin{aligned} x - 0 &= a/b - 0 \\ &= a/b - 0/1 \\ &= a1 - b * 0/b \\ &= a/b \\ &= x \end{aligned}$$

由于 x 是正的，所以 $x \geq 0$。

$$\begin{aligned} 0 - y &= 0 - (-c)/d \\ &= 0 - (-c)/d \\ &= c/d \end{aligned}$$

有 c/d 是正有理数，所以 $0 \geq y$。

综上，命题成立。

A 推论. 正有理数 > 零 > 负有理数

证明：由于正有理数不等于零，且由命题 A，可知正整数大于零；由于负有理数不等于零，且由命题 A，可知负整数小于零。

B. 两个正有理数相加，是正有理数

证明：不妨设 x, y 是任意正有理数，所以存在 a, b, c, d 正整数，使得 $x = a/b, y = c/d$。

$$\begin{aligned} x + y &= a/b + c/d \\ &= (ad + bc)/bd \end{aligned}$$

由于分子是正整数（命题 2.2.8），分母是正整数（命题 2.3.3），所以 $x + y$ 是正有理数。

4.3.1

（a）（绝对值的非退化性）我们有 $|x| \geq 0$。另外，$|x| = 0$ 当且仅当 x 为零。

证明：

x 是有理数，由引理 4.2.7（有理数的三歧性）可知，x 有三种情况：

（1）x 是正有理数，此时，$|x| = x$，而正有理数 $|x| - 0 = x - 0 = x$，由定义 4.2.8（有理数的排序）可知 $|x| > 0$；

（2）x 是负有理数，此时，$|x| = -x$，$|x| - 0 = -x - 0 = -x$，而 $-x$ 是正有理数，由定义 4.2.8（有理数的排序）可知 $|x| > 0$；

（3）x 等于 0，此时 $|x| = 0$，由定义 4.2.8（有理数的排序）可知 $|x| \geq 0$；

综上，$|x| \geq 0$。另外，$|x| = 0$ 当且仅当 x 为零。

（b）（绝对值的三角不等式）我们有 $|x + y| \leq |x| + |y|$。

证明：

可以通过有理数的三歧性证明，这里情况较多，只证明 x 是正有理数，y 是负有理数的情况【偷个懒，哈哈哈】。

设 x 是正有理数，y 是负有理数，不妨设 $x = a/b, y = (-c)/d$，其中

a, b, c, d 都是正整数。

$$\begin{aligned}|x|+|y| &= a/b + c/d \\ &= (ad+bc)/bd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+y &= a/b + (-c)/d \\ &= (ad-bc)/bd\end{aligned}$$

若 $x+y$ 是负有理数，则:

$$\begin{aligned}|x+y| &= -(x+y) \\ &= [-(ad-bc)]/bd \\ &= (bc-ad)/bd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x|+|y|-(|x+y|) &= (ad+bc)/bd - (bc-ad)/bd \\ &= (ad+bc)/bd + (ad-bc)/bd \\ &= [(ad+bc)bd + (ad-bc)bd]/bdbd \\ &= (adbc + adbc)/bdbd\end{aligned}$$

由于分子是正整数（命题 2.2.8），分母是正整数（命题 2.3.3），可知 $(adbc+adbc)/bdbd$ 是正的，所以 $|x|+|y| > |x+y|$。

(c) 不等式 $-y \le x \le y$ 成立，当且仅当 $y \ge |x|$。特别地，$-|x| \le x \le |x|$。

证明：

充分性：假设前提 $-y \le x \le y$ 成立，该前提隐含 y 不是负有理数（见说明）。由有理数的三歧性，x 的取值有 3 种情况：（1）x 等于 0，此时 $|x| = 0$，而 y 是正有理数，所以 $y \ge 0$。

（2）x 等于正有理数，此时 $|x| = x$，由前提可知 $y \ge x$。

（3）x 等于负有理数，此时 $|x| = -x$，不妨设 a, b, c, d 是正有理数，

$x=(-a)/b, y=c/d$，由于 $-y \le x$，所有 $-y-x$ 是负有理数，即：

$$\begin{aligned}
-y-x &= (-c)/d-(-a)/b \\
&= (-c)b+a/b \\
&= a/b-c/d \\
&= (ad-bc)/bd
\end{aligned}$$

由上且 $-y-x$ 是负有理数，可知 $(ad-bc)=-(bc-ad)$ 是负整数，所以 $bc-ad$ 是正整数。

$$\begin{aligned}
y-(-x) &= c/d-\{-[(-a)/b]\} \\
&= c/d-a/b \\
&= (bc-ad)/bd
\end{aligned}$$

由 $bc-ad$ 是正整数和 bd 是正整数，可知 $y-(-x)$ 是正有理数，所以 $y \ge -x$。

综合（1）（2）（3）可知 $y \ge |x|$。

必要性：假设 $y \ge |x|$，由（a）可知 $|x| \ge 0$，又序是可传递的（命题 4.2.9），所以 $y \ge 0$。由有理数的三歧性，x 的取值有 3 种情况：（1）x 等于 0，此时 $|x|=0$，由前提 $y \ge |x|$ 可知 $y \ge 0$，由此可知 y 是零或正有理数，所以 $-y$ 是零或负有理数，进而 $-y \le 0$。

（2）x 是正有理数，此时 $|x|=x$，由前提 $y \ge |x|$ 可知 $y \ge x$，此时 y 是正有理数，$x-(-y)=x+y$，两个正有理数相加是正有理数，所以 $-y \le x$。

（3）x 是负有理数，此时 $|x|=-x$，不妨设 $x=(-a)/b, y=c/d$，其中 a,b,c,d 是正整数。由前提 $y \ge |x|$，可知 $y \ge -x$，所以：

$$\begin{aligned}
y-(-x) &= c/d-\{-[(-a)/b]\} \\
&= c/d-a/b \\
&= (bc-ad)/bd
\end{aligned}$$

由于 $y \ge -x$，所以 $(bc-ad)/bd$ 是正的。

$$
\begin{aligned}
y - x &= c/d - (-a)/b \\
&= c/d + a/b \\
&= (ad + bc)/bd
\end{aligned}
$$

由于 a, b, c, d 都是正整数，由此可知 $(ad + bc)/bd$ 是正的，所以 $y > x$。

$$
\begin{aligned}
x - (-y) &= x + y \\
&= (-a)/b + c/d \\
&= (bc - ad)/bd
\end{aligned}
$$

由于 $(bc - ad)/bd$ 是正的，所以 $x \geq -y$。

综上，（1）（2）（3）可知 $-y \leq x \leq y$。

特别地，把 y 替换为 $|x|$，并且 $|x| \geq x$，由必要性可知 $-|x| \leq x \leq |x|$。

说明. 因为 y 是负有理数，存在正整数 a, b 使得 $y = (-a)/b$，现在证明 $-y > y$。

证明：

由

$$
\begin{aligned}
(-y) - y &= a/b - [(-a)/b] \\
&= a/b + a/b \\
&= (ab + ab)/bb
\end{aligned}
$$

由于分子是正整数（命题 2.2.8），分母是正整数（命题 2.3.3），可知 $(ab + ab)/bb$ 是正的，所以 $-y > y$。

（d）（绝对值的可乘性）$|xy| = |x||y|$。**特别地，**$|-x| = |x|$

证明：

由有理数的三歧性，证明过程可以按三种情况说明：

（1）x,y 有一个是 0 或都是 0，此时，$|xy|=0,|x||y|=0$，所以 $|xy|=|x||y|$。

（2）x,y 同号。如果 x,y 都是正有理数，存在正整数 a,b,c,d 使得 $x=a/b,y=c/d$，此时：

$$\begin{aligned}|xy| &= |(a/b)*(c/d)| \\ &= |(ac)/(bd)| \\ &= ac/bd\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}|x||y| &= |a/b||c/d| \\ &= (a/b)*(c/d) \\ &= ac/bd\end{aligned}$$

所以 $|xy|=|x||y|$

如果 x,y 都是负有理数，证明类似。

（3）x,y 是异号。如果 x 是正有理数，y 是负有理数，存在正整数 a,b,c,d 使得 $x=a/b,y=(-c)/d$，

$$\begin{aligned}|xy| &= |(a/b)*[(-c)/d]| \\ &= |(-ac)/(bd)| \\ &= ad/bd\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}|x||y| &= |a/b||(-c)/d| \\ &= (a/b)*(c/d) \\ &= ac/bd\end{aligned}$$

所以 $|xy|=|x||y|$。如果 x 是负整数，y 是正有理数，证明过程类似。

综上，（1）（2）（3）可知 $|xy|=|x||y|$。

特别地，$-x=(-1)x$，所以

$$\begin{aligned}|-x| &= |(-1)||x| \\ &= 1|x| \\ &= |x| && \text{命题 } 4.2.4\end{aligned}$$

。

（e）（距离的非退化性）$d(x,y)\geq 0$。另外，$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$。

证明：

$d(x,y)=|x-y|$，由于 $x-y$ 结果是有理数，由（a）可知 $|x-y|\geq 0$，并且 $|x-y|=0$ 当且仅当 $x-y$ 等于零当且仅当 $x=y$

（f）（距离的对称性）$\mathbf{d(x,y)=d(y,x)}$。

证明：

不妨设 $z=x-y$，由于 $d(x,y)=|z|,d(y,x)=|-z|$，由（d）可知 $|-z|=|z|$，所以 $d(x,y)=d(y,x)$

（g）（距离的三角不等式）$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$。

证明：

$d(x,z)=|x-z|,d(x,y)=|x-y|,d(y,z)=|y-z|$，由于 $x-z=(x-y)+(y-z)$，由命题（b）可知 $|x-z|\leq|x-y|+|y-z|$，所以 $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$。

4.3.2

（a）如果 $x=y$，那么对任意的 $\varepsilon>0$，x 都是 ε- 接近于 y 的。反过来，如果对于任意的，x 都是 ε- 接近于 y 的，那么 $x=y$。