11.6 习题

张志聪

2024 年 12 月 29 日

11.6.1

证明框架参考了命题 11.5.3 的证明。

如果 I 是一个单点集或者空集，那么结论是平凡的。如果 I 是一个闭区间，那么根据命题 11.6.1 可以得到结论。于是我们假设 I 是形如 $(a,b],(a,b)$ 或 $[a,b)$ 的区间，其中 $a<b$。

设 M 是 f 的界，所以对所有的 $x\in I$ 均有 $-M\le f(x)\le M$。现在设 $0<\epsilon<(b-a)/2$ 是一个很小的数。当 f 被限制在区间 $[a+\epsilon,b-\epsilon]$ 上时，它就是单调有界的，从而再次利用 11.6.1 可知，它是黎曼可积的。特别地，我们能够找到一个分段常数函数 $h:[a+\epsilon,b-\epsilon]$ 上从上方控制 f，并且有

$$\int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} h \le \int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} f+\epsilon$$

定义 $\widetilde{h}:I\to\mathbb{R}$ 为

$$\widetilde{h}(x)=\begin{cases} h(x), x\in[a+\epsilon,b-\epsilon] \\ M, x\in I\setminus[a+\epsilon,b-\epsilon]\end{cases}$$

$\widetilde{h}$ 显然是 I 上从上方控制 f 的分段常数函数。根据定理 11.2.16 可知，

$$\int_I \widetilde{h}=\epsilon M+\int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} h+\epsilon M\le\int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} f+(2M+1)\epsilon$$

特别地

$$\overline{\int}_I f\le\int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} f+(2M+1)\epsilon$$

类似地，有

$$\underline{\int}_I f \geq \int_{[a+\epsilon,b-\epsilon]} f - (2M+1)\epsilon$$

从而

$$\overline{\int}_I f - \underline{\int}_I f \leq (4M+2)\epsilon$$

综上由 ϵ 的任意性且 $\overline{\int}_I f - \underline{\int}_I f$ 与 ϵ 无关可得，f 是黎曼可积的。