16.3 习题

张志聪

2025 年 4 月 28 日

16.3.1

设两个三角多项式分别为

$$f = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$$

$$g = \sum_{n=-M}^{N} d_n e_n$$

其中，整数 $N, M \geq 0$，$(c_n)_{n=-N}^{N}$ 和 $(d_n)_{n=-M}^{M}$ 都是复数序列。

- (a) 证明 $f + g$ 是三角多项式。

  如果 $N = M$，那么

  $$f + g = \sum_{n=-N}^{N} (c_n + d_n) e_n$$

  满足定义 16.3.2 中关于三角多项式的定义，命题成立。

  如果 $N > M$，那么

  $$f + g = \sum_{n=-N}^{-M-1} c_n e_n + \sum_{n=-M}^{M} (c_n + d_n) e_n + \sum_{n=M+1}^{N} d_n e_n$$

  于是，我们可以定义复数序列 $(b_n)_{n=-N}^{N}$ 如下

  $$b_n = \begin{cases} c_n & -N \leq n \leq -M-1 \\ c_n + d_n & -M \leq n \leq M \\ d_n & M+1 \leq n \leq N \end{cases}$$

综上可得，

$$f+g=\sum_{n=-N}^{n} b_n e_n$$

满足定义 16.3.2 中关于三角多项式的定义，命题成立。

如果 $M>N$，与上述讨论相同，不做赘述。

- (b) 证明 fg 是三角多项式。

$$fg=\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \sum_{m=-M}^{M} d_m e_m$$

对 N 进行强归纳。

$N=0$ 时，$fg=0$ 是三角多项式。

归纳假设 $N\le k$ 时，$fg=\sum\limits_{n=-k}^{k} c_n e_n \sum\limits_{m=-M}^{M} d_m e_m$ 是三角多项式。

$N=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}
fg &= \sum_{n=-(k+1)}^{k+1} c_n e_n \sum_{m=-M}^{M} d_m e_m \\
&= \left(\sum_{n=-(k+1)}^{-k+1} c_n e_n + \sum_{n=k+1}^{k+1} c_n e_n + \sum_{n=-k}^{k} c_n e_n\right) \sum_{m=-M}^{M} d_m e_m \\
&= \sum_{n=-(k+1)}^{-k+1} c_n e_n \sum_{m=-M}^{M} d_m e_m + \sum_{n=k+1}^{k+1} c_n e_n \sum_{m=-M}^{M} d_m e_m + \sum_{n=-k}^{k} c_n e_n \sum_{m=-M}^{M} d_m e_m
\end{aligned}$$

由归纳假设可知，以上各项都是三角多项式，故利用 (a) 可知相加后也是三角多项式，于是可得 fg 是三角多项式。

归纳完成。

16.3.2

- (a) $n=m$ 时，$\langle e_n, e_m\rangle=1$。

$$
\begin{aligned}
\langle e_n, e_m\rangle &= \langle e_n, e_n\rangle \\
&= \int_{[0,1]} |e_n|^2 dx \\
&= \int_{[0,1]} cos(2\pi nx)^2 + sin(2\pi nx)^2 dx \\
&= \int_{[0,1]} 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

- (b) $n \neq m$ 时，$\langle e_n, e_m\rangle = 0$。

$$
\begin{aligned}
\langle e_n, e_m\rangle &= \int_{[0,1]} e_n \overline{e_m} dx \\
&= \int_{[0,1]} e^{2\pi inx} e^{-2\pi imx} dx \\
&= \int_{[0,1]} e^{2\pi i(n-m)x} dx \\
&= \int_{[0,1]} cos(2\pi(n-m)x) + isin(2\pi(n-m)x) dx \\
&= \int_{[0,1]} cos(2\pi(n-m)x) dx + i \int_{[0,1]} sin(2\pi(n-m)x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi(n-m)x} sin(2\pi(n-m)x)|_0^1 + i \frac{1}{2\pi(n-m)x} - cos(2\pi(n-m)x)|_0^1 \\
&= \frac{1}{2\pi(n-m)x}(0-0) + i\frac{1}{2\pi(n-m)x}(1-1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- (c) $\|e_n\|_2 = 1$。

  这是 (a) 的特殊情况，

$$
\|e_n\|_2 = \sqrt{\langle e_n, e_n\rangle} = \sqrt{1} = 1
$$

16.3.3

- (a)$-N \leq n \leq N$ 时，$c_n = \langle f, e_n\rangle$。

由引理 16.3.5 可以直接推出，对任意 $-N \leq n_0 \leq N$，我们有

$$\begin{aligned}
\langle f, e_{n_0} \rangle &= \int_{[0,1]} \left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \right) \overline{e_{n_0}} dx \\
&= \int_{[0,1]} \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \overline{e_{n_0}} dx \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \langle c_n e_n, e_{n_0} \rangle \\
&= \sum_{n=-N}^{N} c_n \langle e_n, e_{n_0} \rangle \\
&= \sum_{n=n_0}^{n_0} c_n \langle e_n, e_{n_0} \rangle \\
&= c_{n_0} \langle e_{n_0}, e_{n_0} \rangle \\
&= c_{n_0} \times 1 \\
&= c_{n_0}
\end{aligned}$$

- (b)$n > N$ 或 $n < -N$，我们有 $0 = \langle f, e_n \rangle$。

  对任意 $n_0 > N$ 或 $n_0 < -N$，我们有

$$\begin{aligned}
\langle f, e_{n_0} \rangle &= \int_{[0,1]} \left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \right) \overline{e_{n_0}} dx \\
&= \int_{[0,1]} \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \overline{e_{n_0}} dx \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \langle c_n e_n, e_{n_0} \rangle \\
&= \sum_{n=-N}^{N} c_n \langle e_n, e_{n_0} \rangle
\end{aligned}$$

  因为 $\sum_{n=-N}^{N} c_n \langle e_n, e_{n_0} \rangle$ 无法满足 $n = n_0$，由引理 16.3.5 可知，所有项都为 0，故 $\langle f, e_{n_0} \rangle = 0$。

- (c) 恒等式 $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$。

$$
\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \langle f, f\rangle \\
&= \langle \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n, \sum_{m=-N}^{N} c_m e_m \rangle \\
&= \int_{[0,1]} \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \sum_{m=-N}^{N} \overline{c_m e_m} dx \\
&= \int_{[0,1]} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} c_n e_n \overline{c_m e_m} dx \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} \int_{[0,1]} c_n e_n \overline{c_m e_m} dx \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} \langle c_n e_n, c_m e_m \rangle \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} c_n \overline{c_m} \langle e_n, e_m \rangle \\
&= \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{c_n} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2
\end{aligned}
$$