

8.2 习题

张志聪

2024 年 11 月 16 日

8.2.1

令

$$S = \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X, A \text{ 是有限集} \right\}$$

- \Rightarrow 如果 X 是有限集, 这是命题是显然的;

如果 X 是可数集。因为 X 是可数集, 那么存在双射函数 $g: \mathbb{N} \rightarrow X$, 又因为级数 $\sum_{x \in X} f(x)$ 绝对收敛, 那么

$$\sum_{x \in X} |f(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} |f(g(n))|$$

任意元素 $e \in S, e = \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X$, 所以有一个有限集 $N' \subseteq \mathbb{N}, A = g(N')$, 因为 N' 是有限集, 所有存在自然数 k , 使得 $\max(N') \leq k$, 于是,

$$e = \sum_{x \in A} |f(x)| = \sum_{n \in N'} |f(g(n))| \leq \sum_{n=0}^k |f(g(n))| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f(g(n))|$$

所以, e 是有限的, 由 e 的任意性可知, 集合 S 有上界, 所以,

$$\sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X, A \text{ 是有限集} \right\} < \infty$$

- \Leftarrow 反证法, 假设级数 $\sum_{x \in X} f(x)$ 绝对发散。

因为

$$\sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X, A \text{ 是有限集} \right\} < \infty$$

设 $\sup S \leq M$ 。因为 $\sum_{x \in X} f(x)$ 绝对收敛，所以存在自然数 N 使得

$$\sum_{n=0}^N |f(g(n))| > M$$

令 $A = \{g(n) \in X : 0 \leq n \leq N\}$ ，因为 A 是有限集，且 $A \in S$ ，所以

$$\sum_{x \in A} |f(x)| = \sum_{n=0}^N |f(g(n))| \leq M$$

存在矛盾。

8.2.2

这道题没有证明的必要了，提示就是一个简要的证明了。

8.2.3

说明 1. 当 X 是不可数集时，由于 $\sum_{x \in X} f(x) := \sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x)$ ，所以，由引理 8.2.5 可知， $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ 是至多可数的，于是证明时只需说明至多可数的情况即可。

只讨论 X 可数集， X 是有限集，命题 7.2.14 已经覆盖。

因为 $\sum_{x \in X} f(x)$ ， $\sum_{x \in X} g(x)$ 绝对收敛，所以存在某个双射 $h : \mathbb{N} \rightarrow X$ ，使得 $\sum_{n=0}^{\infty} f(h(n))$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} g(h(n))$ 是绝对收敛点的，且

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(h(n)) \\ \sum_{x \in X} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} g(h(n)) \end{aligned}$$

- (a) 由定义 8.2.1 可知, $\sum_{n=0}^{\infty} (f(h(n)) + g(h(n)))$ 绝对收敛, 可以说明 $\sum_{x \in X} (f(x) + g(x))$ 是绝对收敛的。
 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} f(h(n))$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} g(h(n))$ 绝对收敛, 由命题 7.2.14 (a) 可知, $\sum_{n=0}^{\infty} |f(h(n))| + |g(h(n))|$ 收敛, 设其收敛与 M , 又因为

$$|f(n) + g(n)| \leq |f(n)| + |g(n)|$$

于是由命题 7.3.1 可知, $\sum_{n=0}^{\infty} |f(h(n)) + g(h(n))|$ 收敛, 所以 $\sum_{x \in X} (f(x) + g(x))$ 是绝对收敛的。

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x)$$

该公式的所有项都是绝对收敛的, 也就是说其也是条件条件收敛的, 由命题 7.2.14 (a) 保证了该公式的正确性。

- (b) $\sum_{x \in X} f(x)$ 绝对收敛, 可知 $\sum_{n=0}^{\infty} f(h(n))$ 绝对收敛于某个实数 M 。
 $\sum_{n=0}^{\infty} |cf(h(n))|$ 的部分和 $S_{N_c} \leq |c|M$, 命题 7.3.1 保证了该级数收敛。

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x)$$

由命题 7.2.14 (b) 可知保证。

- (c) \Rightarrow : X_1, X_2 一定有一个是可数集, 不妨设 X_1 是可数集。反证法, 假设 $\sum_{x \in X_1} f(x)$ 绝对发散, 不妨设 $\sum_{x \in X} f(x)$ 绝对收敛于 M 。因为 X_1 是可数集, 所以存在某个双射 $h_1: \mathbb{N} \rightarrow X_1$, 由于 $\sum_{x \in X_1} f(x)$ 绝对发散, 所以存在一个整数 N 使得

$$\sum_{n=0}^N |f(h_1(n))| > M$$

因为 X_1 是 X 的子集, 所以有限集 $Y := \{x \in X_1, f(x) \leq N\}$ 也是 X 的子集, 取 $m = \max(h^{-1}(Y))$, 此时,

$$\sum_{n=0}^m |f(h(n))| > M$$

存在矛盾。

至于等式, 证明起来, 不是那么简单, 因为这里的集合是不一致的, 接下来的证明注意对集合的处理。

◦ 如果 X_2 也是可数集, 那么存在双射 $h_1 : \mathbb{N} \rightarrow X_1$, $h_2 : \mathbb{N} \rightarrow X_2$, 定义 $h : \mathbb{N} \rightarrow X$ 如下:

$$\begin{cases} h(2n) = h_1(n) \\ h(2n+1) = h_2(n) \end{cases} \quad (1)$$

以上定义的 h 是双射。因为

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (f(h_1(n)) + f(h_2(n))) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f(h(n)) \end{aligned}$$

于是,

$$\sum_{x \in X_1} f(x) + \sum_{x \in X_2} f(x) = \sum_{x \in X} f(x)$$

◦ 如果 X_2 是有限集, 设基数是 m , 定义 $Y := \{i \in \mathbb{N} : i < m\}$, 存在双射 $h_1 : \mathbb{N} \setminus Y \rightarrow X_1$

说明 2. 因为 X_1 是可数集, 则存在双射 $h_1 : \mathbb{N} \rightarrow X_1$, 又因为

$\sum_{x \in X_1} f(x)$ 是绝对收敛的, 所以

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in X_1} f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(h_1(n)) \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} f(h_1(n-m)) \end{aligned}$$

第二个等式的成立可以通过部分和序列的相等证明, 思路如下:
 设 $\sum_{n=0}^{\infty} f(h_1(n))$ 、 $\sum_{n=m}^{\infty} f(h_1(n-m))$ 的部分和分别为 S_N, S'_N 。由 $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ 序列的收敛性, 并由命题 7.2.5 可知, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在一个整数 $K, n \geq K + m$, 使得

$$\begin{aligned} & |S_n - S'_n| \\ &= \left| \sum_{n=p}^{p+m} f(h_1(n)) \right| \leq \epsilon \quad p \text{ 大于等于 } K \end{aligned}$$

这里的 $n \geq K + m$ 的原因是, $S_0 = S'_m$, 所以 S_n 比 S'_n 多 m 个项, 所以这 m 个项必须都是大于 K 的项, 相加才会小于等于 ϵ , 所有两者的部分和是最终 $-\epsilon$ 相等的, 所以收敛于同一个值。

$h_2 : Y \rightarrow X_2$, 定义 $h : \mathbb{N} \rightarrow X$ 如下:

$$\begin{cases} h(n) = h_1(n-m) & \text{if } n \geq m \\ h(n) = h_2(n) & \text{if } n < m \end{cases} \quad (2)$$

以上定义的 h 都是双射。因为

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{m-1} f(h_2(n)) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^N f(h_1(n)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f(h(n)) \end{aligned}$$

于是,

$$\sum_{x \in X_1} f(x) + \sum_{x \in X_2} f(x) = \sum_{x \in X} f(x)$$

\Leftarrow 绝对收敛的证明与上一个等式的等式一致 (上个等式的证明不需要其是绝对收敛的), 这里说一下思路: 因为,

$$\sum_{x \in X_1} |h(x)| + \sum_{x \in X_2} |h(x)| = \sum_{x \in X} |h(x)|$$

证明方法与条件收敛的等式一致, 因为, $\sum_{x \in X_1} |h(x)|, \sum_{x \in X_2} |h(x)|$ 都是收敛的, 所以 $\sum_{x \in X} |h(x)|$ 也是收敛的。

- (d) 是命题 7.1.11 (c) 的扩展, 证明方式也是一致的, 都是利用级数的值与双射的选取无关, 具体证明略。

8.2.4

说明 3. $\sum_{n \in A_+} a_n$ 的含义是什么, 因为 A_+ 是一个集合, 也就意味着其中的元素是没有顺序的, 那么, $\sum_{n \in A_+} a_n$ 收敛, 是否任意顺序的求和都是收敛的?

回顾书中定义 8.2.1 是没有明确说明的, 我个人推测是任意顺序的收敛 (如果能找到佐证, 我会回来纠正)。因为存在异议, 所以接下来的证明, 没有对顺序进行要求 (或假设), 直观感受就是: 你爱什么顺序就什么顺序, 我们只利用收敛与发散的性质。

当然这里的 A_+ 具有特殊性, 因为 $a_n: n \in A_+$ 都是非负数, 只要存在某个顺序的求和是收敛的, 也就意味着是绝对收敛的, 命题 7.4.3 (级数的重排列) 进而保证了, 任意顺序求和也是收敛的。

A_- 也具有特殊性, 有命题 7.2.14 (b) 也能保证, 其是绝对收敛的, 从而再次利用命题 7.4.3 (级数的重排列), 可以说明其任意顺序求和也是收敛的。

通过说明可知, 这里的条件收敛与绝对收敛是一致的。

- 如果两个级数都是收敛的, 则由命题 8.2.6 (绝对收敛级数的定律) 可知, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 也是绝对收敛的, 与题设矛盾。
- 如果只有一个是收敛的, 也就意味着另一个是发散的。这里不妨设 $\sum_{n \in A_+} a_n$ 是收敛于 M 。那么, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在整数 N_+ 使得 $n \geq N_+$ 部分和

$$|S_n^+ - M| \leq \epsilon$$

也就是说 S_n^+ 是一个有限值, 而 $\sum_{n \in A_-} a_n$ 是发散的, 其部分和 S_n^- 可以小于任何实数。即对任意实数 r , 存在 n 使得

$$|S_n^- + S_n^+| \geq r$$

与题设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛矛盾。

8.2.5

- 因为如果是有限集, 则必定是条件收敛的, 与命题 8.2.7 矛盾。
- 与命题 8.2.7 矛盾。
- 单射由 n_j 的定义保证的。【感觉没啥好说的啊, 或者是我没读懂题】
- 反证法, 假设情形 I 出现了有限次, 不妨设 K 后情形 I 不再满足, 即: $i = K$ 时, $\sum_{0 \leq i < K} a_{n_i} = M \geq L$, 此时, $M = M_+ + M_-$, 其中 M_+ 是 A_+ 中元素 j 对应的 a_j 求和, 其中 M_- 是 A_- 中元素 j 对应的 a_j 求和。因为 $\sum_{n \in A_-} a_n$ 是发散的, 存在 N_- , 当 $n \geq N_-$ 使得其部分和 $S_n^- < L - M^+$, 此时, $M^+ + S_n^- < L$, 情形 II 不再满足。
- 满射由 n_j 的定义保证的。【感觉没啥好说的啊, 或者是我没读懂题】
- 由推论 7.2.6 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 即对任意 $\epsilon > 0$, 都存在整数 $N, n \geq N$ 使得 $|a_n - 0| \leq \epsilon$ 。

因为情形 I 与情形 II 的都是无限多次的, 且在 A_+, A_- 都是以递增的方式取出的, 所以 a_{j+}, a_{j-} 最终都会大于 N , 于是 $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = 0$ 。

- 由 $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = 0$ 可知, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在整数 N , 对所有的 $j \geq N$ 都有

$$|a_{n_j}| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

因为情形 I 与情形 II 都会出现无限次, 也就是说在 N 之后, 即 $j \geq N, j \rightarrow \infty$,

$$\sum_{0 \leq i < j} a_{n_i}$$

会翻转无限次, 设翻转的位置为 k_0, k_1, \dots 。设 $(a_{n_i})_{i=0}^{\infty}$ 序列的部分和为 S_N , 对任意 $n_1, n_2 \geq N, n_1 \neq n_2$, 因为 n_1, n_2 一定在两个翻转点之间 (或正好在翻转点上), 而这些翻转点与 L 的距离都小于 $\frac{1}{2}\epsilon$, 由命题 4.3.7 (f) 可知,

$$\begin{cases} |S_{n_1} - L| \leq \frac{1}{2}\epsilon \\ |S_{n_2} - L| \leq \frac{1}{2}\epsilon \end{cases}$$

由上式可得,

$$|S_{n_1} - S_{n_2}| \leq \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知其收敛于 L 。

8.2.6

$\sum_{n \in A_+} a_n$ 就是发散的, 所以其是发散到 $+\infty$