6.1 习题

2024 年 6 月 16 日

6.1.1

证明框架如下：由于 n, m 都是自然数，且 $m > n$，所以存在正自然数 k 使得 $k = n + k$，对 k 进行归纳。

6.1.2

证明：

与定义 6.1.5 说的是一个意思，证明略

6.1.3

证明：

充分性：

如果 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛与 c，那么对任意的 $\epsilon > 0$，该序列都是最终 $\epsilon-$ 接近 c 的，所以存在 $N \geq m$ 使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。由题设可知 $m' > m$，于是存在 $N' := max(m', N), N' \geq m'$，使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N'$ 均成立，由于 ϵ 是任意的，由习题 6.1.2 可知，$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 收敛与 c。

必要性：

$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 收敛与 c，那么对任意的 $\epsilon > 0$，该序列都是最终 $\epsilon-$ 接近 c 的。所以存在 $N \geq m'$ 使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。由于 $m' > m$，所以 $N \geq m$，该性质对序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 也成立，由于 ϵ 是任意的，由习题 6.1.2 可知，$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 收敛与 c。

6.1.4

证明：

$(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c，于是对任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $N \geq m$ 使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立，由于 $k \geq 0$ 是一个非负整数，所以 $n + k \geq N$，于是 $|a_{n+k} - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立，由习题 6.1.2 可知，$(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 收敛与 c。

6.1.5

证明：

要证明序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列，则对于任意 $\epsilon > 0$，我们需要证明序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近的。于是设 $\epsilon > 0$ 是一个任意的实数，那么 $\epsilon/2 > 0$。因为 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛的实数序列，不妨设收敛于实数 L，可知 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近与 L 的，于是存在一个 $N \geq m$ 使得 $d(a_n, L) \leq \epsilon/2$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。任意 $j, k \geq N$，有 $d(a_j, L) \leq \epsilon/2$，$d(a_k, L) \leq \epsilon/2$，于是根据三角不等式可得，$d(a_j, a_k) \leq \epsilon$，因此 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近的。由于 ϵ 是任意选取的，因此 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列。

6.1.6

证明：

证明为什么 $a_n > L + \epsilon/2$ 或 $a_n < L - \epsilon/2$，其余的按书中的提示证明就可以了。

序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 不是最终 $\epsilon-$ 接近与 L 的，即对任意的 $N \geq m$ 都存在 $|a_n - L| > \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。

序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列，所以存在 N_0 使得 $|a_j - a_k| \leq \epsilon/2$ 对所有的 $j, k \geq N_0$ 均成立。

固定 $a_n = j_k$，所以，

$$|a_j - a_n| \leq \epsilon/2$$
$$\Rightarrow a_n - \epsilon/2 \leq a_j \leq a_n + \epsilon/2$$

又因为，$|a_n - L| > \epsilon$ 所以 $a_n > \epsilon + L$ 或 $a_n < L - \epsilon$。

如果 $a_n > \epsilon + L$，那么，

$$
\begin{aligned}
a_n - \epsilon/2 &\le a_j \\
L + \epsilon - \epsilon/2 &< a_j \\
L + \epsilon/2 &< a_j
\end{aligned}
$$

如果 $a_n < L - \epsilon$，那么，

$$
\begin{aligned}
a_j &\le a_n + \epsilon/2 \\
a_j &< L - \epsilon + \epsilon/2 \\
a_j &< L - \epsilon/2
\end{aligned}
$$

6.1.7

证明：

证明方法与命题 6.1.4 的类似。

首先假设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义 5.1.12 意义下的有界序列，那么存在有理数 M，该序列以 M 为界，由于有理数 M 也是实数，所以 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义 6.1.16 意义下的有界序列。

现在假设是定义 6.1.16 下的有界序列，那么存在实数 M，该序列以 M 为界，根据命题 5.4.12 可知，存在一个比 M 大的有理数 M'，由于 M' 是有理数，且 $M < M'$，所有该序列也以 M' 为界，所以 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义 5.1.12 意义下的有界序列。