

9.4 习题

张志聪

2025 年 4 月 9 日

9.4.1

按照定义 9.4.1 可知 (a) 等价于 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$ (定义 9.3.6), 即: $(a) \Leftrightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

- (b) $\Rightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

(b) 满足 9.3.9 (b), 所以 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$ 。

- (c) $\Rightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 成立, 那么 $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ 成立, 于是满足定义 9.3.6, 所以 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$ 。

- (d) $\Rightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

因为 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, 所以 $|x - x_0| \leq \delta$ 命题成立, 于是 $|x - x_0| < \delta$ 时命题也成立。

于是满足定义 9.3.6, 所以 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$ 。

9.4.2

例 9.4.2、例 9.4.3 已经说明了证明过程, 唯一的区别是定义域的不同。

9.4.3

任意 $x_0 \in R$, 设序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是任意一个完全由 R 中元素构成并且收敛于 x_0 的序列。

对任意 $\epsilon > 0$, 我们希望

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq \epsilon \\ |a^x - a^{x_0}| &\leq \epsilon \\ a^{x_0} |a^{x-x_0} - 1| &\leq \epsilon \\ |a^{x-x_0} - 1| &\leq \epsilon/a^{x_0} \end{aligned}$$

- 当 $x - x_0 > 0$, 由引理 6.5.3 可知, 存在正整数 N' , 使得

$$|a^{x-x_0} - 1| \leq \epsilon/a^{x_0}$$

当 $x - x_0 \leq 1/N'$ 时成立。

所以当 $\delta' = 1/N'$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta'$ 的 $x \in R$ 均成立。

- 当 $x - x_0 < 0$, 由引理 6.5.3 和极限定律可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{-(1/n)} = 1$, 类似地, 存在正整数 N'' , 使得

$$|a^{x-x_0} - 1| \leq \epsilon/a^{x_0}$$

当 $x - x_0 \geq -(1/N'')$ 即 $x_0 - x \leq 1/N''$ 时成立。

所以当 $\delta'' = 1/N''$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta''$ 的 $x \in R$ 均成立。

取 $\delta = \min(\delta', \delta'')$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in R$ 均成立。所以 f 在 x_0 处沿着 R 收敛于 $f(x_0)$ 。于是 f 在每一个点 $x_0 \in R$ 处都连续。

9.4.4

任意 $x_0 \in (0, +\infty)$, 对任意 $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq \epsilon \\ |x^p - x_0^p| &\leq \epsilon \\ |(\frac{x}{x_0})^p - 1| &\leq \epsilon/x_0^p \end{aligned}$$

说明 1. 到这里,也就知道书中那样提示的原因了,接下来,我们先按照提示证明:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^p = 1$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$, 所以利用极限定理(命题 9.3.14)可知证明 $\lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1$ 对所有的非负整数 n 均成立(对 n 进行归纳即可);

于是 $\lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1$ 对所有的负整数 n 均成立(因为 $x^n = 1/x^{-n}$ 然后利用极限定理可证);

由命题 5.4.12 和命题 4.4.1 可知, 存在整数 n 使得 $n \leq p < n+1$, 这里以 $n \geq 0, x > 1$ 为例(其他情况类似, 不做赘述), 因为 $x^n \leq x^p < x^{n+1}$, 于是由习题 9.3.5 (夹逼定理的连续形式)可得 $\lim_{x \rightarrow 1} x^p = 1$ 。

所以, $\lim_{\frac{x}{x_0} \rightarrow 1} (\frac{x}{x_0})^p = 1$ (不妨把 $x' := \frac{x}{x_0}$ 整体看做自变量), 所以存在 $\delta > 0$ 使得

$$|(\frac{x}{x_0})^p - 1| \leq \epsilon/x_0^p$$

即

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

对所有满足 $|\frac{x}{x_0} - 1| < \delta$ 即 $|x - x_0| \leq \delta x_0$ 的 $x \in (0, +\infty)$ 均成立。

所以 f 在 x_0 处沿着 $(0, +\infty)$ 收敛于 $f(x_0)$, 于是 f 在每一个点 $x_0 \in (0, +\infty)$ 处都连续。

9.4.5

对任意 $\epsilon > 0$, 只要能找到 $\delta > 0$ 使得

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| \leq \epsilon$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X$ 均成立, 即可证明复合函数 $g \circ f: X \rightarrow Y$ 在 x_0 处是连续的。

为了表述方便，定义

$$\begin{aligned}y_x &:= f(x) \\y_0 &:= f(x_0) \\r_x &:= (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y_x) \\r_0 &:= (g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0)\end{aligned}$$

因为 g 在 $f(x_0)$ 处是连续的，所以，存在 $\delta_g > 0$ 使得

$$|g(y) - g(y_0)| \leq \epsilon$$

对所有满足 $|y - y_0| \leq \delta_g$ 的 $y \in Y$ 均成立。

又因为 f 在 x_0 处是连续的，所以，存在 $\delta_f > 0$ 使得

$$|y_x - y_0| \leq \delta_g$$

对所有满足 $|x - x_0| \leq \delta_f$ 的 $x \in X$ 均成立。

综上，取 $\delta = \delta_f$ 时，对满足 $|x - x_0| \leq \delta$ 且 $x \in X$ 的 x 来说，

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq \delta_g \\&\Rightarrow \\|y_x - y_0| &\leq \delta_g\end{aligned}$$

进而 $|g(y_x) - g(y_0)| \leq \epsilon$ 。于是可得，复合函数 $g \circ f : X \rightarrow Y$ 在 x_0 处是连续的。

9.4.6

任意 $x_0 \in Y$ 。

对任意一个由 Y 中元素构成的且满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} a_n = x_0$ 的序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ，因为 $Y \subseteq X$ ，所以序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 中的项也是 X 中元素，因为 $f : X \rightarrow Y$ 是连续函数，由命题 9.4.7 (b) 可知， $\lim_{x \rightarrow x_0} f(a_n) = f(x_0)$ ，再次利用命题 9.4.7 (b) 可知 $f|_Y$ 在 x_0 处是连续的。

于是 f 在 Y 上是连续的。

说明 2. 这个习题给了一个启发，就算 Y 是一个孤立的点，也是连续的，也是严格符合定义的。

9.4.7

对 n 进行归纳。

归纳基始 $n = 0$, $P(x) = c_0x^0 = c_0$, 由例 9.4.2 可知此时 P 是连续的。

归纳假设 $n = k$ 时, P 是连续的。

$n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{i=0}^{k+1} c_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^k c_i x^i + c_{k+1} x^{k+1} \end{aligned}$$

由例 9.4.3 可知 $f(x) = x$ 是连续函数，于是由命题 9.4.9 可知 $c_{k+1}x^{k+1}$ 是连续的，又由归纳假设可知 $\sum_{i=0}^k c_i x^i$ 是连续的，再次利用命题 9.4.9 可知 $\sum_{i=0}^k c_i x^i + c_{k+1}x^{k+1}$ 是连续的，即 $P(x)$ 是连续的。