3.6 为什么

2024 年 3 月 5 日

注 3.6.3

①单射

对任意 $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, f(x_1) = 2x_1, f(x_2) = 2x_2$，乘法是交换的（引理 2.3.2）如果 $f(x_1) = f(x_2)$ 则 $2x_1 = 2x_2$，由乘法的消去律 (推论 2.3.7) 可知，$x_1 = x_2$，与题设矛盾，所以 f 是单射的。

②满射

对任意 $y \in Y$，由于 Y 是偶数集，所以 Y 总的元素都需要符合偶数的定义，即：对任意的 Y 中元素 y，当且仅当 y=2n，n 是自然数。由此可得 f 是满射。

注 3.6.6

需要找到 $X = \{i \in N : i < n\} \to Y = \{i \in N : 1 \leq i \leq n\}$ 的双射函数 f. 我们定义 $f : X \to Y, \{f(x) : x \in X, f(x) = x++\}$

现在证明 f 是双射函数。

①单射

对任意 $i_1 \in X, i_2 \in X, i_1 \neq i_2, f(i_1) = i_1++, f(i_2) = i_2++$，若 $f(i_1) = f(i_2)$，则 $i_1++ = i_2++$，由洛必达公理 2.4 可知 $i_1 = x_2$，与 $i_1 \neq i_2$ 矛盾，所以 $f(i_1) \neq f(i_2)$，所以 f 是单射的

②满射

对任意 $y \in Y$，可知 y 是正数，而正数可以由一个自然数加 1 得到，假设 $y = b++$，又 $y \leq n$，所以 $b < n$，所以 $b \in X$，所以 f 是满射

至此，命题得证

引理 3.6.8

证明：不存在从空集到一个非空集合的双射

由函数的满射定义可知，对值域中的任意元素 y，定义域中都存在一个元素 x，使得函数 y=f(x)，而如果定义域是空集，那么 x 是不存在的，所以无法满足满射定义。

引理 3.6.9

证明：定义的 g 函数是双射函数

说明. g 构造书中说的不够直观，其实就是比 $f(x)$ 小的，保持不变，比 $f(x)$ 大的，向左平移 1 下，也就是 $f(x)-1$。这样就能保证值域不超过 n，且为 $\{i \in N : 1 \leq i \leq n-1\}$

证明.

不妨设 $Z = X - \{x\}, Y_{n-1} = \{i \in N : 1 \leq i \leq n-1\}, Y_n = \{i \in N : 1 \leq i \leq n\}$。

①g 是单射

对任意 $x_1 \in Z, x_2 \in Z, x_1 \neq x_2$，假设 $g(x_1) = g(x_2)$，由函数 g 的构造方式可知，要么 $g(x_1) = g(x_2) = f(x_1) = f(x_2)$，要么 $g(x_1) = g(x_2) = f(x_1) - 1 = f(x_2) - 1$，这都与 f 是单射函数矛盾，所以 $g(x_1) \neq g(x_2)$，所以 g 是单射的。

②g 是满射

对任意 $y \in Y_{n-1}$，$y \in Y_n$，由于 f 是满射的，则存在 $a \in X$ 使得 $y = f(a)$，若 $f(a) < f(x)$，那么 $y = g(a) = f(a)$；若 $f(a) \geq f(x)$，则由于 f 是单射，所以存在 $b \in X$ 使得 $y++ = f(b)$，有 $f(b) > f(a) \geq f(x)$ 可知 $f(b) > f(x)$，所以 $g(b) = f(b) - 1 = (y++) - 1 = y$；由此可知，对任意 y 都会存在 Z 中的元素 i，使得 $y = g(i)$。（特别说明下，$y{+}{+}$ 不可能取到 $n{+}{+}$ 的，因为 $y \in Y_{n-1}$）至此，g 是满射得证。

综上，命题得证。