

## 5.6 为什么

2024 年 6 月 4 日

1. 设  $x \geq 0$  是一个非负实数,  $n \geq 1$  是一个正整数, 集合  $E := \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \text{ 且 } y^n \leq x\}$ , 此时, 集合  $E$  中包含 0

证明:

按照定义 5.6.1  $0^n = 0$ , 所以  $0^n \in E$ 。

2. 如果  $y > 1$ , 且  $n \geq 1$  是一个正整数, 那么  $y^n > 1$

证明:

对  $n$  进行归纳。

$n = 1$  时, 按照定义 5.6.1  $y^n = y^1 = y^0 \times y = 1 \times y = y$ , 因为  $y > 1$ , 所以  $y^n > 1$ 。

归纳假设  $n = k$  时,  $y^k > 1$ 。

当  $n = k + 1$  时,  $y^{k+1} = y^k \times y$ , 于是由归纳假设可知,

$$\begin{aligned} y^k &> 1 \\ y^k \times y &> 1 \times y > 1 \end{aligned}$$

综上, 归纳完成。

3. 如果  $y > x$ , 且  $y > 1, n \geq 1$ , 所以  $y^n > x$

证明:

对  $n$  进行归纳。

当  $n = 1$  时,  $y^1 = y$ , 所以  $y^n > x$ 。

归纳假设,  $n = k$  时,  $y^k > x$ 。

当  $n = k + 1$  时,  $y^{k+1} = y^k \times y$ , 由归纳假设可知  $y^k > x$ , 所以,

$$y^k \times y > xy$$

又因为,

$$y > 1$$

$$yx > x$$

于是  $y^k \times y > xy > x$ 。

综上, 归纳完成。

**4.**  $x$  是一个非负实数, 证明  $x^{1/1} = x = x^1$

证明:

由定义 5.6.1 可知,  $x^1 = x^0 \times x = 1 \times x = x$ 。

由定义 5.6.4 可知,  $x^{1/1} = \sup\{y \in R : y \geq 0 \text{ 且 } y^1 \leq x\} = x$ 。