8.1 习题

2024 年 11 月 17 日

8.1.1

- $\Leftarrow$ 即：$Y \subsetneq X$，X, Y 有相同的基数，此时 X 是无限集。

  反证法，假设 X 一定是有限集。因为 Y 是 X 的真子集，由命题 3.6.14 可知，$\#(X) < \#(Y)$，与 X, Y 有相同的基数相矛盾。

- $\Rightarrow$ 假设 X 是一个无限序列，然后构造一个双射 $f : X \to Y$，$Y \subsetneq X$。

  先以递归的方式定义一个无限序列 $(A_n)_{n=0}^{\infty}$。因为 X 是非空集合，所以存在 $a_0 \in X$。我们定义 $A_0 := \{x_0\}$。那么，又因为 X 是无限集，所以 $X \setminus A_0$ 也是无限集，于是可以用相同方式定义 $A_1 := A_0 \cup \{a_1\}$。假设 A_n 已经以递归的方式定义出来，现在证明 A_{n+1} 的存在性，这样才能说明构造方式的正确性。因为对所有的 $A_i, i \leq n$ 都是有限集，所以 $A \setminus \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ 是无限集，所以，我们可以从中找出一个元素 a_{n+1}，令 $A_{n+1} := A_n \cup \{a_{n+1}\}$。至此，$A_n, n \in \mathbb{N}$ 的存在性得到证明（归纳原理），又因为选择公理可知，$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ 是存在且非空的。

  现在定义 $Y := X \setminus \{a_0\}$，然后定义函数 $f : X \to Y$ 如下：

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{if } x \in X \setminus A \\ f(x) = a_{n+1} & \text{if } x \in A, x = a_n \end{cases}$$

  显然，f 是双射函数，命题得证。

8.1.2

（1）如果 X 是有限集合，则由自然数的三歧性，经过有限次比较，就可以得到最小元素存在。

（2）X 是无限集

★ 最大下界方式

因为 X 是自然数集的非空子集，那么对任意 $x \in X, x \geq 0$，即：集合 X 有下界，由定理 5.5.9 可知集合 X 有最大下界，不妨设为 m。

现在需要证明 $m \in X$。

反证法，假设 $m \notin X$。

由假设可知任意 $x \in X, x > m$。因为 $m \geq \lfloor m \rfloor$（注 4.4.2 中 $\lfloor m \rfloor$ 表示 m 的整数部分），于是 $x > \lfloor m \rfloor$，由命题 2.2.12（e）可知 $x \geq \lfloor m \rfloor + 1$，那么，$\lfloor m \rfloor + 1$ 也是 X 的下界，而 $\lfloor m \rfloor + 1 > m$，这与 m 是 X 的最大下界矛盾。

★ 无穷递降原理方式

假设 X 没有最小元素，即：任意 $x \in X$，存在 $x' \in X, x' < x$。

现在构造出序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$。因为 X 是非空的，所以存在 $x_0 \in X$，定义 $a(0) := x_0$，递归定义 $a(n+1) := x_{n+1}(x_{n+1} < a(n))$，由之前的说明可知 x_{n+1} 是存在的。

显然这个序列与无穷递降原理矛盾。

★自然数替换成整数

“最大下界方式”的证明方式，显然对整数也是合适，所以替换成整数，良序定理对整数是成立。

★自然数替换成有理数

8.1.3

★因为 X 是无限集，所以集合 $\{x \in X : \text{对所有的 } m < n \text{ 均有 } x \neq a_m\}$ 也是无限集

设 $A =: \{x \in X : \text{对所有的 } m < n \text{ 均有 } x \neq a_m\}$，设 $B =: \{a_m : i < n\}$。

反证法，假设 A 不是无限集。又 B 是有限集，那么，由命题 3.6.14（b）可知，X 是有限集，这与 X 是无限集矛盾。

★$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个递增序列

反证法，假设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 不是递增序列。

由假设可知，存在 $k, a_k \geq a_{k+1}$。

由序列的定义可知 $a_{k+1} := min\{x \in X : \text{对所有的 } m < k+1 \text{ 均有 } x \neq a_m\}$，因为 $k < k+1$，所以 $a_k = a_{k+1}$ 是不存在的。

另外，$a_k > a_{k+1}$ 也是不可能的，因为 a_k 比 a_{k+1} 先定义，由 min 函数的定义可知，先取出的 a_k 肯定小于 a_{k+1}。

于是，与假设相悖。

★对所有的$n \neq m$均有$a_n \neq a_m$

由 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 严格递增保证。

★$a_n \in X$。

由 a_n 的定义方式保证。

★表明

由 n 的任意性保证的，因为如果存在 m 使得 $a_m = x$，则前提不成立了。

★$a_n \geq n$。

对 n 进行归纳。

归纳基始，$n = 0$，由于 a_n 是自然数，所以 $a_n \geq 0$。

归纳假设，$n = k$，$a_k \geq k$。

当 $n = k+1$ 时，因为 a_n 是一个递增序列，所以 $a_{k+1} > a_k$，即 $a_{k+1} > k$，由命题 2.2.12（e）可知 $a_{k+1} \geq k + 1$。

归纳完成。

★必然有?

良序定理保证最小值的唯一性。

8.1.4

有一点需要注意，值域 $f(N)$ 可能不是 Y，但在以下的证明中，可以把 Y 视为值域 $f(N)$。

★ Y 是有限集时，命题显然成立。

★ Y 是无限集时。

通过提示可知，f 是从 A 到 $f(A)$ 的双射是显然的。

下面我们需要证明的是 $f(A)$ 与 Y 是相等的集合，那个 Y 就是可数的了。

由 $f(A)$ 的定义方式可知，$f(A)$ 中的元素，一定属于 Y。

对任意 $y \in Y$，存在自然数集合 B，任意 $b \in B$ 使得 $f(b) = y$，取 B 中的最小值 n，现在需要证明 $n \in A$。

对 n 进行强归纳。

归纳基始，$n=0$，因为不存在自然数 $m<0$，所以 $0\in A$。

归纳假设，$n\le k$ 时，$n\in A$。

$n=k+1$ 时，反证法，假设 $k+1\ne A$，那么，存在 $m<k+1$ 使得 $f(m)=f(k+1)$，此时，$m\in B$，且 $m<k+1$，与 n 是 B 中的最小值矛盾，于是 $k+1\in A$。

归纳完成。

所以，$n\in A$，即：$y\in f(A)$。

8.1.5

因为 X 是可数集，那么存在一个双射 $g:\mathbb{N}\to X$。

所以，由定义 3.3.10（复合）可以构造出函数 $f\circ g:\mathbb{N}\to Y$，由命题 8.1.8 可知 $f\circ g(\mathbb{N})$ 是至多可数的。

又因为 $f(X)$ 与 $f\circ g(\mathbb{N})$ 是相等的集合（证明略），于是 $f(X)$ 是至多可数的。

8.1.6

★ $\Rightarrow$

A 是至多可数的，如果 A 是有限集，则结论是显然的。

如果 A 是可数集，那么存在一个双射 $g:A\to\mathbb{N}$，令 $f=g$。

★ $\Leftarrow$

（1）如果 $f(A)$ 是有限集，则结论是显然的。

（2）如果 $f(A)$ 是无限集，则需要进一步证明。

因为 f 是单射，那么存在 $f(A)\subseteq\mathbb{N}$。

因为 A 不能是空集，存在元素 $a_0\in A$。

现在定义函数 $h:\mathbb{N}\to A$ 为

$$\begin{aligned} h(n) &:= f^{-1}(n) && \{n\in\mathbb{N}:n\in f(A)\} \\ h(n) &:= a_0 && \{n\in\mathbb{N}:n\notin f(A)\} \end{aligned}$$

由命题 8.1.8 可知，A 是至多可数的的。

8.1.7

$h(\mathbb{N}) = X \cup Y$ 是显然的（证明略），由命题 8.1.8 可知 $X \cup Y$ 是至多可数的。

假设 $X \cup Y$ 是有限集，那么由命题 3.6.14（c）可知 X 是有限的，这与题设矛盾。

8.1.8

由推论 8.1.9 可知，只要找到一个函数 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$，那么，$f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ 是至多可数的。然后只需说明 $X \times Y = f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$。那么，$X \times Y$ 也是至多可数的。

因为 X 是可数集，所以存在一个双射函数 $g : \mathbb{N} \to X$；

同理，存在一个双射函数 $h : \mathbb{N} \to Y$；

现在定义函数 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ 为

$$f(n, m) := (g(n), h(m))$$

接下来，要证明 $X \times Y = f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$。

反证法，假设 $X \times Y \neq f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$，那么，至少存在一个元素 $(x, y) \in X \times Y$ 且 $(x, y) \notin f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$。因为 $x \in X, y \in Y$，所以存在 (n, m) 使得 $x = g(n), y = h(m)$，又因为 $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，而 $(g(n), h(m)) \in f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$，即：$(x, y) \in f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$，与假设矛盾。

8.1.9

这道题，直觉上是显然的，但着手证明时，又十分困难，主要有些问题难以处理：

- I A_α 都是至多可数的，这表明，既可以是有限集，也可以是可数集。
- 直觉上，我们有一个至多可数的集合序列 A_α，而 A_α 本身也是至多可数的，好像 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 中的元素，可以用两个下标表示，然后就会很自然的想到 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 与 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 存在映射。但题设中没有说明 A_α 之间是不相交的，这样就不能假设该映射是双射的（因为同一个 x 可以同时属于多个 A_α）。

如何克服这些困难，要说明集合 A 是至多可数的，无需找到一个双射函数，比如单射函数 $f : A \to C$，其中 C 是之多可数的，那么 A 也是至多可数的（因为 A 与 $f(A)$ 之间是双射，于是 A 与 $f(A)$ 之间的基数相同，$f(A)$ 是 C 的子集，推论 8.1.7 可知 $f(A)$ 是至多可数的，所以 A 也是之多可数的。)。特别的，如果 A 与 $\mathbb{N}$ 间有单射函数，则 A 是至多可数的。

以单射替换双射的方式，进行我们的证明。

- 因为 I 是至多可数的，那么，存在一个双射 $g : N \to I$，这里 N 是 $\mathbb{N}$ 的子集。

- 因为 $A_{g(m)}$ 也是至多可数的，那么，存在一个单射 $f_m : A_{g(m)} \to \mathbb{N}$。对所有 $m \in N$, 设 F_m 是所有 $A_{g(m)} \to \mathbb{N}$ 的函数集合。由于 F_m 是非空的，由选择定理可知，我们可以在每个集合中选一个单射函数，得到一个至多可数集合 $\{f_m\}_{m \in N}$。

- 现在可以考虑 $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup\limits_{m \in N} A_{g(m)}$，$x$ 属于多个 $A_{g(m)}$ 这个问题了。集合 $\{m \in N : x \in A_{g(m)}\}$，因为集合是 $\mathbb{N}$ 的子集，由良序原理（命题 8.1.4）可知，该集合存在一个最小值 n。

- 现在定义一个函数 $h : \bigcup\limits_{m \in N} A_{g(m)} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，对所有 $x \in \bigcup\limits_{m \in N} A_{g(m)}$，定义 $h(x) = (n, f_n(x))$，其中 n 是之前定义的最小值。h 是单射的，因为对任意 x，n 是唯一的，并且 f_n 是单射函数。于是 $\bigcup\limits_{m \in N} A_{g(m)}$ 是至多可数的。

8.1.10

没找到！