# 15.6 习题

张志聪

2025 年 4 月 14 日

## 15.6.1

设 $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d), z_3 = (e, f)$。

- (a) 可交换性：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$。

  按照定义 15.6.3（复数的加法运算）可知，

  $$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c, b + d) \\ z_2 + z_1 &= (c + a, d + b) \end{aligned}$$

  因为

  $$\begin{aligned} a + c &= c + a \\ b + d &= d + b \end{aligned}$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

  $$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

- (b) 结合性：$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$。

  我们有

  $$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_2 &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \end{aligned}$$

  又因为

$$
\begin{aligned}
z_1 + (z_2 + z_3) &= (a, b) + (c + e, d + f) \\
&= (a + c + e, b + d + f)
\end{aligned}
$$

于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

- (c) 恒等性：$z_1 + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z_1$。

  我们有，

  $$
  \begin{aligned}
  z_1 + 0_{\mathbb{C}} &= (a, b) + (0, 0) \\
  &= (a, b)
  \end{aligned}
  $$

  又因为

  $$
  \begin{aligned}
  0_{\mathbb{C}} + z_1 &= (0, 0) + (a, b) \\
  &= (a, b)
  \end{aligned}
  $$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

  $$z_1 + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z_1$$

- (d) 逆元性：$z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0_{\mathbb{C}}$。

  由 (a) 可交换性可知

  $$z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1$$

  我们有，

  $$
  \begin{aligned}
  z_1 + (-z_1) &= (a, b) + (-a, -b) \\
  &= (0, 0) \\
  &= 0_{\mathbb{C}}
  \end{aligned}
  $$

## 15.6.2

设 $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d), z_3 = (e, f)$。

- (a) 可交换性：$z_1 z_2 = z_2 z_1$。

  由定义 15.6.5 可知，

  $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a, b)(c, d) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} z_2 z_1 &= (c, d)(a, b) \\ &= (ca - db, cb + da) \end{aligned}$$

  因为

  $$ac - bd = ca - db$$
  $$ad + bc = cb + da$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

  $$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

- (b) 结合性：$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$。

  因为

  $$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= ((a, b)(c, d))(e, f) \\ &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} z_1 (z_2 z_3) &= (a, b)((c, d)(e, f)) \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \end{aligned}$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

  $$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

- (c) 恒等性：$z_1 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} z_1 = z_1$。

  由 (a) 可知

  $$z_1 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} z_1$$

  又有

  $$\begin{aligned} z_1 1_{\mathbb{C}} &= (a, b)(1, 0) \\ &= (a \times 1 - b \times 0, a \times 0 + b \times 1) \\ &= (a, b) \\ &= z_1 \end{aligned}$$

- (d) 分配性：$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ 和 $(z_2 + z_3) z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1$。

  因为

  $$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a, b)((c, d) + (e, f)) \\ &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} z_1 z_2 + z_1 z_2 &= (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \end{aligned}$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

  $$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

  同理可得，

  $$(z_2 + z_3) z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1$$

## 15.6.3

这个引理是想说明：形式符号 $z = (a, b)$ 与 $z = a + bi$ 是等价的。

因为

$$\begin{aligned} a+bi &= (a,0)+(b,0)(0,1) \\ &= (a,0)+(0,b) \\ &= (a,b) \end{aligned}$$

从而，$a+bi$ 与 $(a,b)$ 就是一回事。

## 15.6.4

设 $z=a+bi, w=c+di$。

- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$。

  因为

  $$z+w=a+bi+c+di=a+c+(b+d)i$$

  于是

  $$\overline{z+w}=a+c-(b+d)i$$

  又

  $$\begin{aligned} \overline{z}+\overline{w} &= a-bi+c-di \\ &= a+c-(b+d)i \end{aligned}$$

  所以，$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$。

- $\overline{-z}=-\overline{z}$。

  $$\begin{aligned} \overline{-z} &= \overline{-a-bi} \\ &= -a+bi \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} -\overline{z} &= -(a-bi) \\ &= -a+bi \end{aligned}$$

  所以，$\overline{-z}=-\overline{z}$。

- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$。

  因为

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(a+bi)(c+di)} \\ &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} \\ &= (ac-bd)-(ad+bc)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z}\,\overline{w} &= \overline{a+bic+di} \\ &= (a-bi)(c-di) \\ &= ac-bd-(ad+bc)i\end{aligned}$$

  所以，$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$。

- $\overline{\overline{z}} = z$。

$$\begin{aligned}\overline{\overline{z}} &= \overline{\overline{a+bi}} \\ &= \overline{a-bi} \\ &= a+bi \\ &= z\end{aligned}$$

- $\overline{z} = \overline{w}$ 当且仅当 $z = w$。

  - $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \overline{w} \\ a-bi &= c-di\end{aligned}$$

    于是，$a = c$ 且 $-b = -d$，即 $a = c$ 且 $b = d$。所以 $z = w$。

  - $\Leftarrow$

    $z = w$，所以 $a = c$ 且 $b = d$。

$$\begin{aligned}\overline{z} &= a-bi \\ \overline{w} &= c-di\end{aligned}$$

于是 $a=c$ 且 $-b=-d$，所以 $\overline{z}=\overline{w}$。

- $\overline{z}=z$ 当且仅当 $z$ 是一个实数。
  - $\Rightarrow$

    $\overline{z}=z$，那么 $-b=b$，所以 $b=0$，即 $\Im(z)=0$，所以 $z$ 是一个实数。
  - $\Leftarrow$

    $z$ 是一个实数，$\Im(z)=0$，于是 $b=0$，所以 $\overline{z}=z$。

## 15.6.5

设 $z=a+bi$，所以 $\Re(z)=a,\Im(z)=b$。
又因为

$$\begin{aligned}\frac{z+\overline{z}}{2}&=\frac{a+bi+a-bi}{2}\\&=\frac{2a}{2}\\&=a\\&=\Re(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z-\overline{z}}{2i}&=\frac{a+bi-(a-bi)}{2i}\\&=\frac{b2i}{2i}\\&=b\\&=\Im(z)\end{aligned}$$

## 15.6.6

设 $z=a+bi,w=c+di$。

- 恒等式 $z\overline{z}=|z|^2$，从而有 $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$。

$$
\begin{aligned}
z\overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\
&= a^2 - b^2 i^2 - abi + abi \\
&= a^2 - b^2 i^2 \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
|z|^2 &= \sqrt{a^2+b^2}^2 \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

于是，$z\overline{z} = |z|^2$，从而有 $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$。

- $|zw| = |z||w|$ 且 $|\overline{z}| = |z|$。

  由之前的讨论可得，

$$
\begin{aligned}
|zw| &= \sqrt{zw\overline{zw}} \\
&= \sqrt{zw\overline{z}\ \overline{w}} \\
&= \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} \\
&= \sqrt{|z|^2|w|^2} \\
&= |z||w|
\end{aligned}
$$

  $|\overline{z}| = |z|$ 直接可以从复数绝对值定义中得到。

- 不等式 $-|z| \leq \mathfrak{R}(z) \leq |z|$。

  因为

$$
|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2
$$

  由引理 5.6.9(d)（更准确的说是实数版本）可得

$$
|z| \geq |a| \geq \mathfrak{R}(z) = a
$$

  于是，

$$
-|z| \leq -|a| \leq a = \mathfrak{R}(z)
$$

- 不等式 $-|z| \leq \Im(z) \leq |z|$。

  与上一个不等式证明方式一致。

- 不等式 $|z| \leq |\Re| + |\Im|$。

  因为

$$\begin{aligned}(|\Re| + |\Im|)^2 &= (|a| + |b|)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| \\ &\geq a^2 + b^2 = |z|^2\end{aligned}$$

  由引理 5.6.9(d)（更准确的说是实数版本）可得

$$|z| \leq |\Re| + |\Im|$$

- 三角不等式 $|z + w| \leq |z| + |w|$。

  按照书中的提示进行证明。

  由之前的命题可得，

$$\Re(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|$$

  于是，

$$\Re(z\overline{w}) \leq |z||w|$$

  利用习题 15.6.5 可得，

$$\begin{aligned}\Re(z\overline{w}) &= \frac{z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}}{2} \\ &= \frac{z\overline{w} + \overline{z}w}{2}\end{aligned}$$

  于是，

$$\begin{aligned}\frac{z\overline{w} + \overline{z}w}{2} &\leq |z||w| \\ z\overline{w} + \overline{z}w &\leq 2|z||w|\end{aligned}$$

然后，不等式两端加上 $|z|^2+|w|^2$，

$$\begin{aligned}
z\overline{w}+\overline{z}w+|z|^2+|w|^2 &\le 2|z||w|+|z|^2+|w|^2\\
z\overline{w}+\overline{z}w+z\overline{z}+w\overline{w} &\le (|z|+|w|)^2\\
(z+w)(\overline{z+w}) &\le (|z|+|w|)^2\\
|z+w|^2 &\le (|z|+|w|)^2\\
|z+w| &\le |z|+|w|
\end{aligned}$$

## 15.6.7

注意：实数也是复数，所以复数的相关性质，实数也具备。

因为

$$\begin{aligned}
|z/w| &= |zw^{-1}|\\
&= \left|z|w|^{-2}\overline{w}\right|\\
&= \left|\frac{z\overline{w}}{|w|^2}\right|\\
&= |\frac{1}{|w|^2}||z\overline{w}|\\
&= \frac{1}{|w|^2}|z||\overline{w}|\\
&= \frac{|\overline{w}|}{|w|^2}|z|\\
&= \frac{|z|}{|w|}
\end{aligned}$$

## 15.6.8

注意：实数也是复数，所以复数的相关性质，实数也具备。

- $\Rightarrow$
- $\Leftarrow$

$$
\begin{aligned}
|z+w| &= |cw+w| \\
&= |(c+1)w| \\
&= |c+1||w|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|z|+|w| &= |cw|+|w| \\
&= |c||w|+|w| \\
&= |c+1||w|
\end{aligned}
$$

所以 $|z+w| = |z|+|w|$。

## 15.6.9

$z = \Re(z) + \Im(z)i$。

- $\Rightarrow$

  （1）$\lim\limits_{n\to\infty} \Re(z_n) = \Re(z)$。

  反证法，假设 $\lim\limits_{n\to\infty} \Re(z_n)$ 不收敛于 $\Re(z)$。

  于是存在 $\epsilon$，不存在 $N > 0$，使得只要 $n \geq N$，就有

  $$|\Re(z_n) - \Re(z)| < \epsilon$$

  即对所有的 $n$ 都有

  $$|\Re(z_n) - \Re(z)| \geq \epsilon$$

  又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$，所以对 $\epsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得只要 $n \geq N$，都有

  $$
  \begin{aligned}
  &|z_n - z| < \epsilon \\
  &\Longrightarrow \\
  &\sqrt{(\Re(z_n) - \Re(z))^2 + (\Im(z_n) - \Im(z))^2} < \epsilon
  \end{aligned}
  $$

因为

$$\sqrt{(\Re(z_n)-\Re(z))^2+(\Im(z_n)-\Im(z))^2}>|\Re(z_n)-\Re(z)|\geq\epsilon$$

存在矛盾。

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\Re(z_n)=\Re(z)$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\Im(z_n)=\Im(z)$。

证明类似，不做赘述。

- $\Leftarrow$

  对任意 $\epsilon>0$。

  因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\Re(z_n)=\Re(z)$，存在 $N_1>0$，使得只要 $n\geq N_1$，都有

  $$|\Re(z_n)-\Re(z)|<\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

  同理，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\Im(z_n)=\Im(z)$，存在 $N_2>0$，使得只要 $n\geq N_2$，都有

  $$|\Im(z_n)-\Im(z)|<\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

  取 $N=max(N_1,N_2)$，使得只要 $n\geq N$，都有

  $$\begin{aligned}|z_n-z|&=\sqrt{(\Re(z_n)-\Re(z))^2+(\Im(z_n)-\Im(z))^2}\\&<\epsilon\end{aligned}$$

  由 $\epsilon$ 的任意性可得，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z$。

## 15.6.10

由定义 12.4.9（完备度量空间）可知，我们需要证明，度量空间 $(\mathbb{C},d)$ 中的任意 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 柯西序列都有极限。

对任意 $\epsilon>0$，存在 $N>0$，使得只要 $p,q\geq N$，都有

$$\begin{aligned}&|z_p-z_q|<\epsilon\\&\Longrightarrow\\&\sqrt{(\Re(z_p)-\Re(z_q))^2+(\Im(z_p)-\Im(z_q))^2}<\epsilon\end{aligned}$$

所以，

$$\sqrt{(\Re(z_p) - \Re(z_q))^2} < \epsilon$$
$$\implies$$
$$|\Re(z_p) - \Re(z_q)| < \epsilon$$

所以 $(\Re(z_n))_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列，由于 $\mathfrak{z}_\mathfrak{n}$ 都是实数，实数度量空间是完备的，所以，$(\Re(z_n))_{n=1}^{\infty}$ 是收敛序列。

同理可得，$(\Im(z_n))_{n=1}^{\infty}$ 是收敛序列。

综上，利用引理 15.6.13 可得，$(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛。

## 15.6.11

- $f$ 是双射。

  证明 $f$ 是单射和双射即可，证明略。

- $f, f^{-1}$ 都是连续函数。

  （1）$f$ 是连续函数。

  任意 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$，设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的序列，其中 $x^{(n)} := (x_n, y_n)$，并且序列收敛于 $(x_0, y_0)$，我们需要证明 $(f(x^n))_{n=1}^{\infty}$ 即 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 其中 $z_n = x_n + y_n i$ 收敛于 $f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 i$。

  由命题 12.1.18 可知，

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$
  $$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

  由引理 15.6.13 可知，$(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $f(x_0, y_0)$。

  （2）$f^{-1}$ 是连续函数。

  证明方式与（1）类似，证明略。

## 15.6.12

我们构造出这样一个通路：

对任意 $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$，定义 $\gamma(x) = (1-x)z_0 + z_1 x$，其中 $x \in [0,1]$。
以上定义的通道满足：

- $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$。
- $\gamma$ 是连续的。（可以直接使用引理 15.6.14 证明。）

道路连通蕴含连通性，所以，$\mathbb{C}$ 是连通的。

## 15.6.13

- （1）证明：$E$ 是紧致的，当且仅当 $E$ 既是闭的又是有界的。
  - $\Rightarrow$
    利用推论 12.5.6 可证。
  - $\Leftarrow$ 设 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $E$ 中的任意序列。
    按照习题 15.6.11 中定义的 $f^{-1}$，我们有 $E' = f^{-1}(E), E' \subseteq \mathbb{R}$。
    因为 $\mathbb{C}$ 的通常度量 $d$ 是与欧几里得度量是一致的，所以，$E$ 是闭的又是有界的，那么，$E'$ 也是闭的又是有界的。
    所以，$(f^{-1}(z_n))_{n=1}^{\infty}$ 存在收敛的 $R^2$ 上的子序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，其对应的复数序列为 $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$。
    由命题 12.1.18(d) 可知，我们有以下极限存在，
    $$\lim_{n\to\infty} \Re(f(a_n))$$
    $$\lim_{n\to\infty} \Im(f(a_n))$$
    所以，由引理 15.6.13 可知，$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ 极限存在。
    综上，由 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 的任意性可得，$E$ 是紧致的。
- （2）$\mathbb{C}$ 不是紧致的。

  $\mathbb{C}$ 的子集 $\mathbb{R}$ 都不是紧致的，$\mathbb{C}$ 不可能是紧致的。

  或者直接举一个反例 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，其中 $a_n = n$，这个序列就没有收敛的子序列。

## 15.6.14