

## 8.5 习题

张志聪

2024 年 11 月 24 日

这一节题太多了，我只写正文中提到的习题了。

### 8.5.3

证明是偏序集。

- (自反性) 因为对任意的正整数  $x$  都有  $x = x \times 1$ , 所以  $x|x$
- (反对称性) 如果正整数  $x, y$  满足  $x|y$  且  $y|x$ , 那么存在正整数  $a, b$  使得

$$\begin{cases} y = x \times a \\ x = y \times b \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

于是  $x = y$

- (传递性) 如果正整数  $x, y, z$  满足  $x|y$  且  $y|z$ , 那么存在正整数  $a, b$  使得

$$\begin{cases} y = x \times a \\ z = y \times b \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} z = x \times a \times b \end{cases}$$

于是  $x|z$

证明不是全序集, 举一个反例即可, 正整数  $2, 3$  是不满足  $2|3$  或  $3|2$  的, 因为不存在正整数  $a$  使得  $2 = 3a$  或  $3 = 2a$ 。