★定义8.2.1定义明确性

假设双射函数 $h:\mathbb{N}\to X$。需要证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(g(n)) = \sum_{m=0}^{\infty} f(h(m))$$

可以定义 a_n 为

$$a_n := f(g(n))$$

现在，根据命题 7.4.3 只需要找到一个双射。

定义 $w:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为

$$w(m) := h^{-1}\circ g(m)$$

因为 g 是 $\mathbb{N}\to X$ 的双射，且 h 是 $\mathbb{N}\to X$，那么 h^{-1} 是 $\mathbb{N}\to X$ 的双射，所以，这两个函数的复合函数 w 是双射函数。又因为

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(h(m)) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{w(m)}$$

由命题 7.4.3 可知

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{w(m)}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f(g(n)) = \sum_{m=0}^{\infty} f(h(m))$$

★定理8.2.2

（1）书中

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} \leq \sum_{(n,m)\in X} f(n,m)$$

应该是错的，这里应该是相等的，即：

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} = \sum_{(n,m)\in X} f(n,m)$$

（2）书中“当 $M\to\infty$ 时，对上面的式子取上确界可得（利用极限定律并对 N 使用归纳法）”

应该是错的，这里是对 M 进行归纳，N 是看做固定值的。

（3）证明：$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m)$ 是绝对收敛的，那么 $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f_+(n,m)$ 和 $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f_-(n,m)$ 也都是绝对收敛的。

反证法，假设 f_+ 是发散的，由 $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m)$ 的部分和 S_N 等于 $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f_+(n,m)$ 的部分和 S_{N+}，$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f_-(n,m)$ 的部分和 S_{N-} 相加，即：

$$S_N = S_{N+} + S_{N-}$$

（注意：这里的部分和都是序列每项取绝对值的部分和）。

由于 $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ 收敛，所以，对任意 $\epsilon > 0$，都存在一个整数 M'，当 $N \geq M'$ 使得

$$|S_N - L| \leq \epsilon \tag{1}$$

当如果 f_+ 是发散的，那个，存在一个整数 M''，当 $N \geq M''$ 使得

$$S_{N+} > L + \epsilon$$

又因为 $S_{N-} \geq 0$，所以，取 $M = max(M', M'')$，当 $N \geq M$ 使得

$$\begin{aligned} |S_N - L| &= |S_{N+} + S_{N-} - L| \\ &> \epsilon \end{aligned}$$

显然，与（1）式存在矛盾。所以 f_+ 是收敛的。同理可证 f_- 收敛。

★前提一定要是绝对收敛么？

是的。首先第二个等式用到了命题 7.4.3，而该命题的前提就是要求级数是绝对收敛的。

对于第一个等式，在刚刚（上一个）的证明过程中，用到了 $f_+, f_(-)$ 的收敛性。而在条件收敛中，是没有这个性质的，这里举一个反例

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$$

由命题 7.2.12（交错级数判别法）可知，该级数收敛。而级数 $f_+ := \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 是调和函数，是发散的（推论 7.3.7）。