7.3 习题

2024 年 10 月 2 日

7.3.1

如果 $\sum\limits_{n=m}^{\infty}$ 收敛，那么由命题 7.3.1 可知，存在一个实数 M 使得

$$\sum_{n=m}^{N} b_n \leq M$$

又由题设可知，对任意的 $n \geq m$ 均有 $|a_n| \leq b_n$，所以，

$$\sum_{n=m}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=m}^{N} b_n \leq M$$

由此可知，$\sum\limits_{n=m} \infty a_n$ 绝对收敛。

由命题 7.2.9 可知，

$$|\sum_{n=m}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$$

不妨设，$\sum\limits_{n=m}^{\infty} b_n$ 的部分和为 S_N，$\sum\limits_{n=m}^{\infty} |a_n|$ 的部分和为 S'_N。

因为对任意 N 都有 $S_N \geq S'_N$，所以，两个序列的极限满足，

$$\sum_{n=m}^{\infty} b_n \geq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$$

7.3.2

★$|x| \geq 1$ 时，

显然，$\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ 是发散的，由推论 7.2.6（零判别法）可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ 是发散的。

★$|x| < 1$ 时，

此时级数的部分和为

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

现在只需证明序列 $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ 的收敛性。

因为 $\lim\limits_{N\to\infty} 1 - x^{N+1} = 1$（为了逻辑的清晰性，一些显然的结论，会省略掉）

由极限定律（定理 6.1.19）可知，

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} S_N &= \lim_{N\to\infty} \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1}{1 - x}\end{aligned}$$

7.3.3

反证法，假设存在自然数 k，此时 $a_k \neq 0$。

由命题 7.2.14 可知，$\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} |a_n|$ 收敛于某个实数 $x(x \geq 0)$；

再次利用命题 7.2.14 可知，

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{k} |a_n| + \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|$$

因为 $a_k \neq 0$，所以 $|a_k| > 0$，于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \geq |a_k| + x > 0$，这与题设矛盾。