17.2 注释

张志聪

2025 年 5 月 16 日

说明 1. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 在点 x_0 处可微，那么，在 x_0 处 f 的分量函数也是可微的。

证明：

由可微性定义可知，存在线性变换 $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，使得以下极限存在：

$$\lim_{x\to x_0;} \frac{\|f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} = 0$$

把 f, L 写成 $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 和 $(L_1, L_2, \cdots, L_m)$，其中 $f_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和 $L_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。至于如何拆线性变换，书中 P355，已经说明：

$$L_A(x_j)_{1\le j\le n} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)_{1\le i\le m}$$

那么

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0;} \frac{\|f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \\
&= \lim_{x\to x_0;} \frac{\|(f_1(x),\cdots,f_m(x))-(f_1(x_0),\cdots,f_m(x_0))-(L_1(x-x_0)+\cdots+L_m(x-x_0))\|}{\|x-x_0\|} \\
&= \lim_{x\to x_0;} \frac{\|(f_1(x)-f_1(x_0)-L_1(x-x_0),\cdots,f_m(x)-f_m(x_0)-L_m(x-x_0))\|}{\|x-x_0\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $\|x-x_0\| \le \delta$，就有

$$\frac{\|(f_1(x)-f_1(x_0)-L_1(x-x_0),\cdots,f_m(x)-f_m(x_0)-L_m(x-x_0))\|}{\|x-x_0\|} < \epsilon$$

于是可得，任意分量 $(1 \le j \le m)$ 都有

$$\frac{\|f_j(x) - f_j(x_0) - L_j(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \le \epsilon$$

综上可得，在 x_0 处 f 的分量函数也是可微的，且 $f_j'(x_0) = L_j$。

说明 2. 如果 $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的一个线性变换，那么 l 在点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 处的导数如何确定。

证明：

由定义 17.2.2（可微性），问题就是找到一个线性变换 L，使得以下极限存在：

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|l(x) - l(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &= \lim_{x \to x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|l(x - x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &= 0\end{aligned}$$

令 $L = l$ 以上极限就可以存在，又由 17.2.4（导数的唯一性）可知，l 在 x_0 处的导数是其本身 l。

而且比较有趣的是：l 的在任何点的导数都是 l 本身，与点无关。和实数函数 $f(x) = cx$ 类似，导数都是 c，与 x 无关。