6.6 习题

2024 年 7 月 28 日

6.6.1

（1）自反性

定义 $f(n)=n$ 的函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的严格递增函数，使得

$$a_n = a_{f(n)} = a_n\text{对所有的 } n\in\mathbb{N} \text{ 均成立}$$

由定义 6.6.1 可知，此时 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的一个子序列。

（2）传递性

因为 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的子序列，那么存在一个函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的严格递增函数，使得

$$b_n = a_{f(n)}\text{对所有的 } n\in\mathbb{N} \text{ 均成立}$$

因为 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 的子序列，那么存在一个函数 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的严格递增函数，使得

$$c_n = b_{g(n)}\text{对所有的 } n\in\mathbb{N} \text{ 均成立}$$

因为 f 的值域与 g 的定义域是同一个集合，我们可以把 g,f 复合，得到函数 $g\circ f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，该函数是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的严格递增函数，使得

$$c_n = a_{(g\circ f)(n)}\text{对所有的 } n\in\mathbb{N} \text{ 均成立}$$

由定义 6.6.1 可知，此时 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的子序列