6.4 习题

2024 年 7 月 21 日

6.4.1

（1）序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c，那么对任意实数 $\epsilon > 0$，都是最终 $\epsilon-$ 接近于 c 的，即: 能够找到某个 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 c 的。并且对于任意 $N' \geq m$，取 $N_0 := max(N, N')$，此时 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 c 的，即：a_n 是 $\epsilon-$ 接近于 c，对 $n \geq N_0$ 均成立，所以 c 是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N'}^{\infty}$ 的。由 ϵ 的任意性，可知 c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

（2）反证法，存在另一个极限点 d，且 $d \neq c$。$(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c，那么对实数 $\epsilon > 0$，是最终 $\epsilon-$ 接近于 c 的。即: 能够找到 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 c 的。

同时 d 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点，那么，d 是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的，那么存在一个 $n \geq N$ 使得 a_n 是 $\epsilon-$ 接近于 d 的，如果 $d > c$，取 $0 < \epsilon < (d-c)/2$，此时，$|a_n - d| \leq \epsilon$ 与 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 无法同时满足，即 a_n 无法同时 $\epsilon-$ 接近于 c, d。

$d \leq c$ 同理。

6.4.2

这里只说明极限点和上极限，因为下极限的证明可以用上极限类推。

设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个实数序列，c 是一个实数，且 $m' \geq m$ 是一个整数，$k \geq 0$ 是一个非负整数。

（1）与习题 6.1.3 类似的结论

（1.1）c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 极限点，当且仅当 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 极限点。

$\Rightarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 极限点，当且仅当“对任意 $\epsilon>0$，对每一个 $N\geq m$，c 都是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的”，我们把引号中的性质定义声明为 P，即对任意 N，只要 $N\geq m$ 都具有性质 P。因为 $m'\geq m$，于是对任意 N，$N\geq m'\geq m$ 都具有性质 P，所以 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点。

$\Leftarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点。对任意 $\epsilon>0$，对每一个 N，

如果 $N\geq m'$，由于 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点，那么，c 都是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的；

如果 $m\leq N<m'$，我们要证明此时 c 也是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$，即：要证明存在一个 $n\geq N$ 使得 a_n 是 $\epsilon-$ 接近于 c。我们可以取 $n\geq m'$，那么 n 也是大于 N，还是由 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点，保证了 n 的存在性。

综上 c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

（1.2）c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限，当且仅当 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限。

$\Rightarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限，即：序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的下确界是 c。序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集。

反证法，假设 c 不是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限，设 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限是 c'【这里其实要证明 c' 的存在性。可以通过以下命题得到 c' 是存在的：**有上界序列存在实数上极限，否则上极限不是实数，而是 $+\infty$**】。

如果 $c'>c$，那么，存在 $m\leq N_0<m'$ 使得 $c\leq a_{N_0}^+<c'$，因为 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的子集，所以 $sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})\leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，又因为 $c'\leq sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})$，于是 $c'\leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，即：$c'\leq a_{N_0}^+$。这与 $c\leq a_{N_0}^+<c'$ 矛盾。

如果 $c>c'$，因为序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集，所以 $inf((a_N^+)_{N=m'}^{\infty})\geq inf((a_N^+)_{N=m}^{\infty})$，即：$c'\geq c$，这与 $c>c'$ 矛盾。

综上，$c=c'$。

$\Leftarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限，即：序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 的下确界是 c。序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集。

反证法，假设 c 不是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限，设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限是 c'。

如果 $c>c'$，那么，存在 $m\leq N_0<m'$ 使得 $c'\leq a_{N_0}^+<c$，因为 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的子集，所以 $sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})\leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，又因为 $c\leq sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})$，于是 $c\leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，即：$c<a_{N_0}^+$。这与 $c'\leq a_{N_0}^+<c$ 矛盾。

如果 $c<c'$，因为序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集，所以 $inf((a_N^+)_{N=m'}^{\infty})\geq inf((a_N^+)_{N=m}^{\infty})$，即：$c'\geq c$，这与 $c<c'$ 矛盾。

综上，$c = c'$。

与习题 6.1.4 类似的结论

该问题是 6.1.3 的拓展，这里我只证明一种情况。

（2.1）c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点，当且仅当 c 是 $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

如果我们能证明 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 与 $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 相等的，然后通过（1.1）就可以证明该命题，接下来我们证明这两个序列的相等的。

通过定义 5.5.1 可知，序列就是函数，是一个从集合 Z 到 R 的函数。于是我们要证明两个序列相等，只需要证明其对应函数相等。通过定义 3.3.7（函数的相等）来进行接下来的证明。

设 $f : N \to R$ 为函数 $f(n) = a_{n+k}$，设 $g : N \to N$ 为函数 $g(m) = m$。那么 $f \circ g = f(g(m)) = a_{g(m)+k} = a_{m+k}$。

设 $f' : N \to R$ 为函数 $f'(n) = a_n$，设 $g' : N \to N$ 为函数 $g'(m) = m+k$。那么 $f' \circ g' = f'(g'(m)) = a_{m+k}$。

由 $f \circ g, f' \circ g'$ 的构造过程可知两个具有相同的定义域，又对于任意的 $x \in N$，$f \circ g(x) = a_{x+k}, f' \circ g'(x) = a_{x+k}$，所以 $f \circ g(x) = f' \circ g'(x)$，由此可知两个函数相等，即两个序列相等。

6.4.3

不妨设 $E := \{a_n : n \geq m\}$，$M = sup(E), M' = inf(E)$。

（c）

由例 6.2.10 可知 $M \geq M'$，接下来我只证明 $L^+ \leq M$（可以类推 $M' \leq L^-$）和 $L^- \leq L+$。

反证法，假设 $L^+ > M$。由命题 6.3.6 可知对任意 $n \geq m$，都有 $a_n \leq M$。因为 $L^+ := inf(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 则也由命题 6.3.6 可知存在 $N \geq m$ 使得 $a_N^+ > L^+$，由 $a_N^+ := sup(a_n)_{n=N}^{\infty}$，可知存在 $n \geq N$ 使得 $a_n > L^+$，这与任意 $a_n \leq M$ 矛盾。

反证法，假设 $L^- > L^+$，由 $L^- := sup(a_N^-)_{N=m}^{\infty}$ 可知存在 $N_0 \geq m$ 使得 $a_{N_0}^- > L^+$，由因为 $L^+ := inf(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$，所以存在 $N_1 \geq m$ 使得 $a_{N_0}^- > a_{N_1}^+$【否则上极限就不是 L^+ 了，而是一个大于等于 $a_{N_0}^-$ 的数了】。由 $a_{N_0}^- := inf(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 定义，可知对 $n \geq N_0$ 都有 $a_n \geq a_{N_0}^-$，由 $a_{N_1}^+ := sup(a_n)_{n=N_1}^{\infty}$ 定义，可知对 $n \geq N_1$ 都有 $a_n \leq a_{N_1}^+$，取 $n \geq max(N_0, N_1)$ 此时 $a_{N_0}^- \leq a_n \leq a_{N_1}^+$，这与 $a_{N_0}^- > a_{N_1}^+$ 矛盾。

（d）

这里我只证明 $c \leq L^+$，因为 $L^- \leq c$ 可以类推。

反证法，假设 $c > L^+$，由 $L^+ := inf(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 可知，由命题 6.3.6 可知，存在 $N_0 \geq m$ 使得 $a_{N_0}^+ < c$，又因为 $a_{N_0}^+ := sup(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$，所以任意 $n \geq N_0$ 都有 $a_n \leq a_{N_0}^+$，由此可知，

$$\begin{aligned}|c - a_n| &= |c - a_{N_0}^+ + a_{N_0}^+ - a_n| \\ &= |c - a_{N_0}^+| + |a_{N_0}^+ - a_n| \\ &> |c - a_{N_0}^+|\end{aligned}$$

此时 c, a_n 的距离总是大于 $|c - a_{N_0}^+|$，这与 c 是极限点的定义矛盾。

（e）

这里我只证明 L^+ 是极限点，因为 L^- 可以类推。

反证法，假设 L^+ 不是极限点，那么通过极限点的定义 6.4.1 可知，存在 $\epsilon > 0, N_0 \geq m$，此时 L^+ 不是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的，即对任意 $n \geq N_0$，都有，

$$\begin{aligned}&|L^+ - a_n| > \epsilon \\ &\Rightarrow \\ &a_n > L^+ + \epsilon \text{或} a_n < L^+ - \epsilon\end{aligned}$$

因为 $L^+ := inf(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$，那么对任意 $N \geq m$ 都有 $a_N^+ \geq L^+$。又 $a_N^+ := sup(a_n)_{n=N}^{\infty}$。综上，我们可以得到，对任意 $N \geq m, n \geq N$ 都有：

$$\begin{cases} a_n \leq a_N^+ \\ L^+ \leq a_N^+ \end{cases} \tag{1}$$

（1）如果 $n \geq N_0, a_n > L^+ + \epsilon$，那么，

$$a_N^+ \geq a_n > L^+ + \epsilon$$

而对于哪些 $N < N_0$，由 a_N^+ 的定义可知，$a_N + \geq a_{N_0}^+$，于是此时 $L^+ + \epsilon$ 是上极限，这与下确界的唯一性矛盾（上极限其实就是集合的下确界）。

（2）如果 $n \geq N_0, a_n < L^+ - \epsilon$，由此可知，$N \geq N_0$ 时，

$$a_N^+ \leq L^+ - \epsilon$$

这与 $L^+ \leq a_N^+$ 矛盾。