14.1 习题

张志聪

2025 年 3 月 10 日

14.1.1

修改下证明顺序。

（1）如果极限 $\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x)$ 存在，那么它一定等于 $f(x_0)$。

反证法，假设 $\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L, L \neq f(x_0)$。因为极限 $\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$ 可知，设 $0 < \epsilon < d_Y(f(x_0), L)$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $x \in E$ 满足 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有 $d_Y(f(x), L) < \epsilon$。因为 $x_0 \in E, d_X(x_0, x_0) = 0 < \delta$，即 $x = x_0$ 时 $d_Y(f(x), L) > \epsilon$，存在矛盾。

（2）证明：极限 $\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x)$ 存在，当且仅当极限 $\lim_{x \to x_0; x \in E \setminus \{x_0\}} f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$。

- $\Rightarrow$

  极限 $\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x)$ 存在，按照定义 14.1.1 可知，极限 $\lim_{x \to x_0; x \in E \setminus \{x_0\}} f(x)$ 存在。接下来，需要证明 $\lim_{x \to x_0; x \in E \setminus \{x_0\}} f(x) = f(x_0)$。

  反证法，假设 $\lim_{x \to x_0; x \in E \setminus \{x_0\}} f(x) = L, f(x_0) \neq L$。

  由（1）可知，$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = f(x_0)$。

  那么，设 $\epsilon = \frac{1}{2} d_Y(f(x_0), L)$，存在 $\delta' > 0$，使得只要 $x \in E$ 满足 $d_X(x, x_0) < \delta'$，就有 $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$。

  存在 $\delta'' > 0$，使得只要 $x \in E$ 满足 $0 < d_X(x, x_0) < \delta''$，就有 $d_Y(f(x), L) < \epsilon$

  综上，取 $\delta = min(\delta', \delta'')$，使得只要 $x \in E$ 满足 $0 < d_X(x, x_0) < \delta$，

就有

$$\begin{cases} d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon \\ d_Y(f(x), L) < \epsilon \end{cases}$$

于是可得

$$d_Y(f(x_0), L) \le d_Y(f(x), f(x_0)) + d_Y(f(x), L) < d_Y(f(x_0), L)$$

存在矛盾。

- $\Leftarrow$

  按照定义 14.1.1 可以直接证明，具体过程略。

14.1.2

- $(a) \Leftrightarrow (b)$

  与定理 13.1.4 证明相似，不做赘述。

- $(a) \implies (c)$

  因为 V 是开集且 $L \in V$，所以存在 $r > 0$ 使得 $B_{(Y,d_Y)}(L, r) \subseteq V$。因为 (a) 成立，所以存在 $\delta > 0$ 使得只要 $x \in E$ 满足 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有 $d_Y(f(x), L) < r$。

  令 $U := B_{(X,d_X)}(x_0, \delta), U \subset X$。对任意 $x \in U \cap E$，都有 $x \in E$ 且 $d_X(x, x_0) < \delta$，于是 $d_Y(f(x), L) < r$，即 $f(x) \in B_{(Y,d_Y)}(L, r) \subseteq V$。所以，$f(U \cap E) \subseteq V$。

- $(c) \implies (a)$

  设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列。任意 $\epsilon > 0$，令 $V := B_{(Y,d_Y)}(L, \epsilon)$，由 (c) 可知，存在一个包含 x_0 的开集 $U \subset X$，使得 $f(U \cap E) \subseteq V$。

  因为 U 是开集，所以存在 $\delta > 0$ 使得 $B_{(X,d_X)}(x_0, \delta) \subseteq U$。序列 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列，所以存在 $N \ge 1$ 使得

  $$d_X(x_0, x^{(n)}) < \delta$$

  对所有的 $n \ge N$ 均成立。

于是对 $n \geq N$，有 $x^{(n)} \in B_{(X,d_X)}(x_0, \delta) \subseteq U, x^{(n)} \in E$，此时，

$$f(x^{(n)}) \in V$$

即，对任意 $n \geq N$ 都有

$$d_Y(f(x^{(n)}), L) < \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知，$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 L。

- $(a) \implies (d)$

  (a) 成立，那么，对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得只要 $x \in E$ 满足 $d_X(x, x_0) < \delta$,就有 $d_Y(f(x), L) < \epsilon$。因为 $x \in E \backslash \{x_0\}$ 时 $g(x) = f(x)$，所以，以上性质函数 g 也成立。

  现在只需再额外考虑 $x = x_0$ 是否满足定义要求即可。$d_X(x_0, x_0) = 0 < \delta$，此时

  $$d_Y(g(x), L) = d_Y(g(x_0), L) = d_Y(L, L) = 0 < \epsilon$$

  于是可得

  $$\lim_{x \to x_0; x \in E \cup \{x_0\}} g(x) = L = g(x_0)$$

  所以，g 在 x_0 处是连续的。

  特别地，$x \in E$，由习题 14.1.1 可知 $f(x_0) = L$。

- $(d) \implies (a)$

  如果 $x_0 \notin E$，则 $E \setminus \{x_0\} = E$，由 g 在 x_0 处连续，我们有

  $$\lim_{x \to x_0; x \in E \setminus \{x_0\}} g(x) = \lim_{x \to x_0; x \in E} g(x) = \lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = g(x_0) = L$$

  如果 $x_0 \in E$，由 g 在 x_0 处连续，我们有

  $$\lim_{x \to x_0; x \in E \setminus \{x_0\}} g(x) = \lim_{x \to x_0; x \in E \setminus \{x_0\}} f(x) = g(x_0) = f(x_0)$$

  利用习题 14.1.1 可知，

  $$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = f(x_0)$$

14.1.3

关于拓扑空间的部分，跳过

14.1.4

关于拓扑空间的部分，跳过

14.1.5

设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列，由命题 14.1.5(b) 可知，我们只需证明序列 $(g(f(x^n)))_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 z_0 即可。

$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = y_0$，由命题 14.1.5(b) 可知序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_Y 收敛于 y_0。$\lim_{y \to y_0; y \in f(E)} g(y) = z_0$，由命题 14.1.5(b) 可知序列 $(g(f(x^{(n)})))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_Z 收敛于 z_0。

14.1.6

（1）9.3.14 在度量空间下的类比：

设 (X, d_X) 是度量空间，E 是 X 的一个子集，x_0 是 E 的附着点，并且设 $f : X \to \mathbb{R}$ 和 $g : X \to \mathbb{R}$ 都是函数。假设 f 在 x_0 处沿着 E 有极限 L，并且 g 在 x_0 处沿着 E 有极限 M，那么 $f + g$ 在 x_0 处沿着 E 有极限 $L + M$，$f - g$ 在 x_0 处沿着 E 有极限 $L - M$，$max(f, g)$ 在 x_0 处沿着 E 有极限 $max(L, M)$，$min(f, g)$ 在 x_0 处沿着 E 有极限 $min(L, M)$，而且 fg 在 x_0 处沿着 E 有极限 fg。如果 c 是一个实数，那么 cf 在 x_0 处沿着 E 有极限 cf。最后，如果 g 在 E 上不为零（即对一切的 $x \in E$ 均有 $g(x) \neq 0$）并且 M 不等于 0，那么 f/g 在 x_0 处沿着 E 有极限 f/g。

（2）证明

我们只证明第一个结论（即 $f + g$ 有极限 $L + M$），其余结论的证明非常类似。

因为 x_0 是 E 的一个附着点，那么根据引理 9.1.14（更准确的说，是度量空间下的推广）可知，存在一个由 E 中的元素构成的序列 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$，它是收敛于 x_0 的。由于 f 在 x_0 处沿着 E 有极限 L，由命题 14.1.15(b) 可知

存在一个由 $f(x_n)$ 组成的序列 $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$，它是收敛于 L 的。由于 g 在 x_0 处沿着 E 有极限 M，由命题 14.1.15(b) 可知存在一个由 $g(x_n)$ 组成的序列 $(g(x_n))_{n=0}^{\infty}$。根据序列的极限定律（定理 6.1.19），我们推导出 $((f+g)(x_n))_{n=0}^{\infty}$ 是收敛于 $L+M$ 的。