3.6 习题

2024 年 3 月 23 日

3.6.1

证明.

①X 和 X 有相等的基数。

构造一个从 X 到 X 的函数 f，使得 $f(x)=x$（$\{x \in X\}$）。函数 f 是双射函数，是显而易见的，这里不做证明了。

②如果 X 和 Y 有相等的基数，那么 Y 和 X 有相等的基数。

有 X 和 Y 有相等的基数，可知存在一个双射：$f : X \to Y$。那么存在 f 的逆 $f^{-1} : Y \to X$，由逆的定义可知 f^{-1} 是双射函数。

③如果 X 和 Y 有相等的基数且 Y 和 Z 有相等的基数，那么 X 和 Z 有相等的基数。

由 X 和 Y 有相等的基数，可知存在一个双射：$f : X \to Y$。由 Y 和 Z 有相等的基数，可知存在一个双射：$g : Y \to Z$。那么 g 和 f 的复合函数为 $g \circ f : X \to Z$。

由习题 *3.3.7* 可知 $g \circ f$ 是双射函数。由此可知存在一个双射：$g \circ f : X \to Z$，所以 X 和 Z 有相等的基数。

3.6.2

证明.

①充分性：一个集合 X 的基数为 *0*，则 X 是空集。

那么存在从 X 到 $\{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$ 的双射：$f : X \to \{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$。而 $\{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$ 是 $\varnothing$，即 $f : X \to \varnothing$。如果 X 不是空集，那么则存在一个 $x \in X$ 使得 $f(x) \in \varnothing$，这显然是不成立的，所以 X 是空集

②必要性：X 是空集，则 X 的基数为 *0*。

若 X 是空集，由习题 *3.3.3* 知 $f:\varnothing\to\varnothing$ 为双射，而 $\{i\in N:1\le i\le 0\}=\varnothing$，即存在双射函数 $f:\varnothing\to\{i\in N:1\le i\le 0\}$，由定义 *3.6.5* 可知集合 X 基数为 *0.*

3.6.3

证明.
对 n 进行归纳：

n=0 时，f 是空函数，命题空成立。

归纳假设 *n=k* 时，命题成立。

下面我们证明该命题对于 *k++* 也为真。设集合 $N_k=\{i\in \mathsf{N}:1\le i\le k\}, N_{k++}=\{i\in \mathsf{N}:1\le i\le k++\}$。函数 $f_{k++}:N_{k++}\to N$ 是一个函数，我们可以由 f_{k++} 定义出一个函数 $f_k:N_k\to N$，对任意 $i\in N_k, f_k(i)=f_{k++}(i)$。由归纳假设可知，存在一个自然数 M 使得 $f_k(i)\le M, i\in N_k$，即 $f_{k++}(i)\le M, i\in N_k$，此时我们可以取 $f_{k++}(k++), M$ 中的较大值为 M'，由此可知该 M' 使得 $f_{k++}(i)\le M', i\in N_{k++}$。归纳法完成。

3.6.4

（a）设 X 是一个有限集，设 x 是一个对象并且 x 不是 X 中的元素。那么 $X\cup\{x\}$ 是有限的，且 $\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$

证明.
X 是有限集，不妨设 X 的基数是自然数 n。因此存在从 X 到 $\{i\in N:1\le i\le n\}$ 的双射函数 f。定义出一个函数 $g:X\cup\{x\}\to\{i\in N:1\le i\le n{+}1\}$，使得 $g(x)=n+1$，$g(i)=f(i), i\in X$。由 g 的定义可知其是双射函数，且 $X\cup\{x\}$ 的基数是 *n+1*，所以 $X\cup\{x\}$ 是有限的，且 $\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$

（b）设 X 和 Y 都是有限集，那么 $X\cup Y$ 是有限的，且 $\#(X\cup Y)\le \#(X)+\#(Y)$。另外，如果 X 和 Y 是不相交的（即 $X\cap Y=\varnothing$），那么 $\#(X\cup Y)=\#(X)+\#(Y)$

证明.
X 和 Y 都是有限集，不妨设 X 和 Y 的基数分别为 m 和 n。通过对 n 进行归纳，完成证明；

n=0 时，即 Y 的基数是 *0*，也就是说 $Y=\varnothing$，$X\cup Y=X\cup\varnothing=X$，此时（$b$）命题显然是成立的。

归纳假设 $n{=}k$ 时，（b）命题成立。

现在需证明 $n{=}k{+}{+}$，任取 $x \in Y, Z = Y\backslash\{x\}$，由引理 *3.6.9* 可知，$Z$ 的基数为 k，由归纳假设可知，X 与 Z 满足命题（b），由此可知 $X \cup Z$ 是有限的；

$X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\}$。

① $X \cap Y = \varnothing$，由此可知 $x \notin X \cup Z$，且由归纳假设知 $\#(X \cup Z) = \#(X) + \#(Z)$。由命题（$a$）可知 $X \cup Z \cup \{x\}$ 是有限的，且 $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$，即 $X \cup Y$ 是有限的，且 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 = \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$，即 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$；

② $X \cap Y \neq \varnothing$

如果 $x \in X \cup Z$ 则 $X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\} = X \cup Z$，即 $X \cup Y = X \cup Z$ 由于同一集合只有一个基数，所以 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z)$，又由归纳假设可知 $\#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Z)$，所以 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$。

如果 $x \notin X \cup Z$,（由 $X \cap Y \neq \varnothing$,则必须 $X \cap Z \neq \varnothing$ 否则与假设矛盾,所以 $\#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Z)$）由命题（$a$）可知 $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$，即 $X \cup Y$ 是有限的，且 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 \leq \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$，即 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$；

综上，$n{=}k{+}{+}$ 情况也成立，至此，（b）命题成立。

（c）设 X 是一个有限集，Y 是 X 的一个子集。那么 Y 是有限的，且 $\#(Y) \leq \#(X)$。另外，如果 $Y \neq X$（即 Y 是 X 的一个真子集），那么我们有 $\#(Y) < \#(X)$。

证明.

对 X 的基数进行归纳。

X 的基数为 *0*，即 $X = \varnothing$，此时 Y 是 X 的子集，则 $Y = \varnothing$，很明显 Y 是有限的（基数是 *0*），且 $\#(Y) \leq \#(X)$。而命题的后半部分，因为空集不存在真子集，所以空成立。

归纳假设 $n{=}k$ 时，X 的基数为 k，命题（c）成立。

现需证明 $n{=}k{+}{+}$，命题（c）成立。若 $Y = X$ 显然 $\#(Y) \leq \#(X)$；若 $Y \neq X$，则存在 $x \in X$，使得 $Y \subseteq (X\backslash x)$，由归纳假设可知 $\#(Y) \leq \#(X\backslash x)$，由引理 *3.6.9* 可知 $\#(Y) < \#(X)$。

综上命题（c）成立。

（d）如果 X 是一个有限集，并且 $f : X \to Y$ 是一个函数，那么 $f(X)$

是一个有限集并且满足 $\#(f(X)) \leq \#(X)$。另外，如果 f 是一对一的，那么 $\#(f(X)) = \#(X)$。

证明.
对 X 的基数 n 进行归纳；

归纳基始 *n=0*，即 $X = \varnothing$，由定义 *3.4.1*（集合的像）可知 $f(X) = \varnothing$，即 $\#(f(X)) = 0$，此时命题（d）成立

n=k++ 时，设 $X' = X \backslash \{x\}$，由归纳假设可知 $\#(f(X')) \leq \#(X')$，

① $f(X') = f(X)$，则 $\#(f(X)) = \#(f(X')) \leq \#(X') < \#(X)$。此时 f 不是双射，命题后半部分空成立。

② $f(X') \subsetneq f(X)$ 则 $f(x) \notin f(X')$，且 $f(X) = f(X') \cup f(x)$，由命题（a）可知 $\#(f(X)) = \#(f(X')) + 1$，有 $\#(X) = \#(X') + 1$，所以由归纳假设 $\#(f(X')) \leq \#(X')$ 可知 $\#(f(X')) + 1 \leq \#(X') + 1$，即 $\#(f(X)) \leq \#(X)$；若 f 是一对一的，则 $X' \backslash \{x\} \to Y \backslash \{f(x)\}$ 也是一对一，由归纳假设知 $\#(f(X')) = \#(X')$，由此可知 $\#(f(X')) + 1 = \#(X') + 1$，$\#(f(X)) = \#(X)$。综上，*n=k++* 时命题（$d$）成立。

至此，命题成立

（e）设 X 和 Y 都是有限集，那么笛卡尔积 $X \times Y$ 是有限的并且 $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$。

证明.
设 X, Y 的基数分别为 n、m，对 n 进行归纳。

归纳基始 *n=0*，即 X 是空集，有笛卡尔积的定义可知，$X \times Y = \varnothing$，由此可知 $\#(X \times Y) = 0$，且 $X \times Y$ 是有限的。又 $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y) = 0$，所以 *n=0* 时，命题（$e$）成立。

n=k++ 时，设对任意 $x \in X$，构造 $X' = X \backslash \{x\}$，由习题 *3.5.5* 可知 $X \times Y = (X' \cup \{x\}) \times (Y \cup Y) = (X' \times Y) \cup (\{x\} \times Y)$，由笛卡尔积的定义可知 $(X' \times Y) \cap (\{x\} \times Y) = \varnothing$，由（$b$）可知，$\#((X' \times Y) \cup (\{x\} \times Y)) = \#(X' \times Y) + \#(\{x\} \times Y)$ 由归纳假设可知 $\#(X' \times Y) = \#(X') \times \#(Y)$，现在只需证明 $\#(\{x\} \times Y) = \#(Y)$，命题就能完成证明。(在直觉上是显然的，但为了严谨性，还是需要证明)，要想证明基数相同，按照定义 *3.6.1* 只需找到从 $(\{x\} \times Y)$ 到 Y 的一个双射函数 $f : (\{x\} \times Y) \to Y$。可以定义 f 如下：$f((x, y)) = y, (x, y) \in (\{x\} \times Y)$，这里的 f 是双射性是显然的，为了简洁不做说明了。由此可知 $\#(X \times Y) = \#(X' \times Y) + \#(\{x\} \times Y) = \#(X' \times Y) + \#(Y)$

$=\#(X')\times\#(Y)+\#(Y)=(\#(X')++)\times\#(Y)=\#(X)\times\#(Y)$，$n$=$k$++ 时命题（$e$）成立。

至此归纳完成，命题（e）得到证明。

（f）设 X 和 Y 都是有限集，那么集合 Y^X（在公理 3.10 中被定义）是有限的，并且 $\#(Y^X)=\#(Y)^{\#(X)}$

证明.

公理 *3.10* 中对幂集公理的定义，很难定量分析，我们使用其他公理对幂集公理重新定义。

I 为一个集合，并对每一个元素 $y_0\in I$ 均有一个集合 A_{y_0}，$A_{y_0}=\{\{f\text{是 } X \text{ 到 } Y \text{ 的函数}, f(x_0)=y_0\}:y_0\in Y\}$ 幂集定义如下：$W=\bigcup\limits_{y\in I}A_y=\cup\{A_y:y\in I\}$

现在需要证明该定义和幂集公理的等价性。

$f\in W\Leftrightarrow$ 存在$y\in I$使得$f\in A_y$，由此可知 f是 X 到 Y 的函数，所以 $f\in Y^X$。

$f\in Y^X$，由于 f 是 X 到 Y 的函数，则对 $x_0\in X$ 有 $y=f(x_0)$，$y\in Y$，所以 $f\in A_y$，所以 $f\in W$。

综上可证该定义和幂集公理的等价性。

设 X,Y 的基数分别为 n、m，通过对 n 进行归纳，证明该命题。

归纳基始 n=*0*，即 $X=\varnothing$，而 $f:\varnothing\to Y$ 的函数，由函数相等的定义可知是唯一的，所以 $\#(Y^X)=1,\#(Y)^{\#(X)}=m^0=1$，由此可知 $\#(Y^X)=\#(Y)^{\#(X)}$，在 n=*0* 时命题（f）成立

n=k++ 时，设 $X'=X\backslash\{x_0\},x_0\in X$，证明 $\#(A_y)=\#(Y^{X'})$，函数 $G:A_y\to Y^{X'}$，定义如下：$g=G(f),x\in X',f(x)=g(x)$。

证明函数 G 的定义是合法，即证明 g 的唯一性，假设存在 g 满足定义，即对任意 $f\in A_y$，存在 $g'(x)=f(x)=g(x)$，由函数相等的定义可知 $g=g'$，g 的唯一性得证。

证明 G 是双射的，先证明单射，如果 G 不是单射，则存在 $f_1\neq f_2$，有相同的函数值 g，由于 $f_1\neq f_2$ 所以存在 $x\in X',f_1(x)\neq f_2(x)$，有 G 的定义可知 $g(x)=f_1(x)=f_2(x)$，这与 $f_1(x)\neq f_2(x)$ 矛盾，所以 G 是单射。

证明 G 是满射的，对任意函数值 $g\in Y^{X'}$，可以定义出一个函数 $f:X\to Y,f(x_0)=y,f(x)=g(x)$，该函数 $f\in A_y$，所以 G 是满射的。

由此可知 $\#(A_y)=\#(Y^{X'})=m^k$

由 A_y 的定义方式可知是不相交的，即对任意 $y_0 \neq y_1, A_{y_0} \cap A_{y_1} = \varnothing$，由（$b$）可知 $\#(W) = \sum_{y \in I} \#(A_y) = m \times \#(Y^{X'}) = m \times (m^k) = m^{k++}$，由此可知 n=k++ 命题（f）也成立。

至此命题（f）成立。