5.2 习题

2024 年 5 月 19 日

5.2.1

证明：

有理数 $\delta > 0, \epsilon = \frac{2}{3}\delta > 0$。由于 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列，所以存在一个 $N_a \geq 0$ 使得 $d(a_j, a_k) \leq \frac{1}{2}\epsilon$ 对所有 $j, k \geq N_a$ 均成立。

由于 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的，所以存在一个 $N_m \geq 0$ 使得 $d(a_n - b_n) \leq \frac{1}{2}\epsilon$ 对所有 $n \geq N_m$ 均成立。

取 $M = max(N_a, N_m)$，所以当取 $j, k \geq M$ 时，

$$
\begin{aligned}
&|(a_j - b_j) - (a_k - b_k)| \leq |a_j - b_j| + |a_k - b_k| \leq \epsilon \\
&|(a_j - b_j) - (a_k - b_k)| = |a_j - a_k + b_k - b_j| \geq |b_k - b_j| - |a_j - a_k| \\
&\qquad \Rightarrow \epsilon + |a_j - a_k| \geq |b_k - b_j| \\
&\qquad\qquad \Rightarrow \frac{3}{2}\epsilon \geq |b_k - b_j|
\end{aligned}
$$

由此可知 $|b_k - b_j| \leq \frac{3}{2}\epsilon = \delta$，所以 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是柯西序列

5.2.2

证明：

（1）充分性

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有界的，那么存在 $M \geq 0$ 使得 $|a_i| \leq M$ 对任意的 $i \leq 1$ 均成立。

由于 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的，所以存在一个 $N_m \geq 0$ 使得 $d(a_n - b_n) \leq \epsilon$ 对所有 $n \geq N_m$ 均成立。又因为，

$$|b_n| - |a_n| \leq |a_n - b_n| \leq \epsilon$$
$$|b_n| \leq \epsilon + |a_n|$$
$$|b_n| \leq \epsilon + M$$

且 $b_1, b_2, b_3, ..., b_{N_m}$ 是有限序列，所以 $b_1, b_2, b_3, ..., b_m$ 也是有界的。综上，$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有界的。

（2）必要性

必要性的证明和充分性的证明类似。