17.7 注释

张志聪

2025 年 5 月 16 日

说明 1. “化归”技巧，用于将一般问题转化为已解决的特殊问题：

- *(1)* 只证明 $f(x_0) = 0$，如何解决一般性问题？
- *(2)* 只证明 $x_0 = 0$，如何解决一般性问题？

证明：

- (1)

  对于一般的 f，即 x_0 处 $f(x_0) \neq 0$ 的情况，通过把 f 替换成

  $$\tilde{f} := f(x) - f(x_0)$$

  此时，$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$，其他 $x \in E, x \neq x_0$ 的情况下

  $$\tilde{f}(x) = f(x) - f(x_0)$$

  这里要知道，$f(x_0)$ 是定值，于是可知，相比于我们要研究的 f 本身，$\tilde{f}(x)$ 的值域发生了偏移，相对于 f，偏移了 $f(x_0)$（注意：不一定向左，因为 $f(x_0)$ 的正负不确定）。

  至于反函数，设 $f(x) = y$，于是 $f^{-1}(y) = x$，我们有

  $$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= x \\ &= \tilde{f}^{-1}(f(x) - f(x_0)) \\ &= \tilde{f}^{-1}(y - f(x_0)) \end{aligned}$$

  综上，我们可以通过研究 $\tilde{f}$ 来了解 f。

- (2)

  对于一般的 f，我们讨论的 x_0 可能不等于 0。通过把 f 替换成

  $$\tilde{f}(x) := f(x + x_0)$$

  此时，$\tilde{f}(0) = f(0 + x_0) = f(x_0)$，于是对 f 在 x_0 处的研究，就转变成了对 $\tilde{f}$ 在 0 点处的研究。

  这样的替换是有副作用的，因为 $x \in E$，那么 $x + x_0$ 则相对于 E 平移了 x_0。

  值域反函数，设 $f(x + x_0) = y$，于是 $f^{-1}(y) = x + x_0$，我们有

  $$\begin{aligned} f^{-1}(y) - x_0 &= x \\ &= \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x)) \\ &= \tilde{f}^{-1}(f(x + x_0)) \\ &= \tilde{f}^{-1}(y) \end{aligned}$$

  于是 $f^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(y) + x_0$。

  综上，我们可以通过研究 $\tilde{f}$ 来了解 f。

说明 2. 书中 $I'(x_0) = I$ 什么意思？

说明：

首先，$I'(x_0)$，I 在 x_0 处的 $n \times n$ 导数矩阵，所以，我们可以确定 I 是 $n \times n$ 矩阵。

对任意 $1 \le j \le n$，我们有，

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x_j}(x_0) &= \lim_{t \to 0; t \neq 0} \frac{I(x_0 + te_j) - I(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0; t \neq 0} \frac{x_0 + te_j - x_0}{t} \\ &= e_j \end{aligned}$$

于是

$$I = \begin{pmatrix} (e_1)^T & (e_2)^T & \cdots & (e_n)^T \end{pmatrix}$$

所以，I 是单位矩阵（对角线元素都是 1，其余元素都是 0）。

在线性代数中，如果矩阵 A, B 满足:

$$AB = I$$

那么，A 是 B 的左逆矩阵，B 是 A 的右逆矩阵，记为:

$$A = B^{-1}, B = A^{-1}$$

所以，书中得到结论：

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}$$

说明 3. 书中：最后，假设 $f'(0) = I$，其中 $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是恒等变换 $I(x) = x$。此时，我们把 f 替换成定义为 $\tilde{f}(x) := f'(0)^{-1}f(x)$ 的新函数 $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}^n$，并对它应用 $f'(0) = I$ 时的结果，这样就得到了一般情形下的结论。

证明：

问题的核心是：为什么通过定义 $\tilde{f}(x) := f'(0)^{-1}f(x)$，并利用 $f'(0) = I$ 时的结果，可以推广到一般情形？

在特殊情况下才会有 $f'(0) = I$，一般情况下是不具备这个特性的。但由题设可知 $f'(0)$ 是可逆的，即：设 $A = f'(0)$，则 A^{-1} 存在。$\tilde{f}$ 被定义为 $A^{-1}f(x)$，这样做的目的是让 $\tilde{f}$ 在 $x = 0$ 处的导数是单位矩阵：

$$\tilde{f}'(0) = A^{-1}f'(0) = A^{-1}A = I$$

以上利用了链式法则，且线性变换 A^{-1} 的导数是其本身 A^{-1}（这部分在 17.2.2-comment 中有说明）。

说明 4.

$$f^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(f'(0)^{-1}y)$$

证明：

因为 f 是双射，对任意 y 存在唯一的 x 使得 $y = f(x)$，即

$$y = f(x) = f'(0)\tilde{f}(x)$$

于是

$$f^{-1}(y) = x$$

接下来，我们需要证明 $\tilde{f}^{-1}(f'(0)^{-1}y) = x$。

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^{-1}(f'(0)^{-1}y) &= \tilde{f}^{-1}(f'(0)^{-1}f(x)) \\
&= \tilde{f}^{-1}(f'(0)^{-1}f'(0)\tilde{f}(x)) \\
&= \tilde{f}^{-1}(I\tilde{f}(x)) \\
&= \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x)) \\
&= x
\end{aligned}$$

综上，等式成立。

说明 5. V 是一个开集，f 是连续的且可逆的，那么 $U = f^{-1}(V)$ 也是开集。

证明：

首先，由题设可知 f 是单射和满射。

对任意的 $x_0 \in U$，$f(x_0) \in V$，因为 V 是开集，存在 $\epsilon > 0$，使得 $B(f(x_0), \epsilon) \subseteq V$。

因为 f 连续，所以存在 $\delta > 0$，使得只要 $|x - x_0| < \delta$ 就有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

综上可得，任意 $x \in B(x_0, \delta)$，都有

$$\begin{aligned}
f(x) &\in V \\
&\Longrightarrow \\
x &\in U \\
&\Longrightarrow \\
B(x_0, \delta) &\subseteq U
\end{aligned}$$

由开集的定义（命题 12.2.15(a)）可知，U 是开集。