

12.2 习题

张志聪

2025 年 1 月 17 日

12.2.1

任意 $x_0 \in X$, 要么 $x_0 \in E$ 要么 $x_0 \notin E$ 。

- $x_0 \in E$

任意 $0 < r < 1$, 由 d_{disc} 度量的定义可知, $B(x_0, r) = \{x_0\}$, 所以 $B(x_0, r) \subseteq E$, 所以 x_0 是 E 的内点。

- $x_0 \notin E$

任意 $0 < r < 1$, 由 d_{disc} 度量的定义可知, $B(x_0, r) = \{x_0\}$, 所以 $B(x_0, r) \cap E = \emptyset$, 所以 x_0 是 E 的外点。

12.2.2

证明路径: $(a) \implies (b) \implies (c) \implies (a)$

- $(a) \implies (b)$

由闭包的定义 (定义 12.2.9) 可知, 如果 (a) 成立, 那么对任意的半径 $r > 0$, 球 $B(x_0, r)$ 与 E 的交集总是非空的。所以 x_0 不可能是 E 的外点。

球 $B(x_0, r)$ 与 E 的交集总是非空的, 于是有两种情况。

情况 1: $B(x_0, r) \subseteq E$, 此时 x_0 是 E 的内点。

情况 2: 存在 $x \in B(x_0, r), x \notin E$, 此时 x_0 是 E 的边界点。

综上, (b) 成立。

- (b) \implies (c)

(b) 成立。

– x_0 是 E 的内点

那么可以把序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 设置为常量序列 $(x_0)_{n=1}^\infty$ 。

– x_0 是 E 的边界点

那么任意 $r > 0$, 都有 $B(x_0, r) \cap E \neq \emptyset$ (因为如果 $B(x_0, r) \cap E = \emptyset$, 那么 x_0 是 E 的外点)。

仿照引理 8.4.5 的证明, 构造序列。

对于任意的正整数 n , 设 X_n 表示集合

$$X_n := \{x \in E : x \in B(x_0, \frac{1}{n})\}$$

由之前的分析可得, 对每一个 n 都有 X_n 是非空的。利用选择公理 (或者可数选择公理), 能够找到一个序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 使得 $x_n \in X_n$ 对所有的 $n \geq 1$ 均成立。特别地, 对所有的 n 均有 $x_n \in E \cap B(x_0, \frac{1}{n})$, 于是

$$0 \leq d(x_0, x_n) \leq \frac{1}{n}$$

根据夹逼定理 (推论 6.4.14) 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, x_n) = 0$, 所以序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 依度量 d 收敛于点 x_0 。

- (c) \implies (a)

(c) 成立, 由收敛定义 (定义 12.1.14) 可知, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在一个 $N \geq 1$ 使得

$$d(x_n, x_0) < \epsilon$$

对所有 $n \geq N$ 均成立 (注意: 这里的把定义中的 \leq 改成了 $<$, 并不影响正确性)。

做一下变形, 把 ϵ 看做半径, 球 $B(x_0, \epsilon)$ 与 E 的交集是非空的, 这是因为对 $n \geq N$ 的 x_n 我们有 $d(x_n, x_0) < \epsilon$, 所以 $x_n \in B(x_0, \epsilon)$ 且 $x_n \in E$ 。

由 ϵ 的任意性可知, x_0 是 E 的附着点。

12.2.3

说明 1. 先证明以下命题:

设 (X, d) 是一个度量空间, E 是 X 的子集, 并设 x_0 是 X 中的一个点。那么 x_0 要么是 E 的内点, 要么是 E 的外点, 要么是 E 的边界点 (存在三歧性)。

证明: 以下的情况是互斥的:

- $x_0 \in E$

首先 x_0 不可能是 E 的外点, 如果 x_0 是 E 的外点, 那么存在 $r > 0$ 使得 $B(x_0, r) \cap E = \emptyset$, 因为 $d(x_0, x_0) = 0$ 所以 $x_0 \in B(x_0, r)$, 于是 $x_0 \notin E$, 存在矛盾。

以下的情况是互斥的:

- x_0 是 E 的边界点

由定义 12.2.5 可知, x_0 不可能同时是 E 的内点。

- x_0 不是 E 的边界点

之前已经说明 x_0 不是 E 的外点, 假设 x_0 也不是 E 的内点, 那么 x_0 就是 E 的边界点, 存在矛盾, 所以 x_0 是 E 的内点。

- $x_0 \notin E$

首先 x_0 不可能是 E 的内点, 如果 x_0 是 E 的内点, 那么存在 $r > 0$ 使得 $B(x_0, r) \subseteq E$, 因为 $x_0 \in B(x_0, r)$, 所以 $x_0 \in E$, 这与 $x_0 \notin E$ 矛盾。

以下的情况是互斥的:

- x_0 是 E 的外点

- x_0 不是 E 的外点

由定义 12.2.5 可知, x_0 既不是 E 的内点也不是 E 的外点, 所以 x_0 是 E 的边界点。

综上, $x_0 \in E$, x_0 要么是 E 的内点, 要么是 E 的边界点; $x_0 \notin E$, x_0 要么是 E 的外点, 要么是 E 的边界点。命题得证。

- (a)

– \Rightarrow

由注 12.2.6 可知 $\text{int}(E) \subseteq E$ 。

任意 $x_0 \in E$, 因为 E 是开的, 那么 E 不包含自身的任意边界点, 所以 $x_0 \notin \partial E$; 由 $d(x_0, x_0) = 0$ 可知 $x_0 \notin \text{ext}(E)$ 。于是由说明 1 可知 $x_0 \in \text{int}(E)$, 所以 $E \subseteq \text{int}(E)$ 。

所以 $E = \text{int}(E)$

– \Leftarrow

$E = \text{int}(E)$, 那么任意 $x_0 \in E$, 都有 $x_0 \in \text{int}(E)$, 即 E 中不包含边界点, 由定义 12.2.12 可知, E 是开的。

• (b)

– \Rightarrow

反证法, 假设存在 x_0 是附着点且 $x_0 \notin E$ 。 x_0 是 E 的附着点, 那么由定义 12.2.9 可知, 对任意的半径 $r > 0$, 球 $B(x_0, r) \cap E \neq \emptyset$, 所以可得 x_0 不可能是 E 的外点。又由说明 1 可得 x_0 要么是 E 的边界点, 要么是 E 的内点。如果 x_0 是 E 的边界点, 由于 E 是闭的, 所以 $x_0 \in E$, 与假设矛盾; 如果 x_0 是 E 的内点, 于是 $x_0 \in E$, 与假设矛盾。

综上, 假设不成立。

– \Leftarrow

反证法, 假设 E 不是闭的, 即存在边界点 x_0 且 $x_0 \notin E$ 。由推论 12.2.11 可知 x_0 是 E 的附着点, 由题设可知 $x_0 \in E$, 与假设矛盾。

• (c)

– 球 $B(x_0, r)$ 是开集

对任意的 $x \in B(x_0, r)$, 都有 $d(x_0, x) < r$, 令 $r' = r - d(x_0, x)$, 于是 $B(x, r') \subseteq B(x_0, r)$, 因为任意 $y \in B(x, r')$, 都有

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + r' = r$$

由 (a) 可知, 球 $B(x_0, r)$ 是开集。

– 闭球是闭集

$B := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$, 让 $(x_n)_{n=m}^\infty$ 是 B 中任意一个收敛序列, 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \notin E$, 于是 $d(x_0, b) > r$, 令 $\epsilon = d(x_0, b) - r > 0$, 于是存在 $N \geq m$ 使得

$$d(x_n, b) < \epsilon$$

$$d(x_n, b) < d(x_0, b) - r$$

$$r < d(x_0, b) + d(x_n, b)$$

$$r < d(x_0, x_n)$$

对所有 $n \geq N$ 均成立, 这与 $x_n \in B$ 矛盾。

于是 $b \in B$, 由 (b) 可知, B 是闭集。

• (d)

令 $E := \{x_0\}$, E 中的任意一个收敛序列 $(x_n)_{n=m}^\infty$ 都是与 $(x_0)_{n=m}^\infty$ 相等, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in E$ 。由 (b) 可知, E 是闭集。

• (e) 由于 $\text{int}(E) = \text{ext}(X \setminus E)$, $\text{ext}(E) = \text{int}(X \setminus E)$, 于是可得 $\partial E = \partial(X \setminus E)$ 。

– \Rightarrow

E 是开的, 则 $\partial E \cap E = \emptyset$, 于是可得 $\partial E \subseteq (X \setminus E)$, 即 $\partial E = \partial(X \setminus E) \subseteq (X \setminus E)$, 所以 $X \setminus E$ 是闭的。

– \Leftarrow

$X \setminus E$ 是闭的, 则 $\partial(X \setminus E) \subseteq (X \setminus E)$, 由 $\partial E = \partial(X \setminus E)$ 可得 $\partial E \cap E = \emptyset$, 所以 E 是开的。

• (f)

(f.1)

使用 (a) 可知, 对任意 $x \in E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$, 对任意 $E_i (1 \leq i \leq n)$ 存在一个 $r_i > 0$ 使得 $B(x, r_i) \subseteq E_i$ 。

由于 n 是有限的, 所以可取 $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, 此时 $B(x, r) \subseteq E_i$, 于是再次利用 (a) 可得, $E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$ 是开的。

(f.2)

F_1, \dots, F_2 是闭的, 由 (e) 可知, $X \setminus F_1, \dots, X \setminus F_n$ 是开的, $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n = X \setminus ((X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) \cap \dots \cap (X \setminus F_n))$, 再次利用 (e) 可知, $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ 是闭的。

- (g)

(g.1)

任意 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$, 那么, 存在某个 $\alpha \in I$ 使得 $x \in E_\alpha$, 又因为 E_α 是开的, 所以存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \subseteq E_\alpha \in \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$, 所以 $\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ 是开的。

(g.2)

- (h)

(h.1)

反证法, 假设 $\text{int}(E)$ 不是包含在 E 中的最大开集, 即存在 $V \subseteq E, V \not\subseteq \text{int}(E)$ 。

由假设可知, 存在 $x \in V, x \notin \text{int}(E)$, 由于 $V \subseteq E$, 所以 $x \in E$, 于是 $x \in \text{int}(E)$ 或 $x \in \partial E$, 因为 $x \notin \text{int}(E)$, 所以 $x \in \partial E$ 。

由于 V 是开集, 所以存在 $r > 0$, 使得 $B(x, r) \subseteq V \subseteq E$, 于是 x 是 E 的内点, 即 $x \in \text{int}(E)$, 存在矛盾。

(h.2)

反证法, 假设 \overline{E} 不是包含 E 的最小闭集, 即存在 $K \supset E, K \not\supset \overline{E}$ 。

由假设可知, 存在 $x \in \overline{E}, x \notin K$ 。因为 x 是 E 的附着点, 于是由命题 12.2.10(c) 可知在 E 中 (也在 K 中) 构造一个收敛于 x 的序列 $(x_n)_{n=m}^\infty$, 但 $x \notin K$, 这与 (b) 矛盾。

12.2.4

- (a)

反证法, 假设存在 $x \in \overline{B}, x \notin C$ 。

$x \notin C$, 可知 $x \in X \setminus C$, 而 $X \setminus C = \{x \in X : d(x, x_0) > r\}$, 那么 $d(x, x_0) > r$ 。

因为 $x \in \overline{B}$, 所以对任意半径 $r' > 0$ 都有 $B(x, r') \cap B \neq \emptyset$, 于是令 $r' = d(x_0, x) - r > 0, y \in B(x, r') \cap B$ 。

按照定义 12.1.2 我们有

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, y) + d(x, y) \\ d(x_0, x) - d(x_0, y) &\leq d(x, y) \end{aligned}$$

因为 $y \in B(x, r')$ 于是 $d(x, y) < r'$, 所以

$$\begin{aligned} d(x_0, x) - d(x_0, y) &\leq d(x, y) < r' = d(x_0, x) - r \\ d(x_0, x) - d(x_0, y) &< d(x_0, x) - r \\ r &< d(x_0, y) \end{aligned}$$

这与 $y \in B$ 矛盾。

- (b)

在离散度量 d_{disc} 中, $B := B(x_0, 1)$, 是单点集, 由命题 12.2.15(d) 可知, B 是闭集, 由命题 12.2.15(b) 可知, $B = \overline{B}$ 。

而 $C := \{x \in X : d_{disc}(x_0, x) \leq 1\}$ 就是 X 本身, 此时 $B \subset C$ 。