9.7 习题

张志聪

2024 年 12 月 5 日

9.7.1

由命题 9.6.7（最大值原理）可知，存在 $x_{max} \in [a,b]$ 使得 $f(x_{max}) = M$，类似地，存在 $x_{min} \in [a,b]$ 使得 $f(x_{min}) = m$。

由习题 9.4.6 可知 f 在 $[x_{min}, x_{max}]$（这里假设 $x_{min} \leq x_{max}$，其他证明类似）上也是连续的。由定理 9.7.1（介值定理）可知，任意 $y \in [m,M]$（即：$m \leq y \leq M$）都存在 $c \in [x_{min}, x_{max}]$（此时 $c \in [a,b]$ 也是成立的）使得 $f(c) = y$。

9.7.2

定义函数 g 如下：

$$g(x) := f(x) - x$$

其中函数 g 的定义域为 $[0,1]$。因为 f, x 都是 $[0,1]$ 上的连续函数，由命题 9.4.9 可知，于是函数 g 也是 $[0,1]$ 上的连续函数。

思路是证明存在 $x \in [0,1]$ 使得 $g(x) \leq 0$（$g(x) \geq 0$），然后利用介值定理。

- 存在 $x \in [0,1]$ 使得 $g(x) \leq 0$。

  当 $x = 1$ 时，$g(1) = f(1) - 1$，因为函数 f 的值域是 $[0,1]$，即任意 $x \in [0,1]$ 都满足 $0 \leq f(x) \leq 1$，所以 $g(1) \leq 0$。

- 存在 $x \in [0,1]$ 使得 $g(x) \geq 0$。

当 $x = 0$ 时，$g(0) = f(0) - 0$，因为函数 f 的值域是 $[0,1]$，即任意 $x \in [0,1]$ 都满足 $0 \leq f(x) \leq 1$，所以 $g(0) \geq 0$。

因为 $g(0) \leq 0 \leq g(1)$，且 g 是 $[0,1]$ 上的连续函数，由定理 9.7.1（介值定理）可知，存在 $c \in [0,1]$ 使得 $g(c) = 0$，此时 $f(c) = c$。