

## 11.6 习题

张志聪

2025 年 1 月 2 日

### 11.6.1

证明框架参考了命题 11.5.3 的证明。

如果  $I$  是一个单点集或者空集, 那么结论是平凡的。如果  $I$  是一个闭区间, 那么根据命题 11.6.1 可以得到结论。于是我们假设  $I$  是形如  $(a, b]$ ,  $(a, b)$  或  $[a, b)$  的区间, 其中  $a < b$ 。

设  $M$  是  $f$  的界, 所以对所有的  $x \in I$  均有  $-M \leq f(x) \leq M$ 。现在设  $0 < \epsilon < (b - a)/2$  是一个很小的数。当  $f$  被限制在区间  $[a + \epsilon, b - \epsilon]$  上时, 它就是单调有界的, 从而再次利用 11.6.1 可知, 它是黎曼可积的。特别地, 我们能够找到一个分段常数函数  $h : [a + \epsilon, b - \epsilon]$  上从上方控制  $f$ , 并且有

$$\int_{[a+\epsilon, b-\epsilon]} h \leq \int_{[a+\epsilon, b-\epsilon]} f + \epsilon$$

定义  $\tilde{h} : I \rightarrow \mathbb{R}$  为

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [a + \epsilon, b - \epsilon] \\ M, & x \in I \setminus [a + \epsilon, b - \epsilon] \end{cases}$$

$\tilde{h}$  显然是  $I$  上从上方控制  $f$  的分段常数函数。根据定理 11.2.16 可知,

$$\int_I \tilde{h} = \epsilon M + \int_{[a+\epsilon, b-\epsilon]} h + \epsilon M \leq \int_{[a+\epsilon, b-\epsilon]} f + (2M + 1)\epsilon$$

特别地

$$\overline{\int}_I f \leq \int_{[a+\epsilon, b-\epsilon]} f + (2M + 1)\epsilon$$

类似地, 有

$$\int_I f \geq \int_{[a+\epsilon, b-\epsilon]} f - (2M+1)\epsilon$$

从而

$$\overline{\int}_I f - \int_I f \leq (4M+2)\epsilon$$

综上由  $\epsilon$  的任意性且  $\overline{\int}_I f - \int_I f$  与  $\epsilon$  无关可得,  $f$  是黎曼可积的。

## 11.6.2

(1) 分段单调函数的定义参考定义 11.5.4:

设  $I$  是有一个有界区间, 并设  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。我们称  $f$  在  $I$  上是有界分段单调函数, 当且仅当存在一个  $I$  的划分  $P$ , 使得对于所有的  $J \in P$ ,  $f|_J$  都是  $J$  上的单调有界函数。

(2) 由 (1) 可知存在一个  $I$  的划分  $P$ , 使得对于所有的  $J \in P$ ,  $f|_J$  都是  $J$  上的单调有界函数。于是对任意  $J \in P$ , 由推论 11.6.3 可知  $f|_J$  在  $J$  上是黎曼可积的。剩余部分的证明与习题 11.5.1 类似, 这里不做赘述。

## 11.6.3

注意这里无法假设  $N$  是正整数。

•  $\Rightarrow$

因为  $x \geq 0, f(x) \geq 0$ , 可知  $\int_{[0, N]} f$  是关于实数  $N$  的单调递增函数, 由定理 5.5.9 (最小上界的存在性) 可知只要证明其有上界, 则最小上界存在且有限。

由推论 11.6.3 可知  $\int_{[0, N]} f$  在  $[0, N]$  上是黎曼可积的。

由推论 5.4.12 和命题 4.4.1 可知, 对实数  $N$  存在一个自然数  $n$  使得  $n \leq N < n+1$ , 现在把  $[0, N]$  划分成  $n+1$  个半开区间

$$\{[0, 1), [1, 2), \dots, [n-1, n), [n, N]\}$$

由命题 11.3.12 可知

$$\begin{aligned}\overline{\int}_{[0,N]} f &\leq \sum_{j=0}^n \left( \sup_{x \in [j, j+1)} f(x) \right) + \sup_{x \in [n, N]} f(x) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n+1} f(j)\end{aligned}$$

以上最后一个等式由  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  是一个单调递增的函数保证的。

因为对任意的  $x \in [0, +\infty)$ ,  $f(x) \geq 0$ , 由定理 11.4.1(d) 可知

$$\int_{[0,N]} f \geq 0$$

综上, 对任意  $N > 0$  都有

$$0 \leq \int_{[0,N]} f \leq \overline{\int}_{[0,N]} f \leq \sum_{j=0}^{n+1} f(j)$$

即

$$0 \leq \int_{[0,N]} f \leq \sum_{j=0}^{n+1} f(j)$$

不妨设  $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$  收敛于  $L$ , 于是对任意  $N$  都有

$$0 \leq \int_{[0,N]} f \leq L$$

$\int_{[0,N]} f$  是有界的, 于是命题成立。

•  $\Leftarrow$

反证法, 假设  $\sum_{n=0}^{\infty}$  是发散的。那么, 对任意实数  $M$  都存在正整数  $N$  使得

$$\sum_{n=0}^N > M$$

现在把  $[0, N]$  划分成  $N + 1$  个半开区间

$$\{[0, 1), [1, 2), \dots, [n-1, n), [n, N), \{N\}\}$$

由命题 11.3.12 可知

$$\begin{aligned}\int_{\underline{[0,N]}} f &\geq \sum_{j=0}^N \left( \inf_{x \in [j, j+1)} f(x) \right) \\ &\geq \sum_{j=1}^N f(j) = M - f(0)\end{aligned}$$

因为  $M$  是任取的, 而  $f(0)$  是固定值, 于是可得  $\int_{\underline{[0,N]}} f$  是无限的, 这与题设矛盾。