4.2 习题

2024 年 4 月 29 日

4.2.1

证明：

设 $x = a//b, y = c//d, z = e//f$ 为有理数, 其中 a, c, e 是整数，b, d, f 是不为零的整数。

（1）自反性

$ab = ab$，由定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $x = x$

（2）对称性

假设 $x = y$，由定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $ad = bc$，再次利用定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $y = x$

（3）传递性

假设 $x = y, y = z$，由定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $ad = bc, cf = de$，又

$$ad = bc$$
$$adf = bcf$$

$$cf = de$$
$$bcf = bde$$

所以：$adf = bcf = bde, adf = bde$，由推论 4.1.9 可知 $af = be$，所以 $x = z$

说明. 其实这里需要引入一个额外的命题，$a = b$，a, b, c 都是整数，那么 $ac = bc$。这个命题相对简单，这里说一下证明思路，先证明自然数符合该命题，然后再推广到整数。

4.2.2

证明：

（1）乘积的定义是明确的

假设 $a//b = a'//b'$，那么 $ab' = a'b$，

$$(a//b) * (c//d) = (ac)//(bd) \tag{1}$$

$$(a'//b')//(c//d) = (a'c)//(b'd) \tag{2}$$

因此我们要证明的是 $acb'd = bda'c$，由推论 4.1.9（整数的消去律）可知，只需证明 $ab' = ba'$，由假设可知该等式成立；

（2）负数的定义是明确的

假设 $a//b = a'//b'$，那么 $ab' = a'b$，

$$-(a//b) = (-a)//b \tag{3}$$

$$-(a'//b') = (-a')//b' \tag{4}$$

因此我们要证明的是 $(-a)b' = (-a')b$，由习题 4.1.3 可知

$$(-a)b' = (-1) \times ab'$$

$$(-a')b = (-1) \times a'b$$

由推论 4.1.9（整数的消去律）可知，只需证明 $ab' = a'b$，由假设可知该等式成立；