11.2 习题

张志聪

2024 年 12 月 24 日

11.2.1

划分 P' 比 P 更细，由命题 11.1.14 可知，任意 $J \subseteq P'$，都存在 $K \subseteq P$ 使得 $J \subseteq K$。此时 $J \subseteq K \subseteq P$，由于 f 是关于 P 上的分段常数函数，那么 f 在 K 上是常值的，于是 f 在 J 上也是常值的。

由 J 的任意性可知，f 也是关于 P' 上的分段常数函数。

11.2.2

由于 f, g 都是 I 上的分段常数函数，于是存在 I 上的划分 P_f, P_g 分别使得 f 是关于 P_f 上的分段常数函数，g 是关于 P_g 上的分段常数函数。

由引理 11.1.18 可知，$P := P_f \# P_g$ 是 I 的划分，且比 P_f 和 P_g 更细。由引理 11.2.7 可知，f, g 都是关于 P 的分段常数函数，那么，由定义 11.2.3，对任意 $J \subseteq P$，$f|_J$ 是常数函数，$g|_J$ 是常数函数，于是 $(f-g)|J$ 也是常量函数，由 J 的任意性可知，$f-g$ 是关于 P 的分段常数函数，由定义 11.2.5 可知，$f-g$ 是 I 上的分段函数。

其他情况类似。

11.2.3

令 $Q := P \# P'$，由引理 11.2.7 可知，f 是关于 Q 上的分段常数函数。

接下来证明:

$$p.c. \int_{[P]} f = p.c. \int_{[Q]} f \tag{1}$$

$$p.c. \int_{[P']} f = p.c. \int_{[Q]} f \tag{2}$$

对任意 $K \in P$，定义

$$Q_K := \{X \in Q : X \subseteq K\}$$

证明 $K = Q_K$。反证法，假设 $K \neq Q_K$。由 Q_K 的构造方式，易知 $Q_K \subseteq K$，如果假设成立，那么，存在 $x \in K$，$x \notin Q_K$。

Q 中一定存在 J 使得 $x \in J$，由 Q 比 P 更细，可知存在 $W \in P$ 使得 $J \subseteq W$，由划分的定义可知 $W = K$，因为如果 $W \neq K$，则与定义 11.1.10（划分）中每个元素恰好属于 P 中的一个有界区间矛盾，存在了两个区间都包含 x。于是可知 $J \in Q_K$，与假设矛盾。

由 $K = Q_K$ 可知，$p.c. \int_{[K]} f = p.c. \int_{[Q_K]} f$，由 K 的任意性，可知（1）式成立。

类似地，可证（2）式成立。

11.2.4

设 P_f, P_g 是满足条件的划分，即 f, g 分别是关于 P_f, P_g 的分段常数函数。令 $P := P_f \# P_g$，由引理 11.1.18 和命题 11.2.13 可知，

$$p.c. \int_I f = p.c. \int_{[P]} f$$
$$p.c. \int_I g = p.c. \int_{[P]} g$$

- (a)

  由定义 11.2.9 可知，

  $$p.c. \int_I (f+g) = \sum_{J \in P} (F_J + G_J)|J|$$

  其中 F_J, G_J 表示 f, g 分别在 J 上的常数值。由命题 7.1.11 可知，

$$
\begin{aligned}
p.c.\int_I (f+g) &= \sum_{J\in P}(F_J+G_J)|J| \\
&= \sum_{J\in P} F_J|J| + \sum_{J\in P} G_J|J| \\
&= p.c.\int_{[P]} f + p.c.\int_{[P]} g \\
&= p.c.\int_I f + p.c.\int_I g
\end{aligned}
$$

- (b)

  证明与 (a) 类似，略

- (c)

  利用 (a),(b) 可证，略

- (d)

  由定义 11.2.9 可知，

  $$p.c.\int_I f = \sum_{J\in P} F_J|J|$$

  其中 F_J 表示 f 在 J 上的常数值。

  由题设可知，$F_J \geq 0$，又由定义 11.1.8 可知 $|J| \geq 0$，于是，任意 $J \in P$ 都有 $F_J|J| \geq 0$，所以，

  $$\sum_{J\in P} F_J|J| \geq 0$$

  即:

  $$p.c.\int_I f \geq 0$$

- (e)

  证明框架：对 P 的基数 n 进行归纳。略

- (f)

由定义 11.2.9 可知，

$$p.c. \int_I f = \sum_{J \in P} F_J |J|$$

其中 F_J 表示 f 在 J 上的常数值，又 f 是常量函数 $f(x) = c$，所以总是 $F_J = c$，于是，

$$\begin{aligned}
p.c. \int_I f &= \sum_{J \in P} F_J |J| \\
&= \sum_{J \in P} c|J| \\
&= c \sum_{J \in P} |J| \\
&= c|I|
\end{aligned}$$

最有一个等式利用了定理 11.1.13

- (g)

$$\begin{aligned}
J_L &:= \{x \in J : x \le min(P); x \notin P\} \\
J_R &:= \{x \in J : x \ge max(P); x \notin P\}
\end{aligned}$$

$\{J_L, P, J_R\}$ 划分是符合定义 11.1.10（划分）的。

于是，

$$\begin{aligned}
p.c. \int_J F &= \sum_{K \in J} C_K |K| \\
&= \sum_{K \in J_L} C_K |K| + \sum_{K \in P} C_K |K| + \sum_{K \in J_R} C_K |K| \\
&= 0 + \sum_{K \in P} C_K |K| + 0 \\
&= \sum_{K \in P} C_K |K| \\
&= p.c. \int_I f
\end{aligned}$$

其中，$K \in J, C_K$ 表示 F 在 K 上的常数值。而 $x \in J_L$ 时，$C_K = 0$，即此时的 $C_J = 0$；$x \in J_R$ 时，$C_K = 0$，即此时的 $C_J = 0$。

- (h)
    - $$\begin{aligned} J_P &:= \{J \cap X : X \in P\} \\ K_P &:= \{K \cap X : X \in P\} \end{aligned}$$

      可见 J_P, K_P 分别是 J, K 的划分。

      对任意 $X \in J_P$，按照 J_P 的构造方式存在 $Y \in P$ 使得 $X \subseteq Y$，因为 f 是关于 P 的分段常数函数，所以 f 在 Y 上都是常值的，那么在 X 上也是常值的，由定义 11.2.3 可得 $f|_J$ 是关于 J_P 的分段常数函数。于是 $f|_J$ 是 J 上的分段常数函数。

      类似地，$f|_K$ 是 K_P 上的分段常数函数。
    - 定义

      $$F(x) := \begin{cases} f|_J(x) & x \in J \\ 0 & x \in I \setminus J \end{cases}, G(x) := \begin{cases} f|_K(x) & x \in K \\ 0 & x \in I \setminus K \end{cases}$$

      于是 $f = F + G$，利用 (a)(g) 可得，

      $$\begin{aligned} p.c. \int_I f &= p.c. \int_I (F + G) \\ &= p.c. \int_I F + p.c. \int_I G \\ &= p.c. \int_J f|_J + p.c. \int_K f|_K \end{aligned}$$