

## 5.5 为什么

2025 年 5 月 26 日

### 1. $R^+$ 没有上界

证明:

反证法。假设  $M > 0$  是  $R^+$  的上界, 又  $M+1 \in R^+$ , 但  $M+1 > M$ , 存在矛盾。

### 2. 空集没有最小上界。

证明:

假设空集存在  $M$  为其最小上界, 由于任何实数都是空集的上界, 所以  $M-1$  也是空集的上界, 但  $M-1 < M$ , 与最小上界的定义矛盾。

3. 因为  $m_n/n$  是  $E$  的上界而  $(m_{n'}-1)/n'$  不是, 所以一定有  $m_n/n > (m_{n'}-1)/n'$ 。

证明:

$(m_{n'}-1)/n'$  不是  $E$  的上界, 即: 存在  $x \in E$  使得  $x > (m_{n'}-1)/n'$ 。

又  $m_n/n$  是  $E$  的上界, 所以,  $x \leq m_n/n$ , 所以,

$$(m_{n'}-1)/n' < x \leq m_n/n$$

$$(m_{n'}-1)/n' < m_n/n$$

4. 定理 5.5.9 的证明过程中, “再次由阿基米德性质可知, 存在一个整数  $L$  使得  $L/n < x_0$ ” 的证明。

证明:

如果  $x_0 > 0$ , 取  $L = 0$  即可;

如果  $x_0 = 0$ , 取  $L = -1$  即可;

如果  $x_0 < 0$ 。

于是  $-x_0 > 0$ ，所以由阿基米德性质可知，存在正整数  $L'$  使得

$$\begin{aligned} L'/n &> -x_0 \\ \implies \\ -L'/n &< x_0 \end{aligned}$$

却  $L = -L'$  即可；