10.1 习题

张志聪

2024 年 12 月 9 日

10.1.1

（1）f 在 x_0 处可微分，由定义 10.1.1 可知，极限

$$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

是存在的，不妨设极限是 L。由定义 9.3.6 可知，对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L|\le\epsilon$$

对任意 $x\in\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\cap X\setminus\{x_0\}\big)$ 均成立。

任意 $y\in\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\cap Y\setminus\{x_0\}\big)$，因为 $Y\subset X$，所以 $y\in\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\cap X\setminus\{x_0\}\big)$，所以

$$|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}-L|\le\epsilon$$

由定义 9.3.6 可知，

$$\lim_{y\to x_0;y\in Y\setminus\{x_0\}}\frac{f|_Y(y)-f|_Y(x_0)}{y-x_0}$$

的极限存在，所以 $f|_Y$ 在 x_0 处可微。

（2）与 10.1.2 不矛盾的原因：

点 3 不是 $[1,2]\cup\{3\}$ 的极限点，不满足习题 10.1.1 习题的前置条件。

10.1.2

- $(a) \implies (b)$

  f 在 X 中的 x_0 处是可微的，且导数为 L，由定义 10.1.1 可知，极限

  $$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

  于是，由定义 9.3.6 可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

  $$|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L| \leq \epsilon$$

  对 $|x - x_0| < \delta, x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。

  对上式进行算术运算，

  $$\begin{aligned} |\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L| &\leq \epsilon \\ |\frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{x - x_0}| &\leq \epsilon \\ |f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)| &\leq \epsilon |x - x_0| \\ |f(x) - \big(f(x_0) + L(x - x_0)\big)| &\leq \epsilon |x - x_0| \end{aligned}$$

- $(b) \implies (a)$

  直接进行算术运算，略

10.1.3