

6.4 习题

2024 年 7 月 12 日

6.4.1

(1) 序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c , 那么对任意实数 $\epsilon > 0$, 都是最终 ϵ - 接近于 c 的, 即: 能够找到某个 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 ϵ - 接近于 c 的。并且对于任意 $N' \geq m$, 取 $N_0 := \max(N, N')$, 此时 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 是 ϵ - 接近于 c 的, 即: a_n 是 ϵ - 接近于 c , 对 $n \geq N_0$ 均成立, 所以 c 是 ϵ - 附着于 $(a_n)_{n=N'}^{\infty}$ 的。由 ϵ 的任意性, 可知 c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

(2) 反证法, 存在另一个极限点 d , 且 $d \neq c$ 。 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c , 那么对实数 $\epsilon > 0$, 是最终 ϵ - 接近于 c 的。即: 能够找到 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 ϵ - 接近于 c 的。

同时 d 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点, 那么, d 是 ϵ - 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的, 那么存在一个 $n \geq N$ 使得 a_n 是 ϵ - 接近于 d 的, 如果 $d > c$, 取 $0 < \epsilon < (d-c)/2$, 此时, $|a_n - d| \leq \epsilon$ 与 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 无法同时满足, 即 a_n 无法同时 ϵ - 接近于 c, d 。

$d \leq c$ 同理。

6.4.2

这里只说明极限点和上极限, 因为下极限的证明可以用上极限类推。

设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个实数序列, c 是一个实数, 且 $m' \geq m$ 是一个整数, $k \geq 0$ 是一个非负整数。

(1) 与习题 6.1.3 类似的结论

(1.1) c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 极限点, 当且仅当 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 极限点。

$\Rightarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 极限点, 当且仅当 “对任意 $\epsilon > 0$, 对每一个 $N \geq m$, c 都是 ϵ - 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的”, 我们把引号中的性质定义声明为 P , 即对任意 N , 只要 $N \geq m$ 都具有性质 P 。因为 $m' \geq m$, 于是对任意 N , $N \geq m' \geq m$ 都具有性质 P , 所以 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点。

$\Leftarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点。对任意 $\epsilon > 0$, 对每一个 N ,

如果 $N \geq m'$, 由于 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点, 那么, c 都是 ϵ - 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的;

如果 $m \leq N < m'$, 我们要证明此时 c 也是 ϵ - 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$, 即: 要证明存在一个 $n \geq N$ 使得 a_n 是 ϵ - 接近于 c 。我们可以取 $n \geq m'$, 那么 n 也是大于 N , 还是由 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点, 保证了 n 的存在性。

综上 c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

(1.2) c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限, 当且仅当 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限。

$\Rightarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限, 即: 序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的下确界是 c 。序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集。

反证法, 假设 c 不是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限, 设 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限是 c' 【这里其实要证明 c' 的存在性。可以通过以下命题得到 c' 是存在的: 有上界序列存在实数上极限, 否则上极限不是实数, 而是 $+\infty$ 】。

如果 $c' > c$, 那么, 存在 $m \leq N_0 < m'$ 使得 $c \leq a_{N_0}^+ < c'$, 因为 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的子集, 所以 $\sup((a_n)_{n=m'}^{\infty}) \leq \sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$, 又因为 $c' \leq \sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})$, 于是 $c' \leq \sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$, 即: $c' \leq a_{N_0}^+$ 。这与 $c \leq a_{N_0}^+ < c'$ 矛盾。

如果 $c > c'$, 因为序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集, 所以 $\inf((a_N^+)_{N=m'}^{\infty}) \geq \inf((a_N^+)_{N=m}^{\infty})$, 即: $c' \geq c$, 这与 $c > c'$ 矛盾。

综上, $c = c'$ 。

$\Leftarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限, 即: 序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 的下确界是 c 。序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 的子集。

反证法, 假设 c 不是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限, 设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限是 c' 。

如果 $c > c'$, 那么, 存在 $m \leq N_0 < m'$ 使得 $c' \leq a_{N_0}^+ < c$, 因为 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的子集, 所以 $\sup((a_n)_{n=m'}^{\infty}) \leq \sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$, 又因为 $c \leq \sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})$, 于是 $c \leq \sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$, 即: $c < a_{N_0}^+$ 。这与 $c' \leq a_{N_0}^+ < c$ 矛盾。

如果 $c < c'$, 因为序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集, 所以 $\inf((a_N^+)_{N=m'}^{\infty}) \geq \inf((a_N^+)_{N=m}^{\infty})$, 即: $c' \geq c$, 这与 $c < c'$ 矛盾。

综上, $c = c'$ 。

与习题 6.1.4 类似的结论

该问题是 6.1.3 的拓展, 这里我只证明一种情况。

(2.1) c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点, 当且仅当 c 是 $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

如果我们能证明 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 与 $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 相等的, 然后通过 (1.1) 就可以证明该命题, 接下来我们证明这两个序列的相等的。

通过定义 5.5.1 可知, 序列就是函数, 是一个从集合 Z 到 R 的函数。于是我们要证明两个序列相等, 只需要证明其对应函数相等。通过定义 3.3.7 (函数的相等) 来进行接下来的证明。

设 $f: N \rightarrow R$ 为函数 $f(n) = a_{n+k}$, 设 $g: N \rightarrow N$ 为函数 $g(m) = m$ 。那么 $f \circ g = f(g(m)) = a_{g(m)+k} = a_{m+k}$ 。

设 $f': N \rightarrow R$ 为函数 $f'(n) = a_n$, 设 $g': N \rightarrow N$ 为函数 $g'(m) = m+k$ 。那么 $f' \circ g' = f'(g'(m)) = a_{m+k}$ 。

由 $f \circ g, f' \circ g'$ 的构造过程可知两个具有相同的定义域, 又对于任意的 $x \in N$, $f \circ g(x) = a_{x+k}, f' \circ g'(x) = a_{x+k}$, 所以 $f \circ g(x) = f' \circ g'(x)$, 由此可知两个函数相等, 即两个序列相等。