18.4 习题

张志聪

2025 年 5 月 26 日

18.4.1

A 是 $\mathbb{R}$ 中的开集，不妨设 $A = (a, b)$ 其中 $a < b, a, b \in \mathbb{R}$。于是

$$m^*(A) = b - a$$

(1) 当 $b \leq 0$ 时，$A \cap (0, \infty) = \varnothing, A \setminus (0, \infty) = A$，于是

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (0, \infty)) + m^*(A \setminus (0, \infty)) &= m^*(\varnothing) + m^*(A) \\ &= m^*(A) \end{aligned}$$

(2) 当 $b > 0 > a$ 时，$A \cap (0, \infty) = (0, b), A \setminus (0, \infty) = (a, 0]$。

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (0, \infty)) + m^*(A \setminus (0, \infty)) &= m^*((0, b)) + m^*((a, 0]) \\ &= b + m^*((a, 0]) \end{aligned}$$

接下来，我们计算 $m^*((a, 0])$。

因为，我们有

$$(a, 0) \subseteq (a, 0]$$

对任意 $\epsilon > 0$，我们又有

$$(a, 0] \subseteq (a, \epsilon)$$

由引理 18.2.5(vii) 可知，

$$\begin{aligned} m^*((a, 0)) \leq m^*((a, 0]) \leq m^*((a, \epsilon)) \\ \Longrightarrow \\ -a \leq m^*((a, 0]) \leq \epsilon - a \end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0$，然后使用夹逼定理，可以得到

$$m^*((a,0]) = -a$$

综上可得

$$m^*(A \cap (0,\infty)) + m^*(A \setminus (0,\infty)) = b - a = m^*(A)$$

(3) 当 $a \geq 0$ 时，$A \cap (0,\infty) = A, A \setminus (0,\infty) = \varnothing$。于是

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (0,\infty)) + m^*(A \setminus (0,\infty)) &= m^*(A) + m^*(\varnothing) \\ &= m^*(A) \end{aligned}$$

综上可得，命题 $m^*(A) = m^*(A \cap (0,\infty)) + m^*(A \setminus (0,\infty))$ 得证。

18.4.2

有一点需要注意 $E := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$,其中 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 不是固定值，在集合定义中，未被限制的变量都是自由的，所以在这个集合中，前面的分量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 完全自由，只有最后一个分量 $x_n > 0$。

A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开盒子，那么，对任意 A 可以表示成

$$A = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$$

于是

$$A \cap E = \prod_{i=1}^{n-1} (a_i, b_i) \times ((a_n, b_n) \cap (0,\infty))$$
$$A \setminus E = \prod_{i=1}^{n-1} (a_i, b_i) \times ((a_n, b_n) \setminus (0,\infty))$$

由习题 18.2.2 可知，

$$m^*(A \cap E) \leq m^*(\prod_{i=1}^{n-1} (a_i, b_i)) m^*((a_n, b_n) \cap (0,\infty))$$
$$m^*(A \setminus E) \leq m^*(\prod_{i=1}^{n-1} (a_i, b_i)) m^*((a_n, b_n) \setminus (0,\infty))$$

于是可得

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \leq m^*(\prod_{i=1}^{n-1}(a_i, b_i))(m^*((a_n, b_n) \cap (0, \infty)) + m^*((a_n, b_n) \setminus (0, \infty)))$$

利用习题 18.4.1(viii) 可得

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) &\leq m^*(\prod_{i=1}^{n-1}(a_i, b_i))m^*((a_n, b_n)) \\ &= m^*(\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)) \\ &= m^*(A) \end{aligned}$$

又由引理 18.2.5 可知

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

综上可得

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

18.4.3

令 E 等于半空间。对任意 $A \subseteq \mathbb{R}^n$，引理 18.2.5(viii) 可得

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

对任意 $\epsilon > 0$，由外测度的定义可知，存在 $(B_j)_{j\in J}$ 覆盖 A，使得

$$\sum_{j\in J} vol(B_j) \leq m^*(A) + \epsilon$$

$$\Longrightarrow$$

$$\sum_{j\in J} vol(B_j) - \epsilon \leq m^*(A)$$

由推论 18.2.7，我们有

$$m^*(B_j) = vol(B_j)$$

于是由习题 18.4.2 可知，对任意 $j \in J$，都有

$$m^*(B_j) = m^*(B_j \cap E) + m^*(B_j \setminus E)$$

于是，我们有

$$\sum_{j \in J} vol(B_j) = \sum_{j \in J} m^*(B_j \cap E) + \sum_{j \in J} m^*(B_j \setminus E)$$

因为

$$\bigcup_{j \in J}(B_j \cap E) \subseteq A \cap E$$
$$\bigcup_{j \in J}(B_j \setminus E) \subseteq A \setminus E$$

于是由引理 18.2.5(viii) 或 (x) 可得

$$m^*(A \cap E) \leq \sum_{j \in J} m^*(B_j \cap E)$$
$$m^*(A \setminus E) \leq \sum_{j \in J} m^*(B_j \setminus E)$$

综上可得

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) - \epsilon \leq m^*(A)$$

由 ϵ 的任意性可知，并结合 $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$，我们就有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

于是由定义 18.4.1 可知，E 是可测的。

18.4.4

- (a)

  对 $\mathbb{R}^n$ 的每一个子集 A，我们有

$$A \cap E = A \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)$$
$$A \setminus E = A \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)$$

因为 E 是可测的，所以

$$\begin{aligned}m^*(A) &= m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \\ &= m^*(A \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n \setminus E))\end{aligned}$$

于是可得，$\mathbb{R}^n \setminus E$ 是可测的。

- (b)

  因为 E 是可测的，所以对 $\mathbb{R}^n$ 的每一个子集 A，我们有

  $$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

  又因为

  $$\begin{aligned}A \cap (E + x) &= (A - x) \cap E + x \\ A \setminus (E + x) &= (A - x) \setminus E + x\end{aligned}$$

  因为 $A - x$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，于是以下等式依然成立：

  $$m^*(A - x) = m^*((A - x) \cap E) + m^*((A - x) \setminus E)$$

  利用引理 18.2.5(xiii)（平移不变性），我们有

  $$\begin{gathered}m^*(A - x + x) = m^*((A - x) \cap E + x) + m^*((A - x) \setminus E + x) \\ \Longrightarrow \\ m^*(A) = m^*(A \cap (E + x)) + m^*(A \setminus (E + x))\end{gathered}$$

  于是可得 $x + E$ 是可测的。

  由定义 18.4.1 可知 $m(E) = m^*(E)$，再次利用引理 18.2.5(xiii)（平移不变性）

  $$m(E) = m^*(E) = m^*(x + E) = m(x + E)$$

- (c) ⊛

  E_1 是可测的，所以对任意 $A \subseteq \mathbb{R}^n$，我们有

  $$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \setminus E_1) \tag{1}$$

E_2 也是可测的，且因为 $(A \cap E_1) \subseteq \mathbb{R}^n$，于是我们有

$$
\begin{aligned}
m^*(A \cap E_1) &= m^*((A \cap E_1) \cap E_2) + m^*((A \cap E_1) \setminus E_2) \\
&= m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 \setminus E_2)
\end{aligned}
$$

同样的，$(A \setminus E_1) \subseteq \mathbb{R}^n$，于是

$$
\begin{aligned}
m^*(A \setminus E_1) &= m^*((A \setminus E_1) \cap E_2) + m^*((A \setminus E_1) \setminus E_2) \\
&= m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2))
\end{aligned}
$$

代入 (1) 式可得：

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 \setminus E_2) + m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

令这个为式子 (0)

观察 $A \setminus (E_1 \cap E_2)$，利用命题 3.1.28(h)，我们有

$$
\begin{aligned}
A \setminus (E_1 \cap E_2) &= (A \setminus E_1) \cup (A \setminus E_2) \\
&= (A \cap E_1 \setminus E_2) \cup (A \cap E_2 \setminus E_1) \cup (A \setminus (E_1 \cup E_2))
\end{aligned}
$$

于是由命题 18.2.5(viii) 可知，

$$m^*(A \setminus (E_1 \cap E_2)) \leq m^*(A \cap E_1 \setminus E_2) + m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

这里有：

$$m^*(A \setminus (E_1 \cap E_2)) = m^*(A \cap E_1 \setminus E_2) + m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

反证法，假设上式不成立，那么就有

$$m^*(A \setminus (E_1 \cap E_2)) < m^*(A \cap E_1 \setminus E_2) + m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

又因为

$$A = (A \cap (E_1 \cap E_2)) \cup (A \setminus (E_1 \cap E_2))$$

再次利用命题 18.2.5(viii) 可知，

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \setminus (E_1 \cap E_2))$$

$$\Longrightarrow$$

$$m^*(A) < m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 \setminus E_2) + m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

这与式 (0) 存在矛盾，假设不成立。

结合式 (0) 可得

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + m^*(A \setminus (E_1 \cap E_2)) \tag{2}$$

所以 $E_1 \cap E_2$ 是可测的。

利用集合运算关系（命题 3.1.28），我们有

$$E_1 \cup E_2 = \mathbb{R}^n \setminus ((\mathbb{R}^n \setminus E_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E_2))$$

由 (a) 可知，$\mathbb{R}^n \setminus E_1$ 和 $\mathbb{R}^n \setminus E_2$ 都是可测的。由刚才的证明可知 $(\mathbb{R}^n \setminus E_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E_2)$ 也是可测的，再次利用 (a) 可知，$\mathbb{R}^n \setminus ((\mathbb{R}^n \setminus E_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E_2))$ 是可测的。

- (d)

  对 N 进行归纳即可证明。

- (e)

  - 开盒子

    任意开盒子为 $B = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$，于是

    $$B = \left(\bigcap_{i=1}^{n}\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > a_i\}\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n}\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i < b_i\}\right)$$

    （注意，右侧括号内都是半空间平移后的形式）

    由引理 18.4.2（半空间都是可测的），并且利用引理 (b)(d)(c) 可知，B 是可测的。

  - 闭盒子

    任意闭盒子为 $B = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$，因为

    $$B = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + \prod_{i=1}^{n}[0, b_i - a_i]$$

    令 $E = \prod_{i=1}^{n}[0, b_i - a_i]$，由 (b)（平移不变性）可知，我们只需证明 E 是可测的即可。

又因为

$$\mathbb{R}^n \setminus E = \left(\bigcup_{i=1}^{n}\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i < 0\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i > (b_i - a_i)\}\right)$$

由引理 18.4.2（半空间都是可测的），并且利用引理 (b)(d)(c) 可知，E 是可测的。

- (f)

  对于 $\mathbb{R}^n$ 的任意子集，我们有

  $$A\cap E\subseteq E$$

  利用引理 18.2.5(vii)（单调性）可知，

  $$m^*(A\cap E)\le m^*(E)=0$$

  结合引理 18.2.5(vi)（正性）可知，

  $$m^*(A\cap E)=0$$

  因为

  $$A\setminus E\subseteq A$$

  再次利用引理 18.2.5(vii)（单调性）

  $$m^*(A\setminus E)\le m^*(A)$$

  又因为

  $$(A\setminus E)\cup E=A$$

  利用引理 18.2.5(viii)（有限次可加性）

  $$\begin{aligned}m^*(A)&\le m^*(A\setminus E)+m^*(E)\\&=m^*(A\setminus E)+0\\&=m^*(A\setminus E)\end{aligned}$$

  综上可得

  $$m^*(A)=m^*(A\setminus E)$$

  于是我们有

  $$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\setminus E)$$

  所以，E 是可测的。

18.4.5

反证法，假设 E 是可测的。如同在命题 18.3.3 中描述的，由 $m^*(E) \neq 0$ 可知，存在一个有限的整数 $n > 0$ 使得 $m^*(E) = m(E) > 1/n$。现在令 J 表示 $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ 的基数为 $3n$ 的有限子集。E 是可测的，那么由引理 18.4.4(b) 和引理 18.4.5 可知，

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{q\in J} q + E\right) &= \sum_{q\in J} m(q+E) \\ &= \sum_{q\in J} m(E) \\ &= 3nm^*(E) \\ &> 3n\frac{1}{n} \\ &= 3 \end{aligned}$$

即（按照定义 18.4.1 中的定义）

$$m^*\left(\bigcup_{q\in J} q + E\right) > 3$$

而由命题 18.3.3 中有 $\bigcup\limits_{q\in J} q + E \subseteq X$，那么

$$m^*\left(\bigcup_{q\in J} q + E\right) \leq m^*(X)$$

这与 $1 \leq m^*(X) \leq 3$ 矛盾。

18.4.6

（1）

对 J 的基数 n 进行归纳。$\bigcup\limits_{j\in J} E_j$ 表示成 $\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$。（可以建立对应双射，细节不做说明了。）

归纳基始 $n = 1$ 时，这是显然的：

$$m^*(A \cap E_1) = m^*(A \cap E_1)$$

归纳假设 $n = k$ 时，我们有

$$m^*(A \cap \bigcup_{j=1}^{k} E_j) = \sum_{j=1}^{k} m^*(A \cap E_j)$$

$n = k + 1$ 时，令 $F = \bigcup\limits_{j=1}^{k} E_j$，因为 E_{k+1} 是可测的，由引理 18.4.4(d) 可知，$F \cup E_{k+1}$ 也是可测的，于是我们有

$$m^*(A \cap (F \cup E_{k+1})) = m^*(A \cap (F \cup E_{k+1}) \cap E_{k+1}) + m^*(A \cap (F \cup E_{k+1}) \setminus E_{k+1})$$

由命题命题 3.1.18 可得（有用到 E_j 之间不相交这个条件）

$$\begin{aligned} A \cap (F \cup E_{k+1}) \cap E_{k+1} &= ((A \cap F) \cup (A \cap E_{k+1})) \cap E_{k+1} \\ &= (E_{k+1} \cap (A \cap F)) \cup (E_{k+1} \cap (A \cap E_{k+1})) \\ &= E_{k+1} \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} A \cap (F \cup E_{k+1}) \setminus E_{k+1} &= ((A \cap F) \cup (A \cap E_{k+1})) \setminus E_{k+1} \\ &= A \cap F \end{aligned}$$

（第二个等式可能只能使用集合相等（定义 3.1.4）的定义证明了）

综上可得，并结合归纳假设

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (F \cup E_{k+1})) &= m^*(A \cap (F \cup E_{k+1}) \cap E_{k+1}) + m^*(A \cap (F \cup E_{k+1}) \setminus E_{k+1}) \\ &= m^*(E_{k+1}) + m^*(A \cap F) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} m^*(A \cap E_j) \end{aligned}$$

归纳完成。

（2）

令 $A = \bigcup\limits_{j \in J} E_j$，代入

$$m^*(A \cap \bigcup_{j \in J} E_j) = \sum_{j \in J} m^*(A \cap E_j)$$

$$\Longrightarrow$$

$$m^*(\bigcup_{j \in J} E_j) = \sum_{j \in J} m^*(E_j)$$

18.4.7

我们有

$$B \setminus A = B \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$$

因为 A 是可测的，所以由引理 18.4.4(a) 可知 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 是可测的，再次利用引理 18.4.4(c) 可知，$B \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ 也是可测的。（通过证明过程可以知道，没有用到 $A \subseteq B$ 这个题设）

因为 $A \subseteq B$，所以 $A, B \setminus A$ 是不相交的，又因为

$$A \cup (B \setminus A) = B$$

于是由引理 18.4.5 可知

$$\begin{aligned} m(A \cup (B \setminus A)) = m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \\ \Longrightarrow \\ m(B \setminus A) = m(B) - m(A) \end{aligned}$$

18.4.8

（1）

按书中的提示，记：

$$J = \{j_1, j_2, \dots\}, F_N = \bigcup_{k=1}^{N} \Omega_{j_k}, E_N = F_N \setminus F_{N-1}$$

于是可得

$$F_N = \bigcup_{n=1}^{N} E_n$$

$$\bigcup_{j \in J} \Omega_j = \lim_{N \to \infty} F_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

因为 E_N 的可测性由推论 18.4.8 保证，又因为 E_N 之间都是不相交的可测集，于是由引理 18.4.8（可数可加性）可知，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 是可测集，进而 $\bigcup\limits_{j \in J} \Omega_j$ 是可测集。

（2）

利用命题 3.1.28(h)（德摩根定律），我们有

$$\bigcap_{k=1}^{N} \Omega_k = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{N} (\mathbb{R}^n \setminus \Omega_k)$$

于是，我们有

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus \Omega_k)$$

（这里不是从有限版本直接推导出可数无限版本的，需要单独证明下，3-1-comment.tex 中有证明）

利用引理 16.4.4(a) 可知，$\mathbb{R}^n \setminus \Omega_k$ 是可测的，并利用刚才的结论，可以完成证明。

18.4.9

首先，证明 Q^2 是可测集。

思路与例 18.2.9 一致。对于任意 $(x, y) \in Q^2$，单点集 $\{(x, y)\}$ 的外测度都是 0，由引理 18.4.4 可知 $\{(x, y)\}$ 是可测的。又 Q^2 是全体 $\{(x, y)\}$ 的并集，而且 Q^2 是可数的，所以 Q^2 是可测集，并且外测度为 0。

(1) A 是可测集。

因为 $[0, 1]^2$ 也可以用闭盒子表示，所以 $[0, 1]^2$ 也是可测的。于是利用推论 18.4.7 可知 $A = [0, 1]^2 \setminus Q^2$ 也是可测的。

(2) $m * (A) = 1$。

由推论 18.4.7 可知，

$$\begin{aligned} m(A) &= m([0, 1]^2 \setminus Q^2) \\ &= m([0, 1]^2) - m(Q^2) \\ &= 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

(3) A 没有内点。

反证法，设存在 $(x_0, y_0) \in A$，且 (x_0, y_0) 是 A 的内点。那么存在 $r > 0$ 使得开球 $B((x_0, y_0), r) \subseteq A$。

任意 (x, y) 只要满足以下条件，就有 $(x, y) \in B(x, r)$：

$$|x_0 - x| < \sqrt{1/2}r$$
$$|y_0 - y| < \sqrt{1/2}r$$

由命题 5.4.14（有理数的稠密性）可知，存在 x, y 都是有理数，并且 $(x, y) \in B(x, r)$，进而 $(x, y) \in A$，这与 A 的定义矛盾。

18.4.10

因为 B 是测度为 0 的勒贝格可测集，又题设有 $A \subseteq B$，由引理 18.2.5(vii)（单调性）可知，所以

$$m^*(A) \leq m^*(B) = m(B) = 0$$

结合由引理 18.2.5(vi)（正性）可知，

$$m^*(A) = 0$$

引理 18.4.4(f) 可知，A 是可测的。