

17.2 注释

张志聪

2025 年 5 月 15 日

说明 1. 如果 $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的一个线性变换, 那么 l 在点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 处的导数如何确定。

证明:

由定义 17.2.2 (可微性), 问题就是找到一个线性变换 L , 使得以下极限存在:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|l(x) - l(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|l(x - x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

令 $L = l$ 以上极限就可以存在, 又由 17.2.4 (导数的唯一性) 可知, l 在 x_0 处的导数是其本身 l 。

而且比较有趣的是: l 的在任何点的导数都是 l 本身, 与点无关。和实数函数 $f(x) = cx$ 类似, 导数都是 c , 与 x 无关。