13.2 习题

张志聪

2025 年 2 月 11 日

13.2.1

方法一：使用连续的定义证明

- (a)
  - $\Rightarrow$

    对任意 $\epsilon > 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$，因为 f 在 x_0 处连续，存在 $\delta_f > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta_f$，就有

    $$d_{l^2}(f(x), f(x_0)) = |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

    类似地，存在 $\delta_g > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta_g$，就有

    $$d_{l^2}(g(x), g(x_0)) = |g(x) - g(x_0)| < \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

    综上，$\delta < min(\delta_f, \delta_g)$，使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有

    $$\begin{aligned} d_{l^2}(f \oplus g(x), f \oplus g(x_0)) &= d_{l^2}((f(x), g(x)), (f(x_0), g(x_0))) \\ &= \sqrt{|f(x) - f(x_0)|^2 + |g(x) - g(x_0)|^2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

    所以 $f \oplus g$ 在 x_0 处是连续的。
  - $\Leftarrow$

任意 $\epsilon > 0$，由于 $f \oplus g$ 在 x_0 处是连续的，所以存在 $\delta > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有

$$\begin{aligned} d_{l^2}(f \oplus g(x), f \oplus g(x_0)) &= d_{l^2}((f(x), g(x)), (f(x_0), g(x_0))) \\ &= \sqrt{|f(x) - f(x_0)|^2 + |g(x) - g(x_0)|^2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \\ |g(x) - g(x_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

即

$$d_{l^2}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

$$d_{l^2}(g(x), g(x_0)) < \epsilon$$

于是可得 f, g 在 x_0 处是连续的。

- (b)

  可以由 (a) 直接推出。

方法二：使用书中的提示

- (a)

  - $\Rightarrow$

    任意 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列，因为 f, g 在 x_0 处连续，由命题 13.1.4(b) 可知，序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $f(x_0)$（书中有说在没有特殊说明的时，提到度量空间 $R^n (n \geq 1)$ 指的就是欧几里得度量）。序列 $(g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $g(x_0)$。

    由命题 12.1.18(d) 可知，$(f(x^{(n)}), g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $(f(x_0), g(x_0))$，由 13.1.4(b) 可知 $f \oplus g$ 在 x_0 处是连续的。

- $\Leftarrow$

  任意 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列，因为 $f \oplus g$ 在 x_0 处是连续的，由命题 13.1.4(b) 可知，序列 $(f \oplus g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty} = (f(x^{(n)}), g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $(f(x_0), g(x_0))$，由命题 12.1.18(d) 可知序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $f(x_0)$，序列 $(g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $g(x_0)$，所以由 13.1.4(b) 可知 f, g 在 x_0 处连续。

- (b)

  可以由 (a) 直接推出。

13.2.2