15.6 习题

张志聪

2025 年 4 月 13 日

15.6.1

设 $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d), z_3 = (e, f)$。

- (a) 可交换性：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$。

  按照定义 15.6.3（复数的加法运算）可知，

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a + c, b + d) \\
z_2 + z_1 &= (c + a, d + b)
\end{aligned}
$$

  因为

$$
\begin{aligned}
a + c &= c + a \\
b + d &= d + b
\end{aligned}
$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$
z_1 + z_2 = z_2 + z_1
$$

- (b) 结合性：$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$。

  我们有

$$
\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_2 &= (a + c, b + d) + (e, f) \\
&= (a + c + e, b + d + f)
\end{aligned}
$$

  又因为

$$
\begin{aligned}
z_1 + (z_2 + z_3) &= (a, b) + (c + e, d + f) \\
&= (a + c + e, b + d + f)
\end{aligned}
$$

于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

- (c) 恒等性：$z_1 + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z_1$。

  我们有，

  $$
  \begin{aligned}
  z_1 + 0_{\mathbb{C}} &= (a, b) + (0, 0) \\
  &= (a, b)
  \end{aligned}
  $$

  又因为

  $$
  \begin{aligned}
  0_{\mathbb{C}} + z_1 &= (0, 0) + (a, b) \\
  &= (a, b)
  \end{aligned}
  $$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

  $$z_1 + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z_1$$

- (d) 逆元性：$z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0_{\mathbb{C}}$。

  由 (a) 可交换性可知

  $$z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1$$

  我们有，

  $$
  \begin{aligned}
  z_1 + (-z_1) &= (a, b) + (-a, -b) \\
  &= (0, 0) \\
  &= 0_{\mathbb{C}}
  \end{aligned}
  $$

15.6.2

设 $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d), z_3 = (e, f)$。

- (a) 可交换性：$z_1 z_2 = z_2 z_1$。

  由定义 15.6.5 可知，

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a, b)(c, d) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 z_1 &= (c, d)(a, b) \\ &= (ca - db, cb + da) \end{aligned}$$

  因为

$$ac - bd = ca - db$$
$$ad + bc = cb + da$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

- (b) 结合性：$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$。

  因为

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= ((a, b)(c, d))(e, f) \\ &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 (z_2 z_3) &= (a, b)((c, d)(e, f)) \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \end{aligned}$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

- (c) 恒等性：$z_1 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} z_1 = z_1$。

  由 (a) 可知

$$z_1 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} z_1$$

  又有

$$\begin{aligned} z_1 1_{\mathbb{C}} &= (a,b)(1,0) \\ &= (a\times 1 - b\times 0, a\times 0 + b\times 1) \\ &= (a,b) \\ &= z_1 \end{aligned}$$

- (d) 分配性：$z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ 和 $(z_2+z_3)z_1 = z_2z_1 + z_3z_1$。

  因为

$$\begin{aligned} z_1(z_2+z_3) &= (a,b)((c,d)+(e,f)) \\ &= (a,b)(c+e,d+f) \\ &= (a(c+e)-b(d+f), a(d+f)+b(c+e)) \\ &= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1z_2 + z_1z_2 &= (a,b)(c,d) + (a,b)(e,f) \\ &= (ac-bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be) \\ &= (ac-bd+ae-bf, ad+bc+af+be) \end{aligned}$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

  同理可得，

$$(z_2+z_3)z_1 = z_2z_1 + z_3z_1$$

15.6.3

这个引理是想说明：形式符号 $z=(a,b)$ 与 $z=a+bi$ 是等价的。

因为

$$
\begin{aligned}
a+bi &= (a,0)+(b,0)(0,1) \\
&= (a,0)+(0,b) \\
&= (a,b)
\end{aligned}
$$

从而，$a+bi$ 与 (a,b) 就是一回事。

15.6.4

设 $z=a+bi, w=c+di$。

- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$。

  因为

  $$z+w=a+bi+c+di=a+c+(b+d)i$$

  于是

  $$\overline{z+w}=-a-c-(b+d)i$$