

10.5 习题

张志聪

2024 年 12 月 20 日

10.5.1

首先证明存在 $\delta > 0$ 使得对所有的 $x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}$ 都有 $g(x) \neq 0$ 。由命题 10.1.7 (牛顿逼近法) (b) 可得, 特别地, 取 $\epsilon = \frac{1}{2}|g'(x_0)| > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得,

$$|g(x) - (g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0))| \leq \frac{1}{2}|g'(x_0)||x - x_0|$$

$$|g(x) - g'(x_0)(x - x_0)| \leq \frac{1}{2}|g'(x_0)||x - x_0|$$

此时, 如果存在 $x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$, 使得 $g(x) = 0$, 那么,

$$|g(x) - g'(x_0)(x - x_0)| \leq \frac{1}{2}|g'(x_0)||x - x_0|$$

$$|0 - g'(x_0)(x - x_0)| \leq \frac{1}{2}|g'(x_0)||x - x_0|$$

$$|g'(x_0)(x - x_0)| \leq \frac{1}{2}|g'(x_0)||x - x_0|$$

显然以上等式是不成立的, 所以 $g(x) \neq 0$ 。

由于 f, g 都在 x_0 处可微, 并由命题 9.3.18 (极限是局部的) 可知,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0; x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0; x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= g'(x_0) \end{aligned}$$

因为

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

于是利用命题 9.3.14（函数的极限定律）可知，

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0; x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}} \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \end{aligned}$$

10.5.2

- (1) 不满足命题的前置条件： $g(0) = 0$
- (2) 不满足命题的前置条件： $\lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在。