10.1 习题

张志聪

2024 年 12 月 12 日

10.1.1

（1）f 在 x_0 处可微分，由定义 10.1.1 可知，极限

$$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

是存在的，不妨设极限是 L。由定义 9.3.6 可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L| \leq \epsilon$$

对任意 $x \in \big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \setminus \{x_0\}\big)$ 均成立。

任意 $y \in \big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap Y \setminus \{x_0\}\big)$，因为 $Y \subset X$，所以 $y \in \big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \setminus \{x_0\}\big)$，所以

$$|\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} - L| \leq \epsilon$$

由定义 9.3.6 可知，

$$\lim_{y \to x_0; y \in Y \setminus \{x_0\}} \frac{f|_Y(y) - f|_Y(x_0)}{y - x_0}$$

的极限存在，所以 $f|_Y$ 在 x_0 处可微。

（2）与 10.1.2 不矛盾的原因：

点 3 不是 $[1, 2] \cup \{3\}$ 的极限点，不满足习题 10.1.1 习题的前置条件。

10.1.2

- $(a) \implies (b)$

  f 在 X 中的 x_0 处是可微的，且导数为 L，由定义 10.1.1 可知，极限

  $$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$$

  于是，由定义 9.3.6 可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

  $$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - L| \le \epsilon$$

  对 $|x-x_0| \le \delta, x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。

  对上式进行算术运算，

  $$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - L| \le \epsilon$$
  $$|\frac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{x-x_0}| \le \epsilon$$
  $$|f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)| \le \epsilon|x-x_0|$$
  $$|f(x)-\big(f(x_0)+L(x-x_0)\big)| \le \epsilon|x-x_0|$$

  对 $|x-x_0| \le \delta, x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。当 $x = x_0$ 时，公式也成立。

- $(b) \implies (a)$

  直接进行算术运算，略

10.1.3

- 方法 1(利用极限定律，命题 9.3.14)

  不妨设 x_0 处的导数为 L，于是

  $$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$$

  即函数 f 在 x_0 处沿着 $X \setminus \{x_0\}$ 收敛于 L。

  我们易证

  $$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} x-x_0 = 0$$

即函数 g 在 x_0 处沿着 $X \setminus \{x_0\}$ 收敛于 0。

于是

$$\begin{aligned} fg &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \\ &= f(x)-f(x_0) \end{aligned}$$

按照极限定律（命题 9.3.14）可得

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} fg \\ &= \lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} f(x)-f(x_0) \\ &= L \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$ 对所有满足 $|x-x_0| < \delta$ 的 $X \setminus \{x_0\}$ 均成立。特别地 $x = x_0$ 时 $f(x)-f(x_0) = 0 < \delta$ 也成立。

所以由命题 9.4.7(d) 可知，f 在 x_0 处连续。

- 方法 2（利用命题 10.1.7）

  f 在 x_0 处可微，由命题 10.1.7(b) 可知，对任意的 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$，当 $x \in X$ 且 $|x-x_0| \le \delta$ 时，那么就有

  $$|f(x)-\big(f(x_0)+L(x-x_0)\big)| \le \epsilon|x-x_0|$$

  进过算术运算，

  $$\begin{aligned} |f(x)-\big(f(x_0)+L(x-x_0)\big)| &\le \epsilon|x-x_0| \\ |f(x)-f(x_0)| &\le \epsilon|x-x_0|+|L||x-x_0| \\ |f(x)-f(x_0)| &\le (\epsilon+|L|)|x-x_0| \end{aligned}$$

  取 $\delta = \frac{\epsilon}{\epsilon+|L|}$，此时 $|x-x_0| \le \frac{\epsilon}{\epsilon+|L|} = \delta$，使得

  $$|f(x)-f(x_0)| \le \epsilon$$

  由命题 9.4.7(d) 可知，f 在 x_0 处连续。

10.1.4