15.1 习题

张志聪

2025 年 4 月 9 日

15.1.1

$$\limsup_{n\to\infty}|c_n(x-a)^n|^{\frac{1}{n}}=\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}|x-a|$$

- (a)

  由定义 15.1.3（收敛半径）可知，

  （1）$R=+\infty$，那么，$|x-a|>R$ 这个前置条件无法成立。

  （2）$R=0$，那么，$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}=+\infty$，且 $|x-a|>0$，所以，$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}|x-a|>1$，由定理 7.5.1(b) 可知，级数发散。

  （3）$R>0$（R 是实数）。那么，$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{R}$，于是，$|x-a|>R$，那么，$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}|x-a|=\frac{1}{R}|x-a|>1$，（注意：$|x-a|$ 此时可以看做常数，$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}|x-a|=\frac{1}{R}|x-a|$ 可以通过反证法证明）由定理 7.5.1(b) 可知，级数发散。

- (b)

  由定义 15.1.3（收敛半径）可知，

  （1）$R=+\infty$，那么，$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}=0$ 且 $|x-a|<R$ 总能成立，于是 $\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}|x-a|=0$，由定理 7.5.1(a) 可知，级数绝对收敛。

  （2）$R=0$，那么，$|x-a|<R$ 这个前置条件无法成立。

（3）$R>0$（R 是实数）。那么，$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{R}$，于是，$|x-a|<R$，那么，$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}|x-a|=\frac{1}{R}|x-a|<1$，由定理 7.5.1(b) 可知，级数绝对收敛。

- (c)

  （1）一致收敛于 f。

  由定义 14.5.2（无限级数）可知，我们需要证明 $N\to\infty$ 时，部分和 $\sum_{n=0}^{N}f^{(n)}$，其中 $f^{(n)}:=c_n(x-a)^n$，沿着 $[a-r,a+r]$ 一致收敛于 f。

  于是，利用 14.5.7（威尔斯特拉斯 M 判别法），我们需要证明

  $$\sum_{n=0}^{\infty}||f^{(n)}||_\infty$$

  是收敛的。

  因为 $|c_n(x-a)^n|$ 在 $[a,a+r]$ 上是单增的，所以 $x_0=a+r$ 时，$f^{(n)}=c_n(x_0-a)^n$ 取最大值，即 $||f^{(n)}||_\infty=|c_n(x_0-a)n|$。

  同理，$x_0=a-r$ 时，$f^{(n)}=c_n(x_0-a)^n$ 取最大值。

  由 (b) 可得，对任意 $x_0\in[a-r,a+r]$, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x_0-a)^n$ 是绝对收敛的，即 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(x_0-a)^n|$ 是收敛的。

  特别地，$x_0=a+r$ 或 $x_0=a-r$，级数也是收敛的，即 $\sum_{n=0}^{\infty}||f^{(n)}||_\infty$ 收敛。

  于是可知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}$ 一致收敛于某个函数，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ 一致收敛于某个函数。（注意：这里的函数用 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ 本身表示，它代表一致收敛的函数 f）。

  （2）f 是连续的。

  对于每一个 N,函数 $\sum_{n=0}^{N}f^{(n)}$ 都是连续的（这里其实有借助定义 14.5.2），由推论 14.3.2 可知，f 是连续的。

- (d)

  令 $f_n=c_n(x-a)^n$，于是 f_n 是连续且可微的，且导函数 $f_n'=nc_n(x-a)^{n-1}$ 也是连续的。

我们有（$r < R$）

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n'||_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n r^{n-1}$$

结合例 15.1.15 可知：

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} (nc_n r^n)^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \limsup_{n\to\infty} (c_n r^n)^{\frac{1}{n}} \\ &< 1\end{aligned}$$

于是可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n r^n$ 收敛。

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n r^{n-1} = r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} nc_n r^n$$

可得，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n r^{n-1}$ 收敛。

综上，由威尔斯特拉斯 M 判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ 一致收敛于某个函数 g。

又 $x_0 = a$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_0 - a)^n = 0$$

$F_N = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n (x-a)^n$ 是一个可微函数，并且其倒数 $F_N' = \sum\limits_{n=1}^{N} nc_n (x-a)^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n'$ 是连续的。又由之前的讨论可知，导函数序列 F_N' 一致收敛于某个函数 g，并且存在一点 $x_0 = a$ 使得极限 $\lim\limits_{n\to\infty} F_N(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (x_0 - a)^n = 0$，由定理 14.7.1 可知，函数序列 F_N 一致收敛于一个可微函数，由该函数的唯一性可知，F_N 一致收敛于 f，并且 f 的导函数等于 g。所以 $g = f'$。

- (e)

由推论 14.6.2 可知，

$$\begin{aligned}\int_{[y,z]} f &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[y,z]} c_n(x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}|_y^z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(z-a)^{n+1}}{n+1} - \frac{c_n(y-a)^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^{n+1}-(y-a)^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

15.1.2

- (a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- (b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

使用推论 7.3.7、命题 7.2.12（交错级数判别法）可以验证是否正确。

- (c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

使用推论 7.3.7、命题 7.2.12（交错级数判别法）可以验证是否正确。

- (d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

使用推论 7.3.7、命题 7.2.12（交错级数判别法）可以验证是否正确。

- (d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 14.5.8 中有说明。