8.2 习题

2024 年 10 月 21 日

8.2.1

令

$$S=\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subsetneqq X,A\text{是有限集}\right\}$$

★ $\Rightarrow$

如果 X 是有限集，这是命题是显然的。

如果 X 是可数集。因为 X 是可数集，那么存在双射函数 $g:\mathbb{N}\to X$，又因为级数 $\sum\limits_{x\in X}f(x)$ 绝对收敛，那么

$$\sum_{x\in X}|f(x)|=\sum_{n=0}^{\infty}|f(g(n))|$$

任意元素 $e\in S,e=\sum\limits_{x\in A}|f(x)|:A\subsetneqq X$，所以有一个有限集 $N',A=g(N')$，因为 N' 是有限集，所有存在自然数 k，使得 $max(N')\leq k$，于是，

$$e=\sum_{x\in A}|f(x)|=\sum_{n\in N'}|f(g(n))|\leq\sum_{n=0}^{k}|f(g(n))|\leq\sum_{n=0}^{\infty}|f(g(n))|$$

所以，e 是有限的，由 e 的任意性可知，集合 S 有上界，所以，

$$\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subsetneqq X,A\text{是有限集}\right\}<\infty$$

★ $\Leftarrow$

反证法，假设级数 $\sum\limits_{x\in X}f(x)$ 绝对发散。

因为

$$\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X,A\text{是有限集}\right\}<\infty$$

设 $\sup S\leq M$。因为 $\sum\limits_{x\in X}f(x)$ 绝对发散，所以存在自然数 N 使得

$$\sum_{n=0}^{N}|f(g(n))|>M$$

令 $A=g(n\in\mathbb{N}:0\leq n\leq N)$，因为 A 是有限集，且 $A\in S$，所以

$$\sum_{x\in A}|f(x)|=\sum_{n=0}^{N}|f(g(n))|\leq M$$

存在矛盾。