7.2 习题

2024 年 10 月 1 日

7.2.1

发散的。

只需证明，级数的部分和序列 $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ 是发散的即可，证明如下：

当 N 是奇数 $S_N = -1$；

当 N 是偶数 $S_N = 0$；

所以，该序列不是柯西序列，也就不会收敛，即是发散的。

1.2.2 的问题已解决，提到的答案都是不对的。

7.2.2

★ $\Rightarrow$

因为 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛，那么这个级数的部分和序列 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$ 是收敛的，由定理 6.4.18（实数的完备性）可知 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$ 也是柯西序列，于是，对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq m$，$p, q \geq N$ 使得

$$|S_p - S_q| \leq \epsilon \tag{1}$$

$$|\sum_{n=p}^{q} a_n| \leq \epsilon \tag{2}$$

★ $\Leftarrow$

对任意 $\epsilon > 0$ 都有 $|\sum\limits_{n=p}^{q} a_n| \leq \epsilon$，可知级数的部分和序列 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$ 是柯西序列，由定理 6.4.18（实数的完备性）可知其也是收敛的，由部分和收敛可知级数收敛。

7.2.3

由命题 7.2.5 可知，$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛，对任意 $\epsilon > 0$，都存在一个 $N \geq m$ 使得 $n \geq N$ 有

$$|\sum_{n=n}^{n} a_n| \leq \epsilon$$
$$|a_n| \leq \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 收敛且收敛于 0

7.2.4

★绝对收敛 ⇒ 条件收敛

$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ 是绝对收敛，即 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} |a_n|$ 是收敛的，由命题 7.2.5 可知, 对任意 $\epsilon > 0$，都存在一个整数 $N \geq m$，使得 $q, p \geq N$，均有，

$$|\sum_{n=p}^{q} |a_n|| \leq \epsilon$$

由命题 7.1.4（e）可知，

$$|\sum_{n=p}^{q} a_n| \leq |\sum_{n=p}^{q} |a_n|| \leq \epsilon$$
$$|\sum_{n=p}^{q} a_n| \leq \epsilon$$

再次利用命题 7.2.5 可知，$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛

★三角不等式

不妨设 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} |a_n|$ 的部分和序列为 $(S'_N)_{N=m}^{\infty}$，$|\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n|$ 的部分和序列为 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$。显然，对任意 $N \geq m$ 都有，

$$S'_N \geq S_N$$

又因为两个序列的极限都存在，于是（推论 5.4.10 的变形），

$$\lim_{N\to\infty} S'_N \geq \lim_{N\to\infty} S_N$$

即：

$$\sum_{n=m}^{\infty}|a_n| \geq |\sum_{n=m}^{\infty}a_n|$$

7.2.5

★（a）

$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛于 x，于是其部分和序列 $(A_N)_{N=m}^{\infty}$ 收敛于 x。

同理，$\sum\limits_{n=m}^{\infty} b_n$ 收敛于 y，于是其部分和序列 $(B_N)_{N=m}^{\infty}$ 收敛于 y。

由题设可知，$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n + b_n$ 的部分和 $S_N = A_N + B_N$，由定理 6.1.19（极限定律）可知，序列 $(S_N)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $x+y$。

★（b）

略，与（a）证明步骤类似。

★（c）

不妨设 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$、$\sum\limits_{n=m+k}^{\infty} a_n$ 的部分和分别为 S_N, S'_N，并设 $M = \sum\limits_{n=m}^{m+k-1} a_n$。
当 $N \geq m+k-1$ 时，$S_N = M + S'_N$。

（1） 如果 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛。

设 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛于 x。

由于 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛 x，所以对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N_0 \geq m$ 使得 $|S_N - x| \leq \epsilon$，对任意 $N \geq N_0$ 均成立。取 $N'_0 = max(N_0, m+k-1)$，此时 $|S_N - x| \leq \epsilon$，对任意 $N \geq N'_0$ 均成立。

反证法，假设 $\sum\limits_{n=m+k}^{\infty} a_n$ 是发散的，则序列 $(S'_N)_{N=m+k}^{\infty}$ 是发散的，那么，也就不会收敛于 $x - M$。

所以，对存在 $\epsilon > 0, N \geq N'_0$，使得，

$$|S'_N + M - x| > \epsilon$$

$$S'_N + M > x + \epsilon$$

或

$$S'_N + M < x - \epsilon$$

因为 $S_N = M + S'_N$，所以 $S_N > x+\epsilon$ 或 $S_N < x-\epsilon$，这与 $|S_N - x| \le \epsilon$ 矛盾，所以 $\sum\limits_{n=m+k}^{\infty} a_n$ 是收敛的。

（2） 如果 $\sum\limits_{n=m+k}^{\infty} a_n$ 收敛。

把 $\sum\limits_{n=m}^{m+k-1} a_n$，转换成一个新的序列 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} b_n$，当 $m \le n \le m+k-1$ 时，$a_n = b_n$；当 $n > m+k-1$ 时，$b_n = 0$。

此时新的序列 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} b_n$ 收敛且收敛于 M。

设序列 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} b_n$ 的部分和为 S_B。

那么，$S_N = S_B + S'_N$，由极限定律（定理 6.1.19）可知，序列 $(S_N)_m^{\infty}$ 收敛，且收敛于 $M + \sum\limits_{n=m+k}^{\infty} a_n$。

★（d）

不妨设 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$、$\sum\limits_{n=m+k}^{\infty} a_{n-k}$ 的部分和分别为 $S_N, S'_{N'}$。

如果，序列 $(S'_{N'})_{N'=m+k}^{\infty}$ 与 $(S_N)_{N=N'-k}^{\infty}$ 是等价的，则它们有相同的极限。

对 N' 进行归纳。

$N' = m+k$ 时，$S'_N = a_m, S_N = S_{N'-k} = S_m = a_m$，所以 $S'_N = S_N$。

归纳假设，$N' = q$ 时，$S'_q = S_{q-k}$。

当 $N' = q+1$ 时，$S'_{q+1} = S'_q + a_{q+1-k}$；$S_{q+1-k} = S_{q-k} + a_{q+1-k}$，由归纳假设可知 $S'_q = S_{q-k}$，于是 $S'_{q+1} = S_{q+1-k}$。

归纳完成。

又由习题 6.1.3 可知，$(S_N)_{N=N'-k}^{\infty}$ 与 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$ 收敛于同一个实数。

于是序列 $(S'_{N'})_{N'=m+k}^{\infty}$ 与 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$ 收敛于同一个实数。

7.2.6

★$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于0

级数的部分和 $S_N = a_0 - a_{N+1}$，由极限定律（定理 6.1.19），以及 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 0，可知，序列 $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ 收敛于 a_0。

★$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于$L(L \neq 0)$

同理可证，序列 $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ 收敛于 $a_0 - L$。