

8.5 习题

张志聪

2024 年 11 月 26 日

这一节题太多了，我只写正文中提到的习题了。

8.5.3

证明是偏序集。

- (自反性) 因为对任意的正整数 x 都有 $x = x \times 1$, 所以 $x|x$
- (反对称性) 如果正整数 x, y 满足 $x|y$ 且 $y|x$, 那么存在正整数 a, b 使得

$$\begin{cases} y = x \times a \\ x = y \times b \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

于是 $x = y$

- (传递性) 如果正整数 x, y, z 满足 $x|y$ 且 $y|z$, 那么存在正整数 a, b 使得

$$\begin{cases} y = x \times a \\ z = y \times b \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} z = x \times a \times b \end{cases}$$

于是 $x|z$

证明不是全序集, 举一个反例即可, 正整数 $2, 3$ 是不满足 $2|3$ 或 $3|2$ 的, 因为不存在正整数 a 使得 $2 = 3a$ 或 $3 = 2a$ 。

8.5.7

设 \leq_X 是 X 上的序关系。

反证法，假设 Y 有多个最小元素。假设 $y_1, y_2 \in Y$ 且 $y_1 \neq y_2$ 都是 Y 的最小元素。由于 Y 是 X 的一个全序子集，则由定义 8.5.3 可知， $y_1 \leq_X y_2$ 或 $y_2 \leq_X y_1$ 。

如果 $y_1 \leq_X y_2$ 则与 y_2 是最小值相悖；如果 $y_2 \leq_X y_1$ 则与 y_1 是最小值相悖。

最大值的证明同上。

8.5.8

为了描述方便，不妨设 X 是全序集， Y 是 X 的一个非空子集， \leq_X 是 X 上的序关系。

按照定义 8.5.3 可知，全序集的非空子集也是全序集。

由题设可知 Y 是有限集合，所以不妨设 $\#(Y) = n$ ， n 是任意自然数。

对 n 进行归纳。

归纳基始， $n = 1$ ，即 Y 中只有一个元素，由定义 8.5.5 可知，该元素既是最大值也是最小值。

归纳假设， $n = k$ 时命题成立。

$n = k + 1$ ，设 $Y' = Y \setminus \{x\}$ ， x 可以是 Y 中的任意元素。由引理 3.6.9 可知， $\#(Y') = k$ ，于是利用归纳假设可得 $\min(Y') = y_1$ ，因为 Y 是全序集，所以 x, y_1 是可以比较大小的，即：要么 $x \leq_X y_1$ （此时 x 是最小值），要么 $y_1 \leq_X x$ （此时 y_1 是最小值）。

最大值证明类似。

8.5.10

说明 1. “强归纳原理和弱归纳原理是等价的”。个人感觉这个命题还是挺重要的，接下来我会证明这个命题。

这里的证明，参考了《符号逻辑讲义 徐明》命题 681.

- 强归纳原理 \Rightarrow 弱归纳原理；即强归纳原理成立的前提下，可以推

出弱归纳原理成立。

令 $P(n)$ 是关于元素 $n \in X$ 的任意性质。假设弱归纳原理的前提成立，即假设 $P(0)$ 成立，并归纳假设对每一个 $n \in X, P(n)$ 成立则 $P(n+1)$ 成立。现在需要用强归纳原理证明弱归纳原理的结论（对所有的 n 都有 $P(n)$ ）。而强归纳原理的前提对所有 $m \leq n$ 的 $P(m)$ 成立，那么 $P(n+1)$ 成立，这显然已由弱归纳原理的前提保证了。强归纳原理的前提满足后，结论也就有了。

- 弱归纳原理 \Rightarrow 强归纳原理

即弱归纳原理成立的前提下，可以推出强归纳原理成立。

令 $P(n)$ 是关于元素 $n \in X$ 的任意性质。假设强归纳原理的前提成立，即对所有 $m \leq n$ 的 $P(m)$ 成立，那么 $P(n+1)$ 成立。现在需要用弱归纳原理证明强归纳原理的结论。而弱归纳原理的前提 $P(0)$ 成立，与对每一个 $n \in X, P(n)$ 成立则 $P(n+1)$ 成立，这显然也已被强归纳原理的前提保证了，弱归纳原理的前提满足后，结论也就有了。

上面的证明是在自然数集上证明的，但该命题在良序集也是成立的。

下面说一下大致原因，不是很严谨：

1. 你可能会说书中是 $m < n$ 的 $m \in X$ 都为真，那么 $P(n)$ 也为真。而不是以上证明中的 $m \leq n$ ，两种方式是等价的：都是表达定义 8.5.12 中的最小严格上界。
2. 也有可能对 $n+1$ 表示困惑，因为良序集里不一定有加法定义，其实 $n+1$ 是自然数中表达 $m \leq n$ 严格最小上界的方式。

反证法，假设结论不成立。

即 $Y := \{n \in X : P(m) \text{ 为假}, m \leq n, m \in X\}$ （这里我改了下表达方式，感觉书中的翻译有点不直观）不是空集。

因为 Y 是 X 的非空子集，那么也是良序集，所以存在最小值 M

- 如果 $M = 0$ ，这里假设 0 是 X 的最小值，因为 X 是良序集，最小值是肯定存在的。这与前提条件矛盾，因为按照前提条件 $P(0)$ 是空虚为真的。
- 如果 $M > 0$ ，那么，存在 $0 \leq m < M, P(m)$ 为真，由前提条件可知

$P(M)$ 为真, 存在矛盾。

8.5.13

说明 2. 这个结论不是太直观, 书中定义“好的”, 其实是想保证子集 Y 是按照大小顺序放入元素的, 举个栗子, 比如 $x_0 = 0$, 那么, Y 可以是 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, 而不能是 $0, 2, 3, 4, \dots$, 因为后者无法满足“好的”性质, 书中的下文也有说明, 只是不够直观。

按照提示进行证明。

(1) 先利用命题 8.5.10 (强归纳原理) 证明

$$\{y \in Y : y \leq a\} = \{y \in Y' : y \leq a\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq a\}$$

对所有的 $a \in Y \cap Y'$ 均成立。

$Y \cap Y' \neq \emptyset$, 因为两个集合中至少有一个元素 x_0 。

对 a 进行强归纳,

对每一个 $n \in Y \cap Y'$, 等式对所有满足 $m < n$ 的 $m \in Y \cap Y'$ 成立, 现在需要证明 $a = n$ 等式也成立。

反证法, 假设 $a = n$ 时等式不成立, 即存在一个非空集合

$$W := \{y \in Y \cup Y' : m, n \in Y \cap Y', y \notin Y \cap Y', m < y < n\}$$

(即: 在 m, n 之间 Y, Y' 存在不一样的元素)

因为 W 是良序集, 所以存在最小值 w , 不妨设 $w \in Y$, 因为 $w \notin Y \cap Y'$, 那么,

$$\begin{aligned} \{y \in Y : y < m\} &= \{y \in Y : y < w\} \\ \Rightarrow \\ s(\{y \in Y : y < m\}) &\text{对所有 } x \in Y \setminus \{x_0\} \text{ 均成立} \\ &= s(\{y \in Y : y < w\}) \text{对所有 } x \in Y \setminus \{x_0\} \text{ 均成立} \\ &= w \end{aligned}$$

这与 Y 是“好的”矛盾。于是, 等式成立。

(2) 接下来, 证明 $Y \cap Y'$ 是好的。

反证法,假设 $Y \cap Y'$ 不是好的,即存在 $k \in Y \cap Y'$,使得 $s(y \in Y \cap Y' : y < k) \neq k$ 。

由等式可知 $\{y \in Y : y \leq k\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq k\}$,

$$\begin{cases} \{y \in Y : y \leq k\} \setminus \{k\} = \{y \in Y : y < k\} \\ \{y \in Y \cap Y' : y \leq k\} \setminus \{k\} = \{y \in Y \cap Y' : y < k\} \end{cases}$$

可知

$$\{y \in Y : y < k\} = \{y \in Y \cap Y' : y < k\}$$

于是, $s(\{y \in Y : y < k\}) \neq k$ 与 Y 是“好的”矛盾

(3) 如果 $Y' \setminus Y$ 是非空的, $s(Y \cap Y') = \min(Y' \setminus Y)$

•