

6.3 为什么

2024 年 7 月 1 日

1. $0 < x < 1$, 那么序列 $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ 是单调递减的。

需要证明 $x^n \geq x^{n+1}$:

$$\begin{aligned}x^n - x^{n+1} \\= x^n(1 - x) < 0\end{aligned}$$

所以 $x^n \geq x^{n+1}$

2. 定义 5.2.6 中定义的等价序列, 如果有极限, 则极限是相同的。

设序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是等价序列, 并且 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x , 现在需要证明: $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 也收敛于 x 。

任意实数 $\epsilon > 0$, $\epsilon/2 > 0$, 序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 最终 $\epsilon/2$ - 接近于 x , 所以存在 $N \geq 0$ 对任意 $n \geq N$ 有

$$\begin{aligned}|a_n - x| &\leq \epsilon/2 \\d(a_n, x) &\leq \epsilon/2\end{aligned}$$

又因为序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是等价序列, 所以是最终 $\epsilon/2$ - 接近的, 即存在 $N' \geq n$ 使得,

$$\begin{aligned}|b_n - a_n| &\leq \epsilon/2 \\d(b_n, a_n) &\leq \epsilon/2\end{aligned}$$

由命题 4.3.3 (g) 【准确的说是实数版本，并把 y 看做 a_n 】所以，

$$\begin{aligned} d(b_n - x) &\leq d(a_n, x) + d(b_n, a_n) \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

所以序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 最终 ϵ - 接近于 x 。由 ϵ 的任意性可知，序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x 。

6.3.4

反证法。假设序列 $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 L ，由于 $x > 1$ ，所以 $0 < 1/x < 1$ ，由命题 6.3.10 可知，序列 $[(1/x)^n]_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 0，由定理 6.1.19 中的极限定律可知，序列 $[(1/x)^n \times x^n]_{n=1}^{\infty}$ 的极限为：

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1/x)^n \times x^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1/x)^n \times \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \\ &= L \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

又因 $(1/x)^n \times x^n = 1$ 可知，

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1/x)^n \times x^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

由矛盾可知，假设不成立。