11.3 习题

张志聪

2024 年 12 月 23 日

11.3.1

- ∘ f 从上方控制 g，于是由定义 11.3.1 可知，对任意 $x \in I$ 都有 $f(x) \geq g(x)$，g 从上方控制 h，类似的，对任意 $x \in I$ 都有 $g(x) \geq h(x)$，于是对任意 $x \in I$ 都有 $f(x) \geq h(x)$，再次利用定义 11.3.1，f 从上方控制 h
- ∘ f 从上方控制 g，于是由定义 11.3.1 可知，对任意 $x \in I$ 都有 $f(x) \geq g(x)$；g 从上方控制 f，于是由定义 11.3.1 可知，对任意 $x \in I$ 都有 $g(x) \geq f(x)$；综上，对任意 $x \in I$，都有，

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

于是可得 $f(x) = g(x)$，由函数相等的定义可知 $f = g$。

11.3.2

- $f + h$ 是否从上方控制 $g + h$?

  是；证明略

- $f \cdot h$ 是否从上方控制 $g \cdot h$?

  否；反例 $f(x) = 1, g(x) = -1, h(x) = -1$，此时，

$$f \cdot h = -1$$
$$g \cdot h = 1$$

于是任意 $x \in I$ 都有 $(f \cdot h)(x) < (g \cdot h)(x)$，$f \cdot h$ 从上方控制 $g \cdot h$ 不成立。

- cf 是否从上方控制 cg?

  否；把上面的反例中的 $h(x) = -1$ 看做 $c = -1$。

11.3.3

由定义 11.3.1，f 在 I 上从上方控制 f，于是

$$\overline{\int}_I f \le p.c. \int_I f$$

类似的，f 在 I 上从下方控制 f，可得

$$p.c. \int_I f \le \underline{\int}_I f$$

又由引理 11.3.3 可知

$$\underline{\int}_I f \le \overline{\int}_I f$$

于是可得，

$$p.c. \int_I f = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$$

即：

$$\int_I f = p.c. \int_I f$$

11.3.4

由定义 11.2.14 和定义 11.2.9 可知

$$\begin{aligned} p.c. \int_I g &= p.c. \int_{[P]} g \\ &= \sum_{J \in P} C_J |J| \end{aligned}$$

其中，对任意的 $J \in P$，我们令 C_J 表示 g 在 J 上的常数值。

由定义 11.3.9 可知

$$U(f,P) = \sum_{J \in P; J \neq \emptyset} (\sup_{x \in J} f(x))|J|$$

对任意 $J \in P$，$g|_J$ 是常数函数，不妨设为 c_j，此时任意 $x \in J$ 都有 $c_j \geq \sup_{x \in J} f(x)$，否则与题设 g 是从上方控制 f 的函数矛盾。所以任意 $J \in P, |J| \geq 0$ 都有

$$C_J|J| \geq (\sup_{x \in J} f(x))|J|$$

由命题 7.1.11(h) 可知

$$\sum_{J \in P} C_J|J| \geq \sum_{J \in P; J \neq \emptyset} (\sup_{x \in J} f(x))|J|$$

即：

$$p.c. \int_I g \geq U(f,P)$$

类似地，

$$p.c. \int_I h \leq L(f,P)$$

说明 1. I 是空集的话，空虚的成立，无需讨论，定义 *11.3.9* 未定义空集的情况。

划分 P 中可能存在空集的情况，可以去掉空集元素，得到划分 P'，命题 *11.2.13* 保证结论任然成立。

11.3.5

由引理 11.3.11 可知，任意 g 是从上方控制 f 的函数，并且 g 是关于 I 的某个划分 P 的分段常量函数，都有

$$p.c. \int_I g \geq U(f,P)$$

于是可得

$$p.c.\int_I g \geq \inf\{U(f,P) : P\text{是}I\text{的划分}\}$$

又由定义 11.3.2 可知

$$p.c.\int_I g \geq \overline{\int}_I f$$

下面证明 $\overline{\int}_I f = \inf\{U(f,P) : P\text{是}I\text{的划分}\}$。

反证法，假设 $\overline{\int}_I f > \inf\{U(f,P) : P\text{是}I\text{的划分}\}$，于是存在 I 的划分 P_0 使得

$$\overline{\int}_I f > U(f,P_0) > \inf\{U(f,P) : P\text{是}I\text{的划分}\} \tag{1}$$

我们可以在划分 P_0 的基础上，定义函数 g_0 是关于 P_0 的分段常量函数如下：

$$g_0(x) = \sup_{x\in J} f(x)$$

其中，$J \in P_0$，于是

$$p.c.\int_I g_0 = p.c.\int_{[P_0]} g_0 = U(f,P_0)$$

由（1）式可得

$$\overline{\int}_I f > p.c.\int_I g_0$$

因为 g_0 也是满足引理 11.3.11 前置条件的函数，所以

$$\overline{\int}_I f \leq p.c.\int_I g_0$$

存在矛盾，假设不成立。

同理可证 $\overline{\int}_I f < \inf\{U(f,P) : P\text{是}I\text{的划分}\}$ 不成立。

综上，$\overline{\int}_I f = \inf\{U(f,P) : P\text{是}I\text{的划分}\}$

类似的，可证 $\underline{\int}_I f = \sup\{L(f,P) : P\text{是}I\text{的划分}\}$