14.6 习题

张志聪

2025 年 3 月 19 日

14.6.1

设 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ 一致收敛于 f，即部分和 $\sum_{n=1}^{N} f^{(n)}$ 一致收敛于 f。于是由定理 14.6.1 可知，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\int_{[a,b]}\sum_{n=1}^{N} f^{(n)} \\
&=\int_{[a,b]}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f^{(n)} \\
&=\int_{[a,b]} f \\
&=\int_{[a,b]}\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}
\end{aligned}
$$

（注意：最后一个等式，仔细观察定义 14.5.2 即可得到。）

又对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 1$ 使得对于所有的 $k > N$ 和所有的 $x \in [a,b]$ 都有

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{n=1}^{k} f^{(n)} - f(x)| < \epsilon \\
&\sum_{n=1}^{k} f^{(n)} - \epsilon < f(x) < \sum_{n=1}^{k} f^{(n)} + \epsilon
\end{aligned}
$$

上式两端在 $[a,b]$ 上求积分可得，

$$\int_{[a,b]}(\sum_{n=1}^{k} f^{(n)} - \epsilon) \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]}(\sum_{n=1}^{k} f^{(n)} + \epsilon)$$
$$\sum_{n=1}^{k}\int_{[a,b]} f^{(n)} - \epsilon(b-a) \leq \int_{[a,b]} f \leq \sum_{n=1}^{k}\int_{[a,b]} f^{(n)} + \epsilon(b-a)$$

上面的论述证明了对任意的 $\epsilon > 0$，存在一个 $N \geq 1$ 使得对所有的 $k \geq N$ 都有

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\int_{[a,b]} f^{(n)} - \int_{[a,b]} f\right| \leq 2\epsilon(b-c)$$

由于 ϵ 是任意的，因此 $\sum\limits_{n=1}^{N}\int_{[a,b]} f^{(n)}$ 收敛于 $\int_{[a,b]} f$。

综上可得，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[a,b]} f^{(n)} = \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]}\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$$