17.4 习题

张志聪

2025 年 5 月 11 日

17.4.1

先证明可微性，再证明导数作为关于 $\mathbb{R}^n$ 的函数是连续的。

设 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 的线性变换，令 $L=T$，于是，对任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0;x\in\mathbb{R}^n-\{x_0\}}\frac{\|T(x)-T(x_0)-L(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}&=\lim_{x\to x_0;x\in\mathbb{R}^n-\{x_0\}}\frac{\|T(x-x_0)-L(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}\\&=\lim_{x\to x_0;x\in\mathbb{R}^n-\{x_0\}}\frac{\|T(x-x_0)-T(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}\\&=\lim_{x\to x_0;x\in\mathbb{R}^n-\{x_0\}}\frac{0}{\|x-x_0\|}\\&=0\end{aligned}$$

所以 T 在 x_0 处是可微的，并且导数为 T。而且引理 17.2.4 也保证了导数的唯一性。

又由 x_0 的任意性可知，T 在任意一点 x 处的导数都是 T，即 $T'(x)=x$，可见导数函数是定值，所以其是连续的。

17.4.2

要证明 f 在 x_0 连续，我们需要证明

$$\lim_{x\to x_0;x\in E-\{x_0\}}f(x)=f(x_0)$$

对任意 $\epsilon > 0$，由于 f 在 x_0 处的可微性可知，存在 $\delta > 0$，使得只要 $\|x - x_0\| \le \delta, x \in E - \{x_0\}$，就有

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} < \epsilon$$

$$\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| < \epsilon\|x - x_0\|$$

$$\|f(x) - f(x_0)\| - \|f'(x_0)(x - x_0)\| \le \|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| < \epsilon\|x - x_0\|$$

$$\|f(x) - f(x_0)\| - \|f'(x_0)(x - x_0)\| < \epsilon\|x - x_0\|$$

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon\|x - x_0\| + \|f'(x_0)(x - x_0)\|$$

因为 x_0 是 E 的内点，于是 $B(x_0, min(\delta, \epsilon)) \subseteq E$，令 $x \in B(x_0, min(\delta, \epsilon))$。又由习题 17.1.4 可知，存在 $M > 0$，使得 $\|f'(x_0)(x - x_0)\| \le M\|x - x_0\|$，于是，我们有

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x_0)\| &< \epsilon\|x - x_0\| + \|f'(x_0)(x - x_0)\| \\ &\le \epsilon^2 + M\epsilon\end{aligned}$$

M 是定值和 ϵ 的任意性可知，f 在 x_0 处连续。

17.4.3

不妨设 $g'(f(x_0)) = L_1, f'(x_0) = L_2$。

按照可微性的定义（定义 17.2.2），我们需要证明

$$\lim_{x \to x_0; x \in E - \{x_0\}} \frac{\|g \circ f(x) - g \circ f(x_0) - L_1 L_2 (x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

因为 g 在 $f(x_0)$ 处可微，于是对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $\|y - f(x_0)\| < \delta$，就有

$$\frac{\|g(y) - g(f(x_0)) - L_1(y - f(x_0))\|}{\|y - f(x_0)\|} < \epsilon$$

又 f 在 x_0 处可微，由习题 17.4.2 可知，f 在 x_0 处连续，所以，存在 $\delta_f > 0$，使得只要 $\|x - x_0\| < \delta_f$，就有

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \delta$$

综上，当 $\|x-x_0\|<\delta_f$，我们有

$$\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-L_1(y-f(x_0))\|}{\|f(x)-f(x_0)\|}<\epsilon \tag{1}$$

f 在 x_0 处可微，存在 $\delta'>0$，使得只要 $|x-x_0|<min(\delta_f,\delta')|$，就有

$$\frac{\|f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}<\epsilon \tag{2}$$

取 $\delta=min(\delta_f,\delta'), \|x-x_0\|<\delta$，式（1）（2）同时成立。

对任意 $v\in R^m, w\in R^n$，由习题 17.1.4 可知，存在 $M_1, M_2>0$ 使得

$$\|L_1v\|\le M_1\|v\|$$
$$\|L_2w\|\le M_2\|w\|$$

当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，我们有

$$\frac{\|g\circ f(x)-g\circ f(x_0)-L_1L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}$$
$$=\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-L_1L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}$$
$$=\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-L_1(f(x)-f(x_0))+L_1(f(x)-f(x_0))-L_1L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}$$
$$\le\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-L_1(f(x)-f(x_0))\|}{\|x-x_0\|}+\frac{\|L_1(f(x)-f(x_0))-L_1L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}$$
$$=\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-L_1(f(x)-f(x_0))\|}{\|x-x_0\|}+\frac{\|L_1[f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)]\|}{\|x-x_0\|}$$
$$\le\frac{\epsilon\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}+\frac{M_2\|f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}$$
$$\le\frac{\epsilon\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}+\frac{M_2\epsilon\|x-x_0\|}{\|x-x_0\|}$$
$$=\frac{\epsilon\|f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)+L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}+M_2\epsilon$$
$$\le\frac{\epsilon\|f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)\|+\epsilon\|L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}+M_2\epsilon$$
$$\le\frac{\epsilon^2\|x-x_0\|+\epsilon M_1\|x-x_0\|}{\|x-x_0\|}+M_2\epsilon$$
$$=\epsilon(\epsilon+M_1+M_2)$$

由 ϵ 是任意的，M_1, M_2 是定值，所以

$$\lim_{x\to x_0;x\in E-\{x_0\}}\frac{\|g\circ f(x)-g\circ f(x_0)-L_1L_2(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}=0$$

命题得证。

17.4.4

命题：

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 都是可微函数，且 g 在 $\mathbb{R}^n$ 上不为零，那么 f/g 也是可微的，且

$$\nabla(\frac{f}{g})=\frac{(\nabla f)g-f(\nabla g)}{g^2}$$

证明：

仿照例 17.4.2 进行证明。

把 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$ 定义为 $h(x)=(f(x),g(x))$。现在令 $k:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 表示除法函数 $K(a,b)=\frac{a}{b}$。注意，

$$D_h(x_0)=\begin{pmatrix}\nabla f(x_0)\\ \nabla g(x_0)\end{pmatrix}$$

和

$$D_k(a,b)=(\frac{1}{b},-\frac{a}{b^2})$$

根据链式法则可得，

$$\begin{aligned}D(k\circ h)&=(\frac{1}{g(x_0)},-\frac{f(x_0)}{g(x_0)^2})\begin{pmatrix}\nabla f(x_0)\\ \nabla g(x_0)\end{pmatrix}\\&=\frac{\nabla f(x_0)}{g(x_0)}-\frac{f(x_0)\nabla g(x_0)}{g(x_0)^2}\\&=\frac{(\nabla f(x_0))g(x_0)}{g(x_0)^2}-\frac{f(x_0)\nabla g(x_0)}{g(x_0)^2}\\&=\frac{(\nabla f(x_0))g(x_0)-f(x_0)\nabla g(x_0)}{g(x_0)^2}\end{aligned}$$

命题得证。

17.4.5

令 $k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 表示 l^2 度量函数 $k(a,b,c)=\|(a,b,c)\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。我们有

$$D_{\overrightarrow{t_0}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\overrightarrow{x}}{\partial x_1}(t_0)\\ \frac{\partial\overrightarrow{x}}{\partial x_2}(t_0)\\ \frac{\partial\overrightarrow{x}}{\partial x_3}(t_0)\end{pmatrix}$$

和

$$D_k(a,b,c)=(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})$$

令 $\overrightarrow{x}(t_0)=(c_1,c_2,c_3)$ 根据链式法则可得，

$$\begin{aligned}D(k\circ\overrightarrow{x})(t_0)&=(\frac{c_1}{\|\overrightarrow{x}(t_0)\|},\frac{c_2}{\|\overrightarrow{x}(t_0)\|},\frac{c_3}{\|\overrightarrow{x}(t_0)\|})\begin{pmatrix}\frac{\partial\overrightarrow{x}}{\partial x_1}(t_0)\\ \frac{\partial\overrightarrow{x}}{\partial x_2}(t_0)\\ \frac{\partial\overrightarrow{x}}{\partial x_3}(t_0)\end{pmatrix}\\&=\frac{\frac{\partial\overrightarrow{x}}{\partial x_1}(t_0)c_1}{\|\overrightarrow{x}(t_0)\|}+\frac{\frac{\partial\overrightarrow{x}}{\partial x_2}(t_0)c_2}{\|\overrightarrow{x}(t_0)\|}+\frac{\frac{\partial\overrightarrow{x}}{\partial x_3}(t_0)c_3}{\|\overrightarrow{x}(t_0)\|}\\&=\frac{\overrightarrow{x}'(t_0)\overrightarrow{x}(t_0)}{r(t_0)}\end{aligned}$$