5.3 习题

2024 年 5 月 21 日

5.3.1

1. 自反性 $x = x$。

证明：

对于任意有理数 $\epsilon > 0$，因为 $|a_n - a_n| = 0 < \epsilon$，所以 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的柯西序列，由定义 5.3.1 可知 $x = x$

2. 对称性 $x = y$ **那么** $y = x$。

证明：

因为 $x = y$ 所以 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的柯西序列，由柯西序列的等价的定义可知，等价是相互的，所以 $y = x$。

3. 传递性 $x = y$ **和** $y = z$ **那么** $x = z$。

证明：

任意有理数 $\epsilon > 0$，$\frac{1}{2}\epsilon > 0$。

由 $x = y$ 可知，两个序列是最终 $\frac{1}{/2}\epsilon-$ 接近的，所有存在 $N \geq 0$ 使得对于所有的 $n \geq N$ 均有 $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2}\epsilon$。

由 $y = x$ 同理可知，存在 $N' \geq 0$ 使得对于所有的 $n \geq N'$ 均有 $|b_n - c_n| \leq \frac{1}{2}\epsilon$。

取 $M = max(N, N')$，此时当 $n \geq M$，

$$\begin{aligned}
|a_n - c_n| &= |a_n - b_n + b_n - c_n| \\
&\leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \\
&\leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

所以序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty},(c_n)_{n=1}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近的，于是 $x=z$。

5.3.2

1.xy 也是实数

证明：

这里要证明 $(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是有理数的一个柯西序列。

我们要证明对每一个 $\epsilon>0$，序列 $(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 稳定的。

因为 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列，所以是有界的，即存在 $M_1\geq 0$ 使得 $|a_n|\leq M_1$ 对任意 $n\geq 1$ 都成立。

因为 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列,所以是有界的,即存在 $M_2\geq 0$ 使得 $|b_n|\leq M_2$ 对任意 $n\geq 1$ 都成立。

取 $M=max(M_1,M_2)$，则 $|a_n|\leq M,|b_n|\leq M$ 对任意 $n\geq 1$ 都成立。

又因为 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是最终稳定的，所以任意有理数 $\epsilon>0$，存在 $N\geq 0$，对 $j,k\geq N$ 有，

$$|a_j-a_k|\leq\epsilon$$
$$|b_j-b_k|\leq\epsilon$$

由命题 4.3.7（h）可知，

$$\begin{aligned}|a_jb_j-a_kb_k|&\leq\epsilon|b_j|+\epsilon|a_j|+\epsilon^2\\&\leq\epsilon(2+\epsilon)\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可知，$(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是有理数的一个柯西序列。

2.$x=x'$，那么 $xy=x'y$，即乘法满足替换公理。

证明：

要证明 $xy=x'y$，即证明序列 $(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 与序列 $(a'_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的。

（1）由于 $x=x'$ 可知，序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与序列 $(a'_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的，所以对任意 $\epsilon>0$，两个序列是最终 $\epsilon-$ 接近的，即存在 $N\geq 0$ 使得 $n\geq N$ 有

$$|a_n-a'_n|\leq\epsilon$$

（2）又因为 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有理数的柯西序列，所以该序列是有界的，即存在 $M \geq 0$，对任意 $n \geq 0$ 有

$$|b_n| \leq M$$

由（1）（2）可知，对任意 $n \geq N$ 有，

$$\begin{aligned}|a_n b_n - a'_n b_n| &= |(a_n - a'_n) b_n| \\ &= |a_n - a'_n||b_n| \\ &\leq M\epsilon\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性与 M 是某个确定的有理数可知，序列 $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ 与序列 $(a'_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是最终接近的，所以 $xy = x'y$

5.3.3

（1）充分性

如果 $a = b$，那么对任意 $\epsilon > 0$，都有，

$$\begin{aligned}|a_n - b_n| &= \\ &= |a - b| \\ &= 0 \leq \epsilon\end{aligned}$$

于是 $a = LIM_{n\to\infty} a, b = LIM_{n\to\infty} b$ 是相等的（等价的）。

（2）必要性

如果 $a = LIM_{n\to\infty} a_n, b = LIM_{n\to\infty} b_n$ 是相等的（等价的）。那么对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 0$ 使得 $n \geq N$ 都有，

$$\begin{aligned}|a_n - b_n| &= \\ &= |a - b| \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

假设 $a \neq b$，那么取 $\epsilon = \frac{1}{2}|a - b|$，此时，

$$|a_n - b_n| = |a - b| > \epsilon$$

存在矛盾，所以 $a = b$

5.3.4

证明：