6.4 习题

2024 年 7 月 3 日

6.4.1

（1）序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c，那么对任意实数 $\epsilon > 0$，都是最终 $\epsilon-$ 接近于 c 的，即: 能够找到某个 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 c 的。并且对于任意 $N' \geq m$，取 $N_0 := max(N, N')$，此时 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 c 的，即：a_n 是 $\epsilon-$ 接近于 c，对 $n \geq N_0$ 均成立，所以 c 是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N'}^{\infty}$ 的。由 ϵ 的任意性，可知 c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

（2）反证法，存在另一个极限点 d，且 $d \neq c$。$(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c，那么对实数 $\epsilon > 0$，是最终 $\epsilon-$ 接近于 c 的。即: 能够找到 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 c 的。

同时 d 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点，那么，d 是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的，那么存在一个 $n \geq N$ 使得 a_n 是 $\epsilon-$ 接近于 d 的，如果 $d > c$，取 $0 < \epsilon < (d-c)/2$，此时，$|a_n - d| \leq \epsilon$ 与 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 无法同时满足，即 a_n 无法同时 $\epsilon-$ 接近于 c, d。

$d \leq c$ 同理。