15.6 习题

张志聪

2025 年 4 月 13 日

15.6.1

设 $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d), z_3 = (e, f)$。

- (a) 可交换性：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$。

  按照定义 15.6.3（复数的加法运算）可知，

  $$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c, b + d) \\ z_2 + z_1 &= (c + a, d + b) \end{aligned}$$

  因为

  $$\begin{aligned} a + c &= c + a \\ b + d &= d + b \end{aligned}$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

  $$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

- (b) 结合性：$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$。

  我们有

  $$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_2 &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \end{aligned}$$

  又因为

$$
\begin{aligned}
z_1 + (z_2 + z_3) &= (a, b) + (c + e, d + f) \\
&= (a + c + e, b + d + f)
\end{aligned}
$$

于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$
(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)
$$

- (c) 恒等性：$z_1 + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z_1$。

  我们有，

  $$
  \begin{aligned}
  z_1 + 0_{\mathbb{C}} &= (a, b) + (0, 0) \\
  &= (a, b)
  \end{aligned}
  $$

  又因为

  $$
  \begin{aligned}
  0_{\mathbb{C}} + z_1 &= (0, 0) + (a, b) \\
  &= (a, b)
  \end{aligned}
  $$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

  $$
  z_1 + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z_1
  $$

- (d) 逆元性：$z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0_{\mathbb{C}}$。

  由 (a) 可交换性可知

  $$
  z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1
  $$

  我们有，

  $$
  \begin{aligned}
  z_1 + (-z_1) &= (a, b) + (-a, -b) \\
  &= (0, 0) \\
  &= 0_{\mathbb{C}}
  \end{aligned}
  $$

15.6.2

设 $z_1 = (a,b), z_2 = (c,d), z_3 = (e,f)$。

- (a) 可交换性：$z_1 z_2 = z_2 z_1$。

  由定义 15.6.5 可知，

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a,b)(c,d) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 z_1 &= (c,d)(a,b) \\ &= (ca - db, cb + da) \end{aligned}$$

  因为

$$ac - bd = ca - db$$
$$ad + bc = cb + da$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

- (b) 结合性：$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$。

  因为

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= ((a,b)(c,d))(e,f) \\ &= (ac - bd, ad + bc)(e,f) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 (z_2 z_3) &= (a,b)((c,d)(e,f)) \\ &= (a,b)(ce - df, cf + de) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \end{aligned}$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

- (c) 恒等性：$z_1 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} z_1 = z_1$。
- (d) 分配性：$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ 和 $(z_2 + z_3) z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1$。