

5.6 习题

2024 年 12 月 4 日

5.6.1

证明:

(a)

仿照命题 5.5.12 的证明过程。

令 $E = \{z \in R : z \geq 0 \text{ 且 } z^n \leq x\}$, 由定义 5.6.4 可知 $y = x^{1/n} := \sup(E)$ 。

利用反证法, 我们要证明 $y^n < x$ 和 $y^n > x$ 都会导致矛盾。

首先假设 $y^n < x$, 假设 $0 < \epsilon < 1$ 是一个较小的正数。由于 $\epsilon^n < \epsilon$ 。

如果 $0 < y \leq 1$, 那么,

$$(y + \epsilon)^n = \epsilon^n + k_0 y \epsilon^{n-1} + k_1 y^2 \epsilon^{n-2} + \dots + y^n \quad (1)$$

$$< \epsilon + y^n + \max(k_0, k_1, \dots) y \epsilon \quad (2)$$

$$< y^n + \epsilon[1 + \max(k_0, k_1, \dots) y] \quad (3)$$

设 $\delta = x - y^n$, 取 $\epsilon < \delta/[1 + \max(k_0, k_1, \dots) y]$, 就可以保证 $(y + \epsilon)^n < x$, 所以 $(y + \epsilon) \in E$, 从而与 y 是 E 的上确界矛盾。

如果 $y > 1$, 那么,

$$(y + \epsilon)^n = \epsilon^n + k_0 y \epsilon^{n-1} + k_1 y^2 \epsilon^{n-2} + \dots + y^n \quad (4)$$

$$< \epsilon + y^n + \max(k_0, k_1, \dots) y^{n-1} \epsilon \quad (5)$$

$$< y^n + \epsilon[1 + \max(k_0, k_1, \dots) y^{n-1}] \quad (6)$$

设 $\delta = x - y^n$, 取 $\epsilon < \delta/[1 + \max(k_0, k_1, \dots) y^{n-1}]$, 就可以保证 $(y + \epsilon)^n < x$, 所以 $(y + \epsilon) \in E$, 从而与 y 是 E 的上确界矛盾。

现在假设 $y^n > x$, 假设 $0 < \epsilon < 1$ 是一个较小的正数。

如果 $0 < y \leq 1$, 那么,

$$(y - \epsilon)^n > y^n - \epsilon^n - \max(|k_0|, |k_1|, \dots) y \epsilon \quad (7)$$

$$> y^n - \epsilon[1 - \max(|k_0|, |k_1|, \dots) y] \quad (8)$$

设 $\delta = y^n - x$, 取 $\epsilon < \delta/[1 - \max(|k_0|, |k_1|, \dots) y]$, 就可以保证 $(y - \epsilon)^n > x$, 所以 $(y - \epsilon)$ 也是上界, 这与 y 是 E 的最小上界矛盾。

如果 $y > 1$, 那么,

$$(y - \epsilon)^n > y^n - \epsilon^n - \max(|k_0|, |k_1|, \dots) y \epsilon \quad (9)$$

$$> y^n - \epsilon[1 - \max(|k_0|, |k_1|, \dots) y^{n-1}] \quad (10)$$

设 $\delta = y^n - x$, 取 $\epsilon < \delta/[1 - \max(|k_0|, |k_1|, \dots) y^{n-1}]$, 就可以保证 $(y - \epsilon)^n > x$, 所以 $(y - \epsilon)$ 也是上界, 这与 y 是 E 的最小上界矛盾。

根据这两个矛盾, 我们得到 $y^n = x$, 命题得证。

证明过程中 k_n 具体的值是什么不重要, 这里是定性分析。

(b)

该命题说明了 y 的唯一性, 即: 只有 $y = x^{1/n}$, 才能使得 $y^n = x$ 。

假设存在 y' 使得 $(y')^n = x$, 那么 $(y')^n = y^n$, 对 n 进行归纳, 可知 $y' = y$, 存在矛盾, 所以 $y = y'$, 即 $y = x^{1/n}$ 是唯一的。

(c)

定义 5.6.4 就保证了任何 $E = \{y \in R : y \geq 0 \text{ 且 } y^n \leq x\}$ 的上界 $M \geq 0$, 因为上界要大于 E 中的任意元素。所以, E 的最小上界 $\sup(E) \geq 0$, 所以 $x^{1/n}$ 是非负实数。

(d)

必要性: 因为 $x^{1/n} > y^{1/n}$, 且由命题 5.6.3 (c) 可知,

$$(x^{1/n})^n > (y^{1/n})^n$$

$$\Rightarrow x > y$$

充分性: 反证法, 假设 $x > y$ 时, $x^{1/n} \leq y^{1/n}$ 。而通过 5.6.3 (c) 可知,

$$(x^{1/n})^n \leq (y^{1/n})^n$$

$$\Rightarrow x \leq y$$

这与 $x > y$ 矛盾。所以假设不成立，命题得证。

(e) (1) $x > 1$

首先证明 $x > 1$ 时, $x^{1/n} > 1$ 。由 (d) 可知, $x > 1$ 于是 $x^{1/n} > 1^{1/n}$, 又因为 $1^n = 1$, 由 (b) 可知 $1 = 1^{1/n}$, 于是,

$$x^{1/n} > 1^{1/n} = 1$$

现在证明 $x > 1$ 时, x^n 是严格递增的。只需证明对任意自然数 $k, x^k < x^{k+1}$ 。由于,

$$x^{k+1} - x^k = x^k(x - 1) > 0$$

所以 x^n 是严格递增的。

不妨设 $k_0 < k_1$, 由 (a) 可知,

$$(x^{1/k_0})^{k_0} = x \quad (11)$$

$$(x^{1/k_1})^{k_1} = x \quad (12)$$

由于 $x > 1, x^{1/k_1} > 1$, 于是 $(x^{1/k_1})^n$ 是严格递增的, 且 $k_0 < k_1$, 所以 $(x^{1/k_1})^{k_0} < (x^{1/k_1})^{k_1} = x$, 由此可知,

$$(x^{1/k_0})^{k_0} > (x^{1/k_1})^{k_0} \quad (13)$$

由 5.6.3 (c) 可知, $x^{1/k_0} > x^{1/k_1}$, 所以 $x^{1/k}$ 是关于 k 的减函数得证。

(2) $x < 1$ 证明略

(3) $x = 1$ 证明略

(f)

按照消去律, 只需证明, 等式两端的 n 次幂是相等的即可。

由 (a) 可知

$$[(xy)^{1/n}]^n = xy$$

由命题 5.6.3 (a) 可知,

$$\begin{aligned} (x^{1/n}y^{1/n})^n &= (x^{1/n})^n(y^{1/n})^n \\ &= xy \end{aligned}$$

(g)

按照消去律，只需证明，等式两端的 mn 次幂是相等的即可。
由 (a) 可知

$$[(x)^{1/mn}]^m n = x$$

有 5.6.3 (a) 可知，

$$\begin{aligned} [(x^{1/n})^{1/m}]^{mn} &= \{[(x^{1/n})^{1/m}]^m\}^n \\ &= (x^{1/n})^n \\ &= x \end{aligned}$$

5.6.2

证明：

记 $q = a/b, r = c/d$ ，其中 a, c 是整数且 b, d 是正整数。

(a)

$x^q = (x^{1/b})^a$ ，由定义 5.6.4 可知 $x^{1/b} \geq 0$ ，现在只需证明 $x^{1/b} \neq 0$ ，假设 $x^{1/b} = 0$ ，那么，

$$\begin{aligned} x^{1/b} &= 0 \\ (x^{1/b})^b &= 0^b \\ x &= 0 \end{aligned}$$

这与 $x > 0$ 矛盾，所以 $x^{1/b} > 0$ 。

$(x^{1/b})^a$ 的正实数性，通过对 a 进行讨论来完成证明。

(1) $a \leq 0$ 时，可以对 a 进行归纳。

$a = 1$ 时， $(x^{1/b})^0 = 1 > 0$ ；

归纳假设 $a = k$ 时， $(x^{1/b})^k > 0$ 。

$a = k + 1$ 时，

$$(x^{1/b})^{k+1} = (x^{1/b})^k (x^{1/b})$$

由命题 5.4.4 可知 $(x^{1/b})^k (x^{1/b}) > 0$ ；

至此，归纳完成。

(2) $a < 0$ 时, 由于 $-a > 0$, 所以 $(x^{1/b})^a = 1/[(x^{1/b})^{-a}]$, 由于 $[(x^{1/b})^{-a}] > 0$, 所以 $1/[(x^{1/b})^{-a}] > 0$, 即: $(x^{1/b})^a > 0$ 。

(b)

(1.1)

$$x^{q+r} = x^{(ad+bc)/bd}$$

对 $x^{(ad+bc)/bd}$ 进行 bd 次幂,

$$\begin{aligned} (x^{(ad+bc)/bd})^{bd} &= (x^{1/bd})^{(ad+bc)bd} \\ &= x^{ad+bc} \end{aligned}$$

(1.2)

$$\begin{aligned} x^q x^r &= x^{a/b} x^{c/d} \\ &= (x^{1/b})^a (x^{1/d})^c \end{aligned}$$

对 $(x^{1/b})^a (x^{1/d})^c$ 进行 bd 次幂,

$$[(x^{1/b})^a (x^{1/d})^c]^{bd} = (x^{1/b})^{abd} (x^{1/d})^{bcd} = x^{ad} x^{bc} = x^{ad+bc}$$

由消去律可知, $x^{q+r} = x^q x^r$ 。

相同方法可知 $(x^q)^r = x^{qr}$

(c)

$q = 0$ 时, $x^{-0} = 1, 1/x^0 = 1/1 = 1$, 所以 $x^{-q} = 1/x^q$ 。

$q > 0$ 时, 此时 $a > 0$, $x^{-q} = (x^{1/b})^{-a}$, 由于 $-a < 0$, 由定义 5.6.2 可知, $(x^{1/b})^{-a} = 1/(x^{1/b})^a = 1/x^q$ 。

$q < 0$ 时, $a < 0$, $x^{-q} = (x^{1/b})^{-a}$ 。 $1/x^q = 1/(x^{1/b})^a$, 由于 $a < 0$, 由定义 5.6.2 可知, $1/x^q = 1/(x^{1/b})^a = (x^{1/b})^{-a} = x^{-q}$ 。

综上, 命题得证。

说明. $1/(x^{1/b})^a = (x^{1/b})^{-a}$, 利用了命题: $(x^{-1})^{-1} = x$, 即: x 倒数的

倒数是 x 。

该命题不做说明了

(d)

$x^q = (x^{1/b})^a$, $y^q = (y^{1/b})^a$, 由命题 5.6.3 (c) 可知, 我们只需证明 $(x^{1/b}) > (y^{1/b})$, 因为 $x > y$, 由命题 5.6.6 (d) 可知, $(x^{1/b}) > (y^{1/b})$ 。

(e)

$$\begin{aligned}(x^q)^{bd} &= (x^{a/b})^{bd} \\ &= [(x^{1/b})^a]^{bd} \\ &= x^{ad}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^r)^{bd} &= (x^{c/d})^{bd} \\ &= [(x^{1/d})^c]^{bd} \\ &= x^{bc}\end{aligned}$$

(1) $x > 1$

在习题 5.6.1 (e) 的证明过程已说明 $x > 1, n \geq 0$ 时, x^n 是严格递增。

2. 在 5.6.1 (e) 中只说明了 $n \geq 0$, 所以 $n < 0$ 也需要证明下: 设 $x > 1, n < 0$, 那么 x^n 是一个关于 n 的递增函数。

设 $-k_1 < -k_2 < 0$, 现在要证明 $x^{-k_1} < x^{-k_2}$ 。

反证法, 假设 $x^{-k_1} > x^{-k_2}$, 则存在 $\epsilon > 0$ 使得 $x^{-k_1} = x^{-k_2} + \epsilon$ 。由题设可知, 存在 $\delta > 0$ 使得 $x^{k_1} = x^{k_2} + \delta$, 所以,

$$\begin{aligned}x^{k_1}x^{-k_1} &= (x^{k_2} + \delta)(x^{-k_2} + \epsilon) \\ &= x^{k_2}x^{-k_2} + x^{k_2}\epsilon + \delta x^{-k_2} + \delta\epsilon \\ &= 1 + x^{k_2}\epsilon + \delta x^{-k_2} + \delta\epsilon \\ &> 1\end{aligned}$$

这与 $x^{k_1}x^{-k_1} = 1$ 矛盾。

反证法, 假设 $x^{-k_1} = x^{-k_2}$, 此时 $x^{k_1}x^{-k_1} = x^{k_2}x^{-k_2} = x^{k_2}x^{-k_1}$, 这与 $x^{k_1} > x^{k_2}$, $x^{k_1}x^{-k_1} > x^{k_2}x^{-k_1}$ 矛盾。

(1.1) 充分性:

如果 $x^q > x^r$, 由引理 5.6.9 (d) 可知 $(x^q)^{bd} > (x^r)^{bd}$, 于是,

$$x^{ad} > x^{bc}$$

由 x^n 的严格递增性可知 $ad > bc$, 所以 $q - r = (ad - bc)/bd > 0$, 可得 $q > r$ 。

(1.2) 必要性:

$q > r$, 则

$$\begin{aligned} a/b - c/d &= (ad - bc)/bd > 0 \\ \Rightarrow ad - bc > 0 &\Rightarrow ad > bc \end{aligned}$$

由于 $ad > bc$ 可知, $(x^q)^{bd} > (x^r)^{bd}$, 由引理 5.6.9 (d) 可知, $x^q > x^r$ 。

(2) $x < 1$ 证明类似略

5.6.3

先证明 $x^2 = |x|^2$ 。

如果 $x = 0$, 显然成立;

如果 $x > 0$, 由于 $|x| = x$, 所以 $|x|^2 = x^2$;

如果 $x < 0$, 不妨设 $x = -y, |x| = y, y > 0$, 则

$$\begin{aligned} x^2 &= (-y)^2 \\ &= (-1)^2 y^2 \\ &= 1 \times y^2 \\ &= y^2 \end{aligned}$$

所以 $|x|^2 = x^2 = y^2$ 。

利用引理 5.6.9 (a)

$$\begin{aligned} (x^2)^{1/2} &= (|x|^2)^{1/2} \\ &= |x|^{2 \times (1/2)} \\ &= |x| \end{aligned}$$