

16.5 习题

张志聪

2025 年 5 月 5 日

16.5.1

- (a)

设 $\epsilon > 0$ ，由傅里叶定理可知，当 N 足够大时，有

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e_n \right\|_2 \leq \epsilon$$

我们有

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e_n \\
&= \hat{f}(0)e_0 + \sum_{n=1}^N \hat{f}(n)e_n + \hat{f}(-n)e_{-n} \\
&= \int_{[0,1]} f(x)dx + \sum_{n=1}^N \left(\int_{[0,1]} f(x)e^{-2\pi nx}dx \right) e_n + \left(\int_{[0,1]} f(x)e^{2\pi nx}dx \right) e_{-n} \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N e_n \int_{[0,1]} f(x)(\cos(2\pi nx) - i\sin(2\pi nx))dx + e_{-n} \int_{[0,1]} f(x)(\cos(2\pi nx) + i\sin(2\pi nx))dx \\
&= \frac{1}{2}a_0 \\
&+ \sum_{n=1}^N e_n \int_{[0,1]} f(x)\cos(2\pi nx) - if(x)\sin(2\pi nx)dx + e_{-n} \int_{[0,1]} f(x)\cos(2\pi nx) + if(x)\sin(2\pi nx)dx \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (e_n + e_{-n}) \int_{[0,1]} f(x)\cos(2\pi nx)dx + (-e_n + e_{-n}) \int_{[0,1]} if(x)\sin(2\pi nx)dx \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (e_n + e_{-n}) \int_{[0,1]} f(x)\cos(2\pi nx)dx + (-e_n + e_{-n}) \int_{[0,1]} if(x)\sin(2\pi nx)dx \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N 2\cos(2\pi nx) \int_{[0,1]} f(x)\cos(2\pi nx)dx - 2i\sin(2\pi nx) \int_{[0,1]} if(x)\sin(2\pi nx)dx \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N 2\cos(2\pi nx) \int_{[0,1]} f(x)\cos(2\pi nx)dx + 2\sin(2\pi nx) \int_{[0,1]} f(x)\sin(2\pi nx)dx \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)
\end{aligned}$$

综上可得, N 足够大时,

$$\left\| f - \left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx) \right) \right\|_2 \leq \epsilon$$

所以, $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)$ 依 L^2 度量收敛于 f .

- (b)

部分和

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)| \\
&= \sum_{n=-N}^N \left| \int_{[0,1]} f(x) e^{-2\pi n x} dx \right| \\
&= \sum_{n=-N}^N \left| \int_{[0,1]} f(x) (\cos(2\pi n x) - i \sin(2\pi n x)) dx \right| \\
&= \sum_{n=-N}^N \left| \frac{1}{2} (a_n - i b_n) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} (a_0 - i b_0) \right| + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (|a_n - i b_n| + |a_{-n} - i b_{-n}|) \\
&= \left| \frac{1}{2} a_0 \right| + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (|(a_n - i b_n)| + |(a_{-n} - i b_{-n})|) \\
&= \left| \frac{1}{2} a_0 \right| + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (|(a_n - i b_n)| + |(a_n + i b_n)|) \\
&\leq \left| \frac{1}{2} a_0 \right| + \sum_{n=1}^N |a_n| + |b_n|
\end{aligned}$$

于是, 由题设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是绝对收敛, 可知 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|$ 绝对收敛。由定理 16.5.3 可知, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e_n$ 绝对收敛于 f 。

于是对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N_0 , 使得只要 $N \geq N_0$, 有

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e_n \right\|_{\infty} \leq \epsilon$$

由 (a) 可知,

$$\left\| f - \left(\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x) \right) \right\|_{\infty} \leq \epsilon$$

综上, 级数 $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)$ 一致收敛于 f 。

16.5.2

• (a)

令 $y = 2x - 1$, 于是 $x = \frac{y+1}{2}$, 函数 $y : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, 于是由命题 11.10.7 可知,

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_{[0,1]} f(x) \cos(2\pi nx) dx \\ &= 2 \int_{[0,1]} (1 - 2x)^2 \cos(2\pi nx) dx \\ &= \int_{[-1,1]} y^2 \cos(\pi(y+1)n) dy \\ &= \int_{[-1,1]} y^2 \cos(\pi ny) \cos(\pi n) dy \\ &= (-1)^n \int_{[-1,1]} y^2 \cos(\pi ny) dy \end{aligned}$$

$n = 0$ 时, $a_0 = (-1)^0 \int_{[-1,1]} y^2 dy = \frac{2}{3}$ 。

$n \geq 1$ 时, 我们设 $u = y^2, du = 2y dy; v = \frac{1}{\pi n} \sin(\pi ny), dv = \cos(\pi ny)$, 利用命题 11.10.1 (分部积分法) 可知,

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]} y^2 \cos(\pi ny) dy &= \int_{[-1,1]} u dv \\ &= uv|_{-1}^1 - \int_{[-1,1]} v du \\ &= \frac{y^2}{\pi n} \sin(\pi ny)|_{-1}^1 - \int_{[-1,1]} \frac{1}{\pi n} \sin(\pi ny) 2y dy \\ &= \frac{2 \sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{2}{\pi n} \int_{[-1,1]} y \sin(\pi ny) dy \\ &= -\frac{2}{\pi n} \int_{[-1,1]} y \sin(\pi ny) dy \end{aligned}$$

(以上的处理, 可以使 y^2 降幂)

接下来, 我们计算 $\int_{[-1,1]} y \sin(\pi ny) dy$ 。

令 $u = y, du = dy; v = -\frac{\cos(\pi ny)}{n\pi}, dv = \sin(\pi ny) dy$, 再次利用分部积

分法，

$$\begin{aligned}
 \int_{[-1,1]} y \sin(\pi n y) dy &= \int_{[-1,1]} u dv \\
 &= uv|_{-1}^1 - \int_{[-1,1]} v du \\
 &= -\frac{y \cos(\pi n y)}{n\pi} \Big|_{-1}^1 + \int_{[-1,1]} \frac{\cos(\pi n y)}{n\pi} dy \\
 &= -\frac{2 \cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{1}{n\pi} \frac{\sin(\pi n y)}{n\pi} \Big|_{-1}^1 \\
 &= -\frac{2 \cos(\pi n)}{\pi n}
 \end{aligned}$$

综上所述可得，

$$\begin{aligned}
 a_n &= (-1)^n \int_{[-1,1]} y^2 \cos(\pi n y) dy \\
 &= (-1)^n \left(\frac{2}{\pi n} \frac{2 \cos(\pi n)}{\pi n} \right) \\
 &= (-1)^n \left(\frac{4 \cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} \right) \\
 &= (-1)^n (-1)^n \left(\frac{4}{\pi^2 n^2} \right) \\
 &= \frac{4}{\pi^2 n^2}
 \end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2 \int_{[0,1]} f(x) \sin(2\pi n x) dx \\
 &= 2 \int_{[0,1]} (1-2x)^2 \sin(2\pi n x) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x) \\
 &= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x)
 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

由推论 7.3.7 可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 进一步可知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛。又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是绝对收敛的。

综上, 由习题 16.5.1 可知, 级数 $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi nx)$ 一致收敛于 f 。

• (b)

因为级数 $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi nx)$ 一致收敛于 f ,

对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N_0 > 1$ 使得只要 $N \geq N_0$ 和 $x = 0$, 都有

$$\begin{aligned}|\left(\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^N \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos(0)\right) - f(0)| &\leq \epsilon \\ \left| -\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^N \frac{4}{\pi^2 n^2} \right| &\leq \epsilon \\ \frac{2}{3} - \epsilon &\leq \left| \sum_{n=1}^N \frac{4}{\pi^2 n^2} \right| \leq \frac{2}{3} + \epsilon\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} = \frac{2}{3}$, 进一步可得, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{\pi^2}{6}$ 。

• (c)

由题设可知,

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_{[0,1]} f(x) e_{-n} dx \\ &= \int_{[0,1]} f(x) (\cos(2\pi nx) - i \sin(2\pi nx)) dx \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2}\end{aligned}$$

(省略了积分的计算过程)

同理可得,

$$\begin{aligned}\hat{f}(-n) &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= \frac{a_0}{2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

由命题 16.5.4 可知,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

综上可得,

$$\begin{aligned}& \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \\ &= |\hat{f}(0)|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} |\hat{f}(n)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \\ &= \frac{1}{9} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2}{\pi^2 n^2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{9} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^4 n^4} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \int [0, 1] |f(x)|^2 dx \\ &= \int [0, 1] (1 - 2x)^2 dx \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

综上可得,

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} &= \frac{1}{3} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\ \frac{4}{45} &= \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90}\end{aligned}$$

16.5.3

这道题不对吧!!! 都没定义这个特殊符号是怎么运算的。

P 是一个三角多项式, 所以 $P \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{C})$, 且存在一个整数 $N \geq 0$ 和一个复数序列 $(c_n)_{n=-N}^N$ 使得 $P = \sum_{n=-N}^N c_n e_n$ 。

• (a)

$$\begin{aligned}f * P &= f * \sum_{n=-N}^N c_n e_n \\ &= \sum_{n=-N}^N f * (c_n e_n) \\ &= \sum_{n=-N}^N c_n (f * e_n) \\ &= \sum_{n=-N}^N c_n (\hat{f}(n) e_n) \\ &= \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) c_n e_n\end{aligned}$$

(书中 P345, 有类似说明)

利用引理 16.2.5 和推论 16.3.6, 我们有

$$\begin{aligned}
\widehat{f * P}(n) &= \left\langle \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) c_k e_k, e_n \right\rangle \\
&= \langle \hat{f}(n) c_n e_n, e_n \rangle \\
&= \hat{f}(n) c_n \langle e_n, e_n \rangle \\
&= \hat{f}(n) c_n
\end{aligned}$$

由推论 16.3.6 和定义 16.3.7, 我们有

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) c_n &= \langle f, e_n \rangle \langle P, e_n \rangle \\
\hat{f}(n) \hat{P}(n) &= \langle f, e_n \rangle \langle P, e_n \rangle
\end{aligned}$$

综上所述,

$$\widehat{f * P}(n) = \hat{f}(n) c_n = \hat{f}(n) \hat{P}(n)$$

• (b) \otimes

由定理 16.5.4 (Plancherel 定理) 可知, $|\hat{f}(n)|$ 对任意 n 有界, 函数 $f(x)$ 有界。所以存在 $M > 0$ 使得 $|\hat{f}(n)| < M$, $|f(x)| < M$ 。

由定理 16.4.1(三角多项式的威尔斯特拉斯逼近定理) 可知, 存在三角多项式 P 使得

$$\|g - P\|_{\infty} \leq \epsilon$$

由引理 16.2.7(b), 我们有

$$\begin{aligned}
\left| \widehat{f * g}(n) - \widehat{f * P}(n) \right| &= |\langle f * g, e_n \rangle - \langle f * P, e_n \rangle| \\
&= |\langle f * (g - P), e_n \rangle| \\
&\leq \|f * (g - P)\|_2 \|e_n\|_2 \\
&= \|f * (g - P)\|_2
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
|f * (g - P)| &= \left| \int_{[0,1]} f(y)(g - P)(x - y) dy \right| \\
&\leq \left| \epsilon \int_{[0,1]} f(y) dy \right| \\
&\leq M\epsilon
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|f * (g - P)\|_2 &= \left(\int_{[0,1]} |f * (g - P)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq M\epsilon\end{aligned}$$

对于

$$\begin{aligned}\left| \widehat{f * P}(n) - \hat{f}(n)\hat{g}(n) \right| &= \left| \hat{f}(n)\hat{P}(n) - \hat{f}(n)\hat{g}(n) \right| \\ &= \left| \hat{f}(n)(\hat{P}(n) - \hat{g}(n)) \right| \\ &= \left| \hat{f}(n)(\langle P, e_n \rangle - \langle f, e_n \rangle) \right| \\ &= \left| \hat{f}(n)\langle P - f, e_n \rangle \right| \\ &\leq |\hat{f}(n)| \|P - f, e_n\|_2 \\ &= M\epsilon\end{aligned}$$

综上所述,

$$\begin{aligned}\left| \widehat{f * g}(n) - \hat{f}(n)\hat{g}(n) \right| &= \left| \widehat{f * g}(n) - \widehat{f * P}(n) + \widehat{f * P}(n) - \hat{f}(n)\hat{g}(n) \right| \\ &\leq \left| \widehat{f * g}(n) - \widehat{f * P}(n) \right| + \left| \widehat{f * P}(n) - \hat{f}(n)\hat{g}(n) \right| \\ &\leq M\epsilon + M\epsilon\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可知, $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ 。

16.5.4

(1)

由题设, 我们只需在说明 f' 是 1 周期函数, 即可说明 $f' \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ 。

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

于是, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|x - x_0| < \delta$, 都有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| \leq \epsilon$$

令 $y = x+1$, 那么对 $|y - (x_0+1)| < \delta$, 即 $|x+1 - (x_0+1)| = |x - x_0| < \delta$, 由 f 是 1 周期函数, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(y) - f(x_0)}{y - (x_0+1)} - f'(x_0) \right| &= \left| \frac{f(x+1) - f(x_0)}{x+1 - (x_0+1)} - f'(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} f'(x_0+1) &= \lim_{y \rightarrow (x_0+1)} \frac{f(y) - f(x_0+1)}{y - (x_0+1)} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

所以, f' 是 1 周期函数。

(2)

• 方法一

$$\hat{f}'(n) = \int_{[0,1]} f'(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

令 $u = f(x)$, $v = e^{-2\pi i n x}$ 于是 $du = f'(x)dx$, $dv = -2\pi i n e^{-2\pi i n x} dx$ 。

$$\begin{aligned} \hat{f}'(n) &= \int_{[0,1]} f'(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= uv|_0^1 - \int_{[0,1]} u dv \\ &= f(x) e^{-2\pi i n x} \Big|_0^1 - \int_{[0,1]} -2f(x) \pi i n e^{-2\pi i n x} dx \\ &= f(1) - f(0) + 2\pi i n \int_{[0,1]} f(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= 2\pi i n \hat{f}(n) \end{aligned}$$

方法一的问题在于, 本书中没有复数函数的导数的定义。

• 方法二

利用分部积分法,

$$\begin{aligned}
\hat{f}'(n) &= \int_{[0,1]} f'(x) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \int_{[0,1]} f'(x) (\cos(2\pi n x) - i \sin(2\pi n x)) dx \\
&= \int_{[0,1]} f'(x) \cos(2\pi n x) dx - i \int_{[0,1]} f'(x) \sin(2\pi n x) dx \\
&= \left[f(x) \cos(2\pi n x) \Big|_0^1 - \int_{[0,1]} f(x) \cdot (2\pi n) \sin(2\pi n x) dx \right] \\
&\quad - i \left[f(x) \sin(2\pi n x) \Big|_0^1 - \int_{[0,1]} f(x) \cdot (2\pi n) \cos(2\pi n x) dx \right] \\
&= \int_{[0,1]} f(x) \cdot (2\pi n) \sin(2\pi n x) dx + i \int_{[0,1]} f(x) \cdot (2\pi n) \cos(2\pi n x) dx \\
&= 2\pi n \int_{[0,1]} f(x) \sin(2\pi n x) + i f(x) \cos(2\pi n x) dx \\
&= 2\pi n \int_{[0,1]} f(x) (\sin(2\pi n x) + i \cos(2\pi n x)) \\
&= 2\pi n \int_{[0,1]} f(x) i e^{-2\pi i n x} dx \\
&= 2\pi n i \int_{[0,1]} f(x) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= 2\pi n i \hat{f}(n)
\end{aligned}$$

16.5.5