

5.3 习题

2024 年 5 月 20 日

5.3.1

1. 自反性 $x = x$ 。

证明：

对于任意有理数 $\epsilon > 0$, 因为 $|a_n - a_n| = 0 < \epsilon$, 所以 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的柯西序列, 由定义 5.3.1 可知 $x = x$

2. 对称性 $x = y$ 那么 $y = x$ 。

证明：

因为 $x = y$ 所以 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的柯西序列, 由柯西序列的等价的定义可知, 等价是相互的, 所以 $y = x$ 。

3. 传递性 $x = y$ 和 $y = z$ 那么 $x = z$ 。

证明：

任意有理数 $\epsilon > 0$, $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ 。

由 $x = y$ 可知, 两个序列是最终 $\frac{1}{2}\epsilon$ - 接近的, 所有存在 $N \geq 0$ 使得对于所有的 $n \geq N$ 均有 $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2}\epsilon$ 。

由 $y = z$ 同理可知, 存在 $N' \geq 0$ 使得对于所有的 $n \geq N'$ 均有 $|b_n - c_n| \leq \frac{1}{2}\epsilon$ 。

取 $M = \max(N, N')$, 此时当 $n \geq M$,

$$\begin{aligned} |a_n - c_n| &= |a_n - b_n + b_n - c_n| \\ &\leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

所以序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty}$ 是最终 ϵ - 接近的, 于是 $x = z$ 。

5.3.2

1. xy 也是实数

证明:

这里要证明 $(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是有理数的一个柯西序列。

我们要证明对每一个 $\epsilon > 0$, 序列 $(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 是最终 ϵ - 稳定的。

因为 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列, 所以是有界的, 即存在 $M_1 \geq 0$ 使得 $|a_n| \leq M_1$ 对任意 $n \geq 1$ 都成立。

因为 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列, 所以是有界的, 即存在 $M_2 \geq 0$ 使得 $|b_n| \leq M_2$ 对任意 $n \geq 1$ 都成立。

取 $M = \max(M_1, M_2)$, 则 $|a_n| \leq M, |b_n| \leq M$ 对任意 $n \geq 1$ 都成立。

又因为 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是最终稳定的, 所以任意有理数 $\epsilon > 0$, 存在 $N \geq 0$, 对 $j, k \geq N$ 有,

$$|a_j - a_k| \leq \epsilon$$

$$|b_j - b_k| \leq \epsilon$$

由命题 4.3.7 (h) 可知,

$$\begin{aligned} |a_j b_j - a_k b_k| &\leq \epsilon |b_j| + \epsilon |a_j| + \epsilon^2 \\ &\leq \epsilon(2 + \epsilon) \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可知, $(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是有理数的一个柯西序列。

2. $x = x'$, 那么 $xy = x'y$, 即乘法满足替换公理。

证明:

要证明 $xy = x'y$, 即证明序列 $(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 与序列 $(a'_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的。

(1) 由于 $x = x'$ 可知, 序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与序列 $(a'_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的, 所以对任意 $\epsilon > 0$, 两个序列是最终 ϵ - 接近的, 即存在 $N \geq 0$ 使得 $n \geq N$ 有

$$|a_n - a'_n| \leq \epsilon$$

(2) 又因为 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有理数的柯西序列, 所以该序列是有界的, 即存在 $M \geq 0$, 对任意 $n \geq 0$ 有

$$|b_n| \leq M$$

由 (1) (2) 可知, 对任意 $n \geq N$ 有,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a'_n b_n| &= |(a_n - a'_n) b_n| \\ &= |a_n - a'_n| |b_n| \\ &\leq M\epsilon \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性与 M 是某个确定的有理数可知, 序列 $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ 与序列 $(a'_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是最终接近的, 所以 $xy = x'y$

5.3.3