10.5 习题

张志聪

2024 年 12 月 17 日

10.5.1

首先证明存在 $\delta > 0$ 使得对所有的 $x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}$ 都有 $g(x) \neq 0$。由命题 10.1.7（牛顿逼近法）(b) 可得，特别地，取 $\epsilon = \frac{1}{2}|g'(x_0)| > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得，

$$\begin{aligned} |g(x) - (g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0))| &\leq \frac{1}{2}|g'(x_0)||x - x_0| \\ |g(x) - g'(x_0)(x - x_0)| &\leq \frac{1}{2}|g'(x_0)||x - x_0| \end{aligned}$$

此时，如果存在 $x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$，使得 $g(x) = 0$，那么，

$$\begin{aligned} |g(x) - g'(x_0)(x - x_0)| &\leq \frac{1}{2}|g'(x_0)||x - x_0| \\ |0 - g'(x_0)(x - x_0)| &\leq \frac{1}{2}|g'(x_0)||x - x_0| \\ |g'(x_0)(x - x_0)| &\leq \frac{1}{2}|g'(x_0)||x - x_0| \end{aligned}$$

显然以上等式是不成立的，所以 $g(x) \neq 0$。

由于 f, g 都在 x_0 处可微，所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0; x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) \\ \lim_{x \to x_0; x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= g'(x_0) \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{x\to x_0;x\in(X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta))}\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to x_0;x\in(X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta))}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$

于是利用命题 9.3.14（函数的极限定律）可知，

$$\lim_{x\to x_0;x\in(X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta))}\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

10.5.2

（1）不满足命题的前置条件：$g(0)=0$

（2）不满足命题的前置条件：$\lim_{x\to a;x\in(a,b]}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在。