8.3 习题

张志聪

2024 年 11 月 17 日

8.3.1

对 n 进行归纳。

归纳基始，$n=0$，此时，X 是空集，$\#(X)=0$，$2^0=1$，这与空集的子集只有它本身是一致的。

归纳假设，$n=k$ 时，$\#(2^X)=2^k$。

当 $n=k+1$ 时，在 X 中任取一个元素 x_0，此时，设 $X'=X\setminus\{x_0\}$。对 2^X 的任意子集 A：

- 如果 $x_0\notin A$，此时 $A\subseteq 2^{X'}$，由归纳假设可知，这样的子集有 2^k 个。
- 如果 $x_0\in A$，定义 $A':=A\setminus\{x_0\}$，显然 $A'\subseteq 2^{X'}$，因为 A' 有 2^k 个，所以 $A'\cup\{x_0\}$ 有 2^k。

综上，$2^k+2^k=2^{k+1}$。

8.3.2

说明 1. 一开始，觉得题目不对！理由如下：由题设，$A\subseteq C$ 且单射 $f:C\to A$ 可知，$f(C)$ 与 C 是双射，而 $f(C)\subseteq A$，所以只有 $C=A$ 才能满足题设，进而 $A=B=C$。那么，$D_0=B\setminus A=\varnothing$，就没有证明的必要了。

问题出在对习题 *3.6.7* 的理解上了，这里只能证明 $\#(A)=\#(B)=\#(C)$，而无法证明 $A=B=C$，举一个反例，自然数 N 与偶数集合的基数相等，也可以构建一个单射，但不妨碍偶数集合是自然数子集这

一事实。

（1）命题与 $D_n \cap D_{n+1} = \varnothing$ 等价。对 n 进行归纳。

归纳基始，$n=0$ 时，$D_0 := B \setminus A, D_1 := f(D_0)$。反证法，假设 $D_0 \cap D_1 \neq \varnothing$，由题设可知 $D_1 \subseteq A$，因为 $D_0 \cap D_1 \neq \varnothing$，所以存在元素 $x \in D_0, D_1, A$，这与 $D_0 := B \setminus A$ 矛盾。

归纳假设，$n=k$ 时，命题 $D_k \cap D_{k+1} = \varnothing$ 成立。

当 $n=k+1$ 时，$D_{k+2} := f(D_{k+1})$。反证法，假设 $D_{k+2} \cap D_{k+1} \neq \varnothing$，即存在 $d_0 \in D_{k+2}, D_{k+1}$，又因为 $D_{k+1} = f(D_k)$，于是，存在 x_0, x_1 使得

$$\begin{cases} d_0 = f(x_0) \text{ 其中} x_0 \in D_k, f(x_0) \in D_{k+1} \\ d_0 = f(x_1) \text{ 其中} x_1 \in D_{k+1}, f(x_1) \in D_{k+2} \end{cases}$$

由归纳假设可知 $x_0 \neq x_1$，这与 f 是单射的矛盾。

（2）A 和 B 有相同的基数，在说明中已阐述。