

7.2 习题

2024 年 9 月 21 日

7.2.1

7.2.2

★ \Rightarrow

因为 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么这个级数的部分和序列 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$ 是收敛的, 由定理 6.4.18 (实数的完备性) 可知 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$ 也是柯西序列, 于是, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \geq m$, $p, q \geq N$ 使得

$$|S_p - S_q| \leq \epsilon \quad (1)$$

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n \right| \leq \epsilon \quad (2)$$

★ \Leftarrow

对任意 $\epsilon > 0$ 都有 $\left| \sum_{n=p}^q a_n \right| \leq \epsilon$, 可知级数的部分和序列 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$ 是柯西序列, 由定理 6.4.18 (实数的完备性) 可知其也是收敛的, 由部分和收敛可知级数收敛。

7.2.3

由命题 7.2.5 可知, $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛, 对任意 $\epsilon > 0$, 都存在一个 $N \geq m$ 使得 $n \geq N$ 有

$$\left| \sum_{n=n}^n a_n \right| \leq \epsilon$$

$$|a_n| \leq \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 收敛且收敛于 0

7.2.4

★绝对收敛 \Rightarrow 条件收敛

$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ 是绝对收敛, 即 $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$ 是收敛的, 由命题 7.2.5 可知, 对任意 $\epsilon > 0$, 都存在一个整数 $N \geq m$, 使得 $q, p \geq N$, 均有,

$$\left| \sum_{n=p}^q |a_n| \right| \leq \epsilon$$

由命题 7.1.4 (e) 可知,

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n \right| \leq \left| \sum_{n=p}^q |a_n| \right| \leq \epsilon$$

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n \right| \leq \epsilon$$

再次利用命题 7.2.5 可知, $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛

★三角不等式

不妨设 $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$ 的部分和序列为 $(S'_N)_{N=m}^{\infty}$, $\left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n \right|$ 的部分和序列为 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$ 。显然, 对任意 $N \geq m$ 都有,

$$S'_N \geq S_N$$

又因为两个序列的极限都存在, 于是 (推论 5.4.10 的变形),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S'_N \geq \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

即:

$$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \geq \left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n \right|$$