

## 17.4 习题

张志聪

2025 年 5 月 12 日

### 17.4.1

先证明可微性，再证明导数作为关于  $\mathbb{R}^n$  的函数是连续的。

设  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  的线性变换，令  $L = T$ ，于是，对任意  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|T(x) - T(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|T(x - x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{\|T(x - x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}} \frac{0}{\|x - x_0\|} \\ &= 0\end{aligned}$$

所以  $T$  在  $x_0$  处是可微的，并且导数为  $T$ 。而且引理 17.2.4 也保证了导数的唯一性。

又由  $x_0$  的任意性可知， $T$  在任意一点  $x$  处的导数都是  $T$ ，即  $T'(x) = x$ ，可见导数函数是定值，所以其是连续的。

### 17.4.2

要证明  $f$  在  $x_0$  连续，我们需要证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E - \{x_0\}} f(x) = f(x_0)$$

对任意  $\epsilon > 0$ , 由于  $f$  在  $x_0$  处的可微性可知, 存在  $\delta > 0$ , 使得只要  $\|x - x_0\| \leq \delta, x \in E - \{x_0\}$ , 就有

$$\begin{aligned}\frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &< \epsilon \\ \|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| &< \epsilon \|x - x_0\| \\ \|f(x) - f(x_0)\| - \|f'(x_0)(x - x_0)\| &\leq \|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| < \epsilon \|x - x_0\| \\ \|f(x) - f(x_0)\| - \|f'(x_0)(x - x_0)\| &< \epsilon \|x - x_0\| \\ \|f(x) - f(x_0)\| &< \epsilon \|x - x_0\| + \|f'(x_0)(x - x_0)\|\end{aligned}$$

因为  $x_0$  是  $E$  的内点, 于是  $B(x_0, \min(\delta, \epsilon)) \subseteq E$ , 令  $x \in B(x_0, \min(\delta, \epsilon))$ 。又由习题 17.1.4 可知, 存在  $M > 0$ , 使得  $\|f'(x_0)(x - x_0)\| \leq M\|x - x_0\|$ , 于是, 我们有

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x_0)\| &< \epsilon \|x - x_0\| + \|f'(x_0)(x - x_0)\| \\ &\leq \epsilon^2 + M\epsilon\end{aligned}$$

$M$  是定值和  $\epsilon$  的任意性可知,  $f$  在  $x_0$  处连续。

### 17.4.3

不妨设  $g'(f(x_0)) = L_1, f'(x_0) = L_2$ 。

按照可微性的定义 (定义 17.2.2), 我们需要证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E - \{x_0\}} \frac{\|g \circ f(x) - g \circ f(x_0) - L_1 L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

因为  $g$  在  $f(x_0)$  处可微, 于是对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得只要  $\|y - f(x_0)\| < \delta$ , 就有

$$\frac{\|g(y) - g(f(x_0)) - L_1(y - f(x_0))\|}{\|y - f(x_0)\|} < \epsilon$$

又  $f$  在  $x_0$  处可微, 由习题 17.4.2 可知,  $f$  在  $x_0$  处连续, 所以, 存在  $\delta_f > 0$ , 使得只要  $\|x - x_0\| < \delta_f$ , 就有

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \delta$$

综上, 当  $\|x - x_0\| < \delta_f$ , 我们有

$$\frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - L_1(y - f(x_0))\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} < \epsilon \quad (1)$$

$f$  在  $x_0$  处可微, 存在  $\delta' > 0$ , 使得只要  $|x - x_0| < \min(\delta_f, \delta')$ , 就有

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} < \epsilon \quad (2)$$

取  $\delta = \min(\delta_f, \delta')$ ,  $\|x - x_0\| < \delta$ , 式 (1) (2) 同时成立。

对任意  $v \in R^m, w \in R^n$ , 由习题 17.1.4 可知, 存在  $M_1, M_2 > 0$  使得

$$\|L_1 v\| \leq M_1 \|v\|$$

$$\|L_2 w\| \leq M_2 \|w\|$$

当  $\|x - x_0\| < \delta$  时, 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{\|g \circ f(x) - g \circ f(x_0) - L_1 L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &= \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - L_1 L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &= \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - L_1(f(x) - f(x_0)) + L_1(f(x) - f(x_0)) - L_1 L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &\leq \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - L_1(f(x) - f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|L_1(f(x) - f(x_0)) - L_1 L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &= \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - L_1(f(x) - f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|L_1[f(x) - f(x_0) - L_2(x - x_0)]\|}{\|x - x_0\|} \\ &\leq \frac{\epsilon \|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{M_2 \|f(x) - f(x_0) - L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &\leq \frac{\epsilon \|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{M_2 \epsilon \|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} \\ &= \frac{\epsilon \|f(x) - f(x_0) - L_2(x - x_0) + L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + M_2 \epsilon \\ &\leq \frac{\epsilon \|f(x) - f(x_0) - L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \epsilon \|L_2(x - x_0)\| + M_2 \epsilon \\ &\leq \frac{\epsilon^2 \|x - x_0\| + \epsilon M_1 \|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} + M_2 \epsilon \\ &= \epsilon(\epsilon + M_1 + M_2) \end{aligned}$$

由  $\epsilon$  是任意的,  $M_1, M_2$  是定值, 所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E - \{x_0\}} \frac{\|g \circ f(x) - g \circ f(x_0) - L_1 L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

命题得证。

## 17.4.4

**命题：**

设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  和  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  都是可微函数，且  $g$  在  $\mathbb{R}^n$  上不为零，那么  $f/g$  也是可微的，且

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\nabla f)g - f(\nabla g)}{g^2}$$

**证明：**

仿照例 17.4.2 进行证明。

把  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  定义为  $h(x) = (f(x), g(x))$ 。现在令  $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  表示除法函数  $K(a, b) = \frac{a}{b}$ 。注意，

$$D_h(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0) \\ \nabla g(x_0) \end{pmatrix}$$

和

$$D_k(a, b) = \left(\frac{1}{b}, -\frac{a}{b^2}\right)$$

根据链式法则可得，

$$\begin{aligned} D(k \circ h) &= \left(\frac{1}{g(x_0)}, -\frac{f(x_0)}{g(x_0)^2}\right) \begin{pmatrix} \nabla f(x_0) \\ \nabla g(x_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\nabla f(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)\nabla g(x_0)}{g(x_0)^2} \\ &= \frac{(\nabla f(x_0))g(x_0)}{g(x_0)^2} - \frac{f(x_0)\nabla g(x_0)}{g(x_0)^2} \\ &= \frac{(\nabla f(x_0))g(x_0) - f(x_0)\nabla g(x_0)}{g(x_0)^2} \end{aligned}$$

命题得证。

## 17.4.5

注意，注意，注意!!! 书中的是点积（或点乘），正文中没有正式定义过，只有 P364 有些涉及。证明的最后一步我无法保证正确性。

令  $k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  表示  $l^2$  度量函数  $k(a, b, c) = \|(a, b, c)\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 。  
我们有

$$D_{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial x_1}(t_0) \\ \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial x_1}(t_0) \\ \frac{\partial \vec{x}_3}{\partial x_1}(t_0) \end{pmatrix}$$

和

$$D_k(a, b, c) = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

令  $\vec{x}(t_0) = (c_1, c_2, c_3)$  根据链式法则可得,

$$\begin{aligned} D(k \circ \vec{x})(t_0) &= \left( \frac{c_1}{\|\vec{x}(t_0)\|}, \frac{c_2}{\|\vec{x}(t_0)\|}, \frac{c_3}{\|\vec{x}(t_0)\|} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial x_1}(t_0) \\ \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial x_1}(t_0) \\ \frac{\partial \vec{x}_3}{\partial x_1}(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial x_1}(t_0)c_1}{\|\vec{x}(t_0)\|} + \frac{\frac{\partial \vec{x}_2}{\partial x_1}(t_0)c_2}{\|\vec{x}(t_0)\|} + \frac{\frac{\partial \vec{x}_3}{\partial x_1}(t_0)c_3}{\|\vec{x}(t_0)\|} \\ &= \frac{\vec{x}'(t_0) \cdot \vec{x}(t_0)}{r(t_0)} \end{aligned}$$

因为

$$\vec{x}'(t_0) \cdot \vec{x}(t_0) = \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial x_1}(t_0)c_1 + \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial x_1}(t_0)c_2 + \frac{\partial \vec{x}_3}{\partial x_1}(t_0)c_3$$