

6.1 习题

2024 年 10 月 1 日

6.1.1

证明框架如下：由于 n, m 都是自然数，且 $m > n$ ，所以存在正自然数 k 使得 $k = m - n$ ，对 k 进行归纳。

6.1.2

证明：

与定义 6.1.5 说的是一个意思，证明略

6.1.3

证明：

充分性：

如果 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛与 c ，那么对任意的 $\epsilon > 0$ ，该序列都是最终 ϵ - 接近 c 的，所以存在 $N \geq m$ 使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。由题设可知 $m' > m$ ，于是存在 $N' := \max(m', N)$, $N' \geq m'$ ，使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N'$ 均成立，由于 ϵ 是任意的，由习题 6.1.2 可知， $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 收敛与 c 。

必要性：

$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 收敛与 c ，那么对任意的 $\epsilon > 0$ ，该序列都是最终 ϵ - 接近 c 的。所以存在 $N \geq m'$ 使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。由于 $m' > m$ ，所以 $N \geq m$ ，该性质对序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 也成立，由于 ϵ 是任意的，由习题 6.1.2 可知， $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛与 c 。

6.1.4

证明:

$(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c , 于是对任意 $\epsilon > 0$, 存在一个 $N \geq m$ 使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立, 由于 $k \geq 0$ 是一个非负整数, 所以 $n + k \geq N$, 于是 $|a_{n+k} - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立, 由习题 6.1.2 可知, $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 收敛与 c 。

反之类似

6.1.5

证明:

要证明序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列, 则对于任意 $\epsilon > 0$, 我们需要证明序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 ϵ - 接近的。于是设 $\epsilon > 0$ 是一个任意的实数, 那么 $\epsilon/2 > 0$ 。因为 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛的实数序列, 不妨设收敛于实数 L , 可知 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 ϵ - 接近与 L 的, 于是存在一个 $N \geq m$ 使得 $d(a_n, L) \leq \epsilon/2$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。任意 $j, k \geq N$, 有 $d(a_j, L) \leq \epsilon/2$, $d(a_k, L) \leq \epsilon/2$, 于是根据三角不等式可得, $d(a_j, a_k) \leq \epsilon$, 因此 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 ϵ - 接近的。由于 ϵ 是任意选取的, 因此 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列。

6.1.6

证明:

证明为什么 $a_n > L + \epsilon/2$ 或 $a_n < L - \epsilon/2$, 其余的按书中的提示证明就可以了。

序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 不是最终 ϵ - 接近与 L 的, 即对任意的 $N \geq m$ 都存在 $|a_n - L| > \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。

序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列, 所以存在 N_0 使得 $|a_j - a_k| \leq \epsilon/2$ 对所有的 $j, k \geq N_0$ 均成立。

固定 $a_n = j_k$, 所以,

$$\begin{aligned} |a_j - a_n| &\leq \epsilon/2 \\ \Rightarrow a_n - \epsilon/2 &\leq a_j \leq a_n + \epsilon/2 \end{aligned}$$

又因为, $|a_n - L| > \epsilon$ 所以 $a_n > L + \epsilon$ 或 $a_n < L - \epsilon$ 。

如果 $a_n > \epsilon + L$, 那么,

$$\begin{aligned} a_n - \epsilon/2 &\leq a_j \\ L + \epsilon - \epsilon/2 &< a_j \\ L + \epsilon/2 &< a_j \end{aligned}$$

如果 $a_n < L - \epsilon$, 那么,

$$\begin{aligned} a_j &\leq a_n + \epsilon/2 \\ a_j &< L - \epsilon + \epsilon/2 \\ a_j &< L - \epsilon/2 \end{aligned}$$

6.1.7

证明:

证明方法与命题 6.1.4 的类似。

首先假设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义 5.1.12 意义下的有界序列, 那么存在有理数 M , 该序列以 M 为界, 由于有理数 M 也是实数, 所以 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义 6.1.16 意义下的有界序列。

现在假设是定义 6.1.16 下的有界序列, 那么存在实数 M , 该序列以 M 为界, 根据命题 5.4.12 可知, 存在一个比 M 大的有理数 M' , 由于 M' 是有理数, 且 $M < M'$, 所有该序列也以 M' 为界, 所以 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义 5.1.12 意义下的有界序列。

6.1.8

(a)

我们必须证明 $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $x + y$ 。换言之, 对于任意的 $\epsilon > 0$, 我们需要证明序列 $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 ϵ - 接近 $x + y$ 的。

因为 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x 且 $\epsilon/2 > 0$, 则序列是最终 $\epsilon/2$ - 接近 x , 即存在 $N_a \geq m$ 使得 $|a_n - x| \leq \epsilon/2$ 对所有的 $n \geq N_a$ 均成立。

同理对序列 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 存在 $N_b \geq m$ 使得 $|b_n - y| \leq \epsilon/2$ 对所有的 $n \geq N_b$ 均成立。

取 $N := \max(N_a, N_b)$, 于是对所有的 $n \geq N$ 都有,

$$\begin{aligned} & |a_n + b_n - (x + y)| \\ &= |(a_n - x) + (b_n - y)| \\ &\leq |a_n - x| + |b_n - y| = /epsilon \end{aligned}$$

因此 $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 ϵ - 接近 $x + y$ 的。由于 ϵ 是任意的, 所以 $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $x + y$

(b)

设 $\epsilon_0 > 0$, 因为 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x , 即存在 $N_a \geq m$ 使得 $|a_n - x| \leq \epsilon_0$ 对所有的 $n \geq N_a$ 均成立。

因为 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 y , 即存在 $N_b \geq m$ 使得 $|b_n - y| \leq \epsilon_0$ 对所有的 $n \geq N_b$ 均成立。

取 $N := \max(N_a, N_b)$,

由命题 4.3.7 (h) 对实数也成立, 那么对任意 $n \geq N$ 都有,

$$d(a_n b_n, xy) \leq \epsilon_0 |y| + \epsilon_0 |x| + \epsilon_0 \epsilon_0$$

对任意的 $\epsilon > 0$, 只要 ϵ_0 足够小, 那么 $d(a_n b_n, xy) \leq \epsilon$, 因此 $(a_n b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 ϵ - 接近 xy 的。由于 ϵ 是任意的, 所以 $(a_n b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 xy

(c)

(c) 是 (b) 的特例。由实数的定义可知, 存在一个有理数序列使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$, 由命题 6.1.15 可知 $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, 即 $(c_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c , 由命题 (b) 可知,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} c \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \\ &= cx \end{aligned}$$

(d)

由 (c) 可知, $(-b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛于 $-y$ 的。再利用 (a) 可证明该命题。

(e)

因为 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 y , 那么对任意 $\delta > 0$, 存在 $N_b \geq m$ 使得 $|b_n - y| \leq \delta$, 对任意的 $n \geq N_b$ 均成立。

我们必须证明序列 $(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 y^{-1} 。换言之, 对于任意的 $\epsilon > 0$, 我们需要证明序列 $(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$ 是最终 ϵ - 接近于 y^{-1} 的。于是设 $\epsilon > 0$ 是任

意的实数，

$$\begin{aligned} |b_n^{-1} - y^{-1}| &= \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{y} \right| \\ &= \left| \frac{y - b_n}{yb_n} \right| \end{aligned}$$

此时，分子分母都是可变的，无法定量分析，需要固定分母的范围，这也是书中提示要证明辅助命题 ” 如果一个序列的所有元素都不为零，并且该序列收敛于一个非零极限，那么这个序列是远离 0 的。 ” 原因。

1. 辅助命题证明：

设序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $L \neq 0$ ，那么设 $\epsilon = \frac{1}{2}|L| > 0$ ，存在 $N \geq m, n \geq N$ 使得

$$\begin{aligned} |a_n - L| &\leq \epsilon \\ |a_n - L| &\leq \frac{1}{2}|L| \\ \Rightarrow L - \frac{1}{2}|L| &\leq a_n \leq L + \frac{1}{2}|L| \end{aligned}$$

如果 $L > 0$ ，那么， $0 < \frac{1}{2}|L| \leq a_n$ ，由于序列的所有元素都不为零，即： $a_n > 0$ 对 $m \leq n < N$ 均成立，取 $c := \min(\frac{1}{2}|L|, (a_n)_{n=m}^{N-1})$ 【min 生效的前提是 $(a_n)_{n=m}^{N-1}$ 是有限集合】，综上可知 $c > 0$ ，且任意 $a_n \geq c$ 对任意 $n \geq m$ 均成立，所以序列是远离 0 的。如果 $L < 0$ ，同理可证。综上，命题得证。

由辅助命题可知，序列 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是远离 0 的，那么存在一个实数 $c > 0$ 使得 $|b_n| \geq c$ 对所有的 $n \geq m$ 均成立。所以，

$$\begin{aligned} &\left| \frac{y - b_n}{yb_n} \right| \\ &\leq |y - b_n|/c|y| \\ &\leq \delta/c|y| \end{aligned}$$

因为 $\delta > 0$ 是任意实数，可以通过调整 δ 的取值，使得，

$$\left| \frac{y - b_n}{yb_n} \right| \leq \epsilon$$

即 $|b_n^{-1} - y^{-1}| \leq \epsilon$ ，所以序列是最终 ϵ - 接近于 y^{-1} 的，因为 ϵ 是任意的，所以序列收敛于 y^{-1} 。

(f)

序列 $(a_n/b_n)_{n=m}^{\infty}$ 可以看做 $(a_n \times b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$ ，由 (e) 可知 $(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 y^{-1} 。由 (a) 可知，

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \times b_n^{-1}) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{-1} \right) \\ &= x \times y^{-1} \\ &= \frac{x}{y} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \end{aligned}$$

(g)

我们必须证明 $(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $\max(x, y)$ 。换言之，对于任意的 $\epsilon > 0$ ，我们需要证明序列 $(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 是最终 ϵ - 接近 $\max(x, y)$ 的。

任意实数 $\delta > 0$ ，因为 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x ，即存在 $N_a \geq m$ 使得 $|a_n - x| \leq \delta$ 对所有的 $n \geq N_a$ 均成立。

因为 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 y ，即存在 $N_b \geq m$ 使得 $|b_n - y| \leq \delta$ 对所有的 $n \geq N_b$ 均成立。

取 $N := \max(N_a, N_b)$ ，于是对所有的 $n \geq N$ 都有，

$$\begin{aligned} & |a_n - x| \leq \delta \\ & \Rightarrow x - \delta \leq a_n \leq x + \delta \\ & |b_n - y| \leq \delta \\ & \Rightarrow y - \delta \leq b_n \leq y + \delta \end{aligned}$$

如果 $y > x$ ，我们可以取 $0 < \delta < (y - x)/2$ ，此时 $b_n > a_n$ 对任意 $n \geq N$ 均成立。也就是说，当 $n \geq N$ 后 $\max(a_n, b_n) = b_n$ ，由习题 6.1.3 可知序列 $(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于同一个值 y 。

同理可证， $y \leq x$ 时，序列 $(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x 。

综上，命题得证。

(h)

证明与 (g) 类似。

6.1.9

暂时还证明不了，要看完 10.5 节后才可以解答

6.1.10

首先假设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 对于任意的实数 $\epsilon > 0$ 它们都是最终 ϵ - 接近的。特别地，对于任意的有理数 $\epsilon > 0$ ，它们也都是最终 ϵ - 接近的。

现在假设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是定义 5.2.6 意义下的等价柯西序列，那么对于任意的有理数 $\epsilon > 0$ ，它们都是最终 ϵ - 接近的。如果 $\epsilon > 0$ 是实数，那么根据命题 5.4.12 可知，存在一个比 ϵ 小的有理数 $\epsilon' > 0$ 。因为 ϵ' 是有理数，所以 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是最终 ϵ' - 接近的；又因为 $\epsilon' < \epsilon$ ，所以 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是最终 ϵ - 接近的。