10.4 习题

张志聪

2024 年 12 月 16 日

10.4.1

- (a)

  g 的反函数为 $g^{-1}:(0,+\infty)\to(0,+\infty), g^{-1}(y)=y^n$，因为 $g^{-1}(x)=x^n$ 是既连续又严格单调递增（这里没有做详细证明），由命题 9.8.3 可知，它的反函数 g 也是既连续又严格单调递增的。

- (b)

  由题设和 (a)，并利用定理 10.4.3（反函数定理）可知，g 在 $(0,+\infty)$ 上可微的，并且，对任意 $x_0\in(0,+\infty), y_0=g(x_0)=x_0^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned}
g'(x_0) &= \frac{1}{g^{-1}(y_0)} \\
&= \frac{1}{ny_0^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{y_0^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{(x_0^{\frac{1}{n}})^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{x_0^{1-\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1}
\end{aligned}$$

10.4.2

q 是有理数，所以可以表示成 $q = \frac{a}{b}$ 其中 a, b 都是整数，且 b 是不等于零的正整数。

于是 $f(x) = x^q$ 可以表示成 $f(x) = x^{\frac{a}{b}}$。

- (a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{a}{b}} \\ &= (x^{\frac{1}{b}})^a \end{aligned}$$

  - $p = 0, a = 0$

    此时，$f(x) = x^0 = 1$，$f'(x) = 0$，命题成立。

  - $p > 0, a > 0$

    令 $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty), g(x) = x^{\frac{1}{b}}$、$h : (0, +\infty) \to (0, +\infty), h(x) = x^a$。

    于是可得 $f(x) = (h \circ g)(x)$，因为 g, h 在定义域上可微（g 的可微习题 10.4.1(b) 保证），由定理 10.1.15（链式法则）可得，f 在定义域上可微。

    由定理 10.1.15（链式法则）和习题 10.4.1(b) 可得，对任意 $x_0 \in (0, +\infty), y_0 = g(x_0) = x_0^{\frac{1}{b}}$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= (h \circ g)'(x_0) \\ &= h'(y_0)g'(x_0) \\ &= a(y_0)^{a-1}\frac{1}{b}x_0^{\frac{1}{b}-1} \\ &= a(x_0^{\frac{1}{b}})^{a-1}\frac{1}{b}x_0^{\frac{1}{b}-1} \\ &= \frac{a}{b}x_0^{\frac{a-1}{b}}x_0^{\frac{1}{b}-1} \\ &= \frac{a}{b}x_0^{\frac{a}{b}-1} \\ &= qx_0^{q-1} \end{aligned}$$

  - $q < 0, a < 0$

    令 $p = -q$，于是 $p > 0, f(x) = x^p = x^{-p} = \frac{1}{x^p}$。

由前一个证明和定理 10.1.13(g) 可知，

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= -\frac{px_0^{p-1}}{(x_0^p)^2} \\
&= -\frac{px_0^{p-1}}{x_0^{2p}} \\
&= -px_0^{-p-1} \\
&= qx_0^{q-1}
\end{aligned}
$$

- (b)

  说明 1. 习题有点问题 $x-1$ 是不能等于零的,所以 $x \in (0, +\infty)\ \{1\}$

$$\lim_{x\to 1; x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}} \frac{x^q - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1; x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}} \frac{x^q - 1^q}{x-1}$$

  可见，这里是函数在 $x = 1$ 处的导数，于是 $f'(1) = q1^0 = q$

10.4.3

- (a)

  证明框架：通过证明左右极限存在且相等，证明极限的存在。

  证明右极限，我们必须证明

$$\lim_{x\to 1; x\in(1,+\infty)} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

  根据命题 9.3.9 可知，只需证明：对任意一个由 $(1, +\infty)$ 中的元素构成的且收敛于 1 的序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，对应的以下极限存在

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}$$

  即可。

对任意 $\epsilon > 0$，由命题 5.4.14 可知，存在有理数 q_1, q_2 使得

$$\alpha - \frac{1}{2}\epsilon < q_0 < \alpha$$
$$\alpha < q_1 < \alpha + \frac{1}{2}\epsilon$$

由命题 4.3.3(g) 可知 $d(q_1, q_2) < \epsilon$。

由引理 5.6.9(e) 可知，$a_n > 1$ 时，$a_n^{q_0} < a_n^{\alpha} < a_n^{q_1}$，于是，

$$\frac{a_n^{q_1} - f(1)}{a_n - 1} < \frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1} < \frac{a_n^{q_1} - f(1)}{a_n - 1}$$

由命题 10.4.2(b) 可知，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n^{q_0} - f(1)}{x - 1} = q_0$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n^{q_1} - f(1)}{x - 1} = q_1$$

由夹逼定理可得

$$q_0 \leq \sup(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1})_{n=1}^{\infty} \leq q_1$$
$$q_0 \leq \inf(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1})_{n=1}^{\infty} \leq q_1$$

由 $d(q_0, q_1) < \epsilon$ 且 ϵ 是任意的，可得，

$$\sup(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1})_{n=1}^{\infty} = \inf(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1})_{n=1}^{\infty} = \alpha$$

如果不相等，则会出现以下矛盾，（注意：上确界与下确界是确定，所以两者的差值也是确定的）

$$d(q_0, q_1) > \sup(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1})_{n=1}^{\infty} - \inf(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1})_{n=1}^{\infty}$$

由上可得，右极限是存在的，不妨设为 L。

如果 $L \neq \alpha$，设 $L > \alpha, \delta = L - \alpha$，取 $\epsilon < \delta$，此时 $L > \alpha + \epsilon > p_1$，与 $L \leq q_1$ 存在矛盾。

由此可得右极限存在且等于 α。

类似地，左极限也存在且等于 α。（注意在左极限中 $x-1<0, x^{q_0}>x^{p_1}$）

- (b)

  由定义 10.1.1 可知，要证明对任意 $x_0 \in (0,+\infty)$，以下极限的存在性，

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0; x\in(0,+\infty)\backslash\{x_0\}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0; x\in(0,+\infty)\backslash\{x_0\}} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0; x\in(0,+\infty)\backslash\{x_0\}} \frac{(\frac{x}{x_0})^\alpha - 1}{\frac{x}{x_0}-1}\frac{x_0^\alpha}{x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0; x\in(0,+\infty)\backslash\{x_0\}} \frac{(\frac{x}{x_0})^\alpha - 1}{\frac{x}{x_0}-1} x_0^{\alpha-1} \\
&= \alpha x_0^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

  最后一个等式使用了命题 9.3.14（函数的极限定律）

说明 2.

$$\lim_{x\to x_0; x\in(0,+\infty)\backslash\{x_0\}} \frac{(\frac{x}{x_0})^\alpha - 1}{\frac{x}{x_0}-1} = \alpha$$

这一步可以通过定义 *9.3.6* 证明。