4.1 习题

2024 年 3 月 30 日

文中的减号占位符，不好表示，习题中的所有减号占位符都用减号代替，看官注意分辨。

4.1.1

证明.

① 自反性

设 $a-b$ 是任意整数，现证明 $a-b=a-b$。由于 $a+b=a+b$，所以 $a-b=a-b$

② 对称性

设 $a-b=c-d$，现证明 $c-d=a-b$。由于 $a-b=c-d$，所以 $a+d=c+b$，由自然数相等的对称性可知 $c+b=a+d$，所以 $c-d=a-b$。

4.1.2

证明.

$-(a-b)=b-a, -(a'-b')=b'-a'$，又 $(a-b)=(a'-b')$ 则 $a+b'=a'+b$，由于加法是可以交换的（命题 *2.2.4*）所以 $b'+a=b+a'$，由此可得 $-(a'-b')=-(a-b)$，又由整数相等的对称性可得 $-(a-b)=-(a'-b')$。

4.1.3

证明.
因为 a 是整数，不妨设 $a = x - y$，其中 x, y 是自然数，则

$$
\begin{aligned}
&(-1) \times a \\
&= (0-1) \times (x-y) \\
&= (0 \times x + 1 \times y) - (0 \times y + 1 \times x) \\
&= (0+y) - (0+x) \\
&= y - x \\
&= -a
\end{aligned}
$$

4.1.4

记 $x = a - b, y = c - d, z = e - f$ 其中 a、b、c、d、e、f 是自然数

① $x + y = y + x$

证明.

$$x + y = (a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+d) y + x = (c-d) + (a-b) = (c+a) - (d+b)$$

由于加法是可交换（命题 *2.2.4*）可知 $a + c = c + a, b + d = d + b$，又由自然数相等的替换公理可得 $(a+c) + (d+b) = (c+a) + (b+d)$，由此可知 $x + y = y + x$

② $(x + y) + z = x + (y + z)$

证明.

$$
\begin{aligned}
&(x+y)+z\\
&=((a-b)+(c-d))+(e-f)\\
&=((a+c)-(b+d))+(e-f)\\
&=(a+c+e)-(b+d+f)\\
&x+(y+z)\\
&=(a-b)+((c-d)+(e-f))\\
&=(a-b)+((c+e)-(d+f))\\
&=(a+c+e)-(b+d+f)
\end{aligned}
$$

由整数相等的定义可知 $(x+y)+z=x+(y+z)$

③ $x+0=0+x=x$

证明.
可以把 0 看做整数 $0-0$，由①可知 $x+0=0+x$，

$$
\begin{aligned}
&0+x\\
&=(0-0)+(a-b)\\
&=(0+a)-(0+b)\\
&=a-b\\
&=x
\end{aligned}
$$

④ $x+(-x)=(-x)+x=0$

证明.
由①可知 $x+(-x)=(-x)+x$，可以把 0 看做整数 $0-0$，现在证明整数 $x+(-x)=0-0$

$$
\begin{aligned}
&x+(-x)\\
&=(a-b)+(b-a)\\
&=(a+b)-(b+a)
\end{aligned}
$$

$$(a+b)+0=(b+a)+0$$

由整数相等的定义可知 $x+(-x)=(-x)+x=0$

⑤ $xy=yx$

证明.

$$
\begin{aligned}
&xy \\
&=(a-b)(c-d) \\
&=(ac+bd)-(ad+bc) \\
&yx \\
&=(c-d)(a-b) \\
&=(ca+db)-(cb+da)
\end{aligned}
$$

由于加法是可以交换的，乘法也是可以交换的，所以

$$
\begin{aligned}
&=(ca+db)-(cb+da) \\
&=(ac+bd)-(ad+bc)
\end{aligned}
$$

于是 $xy=yx$

⑦ $x1=1x=x$

证明.

由⑤ 可知 $x1=1x$，又

$$
\begin{aligned}
&x1 \\
&=(a-b)\times(1-0) \\
&=(a\times 1+b\times 0)-(a\times 0+b\times 1) \\
&=(a+0)-(0+b) \\
&=a-b \\
&=x
\end{aligned}
$$

⑧ $x(y+z)=xy+xz$

证明.

$$
\begin{aligned}
&x(y+z)\\
&=(a-b)[(c-d)+(e-f)]\\
&=(a-b)[(c+e)-(d+f)]\\
&=[a(c+e)+b(d+f)]-[a(d+f)+b(c+e)]\\
&=(ac+ae+bd+bf)-(ad+af+bc+be)\\
&xy+xz\\
&=(a-b)(c-d)+(a-b)(e-f)\\
&=[(ac+bd)-(ad+bc)]+[(ae+bf)-(af+be)]\\
&=[(ac+bd)+(ae+bf)]-[(ad+bc)+(af+be)]\\
&=(ac+ae+bd+bf)-(ad+bc+af+be)
\end{aligned}
$$

于是 $x(y+z)=xy+xz$

⑨ $(y+z)x=yx+zx$

证明.
由⑤可知 $(y+z)x=x(y+z)$，又由⑧可知 $x(y+z)=xy+xz$，再次应用⑤可得 $xy+xz=yx+zx$，于是等式成立

4.1.5

证明.
由引理 *4.1.5*（整数的三歧性）分多种情况讨论。

（*1*）如果 a,b 都是正自然数，则由 *2.3.3* 可知 ab 是正自然数，则 $ab\neq=0$ 与题设矛盾；

（*2*）如果 a,b 都是正自然数的负数，假设分别为 $-m,-n$，m、n 都是

正自然数。

$$
\begin{aligned}
& ab \\
& = (-m) \times (-n) \\
& = (0 - m) \times (0 - n) \\
& = (0 \times 0 + mn) - (0 \times 0 + m \times 0) \\
& = mn
\end{aligned}
$$

由于 m,n 都是正自然数，所以 $ab = mn \neq 0$，与题设矛盾；

（3）如果 $a = b = 0$（这里的 0 也可以看做自然数），所以 $ab = 0$，满足题设。

（4）如果 $a = 0, b = x - y$，x、y 为任意自然数；

$$
\begin{aligned}
& ab \\
& = (0 - 0) \times (x - y) \\
& = (0 \times x) - (0 \times y) \\
& = 0 - 0 \\
& = 0
\end{aligned}
$$

所以 $ab = 0$，满足题设；

（5）如果 $a = x - y, b = 0$，x、y 为任意自然数；

$$
\begin{aligned}
& ab \\
& = (x - y) \times (0 - 0) \\
& = (x \times 0) - (y \times 0) \\
& = 0 - 0
\end{aligned}
$$

于是 $ab = 0$，满足题设；

如果 $a=0, b=x-y,$，x、y 为任意自然数；

$$\begin{aligned}
&ab \\
&=0\times(x-y) \\
&=(x-y)\ times 0 \\
&=0-0
\end{aligned}$$

于是 $ab=0$，满足题设；

综上，命题得证。

4.1.6

证明.

（*1*）方法一

由整数加法的替换性与命题 *4.1.6* 可知：

$$\begin{aligned}
ac-bc&=0 \\
(a-b)c&=0
\end{aligned}$$

由命题 *4.1.8* 可知 $a-b=0$，接下来要证 $a=b$，以上等式才能成立。

$$\begin{aligned}
a-b&=0 \\
a-b+b&=0+b \\
a+(-b)+b&=0+b \\
a+((-b)+b)&=b \\
a+0&=b \\
a&=b
\end{aligned}$$

（*2*）方法二

由引理 *4.1.5*（整数的三歧性）分多种情况讨论。

（1）a、b、c 都是正自然数，则

$$ac = bc$$

由推论 2.3.7 可知 $a = b$

其余的情况同理。（略）

4.1.7

（a）$a > b$ 当且仅当 $a - b$ 是一个正的自然数。

证明.

充分性

假设 $a > b$，由引理 4.1.5（整数的三歧性）对 $a - b$ 分多种情况讨论。

（1）$a - b \neq 0$，因为如果 $a - b = 0$，则 $a = b$，与题设矛盾；

（2）$a - b$ 是正自然数 n 的负数-n，即

$$\begin{aligned}
a - b &= -n \\
a - b + b &= -n + b \\
a + 0 &= -n + b \\
a &= -n + b \\
a + n &= -n + b + n \\
a + n &= b + -n + n \\
a + n &= b \\
b &> a
\end{aligned}$$

说明. 上面的证明中用到了一个命题：a,b 是整数且 $a = b$，则 $a + c = b + c$，c 是整数。

该命题对自然数是成立的，但对于整数书中没有该命题，这里需要证明下。

记 $a = x - y, b = p - q, c = w - z$，x、y、p、q、w、z 是自然数。

由 $a = b$ 可得：

$$
\begin{gathered}
a = b \\
x - y = p - q \\
x + q = p + y
\end{gathered}
$$

又

$$
\begin{aligned}
&a + c \\
&= (x - y) + (w - z) \\
&= (x + w) - (y + z) \\
&b + c \\
&= (p - q) + (w - z) \\
&= (p + w) - (q + z)
\end{aligned}
$$

又由

$$
\begin{gathered}
(x + w) + (q + z) \\
= x + q + w + z \\
(p + w) + (y + z) \\
= p + y + w + z
\end{gathered}
$$

由整数相等的定义可知 $a + c = b + c$