

3.5 习题

2024 年 3 月 2 日

3.5.5

说明. 按照定义证明即可

证明.

① $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ 证明

令 $Z = (A \times B) \cap (C \times D)$, $Z' = (A \cap C) \times (B \cap D)$ 现在我们只需证明属于 Z 中的元素也属于 Z' , 反之亦然。

对任意 $(x, y) \in Z$ 那么 $(x, y) \in A \times B$ 且 $(x, y) \in C \times D$, 所以 $x \in A, x \in C, y \in B, y \in D$, 由定义可知 $(x, y) \in Z'$ 。

反之, 对任意 $(x, y) \in Z'$ 那么 $(x, y) \in A \cap C$ 且 $(x, y) \in B \cap D$, 所以 $x \in A, x \in C, y \in B, y \in D$, 由定义可知 $(x, y) \in Z$ 。

剩下的证明类似, 故略

3.5.6

证明.

① $A \times B \subseteq C \times D$ 当且仅当 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ 证明

先证明 $A \times B \subseteq C \times D \implies A \subseteq C, B \subseteq D$ 任意 $x \in A, y \in B \implies (x, y) \in A \times B$ 又 $A \times B \subseteq C \times D$ 所以 $(x, y) \in C \times D$, 所以 $x \in C, y \in D$, 由此可知对任意 $x \in A \implies x \in C, y \in B \implies y \in D$, 所以 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ 。

再证明 $A \subseteq C, B \subseteq D \implies A \times B \subseteq C \times D$ 任意 $(x, y) \in A \times B$ 所以 $x \in A, y \in B$, 由 $A \subseteq C, B \subseteq D$ 知 $x \in C, y \in D$ 那么 $(x, y) \in C \times D$, 所以 $A \times B \subseteq C \times D$

② $A \times B = C \times D$ 当且仅当 $A = C$ 且 $B = D$ 证明

先证明 $A \times B = C \times D \implies A = C, B = D$ 。因 $A \times B = C \times D$ 由 ① 知 $A \subseteq C, B \subseteq D$, 由集合相等的对称性可知 $C \times D = A \times B$, 所以 $B \subseteq A, D \subseteq B$, 综上 $A = C$ 且 $B = D$

类似证明 $A = C, B = D \implies A \times B = C \times D$ 。

③ 去掉空集的限制, 空集和自然数 0 的效果很类似, 上面的①②都不再成立

3.5.7

说明. 证明唯一性, 常见思路是先定义出目标对象, 再证明其唯一性, 即证明其他满足条件的对象, 都与目标对象相等

证明.

定义 $h: Z \rightarrow X \times Y, h(z) := (f(z), g(z))$

由 h 的定义, 显然 $\pi_{X \times Y \rightarrow X} \circ h = f$ 且 $\pi_{X \times Y \rightarrow Y} \circ h = g$ 现在证明其唯一性。假设存在另一个函数 h' 满足 $\pi_{X \times Y \rightarrow X} \circ h' = f$ 且 $\pi_{X \times Y \rightarrow Y} \circ h' = g$, 现需证明 $h = h'$, 我们要说明对任意 z 有 $h(z) = h'(z)$ 。设 $h(z) = (f(z), g(z)) = (x, y)$ $h'(z) = (x', y')$ 由 $\pi_{X \times Y \rightarrow X} \circ h = f$ 和 $\pi_{X \times Y \rightarrow X}(x, y) := x$ 知 $\pi_{X \times Y \rightarrow X} \circ h(z) = x = f(z)$ 同理 $\pi_{X \times Y \rightarrow X} \circ h'(z) = x' = f(z)$, 所以 $x = x'$ 同理 $y = y'$, 综上对任意 z 有 $h(z) = h'(z)$ 那么由函数的相等定义, 有 $h' = h$, 唯一性得到证明

3.5.8

证明.

如果每一个 X_i 都是非空集合, 由引理 3.5.12 可知, 集合 $\prod_{1 \leq i \leq n} X_i$ 也是非空的, 所以 $\prod_{1 \leq i \leq n} X_i$ 为空至少有一个 X_i 为空。

如果有一个 X_i 为空, 由笛卡尔积的定义, $1 \leq i \leq n$ 的 x_i 不存在, 所以 $\prod_{1 \leq i \leq n} X_i$ 为空。

综上, 命题得证

3.5.9

说明. 按照集合相等的定义证明即可

证明.

任意 $x \in [(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta)] \Rightarrow$ 存在 $\alpha \in I$ 使得 $x \in A_\alpha$ 且存在 $\beta \in J$ 使得 $x \in B_\beta$, 由此可知 $(\alpha, \beta) \in I \times J, x \in (A_\alpha \cap B_\beta)$, 所以 $x \in \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha \cap B_\beta)$
 任意 $x \in \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha \cap B_\beta) \Rightarrow$ 存在 $(\alpha, \beta) \in I \times J, x \in (A_\alpha \cap B_\beta)$, 由此可知存在 $\alpha \in I$ 使得 $x \in A_\alpha$ 且存在 $\beta \in J$ 使得 $x \in B_\beta$, 所以 $x \in [(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta)]$
 综上, 命题得证

3.5.10

说明.

证明.

①先证明函数相等 \Rightarrow 图相等

假设两个函数 $f: X \rightarrow Y$ 和 $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ 相等, 那么由函数的相等定义, 有任意 $x \in X, f(x) = \tilde{f}(x)$, 由图的定义可知图是一个集合, 又 $(x, f(x)) \in f$ 的图, $(x, \tilde{f}(x)) \in \tilde{f}$ 的图, 且 $f(x) = \tilde{f}(x)$, 所以两函数的图相等。

证明图相等 \Rightarrow 函数相等。

假设两函数 f, \tilde{f} 的图相等。对任意 $x \in X$, 有 $(x, f(x)) \in f$ 的图, 由图相等可知 $(x, f(x)) \in \tilde{f}$ 的图。

同理: $(x, \tilde{f}(x)) \in \tilde{f}$ 的图, $(x, \tilde{f}(x)) \in f$ 的图,

假设两个函数不相等, 应该存在 $x_0, f(x_0) \neq \tilde{f}(x_0)$, 但由之前的说明可知, $(x_0, f(x_0)) \in \tilde{f}$ 的图, 所以存在 $(x_1, \tilde{f}(x_1)) = (x_0, f(x_0)) \in \tilde{f}$ 的图, 由有序对相等的定义可知 $x_0 = x_1, f(x_0) = \tilde{f}(x_1)$, 而由 $x_0 = x_1$, 可以得到 $f(x_0) = \tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_0)$ 这与 $f(x_0) \neq \tilde{f}(x_0)$ 矛盾, 所以假设不成立

综上, 命题得证

②先定义函数 $f: X \rightarrow Y$, 其性质为 $(x, y) \in G$ 。由题设“子集 G 具有下述性质: 对每一个 $x \in X$, 集合 $y \in Y: (x, y) \in G$ 中恰好有一个元素”,

可知这里定义的 y 是存在且唯一，满足函数定义。由 f 的构造方式知， f 的图与 G 相等（这里不做证明了）。

现在证明 f 的唯一性。

假设存在另外一个函数 $f' : X \rightarrow Y$ ，它的图与 G 相等。那么对任意 $x \in X$ ，由图的定义可知 $(x, f'(x)) \in f'$ 的图，因为 f' 的图与 G 相等，所以 $(x, f'(x)) \in G$ ，由题设“子集 G 具有下述性质：对每一个 $x \in X$ ，集合 $y \in Y : (x, y) \in G$ 中恰好有一个元素”，所以这里的 $y = f'(x)$ ，有由 f 的定义可知 $(x, f(x)) \in G$ ，由 y 的唯一性可知， $f'(x) = f(x)$ ，所以 $f = f'$

综上所述，函数 f 唯一。

3.5.11

说明. 题目中的提示已经说明了证明思路

证明.

①对任意两个集合 X 和 Y ，利用引理 3.4.9 和分类公理构造出由 $X \times Y$ 的一切子集组成的集合，它满足垂线测试。

由引理 3.4.9 知存在集合 $\{a : a \in X \times Y\}$ ，即 $X \times Y$ 的所有子集构成的集合 A ，有分类公理得到 $\{b \in A : b \text{ 满足垂线测试}\}$ 集合 B 。

②利用 3.5.10 和替代公理构造出一个集合，该集合与公理 3.10 相同。

如下：

$f_G := \{f : \alpha \in B, \text{函数 } f \text{ 是定义域为 } X \text{ 值域为 } Y, f \text{ 的图与 } \alpha \text{ 相同}\}$

现在我们只需证明 f_G 集合与公理 3.10 描述的集合 $f_{ps} := \{f : f \text{ 是一个定义域 } X \text{ 且值域为 } Y \text{ 的函数}\}$ 相等。

若 $f_x \in f_G$ ，那么函数 f_x 的定义域是 X ，值域是 Y ，所以 $f_x \in f_{ps}$ ，

若 $f_x \in f_{ps}$ ，那么函数 f_x 的定义域是 X ，值域是 Y ，又 f_x 的图 $\{(x, f_x(x)), x \in X\}$ 为 β ，由函数的定义可知 β 满足垂线测试，所以 $\beta \in B$ 。由此可以得到一个函数 $f'_x : X \rightarrow Y$ 它的图为 β ，由 3.5.10 可知两函数 f_x 和 f'_x 相等，又 $f'_x \in f_G$ ，所以 $f_x \in f_G$ 。

综上所述，命题得证。

3.5.12

说明. 证明思路: 先证明提示中的命题, 然后证明 3.5.12

证明.

①证明提示中的命题

以归纳法证明该命题。

归纳基始, 当 $N=0$ 时, 存在唯一的函数 $a_0: \{0\} \rightarrow N, a_0(0) = c$ 。因为小于 0 的自然数不存在, 所以 $a_0(n++) = f(n, a(n))$ 对所有满足 $n < 0$ 的 $n \in N$ 均成立 这一点空成立。由 a_0 的定义可知, a_0 是唯一的。

归纳假设 $N=k$ 时, 提示中的命题成立。

现需证明 $N=k++$ 时, 提示中的命题成立。先尝试定义出函数 $a_{k++}: \{n \in N: n \leq k\} \rightarrow N, a_{k++}(n) = f(k, a(k))$ 当 $n < k$ 时, $a_k(n) = a_{k++}(n), a_{k++}(k++) = f(k, a(k))$ 。

现要证明函数 a_{k++} 的唯一性。假设存在另一个函数 a_j , 则存在一个 x , 使得 $a_{k++}(x) \neq a_j(x)$, 若 x 属于函数 a_k 的定义域, 那么与归纳假设 a_k 的唯一性矛盾。若 $x=k++$, 由函数的定义可知, 函数 f 对同一个对象, 不可能有多个函数值, 所以 $x=k++$ 的情形不存在。由上述可知 a_j 是不存在的, 所以 a_{k++} 是唯一的。

综上所述, 提示中的命题成立。(有一点说明, 上面提及的所有函数的存在性是由定义保证的)

②证明 3.5.12 利用提示中的命题, 定义出函数 a , 并证明其唯一性。

函数 $a: N \rightarrow N$, 值域为 $\{a_x(x): x \in N\}$ 。由 $a(0) = a_0(0) = c, a(n++) = a_{n++}(n++) = f(n, a_n)$, 可知定义的函数 a 是满足要求的。

现在证明 a 的唯一性。

假设存在一个函数 a' 满足题设, 又 $a \neq a'$ 。由函数的相等定义可知, 若两个函数不相等, 则存在一个自然数 x , 使得 $a(x) \neq a'(x)$, 当 $x=0$, 因为 a, a' 都满足题设, 所以 $a(0) = a'(0) = c$, 当 $x \neq 0$ 时, 即 x 是正数时, 由于对任意正数都可以由一个自然数加 1 得到, 我们假设 $x = \alpha++$, 那么 $a(\alpha++) = f(\alpha, a(\alpha)) = a'(\alpha++) = f(\alpha, a'(\alpha))$ (对 n 进行归纳, 可以证明该式子的正确性, 这里不做证明了), 所以这样的 x 不存在, 到这里唯一性得到了证明。

综上, 命题得证。

另一个挑战, 不证明了, 看着就让人 *emo*

3.5.13

说明. 证明存在性, 有两种常见思路:

一种是按照定义定义出目标对象; 另一种是构造出目标对象, 然后证明其符合定义。在本题中, 我们使用后一种方法。

证明.

定义函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}', f(0) = 0'$ 且对任意的 $n \in \mathbb{N}, n' \in \mathbb{N}', f(n) = n'$, 当且仅当 $f(n++) = n'++$

①证明定义的函数, 符合函数定义。首先 \mathbb{N}, \mathbb{N}' 都是集合, 我们要说明对任意定义域中的元素, 在值域中可以找到唯一的元素与之对应。这里我们对 n 进行归纳, 来证明这一点。

归纳基始 $n=0, f(0) = 0'$, 因 \mathbb{N}' 也满足皮亚洛公理, 由此可知 $0'$ 的唯一性, 所以 $n=0$ 满足定义;

归纳假设 $n = x, f(x) = x', x'$ 是唯一的。

现需 $n = x++$ 满足定义, 由函数 f 可知 $f(x++) = x'++$, 而 2.4 公理保证了 $x'++$ 的唯一性。

至此可知, 函数 f 是满足函数定义的。

②证明函数 f 是双射的。

②.1 单射

归纳证明 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 = x_2$

归纳基始, 假设 $f(x_1) = f(x_2) = 0'$, 那么 $x_1 = x_2 = 0$ (这里简单说一下原因, 如果 x_1 不等于 0 , 说明 x_1 是正数, 而正数可以由一个自然数加 1 得到, 这里假设 $x_1 = a++$ 由此可得到 $f(a) = a', f(a++) = a'++ = 0'$, 这与洛必达公理 2.3 矛盾, 所以 $x_1=0$ 是必须的。)

归纳假设 $f(x_1) = f(x_2) = n'$, 则 $x_1 = x_2$

现需证明 $f(x_1) = f(x_2) = n'++$, 则 $x_1 = x_2$; 因为 x_1, x_2 都是正数 (归纳基始中已说明原因), 所以存在 a, b 使得 $x_1 = a++, x_2 = b++$, 由归纳假设可知 $f(a) = f(b) = n'$, 所以 $a=b$, 所以 $x_1 = x_2$ 。

由此可知: f 单射

②.2 满射 归纳证明对任意 $n' \in \mathbb{N}'$, 有 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $f(n) = n'$

归纳基始, 当 $n' = 0'$ 时, 有 $f(0) = 0'$;

归纳假设, 当 $n' = x'$ 时, 有 $f(x) = x'$;

现需证明, 当 $n' = x' ++'$ 时, 有 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $f(n) = x' ++'$; 由归纳假设可知 $f(x) = x'$, 所以 $x ++ \in \mathbf{N}$, 由 f 的定义可知 $f(x ++) = x' ++'$ 。

由此可知: f 满射

综上, 命题得证