15.5 习题

张志聪

2025 年 4 月 6 日

15.5.1

- (a)

  （1）绝对收敛。

  任意 $x \in \mathbb{R}$，都有

  $$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}|}{|\frac{x^n}{(n)!}|} &= \limsup_{n\to\infty}|\frac{x}{n+1}| \\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

  由推论 7.5.3（比值判别法）可知，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛。

  （2）

  由命题 7.2.9(绝对收敛判别法) 可知，绝对收敛的级数，也是条件收敛的。

  （3）收敛半径是 ∞

  $$\limsup_{n\to\infty}|\frac{1}{n!}| \le \limsup_{n\to\infty}|\frac{1}{n}| = 0$$

  于是可得，收敛半径 $R = \infty$。

  （4）exp 是 $(-\infty, \infty)$ 上的实解析函数。

  由习题 15.2.8(f) 可知直接得到。

- (b)

  由定理 15.1.6(d) 可知，exp 在 $\mathbb{R}$ 上可微。又因为

$$\begin{aligned}(\exp(x))' &= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

  设 $n' = n - 1$，于是

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{x^{n'}}{n'!} \\ &= \exp(x)\end{aligned}$$

- (c)

  由定理 15.1.6(c) 可知，exp 在 $\mathbb{R}$ 上连续。又由 (b) 可知，$\exp(x)$ 是 $\exp(x)$ 的原函数。

  于是利用定理 11.9.4（微积分第二基本定理）可得

$$\int_{[a,b]} \exp(x)dx = \exp(b) - \exp(a)$$

- (d)

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

  利用二项式公式（习题 7.1.4）可知直接得到

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j}\end{aligned}$$

约分掉 $n!$ 可得

$$\exp(x+y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j y^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

由于 exp 函数在 $\mathbb{R}$ 上绝对收敛的，所以可以使用定理 8.2.2（富比尼定理）

$$\exp(x+y)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{x^j y^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

令 $m=n-j$，于是可得，

$$\exp(x+y)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^j y^m}{j!m!}$$

分离成两个级数：

$$\begin{aligned}\exp(x+y)&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\\&=\exp(x)\exp(y)\end{aligned}$$

- (e)

  （1）$\exp(0)=1$

  $$\exp(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!}=1$$

  （2）$\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$。

  因为

  $$\begin{aligned}&\exp(0)=1=\exp(x-x)=\exp(x)\exp(-x)\\&\Longrightarrow\\&\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}\end{aligned}$$

  （3）$\exp(x)>0$。

由于（2）易得，任意 x，都有 $\exp(x) \neq 0$。

于是我们有，

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= \exp(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x) \\
&= \exp(\frac{1}{2}x)\exp(\frac{1}{2}x) \\
&= \exp(\frac{1}{2}x)^2 \\
&> 0
\end{aligned}
$$

- (f)

  由 (b)(e) 和命题 10.3.3 可以得到该结论。