# 4.1 习题

2024 年 3 月 30 日

## 4.1.1

**证明.**

① 自反性

设 $a$ [redacted] $b$ 是任意整数，现证明 $a$ [redacted] $b = a$ [redacted] $b$。由于 $a+b=a+b$，所以 $a$ [redacted] $b = a$ [redacted] $b$

② 对称性

设 $a$ [redacted] $b = c$ [redacted] $d$，现证明 $c$ [redacted] $d = a$ [redacted] $b$。由于 $a$ [redacted] $b = c$ [redacted] $d$，所以 $a+d=c+b$，由自然数相等的对称性可知 $c+b=a+d$，所以 $c$ [redacted] $d = a$ [redacted] $b$。

## 4.1.2

**证明.**

$-(a$ [redacted] $b) = b$ [redacted] $a, -(a'$ [redacted] $b') = b'$ [redacted] $a'$，又 $(a$ [redacted] $b) = (a'$ [redacted] $b')$ 则 $a+b' = a'+b$，由于加法是可以交换的（命题 *2.2.4*）所以 $b'+a = b+a'$，由此可得 $-(a'$ [redacted] $b') = -(a$ [redacted] $b)$，又由整数相等的对称性可得 $-(a$ [redacted] $b) = -(a'$ [redacted] $b')$。

## 4.1.3

**证明.**

因为 $a$ 是整数，不妨设 $a = x \blacksquare y$，其中 $x, y$ 是自然数，则

$$
\begin{aligned}
&(-1) \times a \\
&= (0 \blacksquare 1) \times (x \blacksquare y) \\
&= (0 \times x + 1 \times y) \blacksquare (0 \times y + 1 \times x) \\
&= (0 + y) \blacksquare (0 + x) \\
&= y \blacksquare x \\
&= -a
\end{aligned}
$$

## 4.1.4

注意：此时书中已经说明了 ■ 与 − 的等价性，从此处开始证明中将不使用 ■

记 $x = a - b, y = c - d, z = e - f$ 其中 a、b、c、d、e、f 是自然数

① $x + y = y + x$

**证明.**

$$
\begin{aligned}
&x + y \\
&= (a - b) + (c - d) \\
&= (a + c) - (b + d) \\
&y + x \\
&= (c - d) + (a - b) \\
&= (c + a) - (d + b)
\end{aligned}
$$

由于加法是可交换（命题 *2.2.4*）可知 $a + c = c + a, b + d = d + b$，又由自然数相等的替换公理可得 $(a + c) + (d + b) = (c + a) + (b + d)$，由此可知 $x + y = y + x$

② $(x + y) + z = x + (y + z)$

**证明.**

$$
\begin{aligned}
&(x+y)+z \\
&=[(a-b)+(c-d)]+(e-f) \\
&=[(a+c)-(b+d)]+(e-f) \\
&=(a+c+e)-(b+d+f) \\
&x+(y+z) \\
&=(a-b)+[(c-d)+(e-f)] \\
&=(a-b)+[(c+e)-(d+f)] \\
&=(a+c+e)-(b+d+f)
\end{aligned}
$$

于是 $(x+y)+z=x+(y+z)$

③ $x+0=0+x=x$

**证明.**
可以把 0 看做整数 $0-0$，由①可知 $x+0=0+x$，

$$
\begin{aligned}
&0+x \\
&=(0-0)+(a-b) \\
&=(0+a)-(0+b) \\
&=a-b \\
&=x
\end{aligned}
$$

④ $x+(-x)=(-x)+x=0$

**证明.**
由①可知 $x+(-x)=(-x)+x$，可以把 0 看做整数 $0-0$，现在证明整数

$x+(-x)=0-0$

$$
\begin{aligned}
&x+(-x)\\
&=(a-b)+(b-a)\\
&=(a+b)-(b+a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)+0&=(b+a)+0\\
a+b&=b+a
\end{aligned}
$$

于是 $x+(-x)=(-x)+x=0$

⑤ $xy=yx$

**证明.**

$$
\begin{aligned}
&xy\\
&=(a-b)(c-d)\\
&=(ac+bd)-(ad+bc)\\
&yx\\
&=(c-d)(a-b)\\
&=(ca+db)-(cb+da)
\end{aligned}
$$

由于加法是可以交换的，乘法也是可以交换的，所以

$$
\begin{aligned}
&=(ca+db)-(cb+da)\\
&=(ac+bd)-(ad+bc)
\end{aligned}
$$

于是 $xy=yx$

⑦ $x1=1x=x$

**证明.**

由⑤ 可知 $x1 = 1x$，又

$$
\begin{aligned}
& x1 \\
& = (a-b)\times(1-0) \\
& = (a\times 1 + b\times 0) - (a\times 0 + b\times 1) \\
& = (a+0) - (0+b) \\
& = a-b \\
& = x
\end{aligned}
$$

⑧ $x(y+z) = xy + xz$

**证明.**

$$
\begin{aligned}
& x(y+z) \\
& = (a-b)[(c-d)+(e-f)] \\
& = (a-b)[(c+e)-(d+f)] \\
& = [a(c+e)+b(d+f)] - [a(d+f)+b(c+e)] \\
& = (ac+ae+bd+bf) - (ad+af+bc+be) \\
& xy+xz \\
& = (a-b)(c-d) + (a-b)(e-f) \\
& = [(ac+bd)-(ad+bc)] + [(ae+bf)-(af+be)] \\
& = [(ac+bd)+(ae+bf)] - [(ad+bc)+(af+be)] \\
& = (ac+ae+bd+bf) - (ad+bc+af+be)
\end{aligned}
$$

于是 $x(y+z) = xy + xz$

⑨ $(y+z)x = yx + zx$

**证明.**

由⑤可知 $(y+z)x = x(y+z)$，又由⑧可知 $x(y+z) = xy + xz$，再次应用⑤可得 $xy + xz = yx + zx$，于是等式成立

## 4.1.5

**证明.**

由引理 *4.1.5*（整数的三歧性）分多种情况讨论。

（*1*）如果 $a,b$ 都是正自然数，则由 *2.3.3* 可知 $ab$ 是正自然数，则 $ab \neq= 0$ 与题设矛盾；

（*2*）如果 $a,b$ 都是正自然数的负数，假设分别为 $-m,-n$，$m$、$n$ 都是正自然数。

$$
\begin{aligned}
&ab \\
&= (-m) \times (-n) \\
&= (0-m) \times (0-n) \\
&= (0 \times 0 + mn) - (0 \times 0 + m \times 0) \\
&= mn
\end{aligned}
$$

由于 $m,n$ 都是正自然数，所以 $ab = mn \neq 0$，与题设矛盾；

（*3*）如果 $a = b = 0$，$ab = 0$，满足题设。

（*4*）如果 $a = 0, b = x - y$，$x$、$y$ 为任意自然数；

$$
\begin{aligned}
&ab \\
&= (0-0) \times (x-y) \\
&= (0 \times x) - (0 \times y) \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以 $ab = 0$，满足题设；

（*5*）如果 $a=x-y,b=0$，$x$、$y$ 为任意自然数；

$$\begin{aligned}&ab\\&=(x-y)\times(0-0)\\&=(x\times 0)-(y\times 0)\\&=0-0\\&=0\end{aligned}$$

于是 $ab=0$，满足题设；

综上，命题得证。

## 4.1.6

**证明.**

（*1*）方法一

由整数加法的替换性与命题 *4.1.6* 可知：

$$\begin{aligned}ac-bc&=0\\(a-b)c&=0\end{aligned}$$

由命题 *4.1.8* 可知 $a-b=0$，接下来要证 $a=b$，以上等式才能成立。

$$\begin{aligned}a-b&=0\\a-b+b&=0+b\\a+(-b)+b&=0+b\\a+[(-b)+b]&=b\\a+0&=b\\a&=b\end{aligned}$$

**说明.** 上面的证明中用到了一个命题：a,b 是整数且 $a=b$，则 $a+c=b+c$，c 是整数。

该命题对自然数是成立的，但对于整数书中没有该命题，这里需要证明下。

记 $a=x-y, b=p-q, c=w-z$，$x$、$y$、$p$、$q$、$w$、$z$ 是自然数。由 $a=b$ 可得：

$$\begin{aligned} a &= b \\ x-y &= p-q \\ x+q &= p+y \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} & a+c \\ & =(x-y)+(w-z) \\ & =(x+w)-(y+z) \\ & b+c \\ & =(p-q)+(w-z) \\ & =(p+w)-(q+z) \end{aligned}$$

又由

$$\begin{aligned} & (x+w)+(q+z) \\ & =x+q+w+z \\ & (p+w)+(y+z) \\ & =p+y+w+z \end{aligned}$$

结合 $x+q=p+y$ 于是 $a+c=b+c$

（2）方法二

由引理 *4.1.5*（整数的三歧性）分多种情况讨论。

（*1*）$a$、$b$、$c$ 都是正自然数，则

$$ac = bc$$

由推论 *2.3.7* 可知 $a = b$

其余的情况证明类似。(略)

## 4.1.7

（a）$a > b$ 当且仅当 $a - b$ 是一个正的自然数。

**证明.**

① 充分性

假设 $a > b$，由引理 *4.1.5*（整数的三歧性）对 $a - b$ 分多种情况讨论。

（*1*）如果 $a - b = 0$，则 $a = b$，与题设矛盾；

（*2*）$a - b$ 是正自然数 $n$ 的负数-$n$，即

$$\begin{aligned}
a - b &= -n \\
a - b + b &= -n + b \\
a + 0 &= -n + b \\
a &= -n + b \\
a + n &= -n + b + n \\
a + n &= b + -n + n \\
a + n &= b \\
b &> a
\end{aligned}$$

与题设矛盾；

综上，$a - b$ 只能是正自然数

② 必要性

假设 $a-b$ 是一个正的自然数 $n$，那么

$$\begin{aligned} a-b&=n\\ a-b+b&=n+b\\ a+0&=n+b\\ a&=n+b \end{aligned}$$

于是 $a \geq b$，又由于 $n$ 是正自然数，那么 $a \neq b$（其实这里需要引入一个额外的命题，下方有说明），所以 $a > b$

**说明.** 整数 $a, b$，如果 $a \geq b$，c 是正自然数，那么 $a+c>b$

**证明.**
不妨设 $a=x-y, b=p-q$ 因为 $a \geq b$，那么存在一个自然数 $n$ 使得 $a=b+n$，所以 $a+c=b+n+c=b+(n+c)$，于是 $a+c \geq b$，

若 $a+c=b$，则

$$\begin{aligned} a+c&=b\\ b+n+c&=b\\ b+n+c+(-b)&=b+(-b)\\ n+c&=0 \end{aligned}$$

由推论 *2.2.9* 可知 $c=0$，这与 $c$ 是正自然数矛盾，所以 $a+c \neq b$，所以 $a+c>b$，命题得证。

综上，命题得证。

（b）（加法保持序不变）如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$

**证明.**

因为 $a>b$，由（$a$）可知 $a-b=n$，$n$ 是正自然数；

$$
\begin{aligned}
&(a+c)-(b+c)\\
&=(a+c)+[-(b+c)]\\
&=(a+c)+[(-c)+(-b)]\\
&=a+c+(-c)+(-b)\\
&=a+0+(-b)\\
&=a-b
\end{aligned}
$$

由此可知 $(a+c)-(b+c)=a-b$ 是正自然数，所以 $a+c>b+c$。

**说明.** 以上的证明中 $-(b+c)=(-b)+(-c)$，不是显然的，需要证明以下命题。

$a,b$ 是整数，则 $-(a+b)=(-a)+(-b)$。

**证明.**
由于 $a,b$ 是整数，所以存在 $a=x-y, b=p-q$，$x,y,p,q$ 是自然数。

$$
\begin{aligned}
&-(a+b)\\
&=-[(x-y)+(p-q)]\\
&=-[(x+p)-(y+q)]\\
&=(y+p)-(x+p)\\
&(-a)+(-b)\\
&=[-(x-y)]+[-(p-q)]\\
&=(y-x)+(q-p)\\
&=(y+q)-(x+p)
\end{aligned}
$$

于是 $-(a+b)=(-a)+(-b)$，命题得证。

（c）（正的乘法保持序不变）