12.1 习题

张志聪

2025 年 1 月 17 日

12.1.1

令 $a_n = d(x_n, x) = |x_n - x|$，于是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个实数序列。
$(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛与 x
$\Leftrightarrow$
对任意 $\epsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n \geq N$ 时，$|x_n - x| \leq \epsilon$
$\Leftrightarrow$
对任意 $\epsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n \geq N$ 时，$a_n \leq \epsilon$
$\Leftrightarrow$
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

12.1.2

需要证明这里的度量 $d(x, y) := |x - y|$ 满足定义 12.1.2。

命题 4.3.3(a)，满足了定义 12.1.2 中的公理 (a),(b)（因为任意 $x, y \in \mathbb{R}, x - y$ 都是实数）；

命题 4.3.3(f)，满足了定义 12.1.2 中的公理 (c)；

命题 4.3.3(g)，满足定义 12.1.2 中的公理 (d)。

12.1.3

- (a)

  把离散度量 d_{disc} 做一点修改：当 $x = y$ 时，$d_{disc}(x, y) := 2$。

- (b)

  把离散度量 d_{disc} 做一点修改：当 $x \neq y$ 时，$d_{disc}(x,y) := 0$。

- (c)

  定义 $X := \mathbb{R} - \{0\}$ 并且度量 d 如下：

$$d(x,x) := 0$$
$$d(x,y) := |x| \; if \; x \neq y$$

- (d)

  定义 $X := \{a,b,c\}$ 并且度量 d 如下：

$$d(x,x) := 0 \; if \; x \in X$$
$$d(a,b) = d(b,a) = 1, d(b,c) = d(c,b) = 1$$
$$d(a,c) = d(c,a) = 3$$

12.1.4

任意 $x,y \in Y; x,y \in X$，所以 $d|_{Y \times Y}(x,y) = d(x,y)$，因为 d 满足所有的公理，那么 $d|_{Y \times Y}$ 也满足所有的公理。

12.1.5

（1）恒等式

证明框架：对 n 进行归纳，证明略

（2）推导出柯西-施瓦茨不等式

证明框架：对恒等式开方，且 $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_ib_j - a_jb_i)^2 \geq 0$ 可证。

（3）证明三角不等式

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2+b_i^2+2a_ib_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i^2+\sum_{i=1}^{n} b_i^2+2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \\
&\le \sum_{i=1}^{n} a_i^2+\sum_{i=1}^{n} b_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}\right)^2
\end{aligned}
$$

12.1.6

- 公理 (a)

  当 $x=y$ 时，对任意第 i 个坐标分量都有 $(x_i-y_i)^2=0$，所以

$$
\begin{aligned}
d_{l^2}(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}0\right)^{1/2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- 公理 (b)

  当 $x\neq y$ 时，存在第 i 个坐标分量使得 $(x_i-y_i)^2>0$，所以 $d_{l^2}(x,y)>0$。

- 公理 (c)

  任意的 $x,y\in X$，它们的任意第 i 个坐标分量都有 $(x_i-y_i)^2=(y_i-x_i)^2$，所以 $d_{l^2}(x,y)=d_{l^2}(y,x)$。

- 公理 (d)

定义 $x_i - y_i = a_i, y_i - z_i = b_i$ 于是

$$\begin{aligned}
d_{l^2}(x,z) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2\right)^{1/2} \\
&= d_{l^2}(x,y) + d_{l^2}(y,z)
\end{aligned}$$

综上可得

$$d_{l^2}(x,z) \leq d_{l^2}(x,y) + d_{l^2}(y,z)$$

12.1.7

- 公理 (a)

  当 $x = y$ 时，对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = 0$，所以

  $$\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2 = 0$$

- 公理 (b)

  当 $x \neq y$ 时，存在第 i 个坐标分量使得 $|x_i - y_i| > 0$，其他坐标分量 j 都有 $|x_j - y_j| \geq 0$，所以 $d_{l^1}(x,y) > 0$。

- 公理 (c)

  对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$，所以

  $$d_{l^1}(x,y) = d_{l^1}(y,x)$$

- 公理 (d)

对任意第 i 个坐标分量，由命题 4.3.3(g) 可知，

$$|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

所以，

$$d_{l^1}(x,z) \le d_{l^1}(x,y) + d_{l^1}(y,z)$$

12.1.8

（1）第一个不等式

$$d_{l^2}(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$
$$d_{l^1}(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$$

两边同时取平方

$$\begin{aligned}
(d_{l^2}(x,y))^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \\
(d_{l^1}(x,y))^2 &= (|x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|)(|x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{1\le j\le n, i\ne j}|x_i - y_i||x_j - y_j|
\end{aligned}$$

由上式可得

$$(d_{l^2}(x,y))^2 \le (d_{l^1}(x,y))^2$$
$$\Longrightarrow$$
$$d_{l^2}(x,y) \le d_{l^1}(x,y)$$

（2）第二个不等式

$$d_{l^1}(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$$

利用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} d_{l^1}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \left| \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \right| \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{n} d_{l^2}(x,y) \end{aligned}$$

12.1.9

- 公理 (a)

  当 $x = y$ 时，对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = 0$，所以

  $$\sup\{|x_i - y_i| : 1 \le i \le n\} = 0$$

- 公理 (b)

  当 $x \neq y$ 时，存在第 i 个坐标分量使得 $|x_i - y_i| > 0$，所以

  $$\sup\{|x_i - y_i| : 1 \le i \le n\} > 0$$

- 公理 (c)

  对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$，所以

  $$d_{l^\infty}(x,y) = d_{l^\infty}(y,x)$$

- 公理 (d)

  对任意第 i 个坐标分量，由命题 4.3.3(g) 可知，

  $$|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

  所以，

  $$d_{l^\infty}(x,z) \le d_{l^\infty}(x,y) + d_{l^\infty}(y,z)$$

12.1.10

设 $\sup\{|x_i - y_i| : 1 \le i \le n\} = r$。

（1）第一个不等式

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} d_{l^2}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} r^2 \right)^{1/2} \\
&= r \\
&= d_{l^\infty}(x,y)
\end{aligned}$$

（2）第二个不等式

存在一个 i 使得 $|x_i - y_i| = r$。反证法，对任意 i 都有

$$|x_i - y_i| < r$$

有定义可知，度量都是有限维的，即 n 不会是 $+\infty$，取 $m = max|x_i - y_i|, 1 \le i \le n$（引理 5.1.14），此时 $m < r$ 且 m 是上界，这与 r 是最小上界矛盾（定义 5.5.5）。

所以

$$d_{l^2}(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \ge (r^2)^{1/2} = r = d_{l^\infty}(x,y)$$

12.1.11

略

12.1.12

为了利用式 (12.1)、(12.2)，我们的证明步骤如下（需要保证是环状的）

$$\begin{aligned}
(d) \implies (c) \implies (b) &\implies (a) \\
(a) &\implies (d)
\end{aligned}$$

- $(b) \implies (a)$

  (b) 成立，即 $\lim\limits_{k\to\infty} d_{l^1}(x^{(k)}, x) = 0$，即对任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $N \geq m$ 使得 $d_{l^1}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。

  由式 12.1 可知

  $$d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq d_{l^1}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$$

  对所有的 $k \geq N$ 均成立。于是 (a) 成立。

- $(c) \implies (b)$

  任意 $\epsilon > 0$ 于是 $\epsilon' = \frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon > 0$（注意这里的 n 是固定值），因为 (c) 成立，所以存在一个 $N \geq m$ 使得 $d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon'$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。

  由式 12.2 可知

  $$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{n}} d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon' = \frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon \\ &\implies \\ &d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon \end{aligned}$$

- $(d) \implies (c)$

  (d) 成立，那么对任意 $1 \leq i \leq n, \epsilon > 0$ 存在一个 $N \geq m$ 使得 $|x_i^{(k)} - x_i| \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。

  由 l^∞ 度量的定义可知 $d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) = \sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。于是 (c) 成立。

- $(a) \implies (d)$

  (a) 成立，那么对任意 $\epsilon > 0 > 0$ 存在一个 $N \geq m$ 使得 $d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。即（注意：以下的 $x_i^{(k)}$ 要看做实数，不能看做“点”）

  $$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)} - x_i)^2\right)^{1/2} &\leq \epsilon \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)} - x_i)^2 &\leq \epsilon^2 \end{aligned}$$

那么，对每一个 $1 \le i \le n$ 都有

$$(x_i^{(k)} - x_i)^2 \le \epsilon^2$$
$$\Longrightarrow$$
$$|x_i^{(k)} - x_i| \le \epsilon$$

对所有的 $k \ge N$ 均成立。

所以 (d) 成立。

12.1.13

反证法，假设 d_{disc} 收敛于 x，但 N 不存在。那么，任意 $N \ge m$ 都至少存在一个 $n \ge N$ 使得

$$x^{(n)} \neq x$$

由离散度量 d_{disc} 的定义可知，此时 $d_{disc}(x, x^{(n)}) = 1$。由于 N 的任意性可知，定义 12.1.14（度量空间中序列的收敛）中的定义无法满足，与假设 d_{disc} 收敛于 x 矛盾。

12.1.14

为了推出矛盾，我们假设 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 依度量 d 同时收敛于 x, x'，设 $\epsilon = d(x, x')/3$。注意，因为 $x \neq x'$，所以 ϵ 是正的。由 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 依度量 d 收敛于 x 可知，存在一个 $N \ge m$ 使得 $d(x^{(n)}, x) \le \epsilon$ 对所有的 $n \ge N$ 均成立。类似地，存在一个 $M \ge m$ 使得 $d(x^{(n)}, x') \le \epsilon$ 对所有的 $n \ge M$ 均成立。特别地，如果令 $n := max(N, M)$，那么有 $d(x^{(n)}, x) \le \epsilon$ 和 $d(x^{(n)}, x') \le \epsilon$，于是根据三角不等式（定义 12.1.2 公理 (d)）可得，$d(x, x') \le 2\epsilon = 2d(x, x')/3$。所以 $d(x, x') \le 2d(x, x')/3$, 这和 $d(x, x') > 0$ 矛盾。所以度量空间中的序列不能同时收敛于两个不同的点。

12.1.15

（1）d_{l^1} 是 X 上的度量。

- 公理 (a)

  如果序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是相等的，那么对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n = b_n$，所有

  $$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| = 0$$

- 公理 (b)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 不相等，对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n - b_n| \geq 0$，且两个序列不相等，所以至少存在一个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - b_n| > 0$，所以

  $$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| > 0$$

- 公理 (c)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$，对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$，所以

  $$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = d_{l^1}((b_n)_{n=0}^{\infty}, (a_n)_{n=0}^{\infty})$$

- 公理 (d)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$，对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有

  $$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$$

  于是

  $$\begin{aligned} d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty}) &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - c_n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n - c_n| \\ &= d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) + d_{l^1}((b_n)_{n=0}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty}) \end{aligned}$$

（2）d_{l^∞} 是 X 上的度量。

- 公理 (a)

  如果序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是相等的，那么对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n = b_n$，于是 $|a_n - b_n| = 0$，所有

$$d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| = 0$$

- 公理 (b)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 不相等，对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n - b_n| \geq 0$，且两个序列不相等，所以至少存在一个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - b_n| > 0$，所以

$$d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| > 0$$

- 公理 (c)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$，对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$，所以

$$d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}) = d_{l^\infty}((b_n)_{n=0}^{\infty}, (a_n)_{n=0}^{\infty})$$

- 公理 (d)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$，对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$$

  于是（有用到引理 6.4.13（比较原理））

$$\begin{aligned} d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty}) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - c_n| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \end{aligned}$$

  接下来，我们需要证明

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n - c_n|$$

  不妨设 $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n|, p := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|, q := \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n - c_n|$ 反证法，假设 $M \neq p + q$，那么 $M > p + q$ 或者 $M < p + q$，我们以

$M > p + q$ 为例，于是存在 $m, M > m > p + q$，由最小上界的性质可知（命题 6.3.6），存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - b_n| + |b_n - c_n| > m > p + q$$

于是 $|a_n - b_n| > p$ 或 $|b_n - c_n| > q$，这与 p, q 是最小上确界矛盾。

所以

$$\begin{aligned} d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty) &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n - c_n| \\ &= d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty) + d_{l^\infty}((b_n)_{n=0}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty) \end{aligned}$$

（3）存在一个由 X 中元素构成的序列 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots$（即序列的序列），它依度量 d_{l^∞} 收敛但不依度量 d_{l^1} 收敛。

这里可以手动构造一个

$$\begin{aligned} (a_n)_{n=0}^\infty, a_n = 1/k \\ x^{(k)} = (a_n)_{n=0}^\infty \end{aligned}$$

于是 $x^{(k)}$ 收敛于 $1/k$，序列 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots$ 依度量 d_{l^∞} 收敛于 $(a_n)_{n=0}^\infty, a_n = 0$，但不依度量 d_{l^1} 收敛，这里简单说明下原因，因为两个点 $x^{(p)}, x^{(q)}$，每个坐标分量 i 都有

$$|x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| = |1/p - 1/q| = \frac{1}{pq}$$

而每个点的坐标分量个数是 ∞，所以 $d_{l^1}(x^{(p)}, x^{(q)}) = \infty$

（4）任何一个依度量 d_{l^1} 收敛的序列都依度量 d_{l^∞} 收敛。

不妨设序列依度量 d_{l^1} 收敛于 $(a_n)_{n=0}^\infty$，那么对于任意 $\epsilon > 0$ 存在一个 N，使得

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i - x_i| \le \epsilon$$

对 $n \ge N$ 均成立。

于是可得

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i - x_i| \le \epsilon$$

所以，序列依度量 d_{l^∞} 收敛于 $(a_n)_{n=0}^\infty$。

12.1.16

由 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于点 $x \in X$，对于任意 $\epsilon > 0, \frac{1}{2}\epsilon > 0$，存在一个 $N \geq 1$ 使得

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

类似地，存在 $M \geq 1$ 使得

$$d(y_n, y) \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $n \geq M$ 均成立。

取 $m = max(N, M)$ 使得

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \\ &\implies \\ d(x_n, y_n) - d(x, y) &\leq d(x_n, x) + d(y, y_n) \leq \epsilon \end{aligned}$$

对所有的 $n \geq m$ 均成立。

由 ϵ 的任意性和 $d(x, y)$ 是常量可知

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$