6.5 习题

2024 年 7 月 28 日

6.5.1

有理数 $q>0$，可以表示成正整数 a/b 的形式，其中 $a,b>0$。
由定义 5.6.7 可知 $n^q=(n^{1/b})^a$，所以 $1/n^q=(1/n^{1/b})^a$。
由推论 6.5.1 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}1/n^{1/b}=0$。由极限定律（定理 6.1.19）可知

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}1/n^q\\
&=\lim_{n\to\infty}(1/n^{1/b})^a\\
&=(\lim_{n\to\infty}1/n^{1/b})^a\\
&=0^a\\
&=0
\end{aligned}$$

6.5.2

（1）$|x|<1$ 时。
如果 $0<x<1$，则由命题 6.3.10 可知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$。
如果 $x=0$，则对任意 n 都有 $x^n=0^n=0$，于是极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$。
如果 $-1<x<0$，则 $-1(-x)^n\le x^n\le(-x)^n$，则由极限定律可知

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}-1(-x)^n=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}(-x)^n=0\end{cases}$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x)^n=0$。
（2）$x=1$ 时。

对任意 n 都有 $x^n = 1^n = 1$，于是极限 $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$。

（3.1）$x = -1$ 时。

当 n 是偶数时，$x^n = (-1)^n = 1$，于是存在极限点 1。

当 n 是奇数时，$x^n = (-1)^n = -1$，于是存在极限点 -1。

极限点不是唯一的，由命题 6.4.5 可知，此时 $\lim_{n\to\infty} x^n$ 不存在。

（3.2）$|x| > 1$ 时。

（3.2.1）当 $x > 1$ 时。

由习题 6.3.4 可知 $x > 1$ 时，序列 x^n 是发散的。

（3.3.2）当 $x < -1$ 时。

反证法，假设极限 $\lim_{n\to\infty} x^n$ 存在。

不妨设极限 $\lim_{n\to\infty} x^n$ 等于 c，那么，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $n \geq N$ 都有 $|x^n - c| \leq \epsilon$ 均成立。又因为

$$\begin{aligned}
&|(-x)^n - |c|| \\
&= ||x^n| - |c|| \\
&\leq |x^n - c| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

由此可知，$\lim_{n\to\infty} (-x)^n$ 收敛于 $|c|$，这与其是发散的这一事实矛盾。

6.5.3

我只证明 $x > 1$ 的情况。

先证明极限 $\lim_{n\to\infty} x^{1/n}$ 存在。

由引理 5.6.6（e）可知，$x^{1/n}$ 是关于 n 的减函数，又由 5.6.6（d）可知 $1^{1/n} < x^{1/n}$，即：$x^{1/n} > 1$，由上可知，$x^{1/n}$ 是关于 n 的减函数，且有下界，所以由命题 6.3.8 可知，极限 $\lim_{n\to\infty} x^{1/n}$ 存在，不妨设为 c，且由推论 5.4.10（更精确的说，是对应的实数版本）可知 $c \geq 1$。

接下来，我们要证明 $c = 1$。

反证法，假设 $c > 1$。

设 $0 < \epsilon < c - 1 - \delta$，其中 $0 < \delta < c - 1$，因为序列 $x^{1/n}$ 收敛于 c，那

么，存在 $N \geq 0, n \geq N$ 使得 $|x^{1/n} - c| \leq \epsilon$ 均成立，于是，

$$c - \epsilon \leq x^{1/n} \leq c + \epsilon$$
$$1 + \delta < x^{1/n} \leq c + \epsilon$$

要证明存在矛盾，现在要证明书中的提示。因为 $\delta > 0$，所以 $1 + \delta > 0$，$(1+\delta)^n$ 是递增的，又由引理 6.5.2 可是其是发散的，由此可知其没有上界，否则就会存在矛盾。

没有上界，也就意味着对任意实数 M 都存在 $N', n \geq N'$ 使得 $(1+\delta)^n \geq M$，特别的 $M = x$，此时 $(1+\delta)^n \geq x$，即：$1 + \delta \geq x^{1/n}$。

取 $K = max(N, N')$，那么，$n \geq K$ 时，应该有以下公式成立：

$$1 + \delta < x^{1/n}$$
$$1 + \delta \geq x^{1/n}$$

显然，以上公式无法同时成立，假设不成立。