5.5 习题

2024 年 6 月 3 日

5.5.1

证明：

反证法。假设 M' 是 $-E$ 最大下界，且 $M' \neq -M$，由实数序的三歧性可知，要么 $M' < -M$，要么 $M' > -M$。接下来，我们分情况讨论：

$M' < -M$，那么，此时存在 $x \in -E$，使得 $-M > x \geq M'$，而 $-x \in E$，于是

$$M < -x$$

这与 M 是 E 的最小上界矛盾。

$M' > -M$，那么，此时不存在 $x \in -E$，使得 $-M \leq x < M'$，即 $M \geq -x > -M'$，但由于 M 是 E 的最小上界，所以一定存在 $-x \in E$ 使得 $M \geq -x > -M'$，否则 E 的最小上界就不是 M 了，所以存在矛盾。

综上，命题得证。

5.5.2

证明：

由于 L, K 都是整数，且 $L < K$ 可知，$K - L$ 是正自然数，现在通过对 $K - L$ 进行归纳来完成证明【提示信息中有提到归纳证明】。

归纳基始，$K - L = 1$，此时 $m = K, m - 1 = L$，由题设信息可知，该 m 是满足命题的。

归纳假设，$K - L = n$ 时，存在 m 满足命题。

现在假设 $K - L = n + 1$ 时，由于 $L < L + 1 < K$，

如果 $(L+1)/n$ 是集合 E 的上界，此时可以取 $m=L+1$，又由题设可知 $(m-1)/n=L/n$ 不是 E 的上界，此时的 m 满足命题。

如果 $(L+1)/n$ 不是集合 E 的上界，由归纳假设可知，存在 $m, L+1<m\leq K$ 满足命题。

至此，完成归纳。

5.5.3

证明：

由于 m/n 是 E 的上界，而 $(m'-1)/n$ 不是 E 的上界，所以

$$\begin{aligned} m'-1 &< m \\ m' &\leq m \qquad \text{【题设说明了 } m, m' \text{ 是整数，否则无法成立】} \end{aligned}$$

由于 m'/n 是 E 的上界，而 $(m-1)/n$ 不是 E 的上界，所以

$$\begin{aligned} m-1 &< m' \\ m &\leq m' \qquad \text{【题设说明了 } m, m' \text{ 是整数，否则无法成立】} \end{aligned}$$

所以 $m=m'$

5.5.4

证明：

（1）对任意有理数 $\epsilon>0$，由推论 5.4.13 可知，存在正整数 M 使得 $M\epsilon>1$，此时，

$$\epsilon>1/M$$

由题设可知，对任意 $j,k\geq M$ 都有 $d(q_j,q_k)\leq\frac{1}{M}<\epsilon$，即：序列对任意 $\epsilon>0$ 是最终 $\epsilon-$ 稳定的，所以，序列是柯西序列

（2）由实数的运算法则可知，

$$q_M-S=LIM_{n\to\infty}q_M-q_n$$

q_M-S 是一个实数，现在通过实数的三歧性分别讨论。

$q_M - S = 0$，显然是满足命题的。

$q_M - S > 0$，则存在 $N \geq 1$ 使得 $q_M - q_n > 0$ 对 $n \geq N$ 均成立【因为序列是最终正远离 0 的】。

又由题设可知，当 $n \geq max(N, M)$ 时，$|q_M - q_n| \leq \frac{1}{M}$，结合 $q_M - q_n > 0$ 可知，

$$0 < q_M - q_n \leq \frac{1}{M}$$

于是由习题 5.4.8 可知，

$$0 < LIM_{n\to\infty} q_M - q_n \leq \frac{1}{M}$$
$$\Rightarrow$$
$$0 < q_M - S \leq \frac{1}{M}$$

【**注：**不用考虑前 $max(N, M)$ 的情况，这里运用命题：**一个柯西序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，删除开头 $k-1$ 个元素得到序列 $(a_n)_{n=k}^{\infty}$，两个序列还是等价的**】。

$q_M - S < 0$，类似可证。

综上，命题得证。

5.5.5

证明：

给定任意两个有理数 $x < y$，我们能够找到一个无理数 q 使得 $x < q < y$。

这个命题此时无法证明，无理数的定义到现在为止，书中还没有定义。