

15.2 习题

张志聪

2025 年 4 月 3 日

15.2.1

- $0 \leq k \leq n$ 时。

对 k 采用归纳法。

归纳基始 $k = 0$, $c \frac{n!}{(n-0)!} (x-a)^{n-0} = c(x-a)^n = f(x)$, 这与 $f^{(0)}(x) = f(x)$ 一致。

归纳假设 $k = j$ 是命题成立。

$k = j + 1$ 时,

$$\begin{aligned} f^{(j+1)}(x) &= (f^{(j)}(x))' \\ &= (c \frac{n!}{(n-j)!} (x-a)^{n-j})' \\ &= c \frac{n!}{(n-j)!} (n-j)(x-a)^{n-j-1} \\ &= c \frac{n!}{(n-(j+1))!} (n-j)(x-a)^{n-(j+1)} \end{aligned}$$

- $k > n$ 时。

由之前的讨论可知,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= c \frac{n!}{(n-n)!} (x-a)^{n-n} \\ &= cn! \end{aligned}$$

于是可得 $k > n$ 时, $f^{(k)}(x) = 0$ 。

15.2.2

对任意 $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, 定义级数如下

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-a} \right)^{n+1} (x-a)^n$$

接下来我们证明该级数一致收敛于某个函数, 并逐点收敛于 f , 由一致收敛与逐点收敛的函数相同, 证明该级数一致收敛于 f 。

先计算收敛半径:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \left(\frac{1}{1-a} \right)^{n+1} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1-a} \right| \left(\left| \frac{1}{1-a} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left| \frac{1}{1-a} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{1}{1-a} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left| \frac{1}{1-a} \right| \times 1 \\ &= \left| \frac{1}{1-a} \right| \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{1}{1-a} \right| \right)^{\frac{1}{n}} = 1$ 利用了引理 6.5.2。

于是由命题 6.4.12(f) 可得,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \left| \frac{1}{1-a} \right|$$

所以

$$R = |1-a|$$

于是令 $r = \frac{1}{2}|1-a|$, 只需 $|x-a| < r$, 即 $x \in (a-r, a+r)$ 时, 由定理 15.1.6(c) 可知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-a} \right)^{n+1} (x-a)^n$ 在 $[a-r, a+r]$ 上一致收敛于某个函数 g , 因为 $(a-r, a+r) \subseteq [a-r, a+r]$, 所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-a} \right)^{n+1} (x-a)^n$ 在 $(a-r, a+r)$ 上也一致收敛于 g 。

对任意 $x \in (a-r, a+r)$, 于是可得

$$\left| \frac{x-a}{1-a} \right| < 1$$

于是利用引理 7.3.3 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-a}\right)^{n+1} (x-a)^n &= \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-a}{1-a}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-a} \frac{1}{1-\frac{x-a}{1-a}} \\ &= \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

于是可得级数逐点收敛于 f 。

综上, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-a}\right)^{n+1} (x-a)^n$ 在 $(a-1, a+1)$ 上也一致收敛于 f (注 14.2.8 中有阐述)。

由 a 的任意性可知, 命题成立。

15.2.3

注意: 命题中的 $r \leq R$ (R 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$ 的收敛半径)

对 k 进行归纳。

(1) 归纳基始 $k=1$, 由定理 15.1.6(d) 可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$ 在区间 $(a-r, a+r)$ 上一致收敛 f' , 即

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) (x-a)^n\end{aligned}$$

命题成立。

(2) 归纳假设 $k=j$ 时, 命题成立, 函数 f 在 $(a-r, a+r)$ 上都是 j 次可微的, 并且 j 次导函数由下式给出:

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+j} (n+1)(n+2)\dots(n+j) (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+j} \frac{(n+j)!}{n!} (x-a)^n$$

(3) $k = j + 1$ 时。

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_{n+j} \frac{(n+j)!}{n!}|^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_{n+j}|^{\frac{1}{n}} \left| \frac{(n+j)!}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_{n+j}|^{\frac{1}{n}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+j)!}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_{n+j}|^{\frac{1}{n}} \times 1 \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_{n+j}|^{\frac{1}{n}} = R
\end{aligned}$$

再次利用定理 15.1.6(d) 可知, 函数 $f^{(j)}$ 在 $(a-R, a+R)$ 上可微, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n c_{n+j} \frac{(n+j)!}{n!} (x-a)^{n-1}$ 在区间 $(a-r, a+r)$ 上一致收敛于 $(f^{(j)})' = f^{(j+1)}$ 。

又因为

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n c_{n+j} \frac{(n+j)!}{n!} (x-a)^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n+1+j} \frac{(n+1+j)!}{n!} (x-a)^n
\end{aligned}$$

综上所述可得

$$f^{(j+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n+1+j} \frac{(n+1+j)!}{n!} (x-a)^n$$

命题成立, 归纳完成。

15.2.4

由命题 15.2.6 可知,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} (x-a)^n$$

当 $x = a$ 时, 如果 $n > 0$, 则 $(x - a)^n = 0^n = 0$, 于是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} (x - a)^n$ 只剩第一项, 即

$$\begin{aligned} f^{(k)}(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} 0^n \\ &= c_{0+k} \frac{(0+k)!}{0!} 0^0 \\ &= c_k \frac{k!}{1} \times 1 \\ &= c_k k! \end{aligned}$$

于是可得, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ 的系数为

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

综上所述可得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

15.2.5

(1) 证明恒等式。

$$\begin{aligned} (x - a)^n &= ((x - b) + (b - a))^n \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} (b - a)^{n-m} (x - b)^m \end{aligned}$$

注意: 第二个等式使用了二项式公式, 即习题 7.1.4。

(2) 解释这个恒等式为什么与泰勒公式以及习题 15.2.1 是一致的。(即彼此之间不存在矛盾)

令 $f(x) = (x - a)^n$, 并设 f 是在 b 处实解析的函数 (习题 15.2.6 保证了这个假设是成立的), 由泰勒公式可知,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(b)}{m!} (x - b)^m$$

由习题 15.2.1 可知,

$$f^{(m)}(b) = \frac{n!}{(n-m)!} (b-a)^{n-m}$$

综上可得,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(b)}{m!} (x-b)^m \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} (b-a)^{n-m} (x-b)^m \end{aligned}$$

15.2.6

设 g 是一元多项式, 所以我们可以找到一个正整数 $m \geq 0$ 和实数 a_0, a_1, \dots, a_k 使得

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$$

对任意 $b \in \mathbb{R}$, 结合习题 15.2.5, 我们有

$$x^n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} b^{n-m} (x-b)^m$$

$j \leq k$ 时, 令系数为

$$c_j = \sum_{n=0}^k \frac{n!}{m!(n-m)!} b^{n-m}, \quad m = j \text{ 且 } m \leq n$$

于是可以把 $g(x)$ 表示为

$$\begin{aligned} g(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-b)^n \end{aligned}$$

其中, $n > k$ 时, $c_n = 0$ 。于是可得 g 在 b 处是实解析的。

由 b 的任意性可知, g 在 \mathbb{R} 上是实解析的, 命题成立。

15.2.7

(1) 证明恒等式 $\frac{r}{r-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n r^{-n}$, $r \in (-r, r)$ 。

因为

$$x^n r^{-n} = (xr^{-1})^n = \left(\frac{x}{r}\right)^n$$

又

$$\left|\frac{x}{r}\right| < 1$$

于是利用引理 7.3.3 可知, 任意 $x \in (-r, r)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n r^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{x}{r}} = \frac{r}{r-x}$$

(2) 证明恒等式

令 $f(x) = \frac{r}{r-x}, x \in (-r, r)$, 于是由 (1) 可得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n r^{-n}, \quad r \in (-r, r)$$

其中幂级数第 n 个系数为 $c_n = r^{-n}$ 。

对 $m \geq 0$, 我们有 (可以通过归纳法证明),

$$f^{(m)}(x) = \frac{m!r}{(r-x)^{m+1}}$$

又

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n r^{-n}\right)^{(m)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} x^n r^{-(n+m)} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m} r^{-n} \end{aligned}$$

利用命题 15.2.6 可知,

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m} r^{-n} \\ &\implies \\ \frac{m!r}{(r-x)^{m+1}} &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m} r^{-n} \end{aligned}$$

即:

$$\frac{r}{(r-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} x^{n-m} r^{-n}$$

(3) 证明绝对收敛。

使用推论 7.5.3 (比值判别法)

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} x^{n+1-m} r^{-(n+1)}}{\frac{n!}{m!(n-m)!} x^{n-m} r^{-n}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{(n+1-m)} x r^{-1} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{(n+1-m)}\right) \frac{x}{r} \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{m}{(n+1-m)} = 1$ 且 $\frac{x}{r} < 1$ 可知,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{(n+1-m)}\right) \frac{x}{r} < 1$$

综上所述可得

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} x^{n-m} r^{-n}$$

绝对收敛。

15.2.8

- (a)

因为

$$\begin{aligned} |a-b| &\leq r-s \\ |a-b|+s &\leq r \end{aligned}$$

反证法, 假设 $|a-b| \geq r$, 于是

$$|a-b|+s \geq r+s$$

因为 $s > 0$, 所以 $|a-b|+s \leq r$ 与 $|a-b|+s \geq r+s$ 矛盾, 假设不成立。

- (b)

收敛半径为:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

于是可得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$$

因为 $r - \epsilon < R$, 所以

$$\frac{1}{r - \epsilon} > \frac{1}{R}$$

于是由上极限的定义可知, 存在 N 使得

$$C_N^+ \geq \frac{1}{r - \epsilon}$$

其中 $C_N^+ = \sup(|c_n|^{\frac{1}{n}})_{n=N}^\infty$.

由上确界的定义可知, 对所有的 $n \geq N$, 都有

$$\begin{aligned} |c_n|^{\frac{1}{n}} &\leq \frac{1}{r - \epsilon} \\ \implies \\ |c_n| &\leq (r - \epsilon)^{-n} \end{aligned}$$

因为 $n < N$ 是有限的, 且由推论 5.4.13 (阿基米德性质) 可知, 对每一个 n 都存在, 正整数 M_n 使得

$$|c_n| < M_n(r - \epsilon)^{-n}$$

取 $C := \max(M_0, M_2, \dots, M_N)$ (其中 $M_N = 1$), 我们有

$$|c_n| \leq C(r - \epsilon)^{-n}$$

• (c)

由 (a) 可知 $|a - b| < r$, 所以存在 $0 < \epsilon < 1$ 使得 $|a - b| < r - \epsilon$, 又

由 (b) 可知, 存在 $C > 0$ 使得对所有的正整数 $n \geq 0$ 都有

$$|c_n| \leq C(r - \epsilon)^{-n}$$

于是可得对任意的 $n \geq m$ 都有

$$\left| \frac{n!}{m!(n-m)!} (b-a)^{n-m} c_n \right| \leq C \left| \frac{n!}{m!(n-m)!} (b-a)^{n-m} (r - \epsilon)^{-n} \right|$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left| \frac{n!}{m!(n-m)!} (b-a)^{n-m} c_n \right| \leq C \sum_{n=m}^{\infty} \left| \frac{n!}{m!(n-m)!} (b-a)^{n-m} (r-\epsilon)^{-n} \right|$$

因为 $|b-a| \in (-r+\epsilon, r-\epsilon)$, 由习题 15.2.7 可知, $C \sum_{n=m}^{\infty} \left| \frac{n!}{m!(n-m)!} (b-a)^{n-m} (r-\epsilon)^{-n} \right|$ 收敛, 利用推论 7.3.2 (比较判别法) 可知, $\sum_{n=m}^{\infty} \left| \frac{n!}{m!(n-m)!} (b-a)^{n-m} c_n \right|$ 绝对收敛, 所以 $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} (b-a)^{n-m} c_n$ 收敛, 于是 d_m 是某个实数, 所以是有意义的。

• (d)

由 (c) 中的讨论可知,

$$\begin{aligned} |d_m| &\leq C \sum_{n=m}^{\infty} \left| \frac{n!}{m!(n-m)!} (b-a)^{n-m} (r-\epsilon)^{-n} \right| \\ &= C \frac{r-\epsilon}{(r-\epsilon-|b-a|)^{m+1}} \\ &\leq C \frac{r-\epsilon}{(r-\epsilon)^{m+1}} \\ &= C \frac{1}{(r-\epsilon)^m} \end{aligned}$$

题设 $(b-s, b+s)$ 是 $(a-r, a+r)$ 的子集可知,

$$r \geq s$$

综上可得

$$|d_m| \leq C \frac{1}{(r-\epsilon)^m} \leq C \frac{1}{(s-\epsilon)^m}$$

• (e)

(1) 绝对收敛。

因为 $x \in (b-s, b+s)$, 所以

$$-s < x-b < s$$

利用 (d), 对任意 $m \geq 0$ 都有

$$\begin{aligned} |d_m||x-b|^m &\leq C(s-\epsilon)^{-m}|x-b|^m \\ |d_m||x-b|^m &\leq C\left|\frac{x-b}{s-\epsilon}\right|^m \end{aligned}$$

由 (d) 可知, 上式对任意的 ϵ 都成立, 令 $|x-b| < |s-\epsilon|$, $\left|\frac{x-b}{s-\epsilon}\right| < 1$, 于是可得

$$\sum_{m=0}^{\infty} C\left|\frac{x-b}{s-\epsilon}\right|^m$$

收敛。由比较判别法可知,

$$\sum_{m=0}^{\infty} |d_m||x-b|^m$$

收敛。

(2) 一致收敛于 $f(x)$ 。

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} d_m(x-b)^m &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} (b-a)^{n-m} c_n (x-b)^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} (b-a)^{n-m} (x-b)^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-b)^n \end{aligned}$$

(注意: 其中第二个等式, 求和上下限的变换十分关键, 建议绘制一张坐标图, m, n 分别作为 x 轴和 y 轴)。

由上可得, 在 $x \in (b-s, b+s)$ 上, 无限级数 $\sum_{m=0}^{\infty} d_m(x-b)^m$ 与无限级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-b)^n$ 等价。

由题设可知, 在 $(a-r, a+r)$ 上 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-b)^n$ 一致收敛于 $f(x)$, 且 $(b-s, b+s)$ 是 $(a-r, a+r)$ 的子区间, 所以, $\sum_{m=0}^{\infty} d_m(x-b)^m$ 也一致收敛于 $f(x)$ 。

• (f)

对任意 $b \in (a-r, a+r)$, 存在 $s > 0$ 使得 $(b-s, b+s)$ 是 $(a-r, a+r)$ 的子集, 由 (e) 可知, 对于所有的 $x \in (b-s, b+s)$, 存在幂级数 $\sum_{m=0}^{\infty} d_m(x-b)^m$ 收敛于 f , 命题得证。