14.4 习题

张志聪

2025 年 3 月 18 日

14.4.1

按度量空间的定义（定义 12.1.2），我们需证明 $d_{B(X\to Y)}$ 满足下面四个公理：

- (a) 对任意的 $f \in B(X \to Y)$，我们有 $d_{B(X\to Y)}(f, f) = 0$。

  由定义 14.4.2 可知，$d_{B(X\to Y)}(f, f) = sup\{d_Y(f(x), f(x)) : x \in X\}$，因为任意 $x \in X, d_Y(f(x), f(x)) = 0$，所以 $sup\{d_Y(f(x), f(x)) : x \in X\} = sup\{0\} = 0$，即 $d_{B(X\to Y)}(f, f) = 0$

- (b)（正性）对任意两个不同的 $f, g \in B(X \to Y)$,我们有 $d_{B(X\to Y)}(f, g) > 0$。

  因为 $f \neq g$,那么,存在 $x_0 \in X$ 使得 $f(x_0) \neq g(x_0)$,于是 $d_Y(f(x_0), g(x_0)) > 0$，所以 $sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\} > 0$，即 $d_{B(X\to Y)}(f, g) > 0$

- (c)（对称性）对任意的 $f, g \in B(X \to Y)$，我们有 $d_{B(X\to Y)}(f, g) = d_{B(X\to Y)}(g, f)$

  由定义 14.4.2 可知，

  $$d_{B(X\to Y)}(f, g) = sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}$$
  $$d_{B(X\to Y)}(g, f) = sup\{d_Y(g(x), f(x)) : x \in X\}$$

  令

  $$A := \{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}$$
  $$B := \{d_Y(g(x), f(x)) : x \in X\}$$

  容易证明 $A = B$,所以 $supA = supB$,即 $d_{B(X\to Y)}(f, g) = d_{B(X\to Y)}(g, f)$

- (d)（三角不等式）对任意的 $f, g, h \in B(X \to Y)$,我们有 $d_{B(X\to Y)}(f,h) \leq d_{B(X\to Y)}(f,g) + d_{B(X\to Y)}(g,h)$。

  由定义 14.4.2 可知，我们需证明：

  $$sup\{d_Y(f(x),h(x)) : x \in X\} \leq sup\{d_Y(f(x),g(x)) : x \in X\} + sup\{d_Y(g(x),h(x)) : x \in X\}$$

  令

  $$\begin{aligned} A &:= \{d_Y(f(x),h(x)) : x \in X\} \\ B &:= \{d_Y(f(x),g(x)) : x \in X\} \\ C &:= \{d_Y(g(x),h(x)) : x \in X\} \end{aligned}$$

  任意 $a_0 \in A$，存在 $x \in X$ 使得

  $$a_0 = d_Y(f(x),h(x))$$

  我们有

  $$d_Y(f(x),h(x)) \leq d_Y(f(x),g(x)) + d_Y(g(x),h(x))$$

  又因为

  $$\begin{aligned} d_Y(f(x),g(x)) \in B \\ d_Y(g(x),h(x)) \in C \end{aligned}$$

  综上可得，$supA \leq supB + supC$，命题得证。

  说明 1. $supA \leq supB + supC$ 这个结论可用反证法证明，假设 $supA > supB + supC$，那么存在 $a \in A$ 使得 $supA > a > supB + supC$，因为 $a \in A$，所有存在 $x \in X$ 使得

  $$a = d_Y(f(x'),h(x'))$$

  由上面的讨论可知，存在 $b \in B, c \in C$ 使得

  $$a \leq b + c$$

这会导致以下矛盾

$$b + c > supB + supC$$

14.4.2

- $\Rightarrow$

  对任意的 $\epsilon > 0$，因为 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是依度量 $d_{B(X\to Y)}$ 收敛于 f，所以存在 $N \geq 1$，使得只要 $n \geq N$，就有

  $$d_{B(X\to Y)}(f^{(n)}, f) < \epsilon$$

  即

  $$sup\{d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) : x \in X\} < \epsilon$$

  综上可得，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 1$，使得只要 $n \geq N$ 和 $x \in X$，就有

  $$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < \epsilon$$

  所以，$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 f。

- $\Leftarrow$

  对任意 $\epsilon > 0$，因为 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 f，所以存在 $N \geq 1$，使得只要 $n \geq N$ 和 $x \in X$，就有

  $$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < \epsilon$$

  对每一个 n，令

  $$A_n := \{d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) : x \in X\}$$

  由于 A_n 是实数集合,且存在上界 ϵ,所以其上确界小于 ϵ,即 $supA_n < \epsilon$。

  综上可得，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 1$，使得只要 $n \geq N$，就有

  $$d_{B(X\to Y)}(f^{(n)}, f) < \epsilon$$

  所以，$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是依度量 $d_{B(X\to Y)}$ 收敛于 f。

14.4.3

设 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 $C(X\to Y)$ 中的柯西函数序列，对任意 $\epsilon>0$，存在 $N>0$，使得只要 $p,q\geq N$，就有

$$d_{B(X\to Y)}(f^{(p)},f^{(q)})=\sup\{d_Y(f^{(p)}(x),f^{(q)}(x)):x\in X\}<\epsilon$$

对任意 $x\in X$，构造序列 $(f^{(n)}(x))_{n=1}^{\infty}$，因为对 $p,q\geq N$ 我们有

$$d_Y(f^{(p)}(x),f^{(q)}(x))\leq d_{B(X\to Y)}(f^{(p)},f^{(q)})<\epsilon$$

由此可知，$(f^{(n)}(x))_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列，由题设 (Y,d_Y) 是一个完备的度量空间可得，$(f^{(n)}(x))_{n=1}^{\infty}$ 收敛，不妨设为 y_x。

定义函数 $f:X\to Y,f(x)=y_x=\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x),x\in X$。接下来我们证明 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 f。

任意 $x\in X$，因为 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x)$，那么，存在 $N'>0$，使得只要 $k\geq N'$，就有

$$d_Y(f^{(k)}(x),f(x))<\epsilon$$

综上，$n>N,k>max(N,N')$ 我们有

$$d_Y(f^{(n)}(x),f(x))\leq d_Y(f^{(n)}(x),f^{(k)}(x))+d_Y(f^{(k)}(x),f(x))<2\epsilon$$

（注意：以上说明了，不管 x 取什么值，都会可以找到一个上界。）

由 x 的任意性可得，对任意 $n>N,x\in X$ 都有

$$d_{B(X\to Y)|C(X\to Y)\times C(X\to Y)}(f^{(n)},f)<2\epsilon$$

于是可得 $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 f，由命题 14.4.4 可知，$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 f。

又因为 $C(X\to Y)$ 是闭的，所以 $f\in C(X\to Y)$。

14.4.4

关于拓扑的习题，都忽略。