14.1 习题

张志聪

2025 年 3 月 8 日

14.1.1

修改下证明顺序。

（1）如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0;x\in E} f(x)$ 存在，那么它一定等于 $f(x_0)$。

反证法，假设 $\lim\limits_{x\to x_0;x\in E} f(x) = L, L \neq f(x_0)$。因为极限 $\lim\limits_{x\to x_0;x\in E} f(x) = L$ 可知，设 $0 < \epsilon < d_Y(f(x_0), L)$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $x \in E$ 满足 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有 $d_Y(f(x), L) < \epsilon$。因为 $x_0 \in E, d_X(x_0, x_0) = 0 < \delta$，即 $x = x_0$ 时 $d_Y(f(x), L) > \epsilon$，存在矛盾。

（2）证明：极限 $\lim\limits_{x\to x_0;x\in E} f(x)$ 存在，当且仅当极限 $\lim\limits_{x\to x_0;x\in E\setminus\{x_0\}} f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$。

- $\Rightarrow$

  极限 $\lim\limits_{x\to x_0;x\in E} f(x)$ 存在，按照定义 14.1.1 可知，极限 $\lim\limits_{x\to x_0;x\in E\setminus\{x_0\}} f(x)$ 存在。接下来，需要证明 $\lim\limits_{x\to x_0;x\in E\setminus\{x_0\}} f(x) = f(x_0)$。

  反证法，假设 $\lim\limits_{x\to x_0;x\in E\setminus\{x_0\}} f(x) = L, f(x_0) \neq L$。

  由（1）可知，$\lim\limits_{x\to x_0;x\in E} f(x) = f(x_0)$。

  那么，设 $\epsilon = \frac{1}{2} d_Y(f(x_0), L)$，存在 $\delta' > 0$，使得只要 $x \in E$ 满足 $d_X(x, x_0) < \delta'$，就有 $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$。

  存在 $\delta'' > 0$，使得只要 $x \in E$ 满足 $0 < d_X(x, x_0) < \delta''$，就有 $d_Y(f(x), L) < \epsilon$

  综上，取 $\delta = min(\delta', \delta'')$，使得只要 $x \in E$ 满足 $0 < d_X(x, x_0) < \delta$，

就有

$$\begin{cases} d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon \\ d_Y(f(x), L) < \epsilon \end{cases}$$

于是可得

$$d_Y(f(x_0), L) \leq d_Y(f(x), f(x_0)) + d_Y(f(x), L) < d_Y(f(x_0), L)$$

存在矛盾。

- $\Leftarrow$

  按照定义 14.1.1 可以直接证明，具体过程略。

14.1.2

- $(a) \Leftrightarrow (b)$

  与定理 13.1.4 证明相似，不做赘述。

- $(a) \implies (c)$

  因为 V 是开集且 $L \in V$，所以存在 $r > 0$ 使得 $B_{(Y,d_Y)}(L, r) \subseteq V$。因为 (a) 成立，所以存在 $\delta > 0$ 使得只要 $x \in E$ 满足 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有 $d_Y(f(x), L) < r$。

  令 $U := B_{(X,d_X)}(x_0, \delta), U \subset X$。对任意 $x \in U \cap E$，都有 $x \in E$ 且 $d_X(x, x_0) < \delta$，于是 $d_Y(f(x), L) < r$，即 $f(x) \in B_{(Y,d_Y)}(L, r) \subseteq V$。所以，$f(U \cap E) \subseteq V$。

- $(c) \implies (a)$

  设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列。任意 $\epsilon > 0$，令 $V := B_{(Y,d_Y)}(L, \epsilon)$，由 (c) 可知，存在一个包含 x_0 的开集 $U \subset X$，使得 $f(U \cap E) \subseteq V$。

  因为 U 是开集，所以存在 $\delta > 0$ 使得 $B_{(X,d_X)}(x_0, \delta) \subseteq U$。序列 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列，所以存在 $N \geq 1$ 使得

  $$d_X(x_0, x^{(n)}) < \delta$$

  对所有的 $n \geq N$ 均成立。

于是对 $n \geq N$，有 $x^{(n)} \in B_{(X,d_X)}(x_0, \delta) \subseteq U, x^{(n)} \in E$，此时，

$$f(x^{(n)}) \in V$$

即，对任意 $n \geq N$ 都有

$$d_Y(f(x^{(n)}), L) < \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知，$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 L。

- $(a) \implies (d)$

  (a) 成立，那么，对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得只要 $x \in E$ 满足 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有 $d_Y(f(x), L) < \epsilon$。因为 $x \in E \backslash \{x_0\}$ 时 $g(x) = f(x)$，所以，以上性质函数 g 也成立。

  现在只需再额外考虑 $x = x_0$ 是否满足定义要求即可。$d_X(x_0, x_0) = 0 < \delta$，此时

  $$d_Y(g(x), L) = d_Y(g(x_0), L) = d_Y(L, L) = 0 < \epsilon$$

  于是可得

  $$\lim_{x \to x_0; x \in E \cup \{x_0\}} g(x) = L = g(x_0)$$

  所以，g 在 x_0 处是连续的。

  特别地，$x \in E$，由习题 14.1.1 可知 $f(x_0) = L$。

- $(d) \implies (a)$

  如果 $x_0 \notin E$，则 $E \setminus \{x_0\} = E$，由 g 在 x_0 处连续，我们有

  $$\lim_{x \to x_0; x \in E \setminus \{x_0\}} g(x) = \lim_{x \to x_0; x \in E} g(x) = \lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = g(x_0) = L$$

  如果 $x_0 \in E$，由 g 在 x_0 处连续，我们有

  $$\lim_{x \to x_0; x \in E \setminus \{x_0\}} g(x) = \lim_{x \to x_0; x \in E \setminus \{x_0\}} f(x) = g(x_0) = f(x_0)$$

  利用习题 14.1.1 可知，

  $$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = f(x_0)$$