17.7 习题

张志聪

2025 年 5 月 16 日

17.7.1

（1）

$x \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + x^2 sin(1/x^4))' \\ &= 1 + 2xsin(1/x^4) + x^2 cos(1/x^4)(-4/x^5) \\ &= 1 + 2xsin(1/x^4) + (-4/x^3)cos(1/x^4) \end{aligned}$$

$x = 0$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 sin(1/x^4)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} 1 + xsin(1/x^4) \end{aligned}$$

因为 $-1 \leq sin(1/x^4) \leq 1$，于是

$$-x \leq xsin(1/x^4) \leq 1$$

所以

$$\lim_{x\to 0} xsin(1/x^4) = 0$$

综上可得

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} 1 + xsin(1/x^4) \\ &= \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} xsin(1/x^4) \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

（2）

序列 $((2\pi k)^{-1})_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 0。令 $x=(2\pi k)^{-1}$，我们有

$$cos(1/x^4)=cos(2\pi k)=1$$
$$sin(1/x^4)=sin(2\pi k)=0$$

于是

$$f'((2\pi k)^{-1/4})=1-\frac{4}{(2\pi k)^{-1/4}}=1-\frac{(2\pi k)^{1/4}}{4}$$

所以

$$\lim_{k\to\infty} f'((2\pi k)^{-1/4})=-\infty$$

综上可得，x 以序列 $((2\pi k)^{-1})_{k=1}^{\infty}$ 的方式趋近 0，总有 $f'(x)<0$。

17.7.2

因为 T 是可逆的线性变换，那么，T 既是单射也是满射。于是，对任意 $y_0\in\mathbb{R}^n$ 都存在唯一的 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 使得 $T(x_0)=y_0$，即 $T^{-1}(y_0)=x_0$。

接下来，证明 T^{-1} 满足定义 17.1.6（线性变换）的两个公理。

- (a)（可加性）对任意 $y,y'\in\mathbb{R}^n$，都有 $T^{-1}(y+y')=T^{-1}(y)+T^{-1}(y')$。

  存在 $x,x'\in\mathbb{R}^n$ 使得 $T(x)=y$ 和 $T(x')=y'$，于是

  $$T^{-1}(y)+T^{-1}(y')=T^{-1}(T(x))+T^{-1}(T(x'))=x+x'$$

  又因为

  $$T(x)+T(x')=T(x+x')$$

  综上

  $$\begin{aligned}T^{-1}(y+y')&=T^{-1}(T(x)+T(x'))\\&=T^{-1}(T(x+x'))\\&=x+x'\end{aligned}$$

  所以，$T^{-1}(y+y')=T^{-1}(y)+T^{-1}(y')$。

- (b)（齐次性）对任意 $y \in \mathbb{R}^n$ 和任意的 $c \in \mathbb{R}$，都有 $T^{-1}(cy) = cT^{-1}(y)$。

  存在 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $T(x) = y$，于是

  $$cT^{-1}(y) = cx$$

  我们有

  $$T(cx) = cT(x) = cy$$

  于是

  $$\begin{aligned} T^{-1}(cy) &= T^{-1}(cT(x)) \\ &= T^{-1}(T(cx)) \\ &= cx \end{aligned}$$

  所以，$T^{-1}(cy) = cT^{-1}(y)$。

17.7.3

对任意 $y_0 \in f(V)$，存在 $x_0 \in V$ 使得 $y_0 = f(x_0)$。由题设可知 $f'(x_0)$ 是一个可逆的线性变换，于是由反函数定理可知，V 中存在一个包含 x_0 的开集 V_{x_0}，并且在 $\mathbb{R}^n$ 中存在一个包含 $f(x_0)$ 的开集 U_{x_0}，使得 f 是从 V_{x_0} 到 U_{x_0} 的双射。

因为 U_{x_0} 是开集，且 $f(x_0) \in U_{x_0}$，那么存在 $r > 0$，使得 $B(f(x_0), r) \subseteq U_{x_0}$，即 $B(y_0, r) \subseteq U_{x_0}$。

因为 $V_{x_0} \subseteq V$，所以 $U_{x_0} \subseteq f(V)$。

综上可得，$B(y_0, r) \subseteq f(V)$，由命题 12.2.15(a) 可知 $f(V)$ 是开集。