7.1 习题

2024 年 8 月 5 日

7.1.1

【a】

由定义 7.1.1 可知，

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$
$$= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=n+1}^{p} a_i$$
$$= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p$$

$$\sum_{i=m}^{p} a_i$$
$$= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p$$

于是，

$$\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{p} a_i$$
$$= \sum_{i=m}^{p} a_i$$

【b】【c】【d】 的证明与 **【a】** 类似，证明略

【e】

归纳法证明。

归纳基始 $m = n$，此时，

$$|\sum_{i=m}^{n} a_i| = |a_m|$$
$$\sum_{i=m}^{n} |a_i| = |a_m|$$

满足 $|\sum_{i=m}^{n} a_i| \le \sum_{i=m}^{n} |a_i|$

归纳假设 $m < n = j - 1$ 时，命题成立。

$n = j++$ 时，由（a）可知，

$$\begin{aligned}
&|\sum_{i=m}^{j} a_i| \\
&= |\sum_{i=m}^{j-1} a_i + a_j| \\
&\le |\sum_{i=m}^{j-1} a_i| + |a_j|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=m}^{j} |a_i| \\
&= \sum_{i=m}^{j-1} |a_i| + |a_j| \\
&\ge |\sum_{i=m}^{j-1} a_i| + |a_j| && \text{【归纳假设保证的】}
\end{aligned}$$

于是 $|\sum_{i=m}^{j} |a_i| \ge |\sum_{i=m}^{j-1} a_i| + |a_j| \ge |\sum_{i=m}^{j} a_i|$

归纳完毕。

【f】 与 **【e】** 类似，可通过归纳法证明。

7.1.2

【**a**】由于 X 是空集，所以定义 7.1.6 中的 $n = 0$，于是，取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le 0\}$ 到 X 的双射 g，所以，

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in X} f(x) \\
&= \sum_{i=1}^{0} f(g(i)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

【**b**】

定义双射函数 $g : \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le 1\} \to X$ 如下：当 $i = 1, g(x) = x_0$。于是，

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in X} f(x) \\
&= \sum_{i=1}^{1} f(g(i)) \\
&= f(g(1)) \\
&= f(x_0)
\end{aligned}$$

【**c**】设 X 有 n 个元素，

取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n\}$ 到 Y 的双射函数 h，于是函数 $g \circ h$ 是从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n\}$ 到 X 的双射函数；

取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n\}$ 到 X 的双射函数 h'。

由命题 7.1.1 可知，

$$\sum_{i=1}^{n} f(h'(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(g \circ h(i))$$

于是，

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{y \in Y} f(g(x(y)))$$

【**d**】

题设中，对每一个整数 $i \in X$ 都指定了一个实数 a_i，其实是定义了一个函数 $f : X \to \mathbb{R}$。

所以，

$$\sum_{i=n}^{m} a_i$$
$$= \sum_{i=n}^{m} f(i)$$

由引理 7.1.4 （b）可知，

$$\sum_{i=n}^{m} f(i)$$
$$= \sum_{j=1}^{m-(n-1)} f(j+(n-1))$$

此时，定义一个从 $Y := \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq m-(n-1)\}$ 到 X 的双射函数 g 如下：

$$g(j) = j + (n-1)$$

于是，

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m-(n-1)} f(j+(n-1)) \\
&= \sum_{j=1}^{m-(n-1)} f(g(j)) \\
&= \sum_{x \in X} f(x) && \textbf{定义 7.1.6}
\end{aligned}$$

【e】

设 X, Y 的元素个数分别为 n, m，选取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n+m\}$ 到 $X \cup Y$ 的双射函数 g，并且限定 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 的值域是 X，

$\{i \in \mathbb{N} : n+1 \le i \le n+m\}$ 的值域是 Y。于是，

$$\begin{aligned}
&\sum_{z \in X \cup Y} f(z) \\
&= \sum_{i=1}^{n+m} f(g(i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(g(i)) + \sum_{i=n+1}^{n+m} f(g(i)) && \textbf{引理 7.1.4 (a)} \\
&= \sum_{x \in X}^{n} f(x) + \sum_{y \in Y}^{n} f(y) && \textbf{命题 7.1.11(d)}
\end{aligned}$$