

## 4.1 习题

2024 年 4 月 25 日

### 4.1.1

证明.

① 自反性

设  $a \blacksquare b$  是任意整数, 现证明  $a \blacksquare b = a \blacksquare b$ 。由于  $a + b = a + b$ , 所以  $a \blacksquare b = a \blacksquare b$

② 对称性

设  $a \blacksquare b = c \blacksquare d$ , 现证明  $c \blacksquare d = a \blacksquare b$ 。由于  $a \blacksquare b = c \blacksquare d$ , 所以  $a + d = c + b$ , 由自然数相等的对称性可知  $c + b = a + d$ , 所以  $c \blacksquare d = a \blacksquare b$ 。

### 4.1.2

证明.

$-(a \blacksquare b) = b \blacksquare a, -(a' \blacksquare b') = b' \blacksquare a'$ , 又  $(a \blacksquare b) = (a' \blacksquare b')$  则  $a + b' = a' + b$ , 由于加法是可以交换的 (命题 2.2.4) 所以  $b' + a = b + a'$ , 由此可得  $-(a' \blacksquare b') = -(a \blacksquare b)$ , 又由整数相等的对称性可得  $-(a \blacksquare b) = -(a' \blacksquare b')$ 。

### 4.1.3

证明.

因为  $a$  是整数, 不妨设  $a = x \blacksquare y$ , 其中  $x, y$  是自然数, 则

$$\begin{aligned}
 & (-1) \times a \\
 &= (0 \blacksquare 1) \times (x \blacksquare y) \\
 &= (0 \times x + 1 \times y) \blacksquare (0 \times y + 1 \times x) \\
 &= (0 + y) \blacksquare (0 + x) \\
 &= y \blacksquare x \\
 &= -a
 \end{aligned}$$

### 4.1.4

注意: 此时书中已经说明了  $\blacksquare$  与  $-$  的等价性, 从此处开始证明中将不使用  $\blacksquare$

记  $x = a - b, y = c - d, z = e - f$  其中  $a, b, c, d, e, f$  是自然数

$$\textcircled{1} x + y = y + x$$

证明.

$$\begin{aligned}
 & x + y \\
 &= (a - b) + (c - d) \\
 &= (a + c) - (b + d) \\
 & y + x \\
 &= (c - d) + (a - b) \\
 &= (c + a) - (d + b)
 \end{aligned}$$

由于加法是可交换 (命题 2.2.4) 可知  $a + c = c + a, b + d = d + b$ , 又由自然数相等的替换公理可得  $(a + c) + (d + b) = (c + a) + (b + d)$ , 由此可知  $x + y = y + x$

$$\textcircled{2} (x + y) + z = x + (y + z)$$

证明.

$$\begin{aligned}(x+y)+z &= [(a-b)+(c-d)]+(e-f) \\ &= [(a+c)-(b+d)]+(e-f) \\ &= (a+c+e)-(b+d+f) \\ x+(y+z) &= (a-b)+[(c-d)+(e-f)] \\ &= (a-b)+[(c+e)-(d+f)] \\ &= (a+c+e)-(b+d+f)\end{aligned}$$

于是  $(x+y)+z = x+(y+z)$

$$\textcircled{3} \quad x+0=0+x=x$$

证明.

可以把 0 看做整数  $0-0$ , 由①可知  $x+0=0+x$ ,

$$\begin{aligned}0+x &= (0-0)+(a-b) \\ &= (0+a)-(0+b) \\ &= a-b \\ &= x\end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad x+(-x)=(-x)+x=0$$

证明.

由①可知  $x+(-x)=(-x)+x$ , 可以把 0 看做整数  $0-0$ , 现在证明整数

$$x + (-x) = 0 - 0$$

$$\begin{aligned} & x + (-x) \\ &= (a - b) + (b - a) \\ &= (a + b) - (b + a) \\ (a + b) + 0 &= (b + a) + 0 \\ a + b &= b + a \end{aligned}$$

于是  $x + (-x) = (-x) + x = 0$

$$\textcircled{5} \quad xy = yx$$

证明.

$$\begin{aligned} & xy \\ &= (a - b)(c - d) \\ &= (ac + bd) - (ad + bc) \\ & yx \\ &= (c - d)(a - b) \\ &= (ca + db) - (cb + da) \end{aligned}$$

由于加法是可以交换的，乘法也是可以交换的，所以

$$\begin{aligned} &= (ca + db) - (cb + da) \\ &= (ac + bd) - (ad + bc) \end{aligned}$$

于是  $xy = yx$

$$\textcircled{7} \quad x1 = 1x = x$$

证明.

由⑤可知  $x1 = 1x$ , 又

$$\begin{aligned}x1 &= (a - b) \times (1 - 0) \\&= (a \times 1 + b \times 0) - (a \times 0 + b \times 1) \\&= (a + 0) - (0 + b) \\&= a - b \\&= x\end{aligned}$$

$$\textcircled{8} \quad x(y + z) = xy + xz$$

证明.

$$\begin{aligned}x(y + z) &= (a - b)[(c - d) + (e - f)] \\&= (a - b)[(c + e) - (d + f)] \\&= [a(c + e) + b(d + f)] - [a(d + f) + b(c + e)] \\&= (ac + ae + bd + bf) - (ad + af + bc + be) \\xy + xz &= (a - b)(c - d) + (a - b)(e - f) \\&= [(ac + bd) - (ad + bc)] + [(ae + bf) - (af + be)] \\&= [(ac + bd) + (ae + bf)] - [(ad + bc) + (af + be)] \\&= (ac + ae + bd + bf) - (ad + bc + af + be)\end{aligned}$$

于是  $x(y + z) = xy + xz$

$$\textcircled{9} \quad (y + z)x = yx + zx$$

证明.

由⑤可知  $(y + z)x = x(y + z)$ , 又由⑧可知  $x(y + z) = xy + xz$ , 再次应用⑤可得  $xy + xz = yx + zx$ , 于是等式成立

### 4.1.5

证明.

由引理 4.1.5 (整数的三歧性) 分多种情况讨论。

(1) 如果  $a, b$  都是正自然数, 则由 2.3.3 可知  $ab$  是正自然数, 则  $ab \neq 0$  与题设矛盾;

(2) 如果  $a, b$  都是正自然数的负数, 假设分别为  $-m, -n$ ,  $m, n$  都是正自然数。

$$\begin{aligned}ab &= (-m) \times (-n) \\&= (0 - m) \times (0 - n) \\&= (0 \times 0 + mn) - (0 \times 0 + m \times 0) \\&= mn\end{aligned}$$

由于  $m, n$  都是正自然数, 所以  $ab = mn \neq 0$ , 与题设矛盾;

(3) 如果  $a = b = 0$ ,  $ab = 0$ , 满足题设。

(4) 如果  $a = 0, b = x - y$ ,  $x, y$  为任意自然数;

$$\begin{aligned}ab &= (0 - 0) \times (x - y) \\&= (0 \times x) - (0 \times y) \\&= 0 - 0 \\&= 0\end{aligned}$$

所以  $ab = 0$ , 满足题设;

(5) 如果  $a = x - y, b = 0$ ,  $x, y$  为任意自然数;

$$\begin{aligned}ab &= (x - y) \times (0 - 0) \\&= (x \times 0) - (y \times 0) \\&= 0 - 0 \\&= 0\end{aligned}$$

于是  $ab = 0$ , 满足题设;

综上, 命题得证。

## 4.1.6

证明.

(1) 方法一

由整数加法的替换性与命题 4.1.6 可知:

$$\begin{aligned}ac - bc &= 0 \\(a - b)c &= 0\end{aligned}$$

由命题 4.1.8 可知  $a - b = 0$ , 接下来要证  $a = b$ , 以上等式才能成立。

$$\begin{aligned}a - b &= 0 \\a - b + b &= 0 + b \\a + (-b) + b &= 0 + b \\a + [(-b) + b] &= b \\a + 0 &= b \\a &= b\end{aligned}$$

**说明.** 上面的证明中用到了一个命题:  $a, b$  是整数且  $a = b$ , 则  $a + c = b + c$ ,  $c$  是整数。

该命题对自然数是成立的, 但对于整数书中没有该命题, 这里需要证明下。

记  $a = x - y, b = p - q, c = w - z$ ,  $x, y, p, q, w, z$  是自然数。  
由  $a = b$  可得:

$$a = b$$

$$x - y = p - q$$

$$x + q = p + y$$

又

$$a + c$$

$$= (x - y) + (w - z)$$

$$= (x + w) - (y + z)$$

$$b + c$$

$$= (p - q) + (w - z)$$

$$= (p + w) - (q + z)$$

又由

$$(x + w) + (q + z)$$

$$= x + q + w + z$$

$$(p + w) + (y + z)$$

$$= p + y + w + z$$

结合  $x + q = p + y$  于是  $a + c = b + c$

(2) 方法二



由引理 4.1.5 (整数的三歧性) 分多种情况讨论。

(1)  $a$ 、 $b$ 、 $c$  都是正自然数, 则

$$ac = bc$$

由推论 2.3.7 可知  $a = b$

其余的情况证明类似。(略)

### 4.1.7

(a)  $a > b$  当且仅当  $a - b$  是一个正的自然数。

证明.

① 充分性

假设  $a > b$ , 由引理 4.1.5 (整数的三歧性) 对  $a - b$  分多种情况讨论。

(1) 如果  $a - b = 0$ , 则  $a = b$ , 与题设矛盾;

(2)  $a - b$  是正自然数  $n$  的负数  $-n$ , 即

$$a - b = -n$$

$$a - b + b = -n + b$$

$$a + 0 = -n + b$$

$$a = -n + b$$

$$a + n = -n + b + n$$

$$a + n = b + -n + n$$

$$a + n = b$$

$$b > a$$

与题设矛盾;

综上,  $a - b$  只能是正自然数

② 必要性

假设  $a - b$  是一个正的自然数  $n$ , 那么

$$\begin{aligned}a - b &= n \\a - b + b &= n + b \\a + 0 &= n + b \\a &= n + b\end{aligned}$$

于是  $a \geq b$ , 又由于  $n$  是正自然数, 那么  $a \neq b$  (其实这里需要引入一个额外的命题, 下方有说明), 所以  $a > b$

说明. 整数  $a, b$ , 如果  $a \geq b$ ,  $c$  是正自然数, 那么  $a + c > b$

证明.

不妨设  $a = x - y, b = p - q$  因为  $a \geq b$ , 那么存在一个自然数  $n$  使得  $a = b + n$ , 所以  $a + c = b + n + c = b + (n + c)$ , 于是  $a + c \geq b$ ,

若  $a + c = b$ , 则

$$\begin{aligned}a + c &= b \\b + n + c &= b \\b + n + c + (-b) &= b + (-b) \\n + c &= 0\end{aligned}$$

由推论 2.2.9 可知  $c = 0$ , 这与  $c$  是正自然数矛盾, 所以  $a + c \neq b$ , 所以  $a + c > b$ , 命题得证。

综上, 命题得证。

(b) (加法保持序不变) 如果  $a > b$ , 那么  $a + c > b + c$

证明.

因为  $a > b$ , 由 (a) 可知  $a - b = n$ ,  $n$  是正自然数;

$$\begin{aligned}(a + c) - (b + c) &= (a + c) + [-(b + c)] \\&= (a + c) + [(-c) + (-b)] \\&= a + c + (-c) + (-b) \\&= a + 0 + (-b) \\&= a - b\end{aligned}$$

由此可知  $(a + c) - (b + c) = a - b$  是正自然数, 所以  $a + c > b + c$ 。

说明. 以上的证明中  $-(b + c) = (-b) + (-c)$ , 不是显然的, 需要证明以下命题。

$a, b$  是整数, 则  $-(a + b) = (-a) + (-b)$ 。

证明.

由于  $a, b$  是整数, 所以存在  $a = x - y, b = p - q$ ,  $x, y, p, q$  是自然数。

$$\begin{aligned}-(a + b) &= -[(x - y) + (p - q)] \\&= -[(x + p) - (y + q)] \\&= (y + q) - (x + p) \\&= (-a) + (-b) \\&= [-(x - y)] + [-(p - q)] \\&= (y - x) + (q - p) \\&= (y + q) - (x + p)\end{aligned}$$

于是  $-(a + b) = (-a) + (-b)$ , 命题得证。

(c) (正的乘法保持序不变) 如果  $a > b$  并且  $c$  是正的, 那么  $ac > bc$ 。

证明:

因为  $a > b$  所以存在正自然数  $x$  使得  $a = b + x$ , 此时

$$\begin{aligned} ac &= (b + x) \times c \\ &= b \times c + x \times c \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} ac - bc &= b \times c + x \times c - b \times c \\ &= x \times c \end{aligned}$$

由于  $x, c$  都是正的自然数, 所以  $ac - bc = x \times c > 0$ , 通过 (a) 可知  $ac > bc$

(d) (负运算反序) 如果  $a > b$ , 那么  $-a < -b$ 。

证明:

不妨设  $b = p - q$ ,  $p, q$  是自然数。由题设  $a > b$  可知存在正自然数  $c$ , 使得  $a = b + c$ ,

$$\begin{aligned} -b - (-a) &= -b - (b + c) \\ &= q - p - [(p - q) + c] \\ &= q - p - (p + c - q) \\ &= q - p - [q - (p + c)] \\ &= q - p - q + p + c \\ &= c \end{aligned}$$

(note: 上面把  $p, q, c$  既看做自然数也看做整数, 这样自然数与整数的代数定律都可以使用) 由于  $c > 0$ , 所以  $-a < -b$

(e) (序是可以传递的) 如果  $a > b$  且  $b > c$ , 那么  $a > c$ 。

证明:

不妨设

$$a = x - y \tag{1}$$

$$b = p - q \tag{2}$$

$$c = w - z \tag{3}$$

由  $a > b, b > c$  可知存在正自然数  $c_0, c_1$  使得:

$$\begin{aligned}a &= (p - q) + c_0 \\&= [(w - z) + c_1] + c_0 \\&= (w - z) + (c_0 + c_1)\end{aligned}$$

所以  $a > c$