13.1 习题

张志聪

2025 年 2 月 11 日

13.1.1

- $(a) \implies (c)$

  因为 $f(x_0) \in V$ 且 V 是开集，那么存在 $r > 0$ 使得 $B(f(x_0), r) \subseteq V$。因为 f 在 x_0 处是连续的，那么存在 $\delta > 0$，使得只要 $d_X(x_0, x) < \delta$，就有 $d_Y(f(x), f(x_0)) < r$，于是令 $U = B(x_0, \delta)$ 即可满足要求，使得 $f(U) \subseteq B(f(x_0), r) \subseteq V$。

- $(c) \implies (b)$

  对于任意 $\epsilon > 0$，令 $V := B(f(x_0), \epsilon)$，那么 $V \subset Y$。由 (c) 可知，存在一个包含 x_0 的开集 $U \subset X$，使得 $f(U) \subseteq V$。

  因为 U 是开集，所以存在 $B(x_0, r) \subseteq U$，因为序列 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列，于是存在 $N \geq 1$ 使得

  $$d_X(x_0, x^{(n)}) < r$$

  对所有的 $n \geq N$ 均成立。那么，对所有的 $n \geq N$ 都有

  $$x^{(n)} \in B(x_0, r) \subseteq U$$

  所以 $f(x^{(n)}) \in V$，即

  $$d_Y(f(x^{(n)}), f(x_0)) < \epsilon$$

  由 ϵ 的任意性可知，序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中依度量 d_Y 收敛于 $f(x_0)$ 的序列。

- $(b) \implies (a)$

  反证法，假设 f 在 x_0 处是不连续的，那么存在 $\epsilon > 0$ 使得对任意的 $\delta > 0, d_X(x, x_0) < \delta$，都有 $d_Y(f(x), f(x_0)) > \epsilon$，令 $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$，利用选择公理可以得到一个在 X 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，由 (b) 可知，序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_Y 收敛于 $f(x_0)$，由于对任意的 n 都有 $d_Y(f(x^{(n)}), f(x_0)) > \epsilon$，所以序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_Y 不可能收敛于 $f(x_0)$，存在矛盾。

13.1.2

由定理 13.1.4 可知 (a) 和 (b) 是等价的。

- $(a) \implies (c)$

  任意 $x_0 \in f^{-1}(V), f(x_0) \in V$，因为 V 是开集，所以存在 $r > 0$ 使得 $B(f(x_0), r) \subseteq V$。f 是连续的，那么存在 $\delta > 0$ 使得只要 $d_X(x_0, x) < \delta$，就有 $d_Y(f(x), f(x_0)) < r$。所以对于任意 $x \in B(x_0, \delta)$，都有 $d_Y(f(x), f(x_0)) < r$，所以 $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), r) \subseteq V$，所以 $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$。

  由 x_0 的任意性可知，$f^{-1}(V)$ 就是 X 中的开集。

- $(c) \implies (a)$

  设 $x_0 \in X$，那么对任意 $\epsilon > 0, V := B(f(x_0), \epsilon)$ 是 Y 中的开集，由 (c) 可知 $U := f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集，所以存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x_0, \delta) \subseteq U, f(B(x_0, \delta)) \subseteq V = B(f(x_0), \epsilon)$，即 $d_X(x_0, x) < \delta$，就有

  $$d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

  所以 f 在 x_0 处是连续的。

  由 x_0 的任意性可知，f 是连续的。

- $(c) \Leftrightarrow (d)$

  F 是闭集由命题 12.2.15(e) 可知当且仅当 $Y \setminus F$ 是开集，由 (c) 可知 $f^{-1}(Y \setminus F)$ 开集。因为 $X \setminus f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \notin F\} = f^{-1}(Y \setminus F)$，所以 $f^{-1}(F)$ 是闭集。

  反向证明类似。

13.1.3

- (a)

  对任意 ϵ，由于 g 在 $f(x_0)$ 处是连续的，那么存在 $\delta > 0$ 使得只要 $d_Y(f(x), f(x_0)) < \delta$，就有 $d_Z(g(f(x)), g(f(x_0))) < \epsilon$。

  同理，由于 f，在 $x_0 \in X$ 处是连续的，那么存在 $\delta' > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta'$，就有 $d_Y(f(x), f(x_0)) < \delta$。

  综上，只要 $d_X(x, x_0) < \delta'$，就有 $d_Z(g(f(x)), g(f(x_0))) < \epsilon$。所以 $g \circ f : X \to Z$ 在 x_0 处是连续的。

- (b)

  与 (a) 证明类似，略。

13.1.4

- (a)

  $$f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}, g(x) = x^2$$

  于是

  $$g \circ f(x) = 1$$

- (b)

  $$g(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}, f(x) = x^2$$

  于是

  $$g \circ f(x) = 1$$

- (c)

$$f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\1, x\geq 0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x^2, |x|\geq 1\\0, |x|<1\end{cases}$$

于是

$$g\circ f(x)=1$$

13.1.5

任意 $x_0\in E, \epsilon>0$，只要 $d|_{E\times E}(x,x_0)<\epsilon$，就有

$$d_X(\iota_{E\to X}(x),\iota_{E\to X}(x_0))=d_X(x,x_0)=d|_{E\times E}(x,x_0)<\epsilon$$

注意，利用了 E 是 X 的子集且 $x,x_0\in E$。

由 x_0 的任意性可知，$\iota_{E\to X}$ 是连续的。

13.1.6

（1）$f|_E$ 也在 x_0 处连续。

设 $(x_{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列，因为 E 是 X 的子集，又 f 在 x_0 处是连续的，由定理 13.1.4(b) 可知序列 $(f(x_{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 在 x_0 依度量 d_Y 收敛于 $f(x_0)$，$f|E(x)=f(x)$ 所以 $f|_E$ 也在 x_0 处连续。

（2）逆命题。

不成立；定义

$$f(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\-1, x<0\end{cases}$$

$E:=[0,1]$，于是 $x=0$ 时 $f|_E$ 是连续的，f 不是连续的。

（3）f 是连续的，那么 $f|_E$ 就是连续的。

证明与（1）同理，证明略。

13.1.7

（1）对任意的 $x_0\in X$，f 在 x_0 处是连续的，当且仅当 g 在 x_0 处是连续的。

- $\Rightarrow$

  由 f 在 x_0 处连续可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有 $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$。又因为对所有的 $x \in X$ 都有 $g(x) = f(x)$，所以 $d_Y(g(x), g(x_0)) < \epsilon$，所以 g 在 x_0 处是连续的。

- $\Leftarrow$

  证明类似，略

（2）f 是连续的，当且仅当 g 是连续的。
可以由（1）直接推出。