8.4 习题

张志聪

2024 年 11 月 24 日

8.4.1

- $\Rightarrow$ 书中的提示已经很明显了，这里不做证明了。
- $\Leftarrow$ 把 X 看做选择公理的集合 I，由题设可知对每一个 $\alpha \in I$，都至少存在一个 $y \in Y$ 使得 $P(\alpha, y)$ 为真，定义 $X_\alpha := \{y \in Y : P(\alpha, y)\text{为真}\}$，显然，$X_\alpha$ 是非空的。

  接下来，要验证 $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ 是非空的。

  由命题 8.4.7 可知，存在一个函数 $f : I \to Y$ 使得 $P(\alpha, f(\alpha))$ 对所有的 $\alpha \in I$ 均成立。又由 X_α 的定义可知 $f(\alpha) \in X_\alpha$，于是，$f \in \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$，所以 $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ 是非空的。

8.4.2

- $\Rightarrow$ 由题设与选择公理可知，$\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ 是非空的，即: 存在一个函数 f 对每一个 $\alpha \in I$ 都指定了一个元素 $f(\alpha) \in X_\alpha$。定义 $Y := \{f(\alpha) : \alpha \in I\}$，此时 $\#(Y \cap X_\alpha) = 1$。反证法，假设存在某个 α 使得 $\#(Y \cap X_\alpha) \neq 1$，即：集合 Y 中有多个元素属于 X_α，即存在 $\alpha, \beta \in I$ 使得 $f(\alpha), f(\beta) \in X_\alpha$，这与题设 $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ 矛盾。
- $\Leftarrow$ 假设 I, X_α 满足选择公理的前置条件，通过 $\{\alpha\} \times X_\alpha = \{(\alpha, x) : x \in X_\alpha\}$ 替换 X_α，可以构造出一个不相交的集合簇 X_α，此时 $\Rightarrow$ 的前置条件已满足，于是，可以找到一个集合 Y 使得 $\#(Y \cap X_\alpha) = 1$，此时，我们可以定义一个函数 f 对每一个 $\alpha \in I$ 都指定一个元素 $(\alpha, x_\alpha) = Y \cap X_\alpha$，这个 $x_\alpha \in X_\alpha$（这里是一开始的 X_α）

8.4.3

- $\Rightarrow$ 对每一个 $\alpha \in A$，定义 $X_\alpha := \{x : x \in B, g(x) = \alpha\}$，由于 g 是满射，所以 X_α 是非空的，由选择公理可知，存在一个函数 f 对每一个 $\alpha \in A$ 都指定一个元素 $x_\alpha \in X_\alpha$，因为 $x_\alpha \in B$，所以 f 是 $A \to B$ 的单射。

- $\Leftarrow$ 提示让我们利用习题 8.4.2。这里显然是利用其逆命题，所以我们要找到满足 8.4.2 的前置条件的集合 Y。

  公理 8.1 的前置条件中，显然是不满足对任意 $\alpha, \beta \in I$ 都有 $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$，但可以像之前 8.4.2 中一样处理，通过 $\{\alpha\} \times X_\alpha = \{(\alpha, x) : x \in X_\alpha\}$ 替换 X_α，此时的 X_α 就是满足 8.4.2 的前置条件了。

  现在我们需要找到对任意 $\alpha \in I$ 的满射函数 $g_\alpha : X_\alpha \to \{\alpha\}$ 为

  $$g_\alpha(x) = \alpha$$

  所以，由习题 8.4.3 找到一个单射 $f_\alpha : \{\alpha\} \to X_\alpha$。

  现在定义集合 Y 如下：

  $$Y := \{f_\alpha(\alpha) : \alpha \in I\}$$

  显然 $\#(Y \cap X_\alpha) = 1$ 对所有的 $\alpha \in I$ 均成立。

  既然 Y 已经构造出来，那么由 8.4.2 的逆命题，可以说明此时选择公理也成立。

说明 1. *8.4.2* 的逆命题，需要保证 Y 的存在性，为了避免循环论证，我们不能使用选择公理来说明 Y 的存在性，我们需要自己构造出 Y，且不能使用选择公理构造（这里是利用习题 *8.4.3* 构造的）。