9.3 习题

张志聪

2024 年 12 月 3 日

9.3.1

- （a）⇒ （b）

  对任意 $\epsilon > 0$，由（a）f 在 x_0 处沿着 E 收敛于 L 可知，都存在 $\delta > 0$ 使得 f 被限制在集合 $\{x \in E : |x - x_0| < \delta\}$ 上时，f 是 $\epsilon-$ 接近于 L 的，即 $|f(x) - L| \leq \epsilon$。

  由于 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x_0，那么存在正整数 N，使得

  $$|a_n - x_0| \leq \frac{1}{2}\delta$$

  对 $n \geq N$ 均成立。又因为此时 $a_n \in \{x \in E : |x - x_0| < \delta\}$，所以

  $$|f(a_n) - L| \leq \epsilon$$

  由 ϵ 的任意性，可得 $f((a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L。

- （b）⇒（a）

  反证法，假设（a）不成立，即对某一个 $\epsilon_0 > 0$ 不存在 $\delta > 0$ 使得

  $$|f(x) - L| \leq \epsilon_0$$

  对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 对 $x \in E$ 均成立。

  那么，对于任意的正整数 n，设 X_n 表示集合

  $$X_n := \{x : |f(x) - L| > \epsilon_0, |x - x_0| < 1/n\}$$

  是非空集合（其中 $|x - x_0| < 1/n$ 由 x_0 是附着点保证，$|f(x) - L| > \epsilon_0$ 由假设（a）不成立保证）。

利用选择公理，能够找到一个序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 使得 $a_n \in X_n$ 对所有的 $n \geq 1$ 均成立（特别的，a_0 可以任选 E 中的一个元素）。于是这里构造的序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x_0，由题设（b）可知，序列 $f((a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L，即存在正整数 N，使得

$$|f(a_n) - L| \leq \epsilon_0$$

对 $n \geq N$ 均成立。因为 $a_n \in X_n$ 所以 $|f(a_n) - L| > \epsilon_0$，存在矛盾。

9.3.2

说明 1. 书中的证明个人感觉是有问题的，理由如下：

引理 9.1.14 只说明了收敛于 x_0 序列的存在性，极端情况下可能只有一个，而命题 *9.3.9*（*b*）说的是任意序列，两者是有区别的。

接下来的证明，我会避免使用引理 *9.1.14*

因为证明方式都是一致的，只以乘法为例。

设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是任意一个完全由 E 中元素构成并且收敛于 x_0 的序列（引理 9.1.14 只是保证这个序列的存在性，只是一个特例）。

因为 f 在 x_0 处沿着 E 有极限 L，由命题 9.3.9（b）可知，序列 $f((a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L。类似地，$g((a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 M。根据序列的极限定律（定理 6.1.19），我们推导出 $((fg)(a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 LM。再次由命题 9.3.9（b）可知，fg 在 x_0 处沿着 E 有极限 LM。

9.3.3

- $\Rightarrow$

  因为 $E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq E$，因为是 E 的子集，且 x_0 也是其附着点，所以也收敛于 L。

- $\Leftarrow$

  按照定义 9.3.5 证明。

  对任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $\delta' > 0$ 使得

$$|f(x) - L| \leq \epsilon$$

对所有满足 $|x-x_0|<\delta'$ 的 $x \in E \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 均成立。

令 $\delta'' := min(\delta, \delta')$ 那么，当 $x \in E$ 并满足

$$|x-x_0|<\delta''$$

时，也是满足 $|x-x_0|<\delta'$ 和 $x \in E \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$。所以

$$|f(x)-L| \le \epsilon$$

也成立。于是 f 在 x_0 处沿着 E 也是极限 L。

9.3.4

$$\sup_{x \to x_0, x \in E} f(x) = \lim_{x \to x_0, x \in E \cap (-\infty, x_0)} f(x)$$
$$\inf_{x \to x_0, x \in E} f(x) = \lim_{x \to x_0, x \in E \cap (x_0, +\infty)} f(x)$$

至于 9.3.9 的结论，证明方法类似，略

9.3.5

因为 $\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = L$，设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是任意一个完全由 E 中元素构成并且收敛于 x_0 的序列，由命题 9.3.9（b）可知，$f((a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L。类似地，$h((a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L，由题设可知对任意 n 都有 $f(a_n) \le g(a_n) \le h(a_n)$，推论 6.4.14（夹逼定理）可知 $g((a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L。再次由命题 9.3.9（b）可知，$\lim_{x \to x_0, x \in E} g(x) = L$。