

15.6 习题

张志聪

2025 年 4 月 14 日

15.6.1

设 $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$, $z_3 = (e, f)$ 。

- (a) 可交换性: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ 。

按照定义 15.6.3 (复数的加法运算) 可知,

$$z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$$

$$z_2 + z_1 = (c + a, d + b)$$

因为

$$a + c = c + a$$

$$b + d = d + b$$

于是, 由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知,

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

- (b) 结合性: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ 。

我们有

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f)\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (a, b) + (c + e, d + f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \end{aligned}$$

于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

- (c) 恒等性： $z_1 + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z_1$ 。

我们有，

$$\begin{aligned} z_1 + 0_{\mathbb{C}} &= (a, b) + (0, 0) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{C}} + z_1 &= (0, 0) + (a, b) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$z_1 + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z_1$$

- (d) 逆元性： $z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0_{\mathbb{C}}$ 。

由 (a) 可交换性可知

$$z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1$$

我们有，

$$\begin{aligned} z_1 + (-z_1) &= (a, b) + (-a, -b) \\ &= (0, 0) \\ &= 0_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

15.6.2

设 $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d), z_3 = (e, f)$ 。

- (a) 可交换性: $z_1 z_2 = z_2 z_1$ 。

由定义 15.6.5 可知,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a, b)(c, d) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 z_1 &= (c, d)(a, b) \\ &= (ca - db, cb + da) \end{aligned}$$

因为

$$ac - bd = ca - db$$

$$ad + bc = cb + da$$

于是, 由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知,

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

- (b) 结合性: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ 。

因为

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= ((a, b)(c, d))(e, f) \\ &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 (z_2 z_3) &= (a, b)((c, d)(e, f)) \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \end{aligned}$$

于是, 由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知,

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

- (c) 恒等性: $z_1 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} z_1 = z_1$ 。

由 (a) 可知

$$z_1 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} z_1$$

又有

$$\begin{aligned} z_1 1_{\mathbb{C}} &= (a, b)(1, 0) \\ &= (a \times 1 - b \times 0, a \times 0 + b \times 1) \\ &= (a, b) \\ &= z_1 \end{aligned}$$

- (d) 分配性: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ 和 $(z_2 + z_3)z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1$ 。

因为

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a, b)((c, d) + (e, f)) \\ &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 + z_1 z_3 &= (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \end{aligned}$$

于是, 由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知,

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

同理可得,

$$(z_2 + z_3)z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1$$

15.6.3

这个引理是想说明: 形式符号 $z = (a, b)$ 与 $z = a + bi$ 是等价的。

因为

$$\begin{aligned}a + bi &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\&= (a, 0) + (0, b) \\&= (a, b)\end{aligned}$$

从而, $a + bi$ 与 (a, b) 就是一回事。

15.6.4

设 $z = a + bi, w = c + di$ 。

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ 。

因为

$$z + w = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i$$

于是

$$\overline{z + w} = a + c - (b + d)i$$

又

$$\begin{aligned}\bar{z} + \bar{w} &= a - bi + c - di \\&= a + c - (b + d)i\end{aligned}$$

所以, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ 。

- $\overline{-z} = -\bar{z}$ 。

$$\begin{aligned}\overline{-z} &= \overline{-a - bi} \\&= -a + bi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\bar{z} &= -(a - bi) \\&= -a + bi\end{aligned}$$

所以, $\overline{-z} = -\bar{z}$ 。

- $\overline{zw} = \overline{z} \overline{w}$ 。

因为

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(a+bi)(c+di)} \\ &= \overline{(ac-bd) + (ad+bc)i} \\ &= (ac-bd) - (ad+bc)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z} \overline{w} &= \overline{a+bi} \overline{c+di} \\ &= (a-bi)(c-di) \\ &= ac-bd - (ad+bc)i\end{aligned}$$

所以, $\overline{zw} = \overline{z} \overline{w}$ 。

- $\overline{\overline{z}} = z$ 。

$$\begin{aligned}\overline{\overline{z}} &= \overline{\overline{a+bi}} \\ &= \overline{a-bi} \\ &= a+bi \\ &= z\end{aligned}$$

- $\overline{z} = \overline{w}$ 当且仅当 $z = w$ 。

— \Rightarrow

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \overline{w} \\ a-bi &= c-di\end{aligned}$$

于是, $a = c$ 且 $-b = -d$, 即 $a = c$ 且 $b = d$ 。所以 $z = w$ 。

— \Leftarrow

$z = w$, 所以 $a = c$ 且 $b = d$ 。

$$\begin{aligned}\overline{z} &= a-bi \\ \overline{w} &= c-di\end{aligned}$$

于是 $a = c$ 且 $-b = -d$, 所以 $\bar{z} = \bar{w}$ 。

- $\bar{z} = z$ 当且仅当 z 是一个实数。

— \Rightarrow

$\bar{z} = z$, 那么 $-b = b$, 所以 $b = 0$, 即 $\Im(z) = 0$, 所以 z 是一个实数。

— \Leftarrow

z 是一个实数, $\Im(z) = 0$, 于是 $b = 0$, 所以 $\bar{z} = z$ 。

15.6.5

设 $z = a + bi$, 所以 $\Re(z) = a, \Im(z) = b$ 。

又因为

$$\begin{aligned}\frac{z + \bar{z}}{2} &= \frac{a + bi + a - bi}{2} \\ &= \frac{2a}{2} \\ &= a \\ &= \Re(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z - \bar{z}}{2i} &= \frac{a + bi - (a - bi)}{2i} \\ &= \frac{b2i}{2i} \\ &= b \\ &= \Im(z)\end{aligned}$$

15.6.6

设 $z = a + bi, w = c + di$ 。

- 恒等式 $z\bar{z} = |z|^2$, 从而有 $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ 。

$$\begin{aligned}
z\bar{z} &= (a+bi)(a-bi) \\
&= a^2 - b^2i^2 - abi + abi \\
&= a^2 - b^2i^2 \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= \sqrt{a^2 + b^2}^2 \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

于是, $z\bar{z} = |z|^2$, 从而有 $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ 。

- $|zw| = |z||w|$ 且 $|\bar{z}| = |z|$ 。

由之前的讨论可得,

$$\begin{aligned}
|zw| &= \sqrt{zw\overline{zw}} \\
&= \sqrt{zw\bar{z}\bar{w}} \\
&= \sqrt{z\bar{z}w\bar{w}} \\
&= \sqrt{|z|^2|w|^2} \\
&= |z||w|
\end{aligned}$$

$|\bar{z}| = |z|$ 直接可以从复数绝对值定义中得到。

- 不等式 $-|z| \leq \Re(z) \leq |z|$ 。

因为

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2$$

由引理 5.6.9(d) (更准确的说是实数版本) 可得

$$|z| \geq |a| \geq \Re(z) = a$$

于是,

$$-|z| \leq -|a| \leq a = \Re(z)$$

- 不等式 $-|z| \leq \Im(z) \leq |z|$ 。
与上一个不等式证明方式一致。
- 不等式 $|z| \leq |\Re| + |\Im|$ 。
因为

$$\begin{aligned} (|\Re| + |\Im|)^2 &= (|a| + |b|)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| \\ &\geq a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

由引理 5.6.9(d) (更准确的说是实数版本) 可得

$$|z| \leq |\Re| + |\Im|$$

- 三角不等式 $|z + w| \leq |z| + |w|$ 。
按照书中的提示进行证明。
由之前的命题可得,

$$\Re(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}| = |z||\bar{w}| = |z||w|$$

于是,

$$\Re(z\bar{w}) \leq |z||w|$$

利用习题 15.6.5 可得,

$$\begin{aligned} \Re(z\bar{w}) &= \frac{z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}}{2} \\ &= \frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2} \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2} &\leq |z||w| \\ z\bar{w} + \bar{z}w &\leq 2|z||w| \end{aligned}$$

然后，不等式两端加上 $|z|^2 + |w|^2$ ，

$$z\bar{w} + \bar{z}w + |z|^2 + |w|^2 \leq 2|z||w| + |z|^2 + |w|^2$$

$$z\bar{w} + \bar{z}w + z\bar{z} + w\bar{w} \leq (|z| + |w|)^2$$

$$(z + w)(\overline{z + w}) \leq (|z| + |w|)^2$$

$$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

15.6.7

注意：实数也是复数，所以复数的相关性质，实数也具备。
因为

$$\begin{aligned} |z/w| &= |zw^{-1}| \\ &= |z|w|^{-2}|\bar{w}| \\ &= \left| \frac{z\bar{w}}{|w|^2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{|w|^2} \right| |z\bar{w}| \\ &= \frac{1}{|w|^2} |z||\bar{w}| \\ &= \frac{|\bar{w}|}{|w|^2} |z| \\ &= \frac{|z|}{|w|} \end{aligned}$$

15.6.8

注意：实数也是复数，所以复数的相关性质，实数也具备。

- \Rightarrow
- \Leftarrow

$$\begin{aligned}
|z + w| &= |cw + w| \\
&= |(c + 1)w| \\
&= |c + 1||w|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|z| + |w| &= |cw| + |w| \\
&= |c||w| + |w| \\
&= |c + 1||w|
\end{aligned}$$

所以 $|z + w| = |z| + |w|$ 。

15.6.9

$$z = \Re(z) + \Im(z)i。$$

• \Rightarrow

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \Re(z_n) = \Re(z)。$$

反证法，假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re(z_n)$ 不收敛于 $\Re(z)$ 。

于是存在 ϵ ，不存在 $N > 0$ ，使得只要 $n \geq N$ ，就有

$$|\Re(z_n) - \Re(z)| < \epsilon$$

即对所有的 n 都有

$$|\Re(z_n) - \Re(z)| \geq \epsilon$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ ，所以对 $\epsilon > 0$ ，存在 $N > 0$ ，使得只要 $n \geq N$ ，都有

$$\begin{aligned}
|z_n - z| &< \epsilon \\
\Rightarrow \\
\sqrt{(\Re(z_n) - \Re(z))^2 + (\Im(z_n) - \Im(z))^2} &< \epsilon
\end{aligned}$$

因为

$$\sqrt{(\Re(z_n) - \Re(z))^2 + (\Im(z_n) - \Im(z))^2} > |\Re(z_n) - \Re(z)| \geq \epsilon$$

存在矛盾。

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re(z_n) = \Re(z)$ 。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \Im(z_n) = \Im(z)$ 。

证明类似, 不做赘述。

• \Leftarrow

对任意 $\epsilon > 0$ 。

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re(z_n) = \Re(z)$, 存在 $N_1 > 0$, 使得只要 $n \geq N_1$, 都有

$$|\Re(z_n) - \Re(z)| < \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

同理, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Im(z_n) = \Im(z)$, 存在 $N_2 > 0$, 使得只要 $n \geq N_2$, 都有

$$|\Im(z_n) - \Im(z)| < \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$, 使得只要 $n \geq N$, 都有

$$\begin{aligned} |z_n - z| &= \sqrt{(\Re(z_n) - \Re(z))^2 + (\Im(z_n) - \Im(z))^2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可得, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ 。

15.6.10

由定义 12.4.9 (完备度量空间) 可知, 我们需要证明, 度量空间 (\mathbb{C}, d) 中的任意 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 柯西序列都有极限。

对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得只要 $p, q \geq N$, 都有

$$|z_p - z_q| < \epsilon$$

\implies

$$\sqrt{(\Re(z_p) - \Re(z_q))^2 + (\Im(z_p) - \Im(z_q))^2} < \epsilon$$

所以,

$$\begin{aligned}\sqrt{(\Re(z_p) - \Re(z_q))^2} &< \epsilon \\ \implies \\ |\Re(z_p) - \Re(z_q)| &< \epsilon\end{aligned}$$

所以 $(\Re(z_n))_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列, 由于 $\Re(z_n)$ 都是实数, 实数度量空间是完备的, 所以, $(\Re(z_n))_{n=1}^{\infty}$ 是收敛序列。

同理可得, $(\Im(z_n))_{n=1}^{\infty}$ 是收敛序列。

综上, 利用引理 15.6.13 可得, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛。

15.6.11

- f 是双射。

证明 f 是单射和双射即可, 证明略。

- f, f^{-1} 都是连续函数。

(1) f 是连续函数。

任意 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 \mathbb{R}^2 中的序列, 其中 $x^{(n)} := (x_n, y_n)$, 并且序列收敛于 (x_0, y_0) , 我们需要证明 $(f(x^n))_{n=1}^{\infty}$ 即 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 其中 $z_n = x_n + y_n i$ 收敛于 $f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 i$ 。

由命题 12.1.18 可知,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= x_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= y_0\end{aligned}$$

由引理 15.6.13 可知, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $f(x_0, y_0)$ 。

(2) f^{-1} 是连续函数。

证明方式与 (1) 类似, 证明略。

15.6.12

我们构造出这样一个通路:

对任意 $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, 定义 $\gamma(x) = (1-x)z_0 + z_1x$, 其中 $x \in [0, 1]$ 。
以上定义的通道满足:

- $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$ 。
- γ 是连续的。(可以直接使用引理 15.6.14 证明。)

道路连通蕴含连通性, 所以, \mathbb{C} 是连通的。

15.6.13

- (1) 证明: E 是紧致的, 当且仅当 E 既是闭的又是有界的。