

7.1 习题

2024 年 8 月 10 日

7.1.1

【a】

由定义 7.1.1 可知,

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^n a_i \\&= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^p a_i \\&= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^p a_i \\&= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=n+1}^p a_i \\&= \sum_{i=m}^p a_i\end{aligned}$$

【b】【c】【d】的证明与**【a】**类似，证明略
【e】

归纳法证明。

归纳基始 $m = n$ ，此时，

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=m}^n a_i \right| &= |a_m| \\ \sum_{i=m}^n |a_i| &= |a_m| \end{aligned}$$

满足 $\left| \sum_{i=m}^n a_i \right| \leq \sum_{i=m}^n |a_i|$

归纳假设 $m < n = j - 1$ 时，命题成立。

$n = j + 1$ 时，由 (a) 可知，

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=m}^j a_i \right| &= \left| \sum_{i=m}^{j-1} a_i + a_j \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=m}^{j-1} a_i \right| + |a_j| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^j |a_i| &= \sum_{i=m}^{j-1} |a_i| + |a_j| \\ &\geq \left| \sum_{i=m}^{j-1} a_i \right| + |a_j| \quad \text{【归纳假设保证的】} \end{aligned}$$

于是 $\left| \sum_{i=m}^j a_i \right| \geq \left| \sum_{i=m}^{j-1} a_i \right| + |a_j| \geq \sum_{i=m}^j |a_i|$
 归纳完毕。

【f】与**【e】**类似，可通过归纳法证明。

7.1.2

【a】 由于 X 是空集，所以定义 7.1.6 中的 $n = 0$ ，于是，取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 0\}$ 到 X 的双射 g ，所以，

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} f(x) \\ &= \sum_{i=1}^0 f(g(i)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

【b】

定义双射函数 $g : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 1\} \rightarrow X$ 如下：当 $i = 1, g(x) = x_0$ 。于是，

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} f(x) \\ &= \sum_{i=1}^1 f(g(i)) \\ &= f(g(1)) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

【c】 设 X 有 n 个元素，

取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 到 Y 的双射函数 h ，于是函数 $g \circ h$ 是从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 到 X 的双射函数；

取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 到 X 的双射函数 h' 。

由命题 7.1.1 可知，

$$\sum_{i=1}^n f(h'(i)) = \sum_{i=1}^n f(g \circ h(i))$$

于是，

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{y \in Y} f(g(x(y)))$$

【d】

题设中，对每一个整数 $i \in X$ 都指定了一个实数 a_i ，其实是定义了一个函数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 。

所以,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=n}^m a_i \\ &= \sum_{i=n}^m f(i) \end{aligned}$$

由引理 7.1.4 (b) 可知,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=n}^m f(i) \\ &= \sum_{j=1}^{m-(n-1)} f(j+(n-1)) \end{aligned}$$

此时, 定义一个从 $Y := \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq m - (n - 1)\}$ 到 X 的双射函数 g 如下:

$$g(j) = j + (n - 1)$$

于是,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{m-(n-1)} f(j+(n-1)) \\ &= \sum_{j=1}^{m-(n-1)} f(g(j)) \\ &= \sum_{x \in X} f(x) \end{aligned} \quad \text{定义 7.1.6}$$

【e】

设 X, Y 的元素个数分别为 n, m , 选取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n + m\}$ 到 $X \cup Y$ 的双射函数 g , 并且限定 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 的值域是 X ,

$\{i \in \mathbb{N} : n+1 \leq i \leq n+m\}$ 的值域是 Y 。于是,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{z \in X \cup Y} f(z) \\
 &= \sum_{i=1}^{n+m} f(g(i)) \\
 &= \sum_{i=1}^n f(g(i)) + \sum_{i=n+1}^{n+m} f(g(i)) && \text{引理 7.1.4 (a)} \\
 &= \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{y \in Y} f(y) && \text{命题 7.1.11(d)}
 \end{aligned}$$

【f】

设 X 有 n 个元素, 取一个从选取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 到 X 的双射函数 h , 于是,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) \\
 &= \sum_{i=1}^n (f(h(i)) + g(h(i))) \\
 &= \sum_{i=1}^n f(h(i)) + \sum_{i=1}^n g(h(i)) && \text{引理 7.1.4 (c)} \\
 &= \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x) && \text{定义 7.1.6}
 \end{aligned}$$

【g】

设 X 的元素个数为 n 。

把定义函数 $g = cf$, 并取一个从选取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 到 X

的双射函数 h 。此时，

$$\begin{aligned}
 & \sum_{x \in X} cf(x) \\
 &= \sum_{x \in X} g(x) \\
 &= \sum_{i=1}^n g(h(i)) \\
 &= \sum_{i=1}^n cf(h(i)) \\
 &= c \sum_{i=1}^n f(h(i)) \\
 &= c \sum_{x \in X} f(x)
 \end{aligned}$$

【h】

设 X 的元素个数为 n ，取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 到 X 的双射函数 h 。

对 n 进行归纳。

当 $n = 0$ 时，

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{x \in X} g(x) = 0$$

此时，命题成立。

当 $n = j - 1$ 时，归纳假设命题成立。

当 $n = j$ 时，

$$\begin{aligned}
 & \sum_{x \in X} f(x) \\
 &= \sum_{i=1}^j f(h(i)) \\
 &= \sum_{i=1}^{j-1} f(h(i)) + f(h(j))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{x \in X} g(x) \\
&= \sum_{i=1}^j g(h(i)) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} g(h(i)) + g(h(j))
\end{aligned}$$

由归纳假设可知 $\sum_{i=1}^{j-1} f(h(i)) \leq \sum_{i=1}^{j-1} g(h(i))$; 又因为 $f(h(j)) \leq g(h(j))$, 于是,

$$\sum_{i=1}^{j-1} f(h(i)) + f(h(j)) \leq \sum_{i=1}^{j-1} g(h(i)) + g(h(j))$$

即:

$$\sum_{x \in X} f(x) \leq \sum_{x \in X} g(x)$$

【i】

与 (h) 类似, 使用归纳法证明。略

7.1.3

嫌麻烦!!! 略

7.1.4

$$\sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j}$$

对 n 进行归纳。

$n = 0$ 时, $(x + y)^0 = 1$ 。

又

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^0 \frac{0!}{j!(0-j)!} x^j y^{0-j} \\ &= \frac{0!}{0!(0-0)!} x^0 y^{0-0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

故， $n = 0$ 时，命题成立。

归纳假设 n 时，命题成立。

对 $n+1$,

$$\begin{aligned}
& (x+y)^{n+1} \\
&= (x+y)^n(x+y) \\
&= \left(\sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j}\right)(x+y) \\
&= \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} x^{j+1} y^{n-j} + \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j+1} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^{j+1} y^{n-j} + \sum_{j=n}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} x^{j+1} y^{n-j}\right) \\
&+ \left(\sum_{j=1}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j+1} + \sum_{j=0}^0 \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^{j+1} y^{n-j} + x^{n+1} + \sum_{j=1}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{n!}{(j-1)!(n+1-j)!} x^j y^{n-j+1} + \sum_{j=1}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j+1} + x^{n+1} + y^{n+1} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{n!}{(j-1)!(n+1-j)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!}\right) x^j y^{n+1-j}\right) + x^{n+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{n!j}{j!(n+1-j)!} + \frac{n!(n-j+1)}{j!(n-j+1)!}\right) x^j y^{n+1-j} + x^{n+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} x^j y^{n+1-j} + x^{n+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=n+1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=0}^0 \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} x^j y^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} x^j y^{n+1-j}
\end{aligned}$$

归纳完成，命题得证。

7.1.5

设 X 的基数为 K ，通过对 K 进行归纳，来证明该命题。

归纳基始 $K = 0$, 有命题 7.1.11 可知,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in X} a_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in X} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以, $K = 0$ 时, 命题成立。

归纳假设 $K = k$ 时, 命题成立。

$K = k + 1$, 取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq k + 1\}$ 到 X 的双射 g , 所以,

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in X} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(g(i)) \\ &= \sum_{i=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(g(i)) + \sum_{i=k+1}^{k+1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(g(i)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in X - \{g(k+1)\}} a_n(x) + \sum_{i=k+1}^{k+1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(g(i)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in X - \{g(k+1)\}} a_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(g(k+1)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{x \in X - \{g(k+1)\}} a_n(x) + a_n(g(k+1)) \right) \quad \text{定理 6.1.19 (a)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{x \in X - \{g(k+1)\}} a_n(x) + \sum_{i=k+1}^{k+1} a_n(g(i)) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{x \in X - \{g(k+1)\}} a_n(x) + \sum_{x \in \{g(k+1)\}} a_n(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in X} a_n(x) \end{aligned}$$

归纳完成, 命题得证。