3.6 习题

2024 年 3 月 26 日

3.6.1

证明.
①X 和 X 有相等的基数。

构造一个从 X 到 X 的函数 f，使得 $f(x)=x$（$\{x \in X\}$）。函数 f 是双射函数，是显而易见的，这里不做证明了。

②如果 X 和 Y 有相等的基数，那么 Y 和 X 有相等的基数。

有 X 和 Y 有相等的基数，可知存在一个双射：$f : X \to Y$。那么存在 f 的逆 $f^{-1} : Y \to X$，由逆的定义可知 f^{-1} 是双射函数。

③如果 X 和 Y 有相等的基数且 Y 和 Z 有相等的基数，那么 X 和 Z 有相等的基数。

由 X 和 Y 有相等的基数，可知存在一个双射：$f : X \to Y$。由 Y 和 Z 有相等的基数，可知存在一个双射：$g : Y \to Z$。那么 g 和 f 的复合函数为 $g \circ f : X \to Z$。

由习题 *3.3.7* 可知 $g \circ f$ 是双射函数。由此可知存在一个双射：$g \circ f : X \to Z$，所以 X 和 Z 有相等的基数。

3.6.2

证明.
①充分性：一个集合 X 的基数为 *0*，则 X 是空集。

那么存在从 X 到 $\{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$ 的双射：$f : X \to \{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$。而 $\{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$ 是 $\varnothing$，即 $f : X \to \varnothing$。如果 X 不是空集，那么则存在一个 $x \in X$ 使得 $f(x) \in \varnothing$，这显然是不成立的，所以 X 是空集

②必要性：X 是空集，则 X 的基数为 *0*。

若 X 是空集，由习题 *3.3.3* 知 $f:\varnothing\to\varnothing$ 为双射，而 $\{i\in N:1\le i\le 0\}=\varnothing$，即存在双射函数 $f:\varnothing\to\{i\in N:1\le i\le 0\}$，由定义 *3.6.5* 可知集合 X 基数为 *0.*

3.6.3

证明.
对 n 进行归纳：

n=0 时，f 是空函数，命题空成立。

归纳假设 *n=k* 时，命题成立。

下面我们证明该命题对于 *k++* 也为真。设集合 $N_k=\{i\in \mathsf{N}:1\le i\le k\}, N_{k++}=\{i\in \mathsf{N}:1\le i\le k++\}$。函数 $f_{k++}:N_{k++}\to N$ 是一个函数，我们可以由 f_{k++} 定义出一个函数 $f_k:N_k\to N$，对任意 $i\in N_k, f_k(i)=f_{k++}(i)$。由归纳假设可知，存在一个自然数 M 使得 $f_k(i)\le M, i\in N_k$，即 $f_{k++}(i)\le M, i\in N_k$，此时我们可以取 $f_{k++}(k++), M$ 中的较大值为 M'，由此可知该 M' 使得 $f_{k++}(i)\le M', i\in N_{k++}$。归纳法完成。

3.6.4

（a）设 X 是一个有限集，设 x 是一个对象并且 x 不是 X 中的元素。那么 $X\cup\{x\}$ 是有限的，且 $\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$

证明.
X 是有限集，不妨设 X 的基数是自然数 n。因此存在从 X 到 $\{i\in N:1\le i\le n\}$ 的双射函数 f。定义出一个函数 $g:X\cup\{x\}\to\{i\in N:1\le i\le n+1\}$，使得 $g(x)=n+1$，$g(i)=f(i), i\in X$。由 g 的定义可知其是双射函数，且 $X\cup\{x\}$ 的基数是 *n+1*，所以 $X\cup\{x\}$ 是有限的，且 $\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$

（b）设 X 和 Y 都是有限集，那么 $X\cup Y$ 是有限的，且 $\#(X\cup Y)\le\#(X)+\#(Y)$。另外，如果 X 和 Y 是不相交的（即 $X\cap Y=\varnothing$），那么 $\#(X\cup Y)=\#(X)+\#(Y)$

证明.
X 和 Y 都是有限集，不妨设 X 和 Y 的基数分别为 m 和 n。通过对 n 进行归纳，完成证明；

n=0 时，即 Y 的基数是 *0*，也就是说 $Y=\varnothing$，$X\cup Y=X\cup\varnothing=X$，此时（$b$）命题显然是成立的。

归纳假设 n=k 时，（b）命题成立。

现在需证明 n=k++，任取 $x \in Y, Z = Y \backslash \{x\}$，由引理 *3.6.9* 可知，$Z$ 的基数为 k，由归纳假设可知，X 与 Z 满足命题（b），由此可知 $X \cup Z$ 是有限的；

$X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\}$。

① $X \cap Y = \varnothing$，由此可知 $x \notin X \cup Z$，且由归纳假设知 $\#(X \cup Z) = \#(X) + \#(Z)$。由命题（$a$）可知 $X \cup Z \cup \{x\}$ 是有限的，且 $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$，即 $X \cup Y$ 是有限的，且 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 = \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$，即 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$；

② $X \cap Y \neq \varnothing$

如果 $x \in X \cup Z$ 则 $X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\} = X \cup Z$，即 $X \cup Y = X \cup Z$ 由于同一集合只有一个基数，所以 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z)$，又由归纳假设可知 $\#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Z)$，所以 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$。

如果 $x \notin X \cup Z$,(由 $X \cap Y \neq \varnothing$,则必须 $X \cap Z \neq \varnothing$ 否则与假设矛盾,所以 $\#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Z)$)由命题($a$)可知 $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$，即 $X \cup Y$ 是有限的，且 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 \leq \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$，即 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$；

综上，n=k++ 情况也成立，至此，（b）命题成立。

（c）设 X 是一个有限集，Y 是 X 的一个子集。那么 Y 是有限的，且 $\#(Y) \leq \#(X)$。另外，如果 $Y \neq X$（即 Y 是 X 的一个真子集），那么我们有 $\#(Y) < \#(X)$。

证明.

对 X 的基数进行归纳。

X 的基数为 *0*，即 $X = \varnothing$，此时 Y 是 X 的子集，则 $Y = \varnothing$，很明显 Y 是有限的（基数是 *0*），且 $\#(Y) \leq \#(X)$。而命题的后半部分，因为空集不存在真子集，所以空成立。

归纳假设 n=k 时，X 的基数为 k，命题（c）成立。

现需证明 n=k++，命题（c）成立。若 $Y = X$ 显然 $\#(Y) \leq \#(X)$；若 $Y \neq X$，则存在 $x \in X$，使得 $Y \subseteq (X \backslash x)$，由归纳假设可知 $\#(Y) \leq \#(X \backslash x)$，由引理 *3.6.9* 可知 $\#(Y) < \#(X)$。

综上命题（c）成立。

（d）如果 X 是一个有限集，并且 $f : X \to Y$ 是一个函数，那么 $f(X)$

是一个有限集并且满足 $\#(f(X)) \leq \#(X)$。另外，如果 f 是一对一的，那么 $\#(f(X)) = \#(X)$。

证明.

对 X 的基数 n 进行归纳；

归纳基始 *n=0*，即 $X = \varnothing$，由定义 *3.4.1*（集合的像）可知 $f(X) = \varnothing$，即 $\#(f(X)) = 0$，此时命题（d）成立

n=k++ 时，设 $X' = X \backslash \{x\}$，由归纳假设可知 $\#(f(X')) \leq \#(X')$，

① $f(X') = f(X)$，则 $\#(f(X)) = \#(f(X')) \leq \#(X') < \#(X)$。此时 f 不是双射，命题后半部分空成立。

② $f(X') \subsetneq f(X)$ 则 $f(x) \notin f(X')$，且 $f(X) = f(X') \cup f(x)$，由命题（a）可知 $\#(f(X)) = \#(f(X')) + 1$，有 $\#(X) = \#(X') + 1$，所以由归纳假设 $\#(f(X')) \leq \#(X')$ 可知 $\#(f(X')) + 1 \leq \#(X') + 1$，即 $\#(f(X)) \leq \#(X)$；若 f 是一对一的，则 $X' \backslash \{x\} \to Y \backslash \{f(x)\}$ 也是一对一，由归纳假设知 $\#(f(X')) = \#(X')$，由此可知 $\#(f(X')) + 1 = \#(X') + 1$，$\#(f(X)) = \#(X)$。综上，*n=k++* 时命题（$d$）成立。

至此，命题成立

（e）设 X 和 Y 都是有限集，那么笛卡尔积 $X \times Y$ 是有限的并且 $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$。

证明.

设 X, Y 的基数分别为 n、m，对 n 进行归纳。

归纳基始 *n=0*，即 X 是空集，有笛卡尔积的定义可知，$X \times Y = \varnothing$，由此可知 $\#(X \times Y) = 0$，且 $X \times Y$ 是有限的。又 $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y) = 0$，所以 *n=0* 时，命题（$e$）成立。

n=k++ 时，设对任意 $x \in X$，构造 $X' = X \backslash \{x\}$，由习题 *3.5.5* 可知 $X \times Y = (X' \cup \{x\}) \times (Y \cup Y) = (X' \times Y) \cup (\{x\} \times Y)$，由笛卡尔积的定义可知 $(X' \times Y) \cap (\{x\} \times Y) = \varnothing$，由（$b$）可知，$\#((X' \times Y) \cup (\{x\} \times Y)) = \#(X' \times Y) + \#(\{x\} \times Y)$ 由归纳假设可知 $\#(X' \times Y) = \#(X') \times \#(Y)$，现在只需证明 $\#(\{x\} \times Y) = \#(Y)$，命题就能完成证明。(在直觉上是显然的，但为了严谨性，还是需要证明)，要想证明基数相同，按照定义 *3.6.1* 只需找到从 $(\{x\} \times Y)$ 到 Y 的一个双射函数 $f : (\{x\} \times Y) \to Y$。可以定义 f 如下：$f((x, y)) = y, (x, y) \in (\{x\} \times Y)$，这里的 f 是双射性是显然的，为了简洁不做说明了。由此可知 $\#(X \times Y) = \#(X' \times Y) + \#(\{x\} \times Y) = \#(X' \times Y) + \#(Y)$

$= \#(X') \times \#(Y) + \#(Y) = (\#(X') + +) \times \#(Y) = \#(X) \times \#(Y)$，$n$=$k$++ 时命题（$e$）成立。

至此归纳完成，命题（e）得到证明。

（f）设 X 和 Y 都是有限集，那么集合 Y^X（在公理 3.10 中被定义）是有限的，并且 $\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$

证明.

公理 *3.10* 中对幂集公理的定义，很难定量分析，我们使用其他公理对幂集公理重新定义。

I 为一个集合，并对每一个元素 $y_0 \in I$ 均有一个集合 A_{y_0}，$A_{y_0} = \{\{f$是 X 到 Y 的函数$, f(x_0) = y_0\} : y_0 \in Y\}$ 幂集定义如下：$W = \bigcup\limits_{y\in I} A_y = \cup\{A_y : y \in I\}$

现在需要证明该定义和幂集公理的等价性。

$f \in W \Leftrightarrow$ 存在$y \in I$使得$f \in A_y$，由此可知 f是 X 到 Y 的函数，所以 $f \in Y^X$。

$f \in Y^X$，由于 f 是 X 到 Y 的函数，则对 $x_0 \in X$ 有 $y = f(x_0)$，$y \in Y$，所以 $f \in A_y$，所以 $f \in W$。

综上可证该定义和幂集公理的等价性。

设 X, Y 的基数分别为 n、m，通过对 n 进行归纳，证明该命题。

归纳基始 n=*0*，即 $X = \varnothing$，而 $f : \varnothing \to Y$ 的函数，由函数相等的定义可知是唯一的，所以 $\#(Y^X) = 1, \#(Y)^{\#(X)} = m^0 = 1$，由此可知 $\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$，在 n=*0* 时命题（f）成立

n=k++ 时，设 $X' = X\backslash\{x_0\}, x_0 \in X$，证明 $\#(A_y) = \#(Y^{X'})$，函数 $G : A_y \to Y^{X'}$，定义如下：$g = G(f), x \in X', f(x) = g(x)$。

证明函数 G 的定义是合法，即证明 g 的唯一性，假设存在 g 满足定义，即对任意 $f \in A_y$，存在 $g'(x) = f(x) = g(x)$, 由函数相等的定义可知 $g = g'$，g 的唯一性得证。

证明 G 是双射的，先证明单射，如果 G 不是单射，则存在 $f_1 \neq f_2$，有相同的函数值 g，由于 $f_1 \neq f_2$ 所以存在 $x \in X', f_1(x) \neq f_2(x)$，有 G 的定义可知 $g(x) = f_1(x) = f_2(x)$，这与 $f_1(x) \neq f_2(x)$ 矛盾，所以 G 是单射。

证明 G 是满射的，对任意函数值 $g \in Y^{X'}$，可以定义出一个函数 $f : X \to Y, f(x_0) = y, f(x) = g(x)$，该函数 $f \in A_y$，所以 G 是满射的。

由此可知 $\#(A_y) = \#(Y^{X'}) = m^k$

由 A_y 的定义方式可知是不相交的，即对任意 $y_0 \neq y_1, A_{y_0} \cap A_{y_1} = \varnothing$，由（$b$）可知 $\#(W) = \sum_{y\in I} \#(A_y) = m \times \#(Y^{X'}) = m \times (m^k) = m^{k++}$，由此可知 n=k++ 命题（f）也成立。

至此命题（f）成立。

3.6.5

证明.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\} \tag{1}$$

$$B \times A = \{(b,a) : b \in B, a \in A\} \tag{2}$$

现在定义函数 $f : A \times B \to B \times A, f(a,b) := (b,a)$。

接下来要证明 f 的双射性（为了简洁不做说明了）。

由命题 *3.6.14* 可知

$$\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B) \tag{3}$$

$$\#(B \times A) = \#(B) \times \#(A) \tag{4}$$

又因为 $A \times B, B \times A$ 之间存在一个双射 f，所以两个集合之间有相同的基数，由此通过（*3*）（*4*）可知 $\#(A) \times \#(B) = \#(B) \times \#(A)$

3.6.6

证明.

①构造双射

由公理 *3.10*（幂集公理）可知，

$$(A^B)^C = \{f : f\text{是一个定义域为}C,\text{值域为}A^B\text{的函数}\} \tag{5}$$

$$A^{B\times C} = \{g : g\text{是一个定义域为}B\times C,\text{值域为}A\text{的函数}\} \tag{6}$$

定义函数 $G : (A^B)^C \to A^{B\times C}$ 如下：$G(f) := g$，f, g 满足以下性质：对任意 $b \in B, c \in C$ 有 $[f(c)](b) = g(b,c)$

现需证明 G 是满足函数定义的，对相同的输入只存在唯一的函数值。函数 f 对任意 $b \in B, c \in C$ 存在 g, g' 使得 $[f(c)](b) = g(b,c) = g'(b,c)$，对任意 $b \in B, c \in C$，$g(b,c) = g'(b,c)$ 通过函数相等的定义可知 $g = g'$。

现需证明 G 是双射函数。对任意 $f \neq f'$，

$$[f(c)](b) = g(b,c) \tag{7}$$

$$[f'(c)](b) = g'(b,c) \tag{8}$$

由于 $f \neq f'$ 所以存在 (b',c') 使得 $[f(c')](b') \neq [f'(c')](b')$，可得 $g(b',c') \neq g'(b',c')$，所以 $g \neq g'$，所以 G 是单射函数。

$g \in A^{B\times C}$，对某个 $c_0 \in C$ 我们定义函数 $h_0 : B \to A, h_0(b) := g(b, c_0)$; 再对每个 $c \in C$ 我们定义函数 $f : C \to A^B, f(c) := h_c$。此时对任意 $c \in C, b \in B$ 有 $[f(c)](b) = h_c(b) = g(b,c)$。故 $G(f) = g$。故 G 是满射的

② $(a^b)^c = a^{bc}$

设 A、B、C 的基数分别为 a、b、c，由命题 *3.6.14* 可知

$$\#((A^B)^C) = \#(A^B)^{\#(C)} = (\#(A)^{\#B})^{\#(C)} = (a^b)^c \tag{9}$$

$$\#(A^{B\times C}) = \#A^{\#(B\times C)} = \#A^{\#(B)\times\#(C)} = a^{bc} \tag{10}$$

又 $(A^B)^C, A^{B\times C}$ 基数相同，所以 $(a^b)^c = a^{bc}$

③ $a^b \times a^c = a^{b+c}$

通过构造明确的双射来证明：集合 $A^B \times A^C$ 和集合 $A^{B\cup C}$ 有相同的基数（$B \cap C = \varnothing$）。由公理 *3.10*（幂集公理）和定义 *3.5.4*（笛卡尔积）可知

$$A^B \times A^C = \{(f,f') : f \in A^B, f' \in A^C\} \tag{11}$$

$$A^{B\cup C} = \{g : g\text{是定义域为}B\cup C\text{值域为}A\text{的函数}\} \tag{12}$$

定义函数 $G : A^B \times A^C \to A^{B\cup C}$ 如下：

$G(f,f') := g$，f, f', g 满足如下性质：对任意 $b \in B, c \in C$ 有 $f(b) = g(b), f'(c) = g(c)$

现需证明 G 是满足函数定义的，对相同的输入只存在唯一的函数值。函数 f, f' 对任意 $b \in B, c \in C$ 存在 g, g' 使得 $f(b) = g(b), f'(c) = g(c); f(b) = g'(b), f'(c) = g'(c);$，对任意 $b \in B, c \in C$，$g(b) = g'(b); g(c) = g'(c)$ 通过函数相等的定义可知 $g = g'$。

现需证明 G 是双射函数。对任意 $(f1, f2) \neq (f1', f2')$，$g = G(f1, f2), g' = G(f1', f2')$，如果 $g = g'$，那么对任意 $b \in B, c \in C$ 有 $g(b) = g'(b) = f1(b) = f1\prime(b), g(c) = g'(c) = f2(c) = f2\prime(c)$，由此可知 $f1 = f1', f2 = f2'$，那么 $(f1, f2) = (f1', f2')$，这与前提 $(f1, f2) \neq (f1', f2')$ 矛盾，$g \neq g'$，所以 G 是单射。

任意 $g \in A^{B\cup C}$，对任意 $b \in B, c \in C$ 定义 $f1 : B \to A, f1(b) = g(b); f2 : C \to A, f2(c) = g(c)$，$f1, f2$ 满足如下性质：对任意 $b \in B, c \in C$ 有 $f1(b) = g(b), f2(c) = g(c)$，故 $G(f1, f2) = g$。故 G 是满射。

设 A、B、C 的基数分别为 a、b、c，由命题 *3.6.14* 可知

$$\#(A^B \times A^C) = \#(A^B) \times \#(A^C) = \#(A)^{\#B} \times \#(A)^{\#C} = a^b \times a^c \tag{13}$$

$$\#(A^{B\cup C}) = \#(A)^{\#(B\cup C)} = \#(A)^{\#(B)+\#(C)} = a^{b+c} \tag{14}$$

又 $A^B \times A^C, A^{B\cup C}$ 基数相同，所以 $a^b \times a^c = a^{b+c}$

3.6.7

证明.

① 充分性

假设 A 的基数小于或等于 B 基数，则存在一个从 A 到 B 的单射 $f : A \to B$，由定义 *3.4.1*（集合的像）可知 $f(X) \subseteq B$；又由命题 *3.6.14*（c）可知

$$\#(f(X)) \leq \#(B) \tag{15}$$

定义函数 $g : A \to f(X), g(x) = f(x)$，函数 g 是双射函数（证明略），由此可知 $\#(A) = \#(f(X))$。综上可知 $\#(A) = \#(f(X)) \leq \#(B)$，必要性得证。

② 必要性

假设 $\#(A) \leq \#(B)$，基数分别为 m、n（$m \leq n$），由定义 *3.6.5* 可知，存在双射函数 $f : A \to \{i \in N : 1 \leq i \leq m\}$。存在双射函数 $g : \{i \in N : 1 \leq i \leq n\} \to B$。由此我们可以定义从 A 到 B 的单射 $h : A \to B$ 如下：对任意 $x \in A$，$h(x) = g(f(x))$。现在证明 h 是单射函数，对任意 $x_1 \neq x2$，由于 f 是单射函数，所以 $f(x_1) \neq f(x_2)$，又 g 是单射函数，所以 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$，即 $h(x_1) \neq h(x_2)$，所以 h 是单射函数。

综上命题得证

3.6.8

证明.

定义函数 $g : B \to A$ 如下：对任意 $b \in B$，存在 $a \in A$ 使得 $b = f(a)$ 则

$g(b)=a$（f 是单射的，保证了 a 的唯一性），否则 $g(b)=x_0$（x_0 是 A 中的某个元素，引理 *3.1.6* 保证 x_0 是存在的）。

现需证明定义的 g 是满射函数。对任意 $a\in A$，由定义 *3.4.1*（集合的像）可知 $f(X)\subseteq B$，所以 $f(a)\in f(X)\subseteq B, f(a)\in B$，此时由 g 的定义可知 $g(f(a))=a$ 是存在的;g 的满射性成立。

3.6.9

证明.

① $A\cup B$ 是一个有限集

设 A、B 的基数分别为 n、m，对 n 进行归纳。

归纳基始 *n=0*,即 $A=\varnothing$,所以 $A\cup B=B$,此时 $\#(A\cup B)=\#(B)=m$,归纳基始成立。

归纳假设 *n=k*，命题 $A\cup B$ 是有限集成立

假设 *n=k++*，某个 $a\in A, A'=A\backslash\{a\}$，由归纳假设可知 $A'\cup B$ 是有限集，若 $a\in B$ 则 $A'\cup B=A\cup B$，所以 $A\cup B$ 也是有限集；若 $a\notin B$ 则 $A'\{a\}\cup B=A\cup B$，由命题 *3.6.14* 可知（a）可知 $\#(A'\cup B)+1=\#(A\cup B)$，所以 $A\cup B$ 也是有限集；

至此归纳完成，命题成立

② $A\cap B$ 是一个有限集

设 A、B 的基数分别为 n、m，对 n 进行归纳。

归纳基始 *n=0*,即 $A=\varnothing$,所以 $A\cap B=\varnothing$,此时 $\#(A\cup B)=\#(\varnothing)=0$,归纳基始成立。

归纳假设 *n=k*，命题 $A\cap B$ 是有限集成立

假设 *n=k++*，某个 $a\in A, A'=A\backslash\{a\}$，由归纳假设可知 $A'\cap B$ 是有限集，若 $a\notin B$ 则 $A'\cap B=A\cap B$，所以 $A\cap B$ 也是有限集；若 $a\in B$ 则 $A'\cap B\cup\{a\}=A\cap B$，由命题 *3.6.14* 可知（$a$）可知 $\#(A'\cap B)+1=\#(A\cap B)$，所以 $A\cap B$ 也是有限集；

至此归纳完成，命题成立

③ $\#(A)+\#(B)=\#(A\cup B)+\#(A\cap B)$

设 $A\cap B$ 的基数为 n，对 n 进行归纳。

归纳基始 *n=0* 时，即 $A\cap B=\varnothing$，由命题 *3.6.14* 可知 $\#(A\cup B)=\#(A)+\#(B)$，归纳基始成立。

归纳假设 *n=k* 时，命题成立。

假设 *n=k++*,某个 $a \in A \cap B, A' = A \backslash \{a\}$,由 *3.6.14*(*a*)可知 $\#(A \cap B) = \#(A' \cap B) + 1$，由归纳假设可知 $\#(A') + \#(B) = \#(A' \cup B) + \#(A' \cap B)$，又 $\#(A) = \#(A') + 1$（引理 *3.6.9*），由于 $a \in B$，所以 $A \cup B = A' \cup B$，所以 $\#(A' \cup B) = \#(A \cup B)$，综合

$$(A \cap B) = \#(A' \cap B) + 1 \tag{16}$$

$$\#(A') + \#(B) = \#(A' \cup B) + \#(A' \cap B) \tag{17}$$

$$\#(A' \cup B) = \#(A \cup B) \tag{18}$$

$$\#(A) = \#(A') + 1 \tag{19}$$

得

$$\begin{aligned}
&\#(A \cup B) + \#(A \cap B) \\
&= \#(A' \cup B) + \#(A \cap B) \\
&= \#(A' \cup B) + \#(A' \cap B) + 1 \\
&= \#(A') + \#(B) + 1 \\
&= \#(A') + 1 + \#(B) \\
&= \#(A) + \#(B)
\end{aligned}$$

命题得证。

3.6.10

证明.

对 n 进行归纳

n=0，此时 $\{1, ..., n\} = \varnothing$，所以命题空成立。

（之前的命题有类似的 *n=0* 空成立，其实都要改为 *n=1* 为起始点）

归纳基始 *n=1*，$\bigcup\limits_{i \in \{1,...,n\}} = A_1$，即 $\#(A_1) > 1$，所以 $\#(A_1) \geq 2$（命题 *2.2.12*（*e*）保证的）

归纳假设 *n=k* 时，命题成立。

假设 *n=k++*，若 $\#(A_{k++}) \geq 2$，命题成立；若 $\#(A_{k++}) < 2$，所以 $\#(A_{k++}) = 0$ 或 $\#(A_{k++}) = 1$。若 $\#(A_{k++}) = 0$，则 $A_{k++} = \varnothing$，所以

$\bigcup_{i\in\{1,...,k++\}} A_i = \bigcup_{i\in\{1,...,k\}} A_i > k++$，由归纳假设可知存在 $i \in \{1,...,k\}$ 使得 $\#(A_i) \geq 2$；若 $\#(A_{k++}) = 1$，则 A_{k++} 是单元素集合，不妨设 $a \in A_{k++}$ 且 a 是其中的唯一元素，如果 $a \in \bigcup_{i\in\{1,...,k\}} A_i$，此时 $\bigcup_{i\in\{1,...,k++\}} A_i = \bigcup_{i\in\{1,...,k\}} A_i$，命题成立前面已说明。如果 $a \notin \bigcup_{i\in\{1,...,k\}} A_i$，由命题 *3.6.14* 可知 $\#(\bigcup_{i\in\{1,...,k++\}} A_i) = \#(\bigcup_{i\in\{1,...,k\}} A_i) + 1 > k++$，所以 $\#(\bigcup_{i\in\{1,...,k\}} A_i) > k$（命题 *2.2.6* 和自然数序的定义保证的），由归纳假设可知存在 $i \in \{1,...,k\}$ 使得 $\#(A_i) \geq 2$。

至此，归纳完成。