1 3.5 习题

3.5.5

说明. 按照定义证明即可

证明.

①$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$ 证明

令 $Z=(A\times B)\cap(C\times D)$，$Z'=(A\cap C)\times(B\cap D)$ 现在我们只需证明属于 Z 中的元素也属于 Z'，反之亦然。

对任意 $(x,y)\in Z$ 那么 $(x,y)\in A\times B$ 且 $(x,y)\in C\times D$，所以 $x\in A, x\in C$，$y\in B, y\in D$，由定义可知 $(x,y)\in Z'$。

反之，对任意 $(x,y)\in Z'$ 那么 $(x,y)\in A\cap C$ 且 $(x,y)\in B\cap D$，所以 $x\in A, x\in C$，$y\in B, y\in D$，由定义可知 $(x,y)\in Z$。

剩下的证明类似，故略

3.5.6

证明.

①$A\times B\subseteq C\times D$ 当且仅当 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$ 证明

先证明 $A\times B\subseteq C\times D \implies A\subseteq C, B\subseteq D$ 任意 $x\in A, y\in B \implies (x,y)\in A\times B$ 又 $A\times B\subseteq C\times D$ 所以 $(x,y)\in C\times D$，所以 $x\in C, y\in D$，由此可知对任意 $x\in A \implies x\in C$，$y\in B \implies y\in D$，所以 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$。

再证明 $A\subseteq C, B\subseteq D \implies A\times B\subseteq C\times D$ 任意 $(x,y)\in A\times B$ 所以 $x\in A, y\in B$, 由 $A\subseteq C, B\subseteq D$ 知 $x\in C, y\in D$ 那么 $(x,y)\in C\times D$，所以 $A\times B\subseteq C\times D$

②$A\times B=C\times D$ 当且仅当 $A=C$ 且 $B=D$ 证明

先证明 $A\times B=C\times D \implies A=C, B=D$。因 $A\times B=C\times D$ 由 ①知 $A\subseteq C, B\subseteq D$，由集合相等的对称性可知 $C\times D=A\times B$，所以 $B\subseteq A, D\subseteq B$, 综上 $A=C$ 且 $B=D$

类似证明 $A=C, B=D \implies A\times B=C\times D$。

③去掉空集的限制，空集和自然数 *0* 的效果很类似，上面的①②都不再成立

3.5.7

说明. 证明唯一性，常见思路是先定义出目标对象，再证明其唯一性，即证明其他满足条件的对象，都与目标对象相等

证明.
定义 $h: Z \to X \times Y, h(z) := (f(z), g(z))$
由 h 的定义，显然 $\pi_{X\times Y\to X} \circ h = f$ 且 $\pi_{X\times Y\to Y} \circ h = g$ 现在证明其唯一性。假设存在另一个函数 h' 满足 $\pi_{X\times Y\to X} \circ h' = f$ 且 $\pi_{X\times Y\to Y} \circ h' = g$，现需证明 $h = h'$，我们要说明对任意 z 有 $h(z) = h'(z)$。设 $h(z) = (f(z), g(z)) = (x, y)$ $h'(z) = (x', y')$ 由 $\pi_{X\times Y\to X} \circ h = f$ 和 $\pi_{X\times Y\to X}(x, y) := x$ 知 $\pi_{X\times Y\to X} \circ h(z) = x = f(z)$ 同理 $\pi_{X\times Y\to X} \circ h'(z) = x' = f(z)$，所以 $x = x'$ 同理 $y = y'$，综上对任意 z 有 $h(z) = h'(z)$ 那么由函数的相等定义，有 $h' = h$，唯一性得到证明

3.5.8

证明.
如果每一个 X_i 都是非空集合，由引理 *3.5.12* 可知，集合 $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ 也是非空的，所以 $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ 为空至少有一个 X_i 为空。

如果有一个 X_i 为空，由笛卡尔积的定义，$1 \leqslant i \leqslant n$ 的 x_i 不存在，所以 $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ 为空。

综上，命题得证

3.5.9

说明. 按照集合相等的定义证明即可

证明.
任意 $x \in [(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha)\bigcap(\bigcup\limits_{\beta\in J} B_\beta)] \Rightarrow$ 存在 $\alpha \in I$ 使得 $x \in A_\alpha$ 且存在 $\beta \in J$ 使得 $x \in B_\beta$，由此可知 $(\alpha, \beta) \in I \times J, x \in (A_\alpha \bigcap B_\beta)$，所以 $x \in \bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in I\times J} (A_\alpha \bigcap B_\beta)$

任意 $x \in \bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in I\times J}(A_\alpha \bigcap B_\beta) \Rightarrow$ 存在 $(\alpha,\beta)\in I\times J, x\in (A_\alpha\bigcap B_\beta)$，由此可知存在 $\alpha \in I$ 使得 $x \in A_\alpha$ 且存在 $\beta \in J$ 使得 $x \in B_\beta$，所以 $x \in [(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha)\bigcap(\bigcup\limits_{\beta\in J} B_\beta)]$

综上，命题得证

3.5.10

说明.

证明.

①先证明函数相等 $\Rightarrow$ 图相等

假设两个函数 $f: X\to Y$ 和 $\tilde{f}: X\to Y$ 相等，那么由函数的相等定义，有任意 $x\in X, f(x)=\tilde{f}(x)$，由图的定义可知图是一个集合，又 $(x,f(x))\in f$ 的图，$(x,\tilde{f}(x))\in\tilde{f}$ 的图，且 $f(x)=\tilde{f}(x)$，所以两函数的图相等。

证明图相等 $\Rightarrow$ 函数相等。

假设两函数 $f,\tilde{f}$ 的图相等。对任意 $x\in X$，有 $(x,f(x))\in f$ 的图，由图相等可知 $(x,f(x))\in\tilde{f}$ 的图。

同理：$(x,\tilde{f}(x))\in\tilde{f}$ 的图，$(x,\tilde{f}(x))\in f$ 的图，

假设两个函数不相等，应该存在 $x_0, f(x_0)\neq\tilde{f}(x_0)$，但由之前的说明可知，$(x_0,f(x_0))\in\tilde{f}$ 的图，所以存在 $(x_1,\tilde{f}(x_1))=(x_0,f(x_0))\in\tilde{f}$ 的图，有有序对相等的定义可知 $x_0=x_1, f(x_0)=\tilde{f}(x_1)$，而由 $x_0=x_1$，可以得到 $f(x_0)=\tilde{f}(x_1)=\tilde{f}(x_0)$ 这与 $f(x_0)\neq\tilde{f}(x_0)$ 矛盾，所以假设不成立

综上，命题得证

② 先定义函数 f: $X\to Y$，其性质为 $(x,y)\in G$。由题设“子集 G 具有下述性质：对每一个 $x\in X$，集合$y\in Y:(x,y)\in G$ 中恰好有一个元素”，可知这里定义的 y 是存在且唯一，满足函数定义。由 f 的构造方式知，f 的图与 G 相等（这里不做证明了）。

现在证明 f 的唯一性。

假设存在另外一个函数 $f': X\to Y$，它的图与 G 相等。那么对任意 $x\in X$，由图的定义可知 $(x,f'(x))\in f'$ 的图，因为 f' 的图与 G 相等，所以 $(x,f'(x))\in G$，由题设“子集 G 具有下述性质：对每一个 $x\in X$，集合$y\in Y:(x,y)\in G$ 中恰好有一个元素”，所以这里的 $y=f'(x)$，有由 f 的定义可知 $(x,f(x))\in G$，由 y 的唯一性可知，$f'(x)=f(x)$，所以 $f=f'$

综上所述，函数 f 唯一。

3.5.11

说明. 题目中的提示已经说明了证明思路

证明.
①对任意两个集合 X 和 Y，利用引理 *3.4.9* 和分类公理构造出由 $X \times Y$ 的一切子集组成的集合，它满足垂线测试。

由引理 *3.4.9* 知存在集合 $\{a : a \in X \times Y\}$，即 $X \times Y$ 的所有子集构成的集合 A，有分类公里得到 $\{b \in A : b\text{满足垂线测试}\}$ 集合 B。

②利用 *3.5.10* 和替代公理构造出一个集合，该集合与公理 *3.10* 相同。