16.5 习题

张志聪

2025 年 5 月 6 日

16.5.1

- (a)

  设 $\epsilon > 0$，由傅里叶定理可知，当 N 足够大时，有

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e_n \right\|_2 \leq \epsilon$$

我们有

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n$$

$$= \hat{f}(0)e_0 + \sum_{n=1}^{N} \hat{f}(n)e_n + \hat{f}(-n)e_{-n}$$

$$= \int_{[0,1]} f(x)dx + \sum_{n=1}^{N} (\int_{[0,1]} f(x)e^{-2\pi nx}dx)e_n + (\int_{[0,1]} f(x)e^{2\pi nx}dx)e_{-n}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} e_n \int_{[0,1]} f(x)(cos(2\pi nx) - isin(2\pi nx))dx + e_{-n} \int_{[0,1]} f(x)(cos(2\pi nx) + isin(2\pi nx))dx$$

$$= \frac{1}{2}a_0$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} e_n \int_{[0,1]} f(x)cos(2\pi nx) - if(x)sin(2\pi nx)dx + e_{-n} \int_{[0,1]} f(x)cos(2\pi nx) + if(x)sin(2\pi nx)dx$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} (e_n + e_{-n}) \int_{[0,1]} f(x)cos(2\pi nx)dx + (-e_n + e_{-n}) \int_{[0,1]} if(x)sin(2\pi nx)dx$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} (e_n + e_{-n}) \int_{[0,1]} f(x)cos(2\pi nx)dx + (-e_n + e_{-n}) \int_{[0,1]} if(x)sin(2\pi nx)dx$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} 2cos(2\pi nx) \int_{[0,1]} f(x)cos(2\pi nx)dx - 2isin(2\pi nx) \int_{[0,1]} if(x)sin(2\pi nx)dx$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} 2cos(2\pi nx) \int_{[0,1]} f(x)cos(2\pi nx)dx + 2sin(2\pi nx) \int_{[0,1]} f(x)sin(2\pi nx)dx$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(2\pi nx) + b_n sin(2\pi nx)$$

综上可得，N 足够大时，

$$\left\| f - (\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(2\pi nx) + b_n sin(2\pi nx)) \right\|_2 \leq \epsilon$$

所以，$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(2\pi nx) + b_n sin(2\pi nx)$ 依 L^2 度量收敛于 f。

- (b)

部分和

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-N}^{N}|\hat{f}(n)| \\
&=\sum_{n=-N}^{N}|\int_{[0,1]}f(x)e^{-2\pi nx}dx| \\
&=\sum_{n=-N}^{N}|\int_{[0,1]}f(x)(cos(2\pi nx)-isin(2\pi nx))dx| \\
&=\sum_{n=-N}^{N}|\frac{1}{2}(a_n-ib_n)| \\
&=|\frac{1}{2}(a_0-ib_0)|+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}|(a_n-ib_n)|+|(a_{-n}-ib_{-n})| \\
&=|\frac{1}{2}a_0|+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(|(a_n-ib_n)|+|(a_{-n}-ib_{-n})|) \\
&=|\frac{1}{2}a_0|+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(|(a_n-ib_n)|+|(a_n+ib_n)|) \\
&\leq|\frac{1}{2}a_0|+\sum_{n=1}^{N}|a_n|+|ib_n|
\end{aligned}$$

于是，由题设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是绝对收敛，可知 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|$ 绝对收敛。由定理 16.5.3 可知，$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e_n$ 绝对收敛于 f。

于是对任意 $\epsilon>0$，存在 N_0，使得只要 $N\geq N_0$，有

$$\left\|f-\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e_n\right\|_{\infty}\leq\epsilon$$

由 (a) 可知，

$$\left\|f-(\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}a_ncos(2\pi nx)+b_nsin(2\pi nx))\right\|_{\infty}\leq\epsilon$$

综上，级数 $\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ncos(2\pi nx)+b_nsin(2\pi nx)$ 一致收敛于 f。

16.5.2

- (a)

  令 $y=2x-1$，于是 $x=\frac{y+1}{2}$，函数 $y:[-1,1]\to[0,1]$，于是由命题 11.10.7 可知，

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\int_{[0,1]} f(x)cos(2\pi nx)dx \\
&= 2\int_{[0,1]} (1-2x)^2 cos(2\pi nx)dx \\
&= \int_{[-1,1]} y^2 cos(\pi(y+1)n)dy \\
&= \int_{[-1,1]} y^2 cos(\pi ny)cos(\pi n)dy \\
&= (-1)^n \int_{[-1,1]} y^2 cos(\pi ny)dy
\end{aligned}$$

  $n=0$ 时，$a_0=(-1)^0\int_{[-1,1]} y^2dy=\frac{2}{3}$。

  $n\geq 1$ 时，我们设 $u=y^2, du=2ydy; v=\frac{1}{\pi n}sin(\pi ny), dv=cos(\pi ny)$，利用命题 11.10.1（分部积分法）可知，

$$\begin{aligned}
\int_{[-1,1]} y^2 cos(\pi ny)dy &= \int_{[-1,1]} udv \\
&= uv|_{-1}^{1} - \int_{[-1,1]} vdu \\
&= \frac{y^2}{\pi n}sin(\pi ny)|_{-1}^{1} - \int_{[-1,1]} \frac{1}{\pi n}sin(\pi ny)2ydy \\
&= \frac{2sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{2}{\pi n}\int_{[-1,1]} ysin(\pi ny)dy \\
&= -\frac{2}{\pi n}\int_{[-1,1]} ysin(\pi ny)dy
\end{aligned}$$

  （以上的处理，可以使 y^2 降幂）

  接下来，我们计算 $\int_{[-1,1]} ysin(\pi ny)dy$。

  令 $u=y, du=dy; v=-\frac{cos(\pi ny)}{n\pi}, dv=sin(\pi ny)dy$，再次利用分部积

分法，

$$
\begin{aligned}
\int_{[-1,1]} ysin(\pi ny)dy &= \int_{[-1,1]} udv \\
&= uv|_{-1}^{1} - \int_{[-1,1]} vdu \\
&= -\frac{ycos(\pi ny)}{n\pi}|_{-1}^{1} + \int_{[-1,1]} \frac{cos(\pi ny)}{n\pi} dy \\
&= -\frac{2cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{1}{n\pi}\frac{sin(\pi ny)}{n\pi}|_{-1}^{1} \\
&= -\frac{2cos(\pi n)}{\pi n}
\end{aligned}
$$

综上可得，

$$
\begin{aligned}
a_n &= (-1)^n \int_{[-1,1]} y^2 cos(\pi ny)dy \\
&= (-1)^n (\frac{2}{\pi n}\frac{2cos(\pi n)}{\pi n}) \\
&= (-1)^n (\frac{4cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}) \\
&= (-1)^n (-1)^n (\frac{4}{\pi^2 n^2}) \\
&= \frac{4}{\pi^2 n^2}
\end{aligned}
$$

类似地，我们有

$$
\begin{aligned}
b_n &= 2\int_{[0,1]} f(x)sin(2\pi nx)dx \\
&= 2\int_{[0,1]} (1-2x)^2 sin(2\pi nx)dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(2\pi nx) + b_n sin(2\pi nx) \\
&= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} cos(2\pi nx)
\end{aligned}
$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2}$$
$$= \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

由推论 7.3.7 可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，进一步可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛。又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是绝对收敛的。

综上，由习题 16.5.1 可知，级数 $\frac{1}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} cos(2\pi nx)$ 一致收敛于 f。

- (b)

  因为级数 $\frac{1}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} cos(2\pi nx)$ 一致收敛于 f，

  对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N_0 > 1$ 使得只要 $N \geq N_0$ 和 $x = 0$，都有

$$|(\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{\pi^2 n^2} cos(0)) - f(0)| \leq \epsilon$$
$$| - \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{\pi^2 n^2}| \leq \epsilon$$
$$\frac{2}{3} - \epsilon \leq |\sum_{n=1}^{N} \frac{4}{\pi^2 n^2}| \leq \frac{2}{3} + \epsilon$$

  由 ϵ 的任意性可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} = \frac{2}{3}$，进一步可得，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{\pi^2}{6}$。

- (c)

  由题设可知，

$$\hat{f}(n) = \int_{[0,1]} f(x) e_{-n} dx$$
$$= \int_{[0,1]} f(x)(cos(2\pi nx) - isin(2\pi nx))dx$$
$$= \frac{a_n - ib_n}{2}$$
$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}$$

（省略了积分的计算过程）

同理可得，

$$\begin{aligned}\hat{f}(-n) &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= \frac{a_0}{2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

由命题 16.5.4 可知，

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

综上可得，

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \\ &= |\hat{f}(0)|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} |\hat{f}(n)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \\ &= \frac{1}{9} + 2\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{2}{\pi^2 n^2}|^2 \\ &= \frac{1}{9} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^4 n^4} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \int [0,1] |f(x)|^2 dx \\ &= \int [0,1] (1-2x)^2 dx \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

综上可得，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{5} &= \frac{1}{3} + \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \\
\frac{4}{45} &= \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90}
\end{aligned}
$$

16.5.3

这道题不对吧!!! 都没定义这个特殊符号是怎么运算的。

P 是一个三角多项式，所以 $P \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，且存在一个整数 $N \geq 0$ 和一个复数序列 $(c_n)_{n=-N}^{N}$ 使得 $P = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e_n$。

- (a)

$$
\begin{aligned}
f * P &= f * \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \\
&= \sum_{n=-N}^{N} f * (c_n e_n) \\
&= \sum_{n=-N}^{N} c_n (f * e_n) \\
&= \sum_{n=-N}^{N} c_n (\hat{f}(n) e_n) \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) c_n e_n
\end{aligned}
$$

（书中 P345，有类似说明）

利用引理 16.2.5 和推论 16.3.6，我们有

$$\begin{aligned}\widehat{f*P}(n) &= \langle \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)c_k e_k, e_n\rangle \\ &= \langle \hat{f}(n)c_n e_n, e_n\rangle \\ &= \hat{f}(n)c_n\langle e_n, e_n\rangle \\ &= \hat{f}(n)c_n\end{aligned}$$

由推论 16.3.6 和定义 16.3.7，我们有

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)c_n &= \langle f, e_n\rangle\langle P, e_n\rangle \\ \hat{f}(n)\hat{P}(n) &= \langle f, e_n\rangle\langle P, e_n\rangle\end{aligned}$$

综上可得，

$$\widehat{f*P}(n) = \hat{f}(n)c_n = \hat{f}(n)\hat{P}(n)$$

- (b) $\circledast$

  由定理 16.5.4（Plancherel 定理）可知，$|\hat{f}(n)|$ 对任意 n 有界，函数 $f(x)$ 有界。所以存在 $M > 0$ 使得 $|\hat{f}(n)| < M$，$|f(x)| < M$。

  由定理 16.4.1(三角多项式的魏尔斯特拉斯逼近定理) 可知，存在三角多项式 P 使得

$$\|g - P\|_\infty \le \epsilon$$

  由引理 16.2.7(b)，我们有

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f*g}(n) - \widehat{f*P}(n)\right| &= |\langle f*g, e_n\rangle - \langle f*P, e_n\rangle| \\ &= |\langle f*(g-P), e_n\rangle| \\ &\le \|f*(g-P)\|_2\|e_n\|_2 \\ &= \|f*(g-P)\|_2\end{aligned}$$

  又

$$\begin{aligned}|f*(g-P)| &= \left|\int_{[0,1]} f(y)(g-P)(x-y)dy\right| \\ &\le \left|\epsilon\int_{[0,1]} f(y)dy\right| \\ &\le M\epsilon\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|f*(g-P)\|_2 &= \left(\int_{[0,1]}|f*(g-P)|^2dx\right)^{1/2}\\ &\leq M\epsilon\end{aligned}$$

对于

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f*P}(n)-\hat{f}(n)\hat{g}(n)\right| &= \left|\hat{f}(n)\hat{P}(n)-\hat{f}(n)\hat{g}(n)\right|\\ &= \left|\hat{f}(n)(\hat{P}(n)-\hat{g}(n))\right|\\ &= \left|\hat{f}(n)(\langle P,e_n\rangle-\langle f,e_n\rangle)\right|\\ &= \left|\hat{f}(n)\langle P-f,e_n\rangle\right|\\ &\leq |\hat{f}(n)|\,|\langle P-f,e_n\rangle|\\ &\leq |\hat{f}(n)|\,\|P-f\|_2\,\|e_n\|_2\\ &= M\epsilon\end{aligned}$$

综上所述，

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f*g}(n)-\hat{f}(n)\hat{g}(n)\right| &= \left|\widehat{f*g}(n)-\widehat{f*P}(n)+\widehat{f*P}(n)-\hat{f}(n)\hat{g}(n)\right|\\ &\leq \left|\widehat{f*g}(n)-\widehat{f*P}(n)\right|+\left|\widehat{f*P}(n)-\hat{f}(n)\hat{g}(n)\right|\\ &\leq M\epsilon+M\epsilon\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可知，$\widehat{f*g}(n)=\hat{f}(n)\hat{g}(n)$。

16.5.4

(1)

由题设，我们只需在说明 f' 是 1 周期函数，即可说明 $f'\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。

对任意 $x_0\in\mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

于是，对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $|x-x_0|<\delta$，都有

$$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)|\leq\epsilon$$

令 $y=x+1$，那么对 $|y-(x_0+1)|<\delta$，即 $|x+1-(x_0+1)|=|x-x_0|<\delta$，由 f 是 1 周期函数，我们有

$$
\begin{aligned}
|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-(x_0+1)}-f'(x_0)| &= |\frac{f(x+1)-f(x_0)}{x+1-(x_0+1)}-f'(x_0)| \\
&= |\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)| \\
&\le \epsilon
\end{aligned}
$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
f'(x_0+1) &= \lim_{y\to(x_0+1)}\frac{f(y)-f(x_0+1)}{y-(x_0+1)} \\
&= f'(x_0)
\end{aligned}
$$

所以，f' 是 1 周期函数。

(2)

- 方法一

$$\hat{f'}(n)=\int_{[0,1]}f'(x)e^{-2\pi inx}dx$$

令 $u=f(x), v=e^{-2\pi inx}$ 于是 $du=f'(x)dx, dv=-2\pi ine^{-2\pi inx}dx$。

$$
\begin{aligned}
\hat{f'}(n) &= \int_{[0,1]}f'(x)e^{-2\pi inx}dx \\
&= uv|_0^1-\int_{[0,1]}udv \\
&= f(x)e^{-2\pi inx}|_0^1-\int_{[0,1]}-2f(x)\pi ine^{-2\pi inx}dx \\
&= f(1)-f(0)+2\pi in\int_{[0,1]}f(x)e^{-2\pi inx}dx \\
&= 2\pi in\hat{f}(n)
\end{aligned}
$$

方法一的问题在于，本书中没有复数函数的导数的定义。胜在方便

- 方法二

利用分部积分法，

$$
\begin{aligned}
\hat{f}'(n) &= \int_{[0,1]} f'(x)e^{-2\pi inx}dx \\
&= \int_{[0,1]} f'(x)(cos(2\pi nx) - isin(2\pi nx))dx \\
&= \int_{[0,1]} f'(x)cos(2\pi nx)dx - i\int_{[0,1]} f'(x)sin(2\pi nx)dx \\
&= \left[f(x)cos(2\pi nx)|_0^1 - \int_{[0,1]} f(x)\cdot(2\pi n)sin(2\pi nx)dx\right] \\
&- i\left[f(x)sin(2\pi nx)|_0^1 - \int_{[0,1]} f(x)\cdot(2\pi n)cos(2\pi nx)dx\right] \\
&= \int_{[0,1]} f(x)\cdot(2\pi n)sin(2\pi nx)dx + i\int_{[0,1]} f(x)\cdot(2\pi n)cos(2\pi nx)dx \\
&= 2\pi n\int_{[0,1]} f(x)sin(2\pi nx) + if(x)cos(2\pi nx)dx \\
&= 2\pi n\int_{[0,1]} f(x)(sin(2\pi nx) + icos(2\pi nx)) \\
&= 2\pi n\int_{[0,1]} f(x)ie^{-2\pi inx}dx \\
&= 2\pi ni\int_{[0,1]} f(x)e^{-2\pi inx}dx \\
&= 2\pi ni\hat{f}(n)
\end{aligned}
$$

16.5.5

todo

由 Plancherel 定理可知，

$$
\|f+g\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f+g}(n)|^2
$$

$$
\|f-g\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f-g}(n)|^2
$$

于是，

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2-\|f-g\|_2^2&=\langle f+g,f+g\rangle-\langle f-g,f-g\rangle\\&=2\langle f,g\rangle+2\langle g,f\rangle\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f+g}(n)|^2-\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f-g}(n)|^2\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\langle f+g,e_n\rangle)^2-(\langle f-g,e_n\rangle)^2\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\langle f,e_n\rangle+\langle g,e_n\rangle)^2-(\langle f,e_n\rangle-\langle g,e_n\rangle)^2\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}4\langle f,e_n\rangle\langle g,e_n\rangle\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}4\hat{f}(n)\hat{g}(n)\end{aligned}$$

综上可得，

$$\langle f,g\rangle+\langle g,f\rangle=\sum_{n\in\mathbb{Z}}2\hat{f}(n)\hat{g}(n)$$

16.5.6

先证明函数 $f(Lx)\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。由 $f(x)$ 是 L 周期函数，我们有，

$$f(L(x+1))=f(Lx+L)=f(Lx)$$

于是可得 $f(Lx)$ 是 1 周期函数。

又由 $g(x):=Lx$ 和 $f(x)$ 都连续可知，$f\circ g(x)$ 连续。

综上可得，$f(Lx)\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。

- (a)

令 $h(x) = f(Lx)$。由傅里叶定理可知，对任意 $\epsilon > 0$，当 N 足够大时，都有

$$\left\| h - \sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n) e_n \right\|_2 < \epsilon$$

$$\left\| f(Lx) - \sum_{n=-N}^{N} (\int_{[0,1]} f(Lx) e^{-2\pi inx} dx) e_n \right\|_2 < \epsilon$$

$$\left(\int_{[0,1]} |f(Lx) - \sum_{n=-N}^{N} (\int_{[0,1]} f(Lx) e^{-2\pi inx} dx) e_n|^2 dx \right)^{1/2} < \epsilon$$

令 $y = Lx$，$y : [0, L] \to [0, 1]$，我们有

$$\left(\int_{[0,1]} |f(Lx) - \sum_{n=-N}^{N} (\int_{[0,1]} f(Lx) e^{-2\pi inx} dx) e_n|^2 dx \right)^{1/2} < \epsilon$$

$$\left(\int_{[0,1]} |f(Lx) - \sum_{n=-N}^{N} (\frac{1}{L} \int_{[0,L]} f(y) e^{-2\pi iny/L} dy) e_n|^2 dx \right)^{1/2} < \epsilon$$

$$\left(\int_{[0,1]} |f(Lx) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n|^2 dx \right)^{1/2} < \epsilon$$

$$\left(\int_{[0,1]} |f(Lx) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi nix}|^2 dx \right)^{1/2} < \epsilon$$

令 $z = Lx$，于是

$$\left(\int_{[0,1]} |f(Lx) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi nix}|^2 dx \right)^{1/2} < \epsilon$$

$$\left(\frac{1}{L} \int_{[0,L]} |f(z) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi niz/L}|^2 dz \right)^{1/2} < \epsilon$$

$$\int_{[0,1]} |f(z) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi niz/L}|^2 < L\epsilon^2$$

由 ϵ 的任意性和 L 是定值可知，$\lim\limits_{N\to\infty} \int_{[0,1]} |f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi nix}|^2 = 0$。

- (b)

换言之，我们需要证明

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f-\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi inx/L}\right\|_{\infty}=0$$

利用命题 11.10.7（变量替换公式），令 $y=Lx$。

$$\begin{aligned}\widehat{f(Lx)}(n)&=\langle f(Lx),e_n\rangle\\&=\int_{[0,1]}f(Lx)e^{-2\pi inx}dx\\&=\frac{1}{L}\int_{[0,L]}f(y)e^{-2\pi iny/L}dy\\&=c_n\end{aligned}$$

由题设 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|$ 绝对收敛可知，$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f(Lx)}(n)|$ 绝对收敛。于是由定理 16.5.3 可知，

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f(Lx)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f(Lx)}(n)e^{2\pi inx}\right\|_{\infty}=0$$

替换 $y=Lx$，且 $c_n=\widehat{f(Lx)}(n)$（这两个值都是定值，替换不会受到影响），我们有

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f(y)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f(Lx)}(n)e^{2\pi iny/L}\right\|_{\infty}=0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f(x)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi inx/L}\right\|_{\infty}=0$$

- (c)

  由于 $f(Lx)\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，由 Plancherel 定理可知，

$$\|f(Lx)\|_2^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f(Lx)}(n)|^2$$

  (b) 的证明中，有

$$\widehat{f(Lx)}(n)=c_n$$

利用命题 11.10.7（变量替换公式），令 $y = Lx$。

$$\begin{aligned}\|f(Lx)\|_2^2 &= \langle f(Lx), f(Lx)\rangle \\ &= \int_{[0,1]} |f(Lx)|^2 dx \\ &= \frac{1}{L}\int_{[0,L]} |f(y)|^2 dy\end{aligned}$$

综上可得，

$$\frac{1}{L}\int_{[0,L]} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$