1 3.5 习题

3.5.5

说明. 按照定义证明即可

证明.
①$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$ 证明

令 $Z=(A\times B)\cap(C\times D)$，$Z'=(A\cap C)\times(B\cap D)$ 现在我们只需证明属于 Z 中的元素也属于 Z'，反之亦然。

对任意 $(x,y)\in Z$ 那么 $(x,y)\in A\times B$ 且 $(x,y)\in C\times D$，所以 $x\in A,x\in C$，$y\in B,y\in D$，由定义可知 $(x,y)\in Z'$。

反之，对任意 $(x,y)\in Z'$ 那么 $(x,y)\in A\cap C$ 且 $(x,y)\in B\cap D$，所以 $x\in A,x\in C$，$y\in B,y\in D$，由定义可知 $(x,y)\in Z$。

剩下的证明类似，故略

3.5.6

证明.
①$A\times B\subseteq C\times D$ 当且仅当 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$ 证明

先证明 $A\times B\subseteq C\times D\implies A\subseteq C,B\subseteq D$ 任意 $x\in A,y\in B\implies (x,y)\in A\times B$ 又 $A\times B\subseteq C\times D$ 所以 $(x,y)\in C\times D$，所以 $x\in C,y\in D$，由此可知对任意 $x\in A\implies x\in C$，$y\in B\implies y\in D$，所以 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$。

再证明 $A\subseteq C,B\subseteq D\implies A\times B\subseteq C\times D$ 任意 $(x,y)\in A\times B$ 所以 $x\in A,y\in B$, 由 $A\subseteq C,B\subseteq D$ 知 $x\in C,y\in D$ 那么 $(x,y)\in C\times D$，所以 $A\times B\subseteq C\times D$

②$A\times B=C\times D$ 当且仅当 $A=C$ 且 $B=D$ 证明

先证明 $A\times B=C\times D\implies A=C,B=D$。因 $A\times B=C\times D$ 由 ①知 $A\subseteq C,B\subseteq D$，由集合相等的对称性可知 $C\times D=A\times B$，所以 $B\subseteq A,D\subseteq B$, 综上 $A=C$ 且 $B=D$

类似证明 $A=C,B=D\implies A\times B=C\times D$。

③去掉空集的限制，空集和自然数 *0* 的效果很类似，上面的①②都不再成立

3.5.7

说明. 证明唯一性，常见思路是先定义出目标对象，再证明其唯一性，即证明其他满足条件的对象，都与目标对象相等

证明.
定义 $h : Z \to X \times Y, h(z) := (f(z), g(z))$
由 h 的定义,显然 $\pi_{X\times Y\to X}\circ h = f$ 且 $\pi_{X\times Y\to Y}\circ h = g$ 现在证明其唯一性。假设存在另一个函数 h' 满足 $\pi_{X\times Y\to X}\circ h' = f$ 且 $\pi_{X\times Y\to Y}\circ h' = g$, 现需证明 $h = h'$, 我们要说明对任意 z 有 $h(z) = h'(z)$。设 $h(z) = (f(z), g(z)) = (x, y)$ $h'(z) = (x', y')$ 由 $\pi_{X\times Y\to X}\circ h = f$ 和 $\pi_{X\times Y\to X}(x, y) := x$ 知 $\pi_{X\times Y\to X}\circ h(z) = x = f(z)$ 同理 $\pi_{X\times Y\to X}\circ h'(z) = x' = f(z)$, 所以 $x = x'$ 同理 $y = y'$, 综上对任意 z 有 $h(z) = h'(z)$ 那么由函数的相等定义，有 $h' = h$, 唯一性得到证明

3.5.8

证明.
如果每一个 X_i 都是非空集合，由引理 *3.5.12* 可知，集合 $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ 也是非空的, 所以 $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ 为空至少有一个 X_i 为空。

如果有一个 X_i 为空，由笛卡尔积的定义，$1 \leqslant i \leqslant n$ 的 x_i 不存在，所以 $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ 为空。

综上，命题得证

3.5.9

说明. 按照集合相等的定义证明即可

证明.
任意 $x \in [(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha)\bigcap(\bigcup\limits_{\beta\in J} B_\beta)] \Rightarrow$ 存在 $\alpha \in I$ 使得 $x \in A_\alpha$ 且存在 $\beta \in J$ 使得 $x \in B_\beta$，由此可知 $(\alpha, \beta) \in I \times J, x \in (A_\alpha \bigcap B_\beta)$，所以 $x \in \bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in I\times J} (A_\alpha \bigcap B_\beta)$

任意 $x \in \bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in I\times J}(A_\alpha \bigcap B_\beta) \Rightarrow$ 存在 $(\alpha,\beta) \in I \times J, x \in (A_\alpha \bigcap B_\beta)$，由此可知存在 $\alpha \in I$ 使得 $x \in A_\alpha$ 且存在 $\beta \in J$ 使得 $x \in B_\beta$，所以 $x \in [(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha)\bigcap(\bigcup\limits_{\beta\in J} B_\beta)]$

综上，命题得证

3.5.10

说明.

证明.

①先证明函数相等 $\Rightarrow$ 图相等

假设两个函数 $f : X \to Y$ 和 $\tilde{f} : X \to Y$ 相等，那么由函数的相等定义，有任意 $x \in X, f(x) = \tilde{f}(x)$，由图的定义可知图是一个集合，又 $(x, f(x)) \in f$ 的图，$(x, \tilde{f}(x)) \in \tilde{f}$ 的图，且 $f(x) = \tilde{f}(x)$，所以两函数的图相等。

证明图相等 $\Rightarrow$ 函数相等。

假设两函数 $f, \tilde{f}$ 的图相等。对任意 $x \in X$，有 $(x, f(x)) \in f$ 的图，由图相等可知 $(x, f(x)) \in \tilde{f}$ 的图。

同理：$(x, \tilde{f}(x)) \in \tilde{f}$ 的图，$(x, \tilde{f}(x)) \in f$ 的图，

假设两个函数不相等，应该存在 $x_0, f(x_0) \neq \tilde{f}(x_0)$，但由之前的说明可知，$(x_0, f(x_0)) \in \tilde{f}$ 的图，所以存在 $(x_1, \tilde{f}(x_1)) = (x_0, f(x_0)) \in \tilde{f}$ 的图，有有序对相等的定义可知 $x_0 = x_1, f(x_0) = \tilde{f}(x_1)$，而由 $x_0 = x_1$，可以得到 $f(x_0) = \tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_0)$ 这与 $f(x_0) \neq \tilde{f}(x_0)$ 矛盾，所以假设不成立

综上，命题得证

② 先定义函数 f: $X \to Y$，其性质为 $(x, y) \in G$。由题设"子集 G 具有下述性质：对每一个 $x \in X$，集合$y \in Y : (x, y) \in G$ 中恰好有一个元素"，可知这里定义的 y 是存在且唯一，满足函数定义。由 f 的构造方式知，f 的图与 G 相等（这里不做证明了）。

现在证明 f 的唯一性。

假设存在另外一个函数 $f' : X \to Y$，它的图与 G 相等。那么对任意 $x \in X$，由图的定义可知 $(x, f'(x)) \in f'$ 的图，因为 f' 的图与 G 相等，所以 $(x, f'(x)) \in G$，由题设"子集 G 具有下述性质：对每一个 $x \in X$，集合$y \in Y : (x, y) \in G$ 中恰好有一个元素"，所以这里的 $y = f'(x)$，有由 f 的定义可知 $(x, f(x)) \in G$，由 y 的唯一性可知，$f'(x) = f(x)$，所以 $f = f'$

综上所述，函数 f 唯一。

3.5.11

说明. 题目中的提示已经说明了证明思路

证明.

①对任意两个集合 X 和 Y，利用引理 *3.4.9* 和分类公理构造出由 $X\times Y$ 的一切子集组成的集合，它满足垂线测试。

由引理 *3.4.9* 知存在集合 $\{a : a\in X\times Y\}$，即 $X\times Y$ 的所有子集构成的集合 A，有分类公里得到 $\{b\in A : b\text{满足垂线测试}\}$ 集合 B。

②利用 *3.5.10* 和替代公理构造出一个集合，该集合与公理 *3.10* 相同。如下：

$f_G := \{f : \alpha\in B, \text{函数 } f \text{ 是定义域为 } X \text{ 值域为 } Y, f \text{ 的图与}\alpha\text{相同}\}$

现在我们只需证明 f_G 集合与公理 *3.10* 描述的集合 $f_{ps} := \{f : f \text{ 是一个定义域 } X \text{ 且值域为 } Y \text{ 的函数}\}$ 相等。

若 $f_x\in f_G$，那么函数 f_x 的定义域是 X，值域是 Y，所以 $f_x\in f_{ps}$,

若 $f_x\in f_{ps}$,那么函数 f_x 的定义域是 X,值域是 Y,又 f_x的图$\{(x, f_x(x)), x\in X\}$ 为 β，由函数的定义可知 β 满足垂线测试，所以 $\beta\in B$。由此可以得到一个函数 $f'_x : X\to Y$ 它的图为 β，由 *3.5.10* 可知两函数 f_x 和 f'_x 相等，又 $f'_x\in f_G$，所以 $f_x\in f_G$。

综上所述，命题得证。

3.5.12

说明. 证明思路：先证明提示中的命题，然后证明 3.5.12

证明.

①证明提示中的命题

以归纳法证明该命题。

归纳基始,当 N=*0* 时,存在唯一的函数 $a_0 : \{0\}\to N, a_0(0) = c$。因为小于 *0* 的自然数不存在,所以 $a_0(n{+}{+}) = f(n, a(n))$对所有满足 $n < 0$ 的 $n\in$ N均成立 这一点空成立。由 a_0 的定义可知，a_0 是唯一的。

归纳假设 N=k 时，提示中的命题成立。

现需证明 N=k++ 时，提示中的命题成立。先尝试定义出函数 $a_{k++}:\{n\in\mathrm{N}:n\le k\}\to \mathrm{N}k++=f(k,a(k))$ 当 $n<k$ 时,$a_k(n)=a_{k++}(n), a_{k++}(k++)=f(k,a(k))$。

现要证明函数 a_{k++} 的唯一性。假设存在另一个函数 a_j，则存在一个 x，使得 $a_{k++}(x)\neq a_j(x)$，若 x 属于函数 a_k 的定义域，那么与归纳假设 a_k 的唯一性矛盾。若 x=k++，由函数的定义可知，函数 f 对同一个对象，不可能有多个函数值，所以 $x=k++$ 的情形不存在。由上述可知 a_j 是不存在的，所以 a_{k++} 是唯一的。

综上所述，提示中的命题成立。（有一点说明，上面提及的所有函数的存在性是由定义保证的）

②证明 *3.5.12* 利用提示中的命题，定义出函数 a，并证明其唯一性。

函数 $a:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$，值域为 $\{a_x(x):x\in\mathrm{N}\}$。由 $a(0)=a_0(0)=c, a(n++)=a_{n++}(n++)=f(n,a_n)$，可知定义的函数 a 是满足要求的。

现在证明 a 的唯一性。

假设存在一个函数 a' 满足题设，又 $a\neq a'$。由函数的相等定义可知，若两个函数不相等，则存在一个自然数 x, 使得 $a(x)\neq a'(x)$，当 x=*0*, 因为 a,a' 都满足题设，所以 $a(0)=a'(0)=c$, 当 $x\neq 0$ 时，即 x 是正数时，由于对任意正数都可以由一个自然数加 *1* 得到，我们假设 $x=\alpha++$，那么 $a(\alpha++)=f(\alpha,a(\alpha))=a'(\alpha++)=f(\alpha,a'(\alpha))$ （对 n 进行归纳，可以证明该式子的正确性，这里不做证明了），所以这样的 x 不存在，到这里唯一性得到了证明。

综上，命题得证。

另一个挑战，不证明了，看着就让人 *emo*

3.5.13

说明. 证明存在性，有两种常见思路：

一种是按照定义定义出目标对象；另一种是构造出目标对象，然后证明其符合定义。在本题中，我们使用后一种方法。

证明.

定义函数 $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}', f(0)=0'$ 且对任意的 $n\in\mathrm{N}, n'\in\mathrm{N}', f(n)=n'$，当且仅当 $f(n++)=n'++'$

①证明定义的函数，符合函数定义。首先 N, N' 都是集合，我们要说明对任意定义域中的元素，在值域中可以找到唯一的元素与之对应。这里我们对 n 进行归纳，来证明这一点。

归纳基始 n=0, $f(0) = 0'$，因 N' 也满足皮亚洛公理，由此可知 $0'$ 的唯一性，所以 n=0 满足定义;

归纳假设 $n = x, f(x) = x'$，x' 是唯一的。

现需 $n = x++$ 满足定义，由函数 f 可知 $f(x++) = x'++$，而 2.4 公理保证了 $x'++$ 的唯一性。

至此可知，函数 f 是满足函数定义的。

②证明函数 f 是双射的。

2.1单射

归纳证明 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $x_1 = x_2$

归纳基始，假设 $f(x_1) = f(x_2) = 0'$，那么 $x_1 = x_2 = 0$（这里简单说下原因，如果 x_1 不等于 0，说明 x_1 是正数，而正数可以由一个自然数加 1 得到，这里假设 $x_1 = a++$ 由此可得到 $f(a) = a', f(a++) = a'++' = 0'$，这与洛必达公理 2.3 矛盾，所以 x_1=0 是必须的。）

归纳假设 $f(x_1) = f(x_2) = n'$，则 $x_1 = x_2$

现需证明 $f(x_1) = f(x_2) = n'++\prime$，则 $x_1 = x_2$；因为 x_1, x_2 都是正数（归纳基始中已说明原因），所以存在 a,b 使得 $x_1 = a++, x_2 = b++$，由归纳假设可知 $f(a) = f(b) = n'$，所以 a=b，所以 $x_1 = x_2$。

由此可知: f 单射

2.2满射归纳证明对任意 $n' \in \mathsf{N}'$，有 $n \in \mathsf{N}$ 使得 $f(n) = n'$

归纳基始，当 $n' = 0'$ 时，有 $f(0) = 0'$;

归纳假设，当 $n' = x'$ 时，有 $f(x) = x'$;

现需证明，当 $n' = x'++'$ 时，有 $n \in \mathsf{N}$ 使得 $f(n) = x'++'$；由归纳假设可知 $f(x) = x'$，所以 $x++ \in \mathsf{N}$，由 f 的定义可知 $f(x++) = x'++'$。

由此可知: f 满射

综上，命题得证