2.2 习题

2024 年 5 月 5 日

2.2.3

（a）（序是自反的）$a \geq a$

证明.
因为 $a = a + 0$，由定义 *2.2.11* 可知 $a \geq a$

（b）（序是可传递的）如果 $a \geq b$ 并且 $b \geq$，那么 $a \geq c$。

证明.
如果 $a \geq b$ 并且 $b \geq c$，那么存在自然数 m，n，使得 $a = b + m, b = c + n$，由相等公理（替换公理）可知 $a = c + n + m$，所以 $a = c + (n + m)$，而两自然数相加仍然是自然数，所以 $n + m$ 也是自然数，由定义 *2.2.11* 可知 $a \geq c$，至此，命题得证

（c）（序是反对称的）如果 $a \geq b$ 并且 $b \geq a$，那么 a=b。

证明.
$a \geq b$ 并且 $b \geq a$，可知存在 m，n 使得 $a = b + m, b = a + m$，替换公理替换掉 b，则 $a = b + n \Rightarrow a = a + m + n$，由加法是可结合的（命题 *2.2.5*）可知 $a = a + m + n = a + (m + n)$ 这里 m+n 必须是 *0*，假设 $m + n \neq 0$，所以 $m + n$ 是正数。

这里要证明以下命题 f：自然数 a 与正数 c 相加大于 a。对 z 做归纳。

z=*1* 时，$a = a + (m + n) = a + (0 + +) = (a + 0) + + = a + + > a$。

归纳假设 z=k 时，$a + k > a$。

当 z=k++, $a + (k++) = (a + k) + + > a + k$, 所以 $a + (k++) \neq (a + k)$ 由 $(a + k) > a$，可知 $(a + k) \neq a$，所以 $a + (k + +) \neq a$，由定义 *2.2.11* 可知 $a + (k + +) > a$

那么 $a > a+m+n$，这与 $a = a+m+n$ 矛盾。

至此，命题 f 得证

由命题 f 可知 $m+n$ 不能是正数，否则与 $a = a+(m+n)$ 矛盾。由命题 *2.2.8* 可知 $m=0, n=0$，又 $a = b+n$，所以 $a = b+0 = b$。

至此，命题得证

（d）（加法保持序不变）$a \geq b$，当且仅当 $a+c \geq b+c$。

证明.
$a \geq b$，可知存在自然数 n，使得 $a = b+n$。$a+c = b+n+c = b+c+n$，所以 $a+c \geq b+c$

（e）a<b, 当且仅当 $a++ \leq b$

证明.
$\Rightarrow$

$a<b$，可知存在自然数 m，使得 $b=a+m$，且 $a \neq b$。由此可是 $m \neq 0$，因为如果 $m=0$, 那么 $b = a+0, b = a$ 这与 $a<b$ 矛盾。

对 m 进行归纳。

$m=1$ 时，$b = a+1 = a++ = a++$，所以 $a++ \leq b$

归纳假设 $m=k$ 时，$b = a+k$，$a \leq b$，即:$a \leq (a+k)$

$m=k{+}{+}$, $b = a+(k++) = (a+k)++ \geq a+k \geq a$，由（$b$）可知 $b \geq a$

综上所述，充分性得到证明

$\Leftarrow$

$a++ \leq b$，可知存在 m，$b = (a++)+m = a+(m++)$（用到了加法的交换律和加法的结合律），自然数 a 与正数 c 相加大于 a（在 *2-2-why.tex* 中有证明），所以 $b > a$

综上所述，必要性得到证明

至此，命题得证

证明.
（f）$a<b$, 当且仅当存在自然数 d 使得 $b = a+d$

$\Rightarrow$

$a<b$, 可知存在自然数 m 使得 $b = a+m$, 如果 $m=0$, 那么 $b = a+m = a$，这与 $a<b$ 矛盾，所以 m 是正数。

$\Leftarrow$

存在自然数 d 使得 $b=a+d$，由自然数与正数相加大于该自然数（在 *2-2-why.tex* 中有证明），所以 $a<b$

至此，命题得证

2.3.5

证明：

固定 q 并对 n 进行归纳。

$n=0$ 时，取 $m=0,r=0$，此时

$$\begin{aligned} mq+r &= 0\times q+0 \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

从而，$n=0$ 时，命题成立。

归纳假设 $n=k$ 时，命题成立。

现在只需证明 $n=k++$ 时，命题成立。

由归纳假设可知，存在自然数 m_0，r_0，使得 $k=m_0q+r_0$，所以 $k++=k+1=m_0q+r_0+1$，由命题 2.2.12（e）可知 $r_0<q$ 时 $r_0+1\leq q$，

当 $r_0+1<q$ 时，可取 $m=m_0,r=r_0+1$，

当 $r_0+1=q$ 时，可取 $m=m_0+1,r=0$。所以当 $n=k++$ 时，存在 m,r 使得 $0\leq r<q$ 并且 $n=mq+r$。

综上，归纳完成。