14.7 习题

张志聪

2025 年 3 月 26 日

14.7.1

（1）f_n 一致收敛于 f。

$$
\begin{aligned}
& f_n(x) - f(x) \\
&= f_n(x) - L + \int_{[a,x_0]} g - \int_{[a,x]} g \\
&= f_n(x) - L - f_n(x_0) + f_n(x_0) + \int_{[a,x_0]} g - \int_{[a,x]} g \\
&= f_n(x_0) - L + \int_{[x_0,x]} f_n' + \int_{[a,x_0]} g - \int_{[a,x]} g \\
&= f_n(x_0) - L + \int_{[x_0,x]} f_n' - g
\end{aligned}
$$

由 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = L$ 可得，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N_1 > 0$，使得只要 $n \geq N_1$，就有

$$|f_n(x_0) - L| < \frac{1}{2}\epsilon$$

又由 f_n' 一致收敛与 g，那么，存在 $N_2 > 0$，使得只要 $n \geq N_2$，就有

$$f_n' - g < \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{|b-a|}$$

综上可得，对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $N > max(N_1, N_2)$，使得只要 $n \geq N$，就有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_0) - L + \int_{[x_0,x]} f_n' - g| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

命题得证。

（2）f 是可微的，它的导函数是 g。

$L - \int_{[a,x_0]} g$ 是常数，所以，导数是 0；g 是连续的，由推论 11.5.2 可知，

$$\int_{[a,x]} g$$

是黎曼可积的。

又由定理 11.9.1 可知，$(\int_{[a,x]} g)' = g(x)$。

综上，命题得证。

（3）例 1.2.10 与定理 14.7.1 不矛盾的原因。

把 ϵ 看做 $\frac{1}{n}$，例 1.2.10 的操作没有按照定理 14.7.1 的操作，所以，定理 14.7.1 与例 1.2.10 不矛盾。

14.7.2

如果

$$d_\infty(f'_n, f'_m) \le \epsilon$$

即

$$\sup\{|f'_n(x) - f'_m(x)| : x \in [a,b]\} \le \epsilon$$

所以对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $|f'_n(x) - f'_m(x)| \le \epsilon$。

定义 $h := (f_n + f_m)(x)$ 的函数 $h : [a,b] \to \mathbb{R}$，因为 f_n, f_m 连续可微，由定理 10.1.13(c) 可知，h 连续可微。

利用推论 10.2.9 可知，对任意 $x \in [a,b]$，在区间 $[x, x_0]$，存在 $z \in [x, x_0]$，使得

$$h'(z) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$$

即

$$h'(z) = f'_n(z) - f'_m(z) = \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0}$$

综上可得，

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| \le \epsilon|x - x_0|$$

（1）f_n 一致收敛于某个函数 f。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n = g$，那么，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N_1 > 0$ 使得只要 $m, n \geq N_1$ 和 $x \in [a, b]$，都有

$$
\begin{aligned}
|f'_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon \\
|f'_m(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon
\end{aligned}
$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
|f'_n(x) - f'_m(x)| &= |f'_n(x) - g(x) + g(x) - f'_m(x)| \\
&\leq |f'_n(x) - g(x)| + |f'_m(x) - g(x)| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}
$$

所以，我们有

$$d_\infty(f'_n, f'_m) \leq \epsilon$$

由之前的讨论

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon|x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \epsilon|b - a| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ 极限存在，于是 $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列，那么，存在 $N_2 \geq 1$，使得只要 $n, m \geq N_2$，就有

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \epsilon|b - a|$$

综上可得，只要 $n, m \geq max(N_1, N_2)$，对任意 $x \in [a, b]$ 都有

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\leq \epsilon|b - a| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&\leq \epsilon|b - a| + \epsilon|b - a| = 2\epsilon|b - a|
\end{aligned}
$$

即

$$d_\infty(f_n, f_m) \leq 2\epsilon|b - a|$$

由 ϵ 的任意性可知，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是度量空间 $(C([a, b] \to \mathbb{R}), d_\infty)$ 中的柯西序列，由定理 14.4.5 可知，该序列收敛于 $C([a, b] \to \mathbb{R})$ 中的一个函数 f，由命题 14.4.4 可知，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛 f。

（2）f 是可微的，它的导函数是 g。

todo 还没证明完，卡住了!

利用命题 14.3.3 进行证明。

对任意 $c \in [a,b], E := [a,b] \setminus \{c\}$，需证明 $\lim\limits_{x \to c; x \in E} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ 是存在的，且等于 $g(x)$。

定义函数如下：

$$\begin{cases} F(x) := \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, & x \in E \\ F_n(x) := \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}, & x \in E \end{cases}$$

接下来，证明 $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 F。

$$\begin{aligned} F_n(x) - F(x) &= \frac{(f_n(x) - f_n(c)) - (f(x) - f(c))}{x - c} \\ &= \frac{(f_n(x) - f(x)) + (f(c) - f_n(c))}{x - c} \end{aligned}$$

由 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛 f 可得，存在 N，使得只要 $n \geq N$ 和 $x \in E$ 都有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

综上可得

$$|F_n(x) - F(x)| = |\frac{(f_n(x) - f(x)) + (f(c) - f_n(c))}{x - c}| \leq \frac{2\epsilon}{|x - c|}$$

14.7.3

利用定理 14.5.7（威尔斯特拉斯 M 判别法）可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

是一致收敛的，不妨设一致收敛于连续函数 g。

定义 $F_N := \sum\limits_{n=1}^{N} f_n$ 函数 $F_N : [a,b] \to \mathbb{R}$，因为 f_n 是可微函数，由 10.1.13(c) 可知，F_N 是可微函数，且导函数为

$$F_N' := \sum_{n=1}^{N} f_n'$$

由于 f_n' 是连续的，那么导函数 F_N' 也是连续的。

由之前的讨论可得 $\lim\limits_{N\to\infty} F'_N = g$，又因为存在某个 $x_0 \in [a,b]$，使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 收敛，即 $\lim\limits_{N\to\infty} F_N(x_0)$ 存在，于是利用定理 14.7.1 可知，函数数列 F_N 一致收敛于可微函数 f，并且 f 的导函数等于 g。