

17.3 注释

张志聪

2025 年 5 月 16 日

1. 把 f 写成 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, 那么容易得出

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0))$$

证明:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0; t \neq 0, x_0 + te_j \in E} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0; t \neq 0, x_0 + te_j \in E} \frac{(f_1(x_0 + te_j), \dots, f_m(x_0 + te_j)) - (f_1(x_0), \dots, f_m(x_0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0; t \neq 0, x_0 + te_j \in E} \frac{(f_1(x_0 + te_j) - f_1(x_0), \dots, f_m(x_0 + te_j) - f_m(x_0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0; t \neq 0, x_0 + te_j \in E} (\frac{f_1(x_0 + te_j) - f_1(x_0)}{t}, \dots, \frac{f_m(x_0 + te_j) - f_m(x_0)}{t}) \\ &= (\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0))\end{aligned}$$

2. 设 E 是 \mathbb{R}^n 的子集, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是一个函数, F 是 E 的子集, 并设 x_0 是 F 的内点。如果 f 在 F 上的全体偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 都存在, 并且它们在 x_0 处都是连续的。那么, 把 f 写成 f_1, f_2, \dots, f_m , (每一个 f_i 都是从 E 到 \mathbb{R} 的函数)。对变量 x_1 使用平均值定理 (推论 10.2.9 中值定理), 存在一个介于 0 和 v_1 之间的 t_i , 使得

$$f_i(x_0 + v_1 e_1) - f_i(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0 + t_i e_1) v_1$$

我的问题是，按照平均值定理，等式应该是

$$f_i(x_0 + v_1 e_1) - f_i(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0 + t_i e_1) v_1 e_1$$

才对吧！因为 $(x_0 + v_1 e_1) - x_0 = v_1 e_1$ 。

证明：

我的理解是有问题的。

一方面，如果改为

$$f_i(x_0 + v_1 e_1) - f_i(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0 + t_i e_1) v_1 e_1$$

此时，等式左侧是标量，右侧是向量，存在矛盾。

另一方面， $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ，对变量 x_1 求偏导数，即固定了 x_2, x_3, \dots, x_n ，仅让 x_1 变化，此时 f_i 可以看做单变量函数：

$$g(t) = f_i(x_0 + t e_1) \quad t \in [0, v_1]$$

于是

$$g(v_1) - g(0) = g'(t_i)(v_1 - 0)$$

因为

$$\begin{aligned} g'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(x_0 + t e_1) - f_i(x_0 + t_0 e_1)}{t - t_0} \end{aligned}$$

令 $h = t - t_0$ ，则当 $t \rightarrow t_0$ 时， $h \rightarrow 0$ 。代入后：

$$g'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + (t_0 + h) e_1) - f_i(x_0 + t_0 e_1)}{h}$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0 + t_0 e_1) &= \lim_{t \rightarrow 0; t \neq 0, x_0 + t e_1 \in F} \frac{f_i(x_0 + t_0 e_1 + t e_1) - f_i(x_0 + t_0 e_1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0; t \neq 0, x_0 + t e_1 \in F} \frac{f_i(x_0 + (t_0 + t) e_1) - f_i(x_0 + t_0 e_1)}{t} \end{aligned}$$

由 t_0 的任意性可得

$$g'(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0 + te_1)$$

综上可得,

$$\begin{aligned} g(v_1) - g(0) &= f_i(x_0 + v_1 e_1) - f_i(x_0) \\ &= g'(t_i) v_1 \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0 + t_i e_1) v_1 \end{aligned}$$

3. 特别地, 如果 $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个实值函数, 并且 f 在 x_0 处的梯度 $\nabla f(x_0)$ 被定义为 n 维行向量

$$\nabla f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

, 那么只要 x_0 是某个梯度存在且连续的区域的内点, 我们就有熟知的公式

$$D_v f(x_0) = v \cdot \nabla f(x_0)$$

说明:

这里是点乘, 注意中间有个点。

4. 为什么导数矩阵是书中定义的格式(P365) $D_f(x_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ 。

按照可微性(定义 17.2.2)可知, $f'(x_0)$ 是一个线性变换, 且 $f'(x_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 。于是按照引理 17.1.13 可知, 存在一个 $m \times n$ 矩阵 A 使得 $f'(x_0) = L_A$ 。所以, $D_f(x_0) = A$ 应该是一个 $m \times n$ 矩阵, 符合书中的定义。不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) &= f'(x_0)e_j \\ &= L_A e_j \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right)_{1 \leq i \leq m} \\ &= (a_{ij})_{1 \leq i \leq m}\end{aligned}$$

这表示的是矩阵 A 的 j 列。

又因为

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \right)$$

综上可得，

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$$

与书中定义一致。