11.4 习题

张志聪

2024 年 12 月 25 日

11.4.1

仿照定理 11.4.3 的证明，做以下说明：

对任意 $\epsilon > 0$，由 $\int_I f = \underline{\int}_I f$ 可知，存在一个分段常数函数函数 $\underline{f}: I \to \mathbb{R}$ 在 I 上从下方控制 f，并且有

$$\int_I \underline{f} \geq \int_I f - \epsilon$$

类似地，我们能够找到一个分段常数函数 $\underline{g}: I \to \mathbb{R}$ 在 I 上从下方控制 g，并且有

$$\int_I \underline{g} \geq \int_I g - \epsilon$$

而且我们还能找到分段常数函数 $\overline{f}$ 和 $\bar{(}g)$ 分别在 I 上从上方控制 f 和 g，并且有

$$\int_I \overline{f} \leq \int_I f + \epsilon$$

和

$$\int_I \overline{g} \leq \int_I g + \epsilon$$

特别地，如果 $h: I \to \mathbb{R}$ 表示函数

$$h := (\overline{f} - \underline{f}) + (\overline{g} - \underline{g})$$

那么

$$\int_I h \leq 4\epsilon$$

- (a)

  由以上说明，可得 $\underline{f}+\underline{g}$ 在 I 上从下方控制 $f+g$ 的分段常数函数，而 $\overline{f}+\overline{g}$ 在 I 上从上方控制 $f+g$ 的分段常数函数，所以有

  $$\int_I (\underline{f}+\underline{g}) \leq \underline{\int}_I (f+g) \leq \overline{\int}_I (f+g) \leq \int_I (\overline{f}+\overline{g})$$

  从而

  $$0 \leq \overline{\int}_I (f+g) - \underline{\int}_I (f+g) \leq \int_I (\overline{f}+\overline{g}) - (\underline{f}-\underline{g})$$

  于是

  $$0 \leq \overline{\int}_I (f+g) - \underline{\int}_I (f+g) \leq \int_I h(x)$$

  综上所述，对任意的 $\epsilon > 0$，都有

  $$0 \leq \overline{\int}_I (f+g) - \underline{\int}_I (f+g) \leq 4\epsilon$$

  由于 $\overline{\int}_I (f+g) - \underline{\int}_I (f+g)$ 与 ϵ 无关（这里表达的是 ϵ 取任何值，等式都要成立），所以

  $$\overline{\int}_I (f+g) = \underline{\int}_I (f+g)$$

  因此，$f+g$ 是黎曼可积的。

  因为

  $$\int_I (\underline{f}+\underline{g}) \leq \int_I (f+g) \leq \int_I (\overline{f}+\overline{g})$$

  从而

  $$\int_I \underline{f} + \int_I \underline{g} \leq \int_I (f+g) \leq \int_I \overline{f} + \int_I \overline{g}$$

  对左右两端分别取上确界和下确界（其实这也可作为 $f+g$ 黎曼可积的证明），可得

  $$\int_I f + \int_I g \leq \int_I (f+g) \leq \int_I f + \int_I g$$

  所以

  $$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$

- (b)

  $c=0$，任意 $x\in I$ 都有 $cf(x)=0$，于是 cf 是常数函数，于是 $\int_I cf = p.c.\int_I cf = 0$；

  $c>0, c<0$ 的证明类似，这里以 $c>0$ 为例。

  因为

  $$c\int_I \underline{f} \geq c\int_I f - c\epsilon$$
  $$c\int_I \overline{f} \leq c\int_I f + c\epsilon$$

  特别地，如果 $h: I\to\mathbb{R}$ 表示函数

  $$h := c\overline{f} - c\underline{f}$$

  那么

  $$\int_I h \leq 2c\epsilon$$

  因为 $c\underline{f}$ 是在 I 上从下方控制 cf 的分段常数函数，$c\overline{f}$ 是从 I 上从上方控制 cf 的分段常数函数，于是

  $$\int_I c\overline{f} \leq \underline{\int}_I cf \leq \overline{\int}_I cf \leq \int_I c\underline{f}$$

  从而

  $$0 \leq \overline{\int}_I cf - \underline{\int}_I cf \leq \int_I (c\overline{f} - c\underline{f})$$

  于是

  $$0 \leq \overline{\int}_I cf - \underline{\int}_I cf \leq \int_I h$$

  综上所述，对任意的 $\epsilon>0$，都有

  $$0 \leq \overline{\int}_I cf - \underline{\int}_I cf \leq 2c\epsilon$$

由于 $\overline{\int}_I cf, \underline{\int}_I cf$ 与 ϵ 无关，所以

$$\overline{\int}_I cf = \underline{\int}_I cf$$

因此，cf 是黎曼可积的。

$$\int_I cf = c\int_I f$$

的证明与 (a) 中的类似，这里不再赘述。

- (c)

  利用 (a)(b) 可得

$$\begin{aligned}\int_I (f-g) &= \int_I (f+(-g)) \\ &= \int_I f + \int_I (-g) \\ &= \int_I f - \int_I g\end{aligned}$$

- (d)

  定义 $\underline{f}: I \to \mathbb{R}$ 为 $\underline{f}(x) = 0$，于是 $\underline{f}$ 在 I 上从下方控制 f 的分段常数函数。从而

$$\int_I \underline{f} \leq \int_I f$$

  因为

$$\int_I \underline{f} = 0$$

  于是

$$0 \leq \int_I f$$

- (e)

  因为 $f(x) \geq g(x)$，所以 $f(x) - g(x) \geq 0$，利用 (d) 可得

$$\int_I (f-g) \geq 0$$

利用 (c) 可得

$$\int_I f - \int_I g \geq 0$$

从而

$$\int_I f \geq \int_I g$$

- (f)

  因为 f 是常数函数，由引理 11.3.7 可知

  $$\int_I f = p.c. \int_I f$$

  由定理 11.2.16(f) 可知

  $$\begin{aligned}\int_I f &= p.c. \int_I f \\ &= c|I|\end{aligned}$$

- (g)

  定义 $\underline{F}, \overline{F}$ 分别是在 J 上从下方控制和从上方控制的分段函数，如下

  $$\underline{F}(x) = \begin{cases} \underline{f}(x), x \in I \\ 0, x \notin I \end{cases}, \overline{F}(x) = \begin{cases} \overline{f}(x), x \in I \\ 0, x \notin I \end{cases}$$

  从而

  $$\int_I \underline{F} \leq \underline{\int}_I F \leq \overline{\int}_I F \leq \int_I \overline{F}$$

  利用 11.2.16(g) 可得

  $$\int_I \underline{f} \leq \underline{\int}_I F \leq \overline{\int}_I F \leq \int_I \overline{f}$$

  对左右两端分别取上确界和下确界，可得

  $$\underline{\int}_I f \leq \underline{\int}_I F \leq \overline{\int}_I F \leq \overline{\int}_I f$$

因为 f 是黎曼可积的，所以 $\int_I f = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$，所以，

$$\int_I f \le \underline{\int}_I F \le \overline{\int}_I F \le \int_I f$$

综上所述，F 是黎曼可积的，且

$$\int_I F = \int_I f$$

- (h)

  由定理 11.2.16 可得

$$\int_I \overline{f} = \int_J \overline{f}|_J + \int_K \overline{f}|_K$$
$$\int_I \underline{f} = \int_J \underline{f}|_J + \int_K \underline{f}|_K$$

  两者相减

$$\begin{aligned}\int_I \overline{f} - \int_I \underline{f} &= \int_J \overline{f}|_J - \int_J \underline{f}|_J + \int_K \overline{f}|_K - \int_K \underline{f}|_K \\ &\le 4\epsilon\end{aligned}$$

  因为任意 $x \in I$ 都有 $\overline{f}(x) \ge \underline{f}(x)$，所以

$$\begin{cases}\int_J \overline{f}|_J \ge \int_J \underline{f}|_J \\ \int_K \overline{f}|_K \ge \int_K \underline{f}|_K\end{cases}$$

  从而

$$\int_J \overline{f}|_J - \int_J \underline{f}|_J \le 4\epsilon$$
$$\int_K \overline{f}|_K - \int_K \underline{f}|_K \le 4\epsilon$$

  而我们有

$$\int_J \underline{f} \le \underline{\int}_J f|_J \le \overline{\int}_J f|_J \le \int_J \overline{f}|_J$$
$$\int_K \underline{f} \le \underline{\int}_K f|_K \le \overline{\int}_J f|_K \le \int_K \overline{f}|_K$$

于是可得

$$0 \le \overline{\int}_J f|_J - \underline{\int}_J f|_J \le \int_J \overline{f}|_J - \int_J \underline{f}|_J \le 4\epsilon$$
$$0 \le \overline{\int}_K f|_J - \underline{\int}_K f|_K \le \int_K \overline{f}|_K - \int_K \underline{f}|_K \le 4\epsilon$$

综上所述，对任意的 $\epsilon > 0$，都有

$$0 \le \overline{\int}_J f|_J - \underline{\int}_J f|_J \le 4\epsilon$$
$$0 \le \overline{\int}_K f|_J - \underline{\int}_K f|_K \le 4\epsilon$$

由于 $\overline{\int}_J f|_J, \underline{\int}_J f|_J, \overline{\int}_K f|_K, \underline{\int}_K f|_K$ 与 ϵ 无关，所以

$$\overline{\int}_J f|_J = \underline{\int}_J f|_J$$
$$\overline{\int}_K f|_K = \underline{\int}_K f|_K$$

于是 $f|_J, f|_K$ 分别在 J 和 K 上黎曼可积。

定义

$$F(x) := \begin{cases} f|_J(x) & x \in J \\ 0 & x \in I \setminus J \end{cases}, G(x) := \begin{cases} f|_K(x) & x \in K \\ 0 & x \in I \setminus K \end{cases}$$

于是 $f = F + G$，利用 (a)(g) 可得，

$$\int_I f = \int_J f|_J + \int_K f|_K$$

11.4.2

反证法，假设存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) > 0$。

因为 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数，由定义 9.4.1 可知

$$\lim_{x\to x_0;x\in[a,b]} f(x)=f(x_0)$$

从而由定义 9.3.6 可知，特别地 $\epsilon=\frac{1}{2}f(x_0)>0$ 存在一个 $\delta>0$ 使得

$$\begin{aligned}
&|f(x)-f(x_0)|\le\frac{1}{2}f(x_0)\\
&\implies\\
&\frac{1}{2}f(x_0)\le f(x)\le\frac{3}{2}f(x_0)
\end{aligned}$$

对所有满足 $|x-x_0|\le\delta$ 的 $x\in[a,b]$ 均成立。

我们定义函数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 如下

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}f(x_0), x\in[a,b]\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)\\ 0, x\notin[a,b]\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)\end{cases}$$

上面构造的 g 是在 $[a,b]$ 上从下方控制 f 的函数，因为

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} g &= p.c.\int_{[a,b]} f\\
&\ge\frac{1}{2}f(x_0)\delta\\
&=\frac{1}{2}f(x_0)\delta\\
&>0
\end{aligned}$$

注意，这里没有乘以 2δ 是因为 x_0 有可能在左右端点上。

因为

$$0<\int_{[a,b]} g\le\int_{[a,b]} f$$

于是

$$0<\int_{[a,b]} f$$

与题设矛盾。

11.4.3

对 P 的基数 n 进行归纳。

归纳基始 $n=1$，即 $P=\{I\}$，于是

$$\begin{aligned}\int_I f &= \sum_{J\in P}\int_J f \\ &= \int_I f\end{aligned}$$

归纳假设 $n=k$ 时，命题成立。

$n=k+1$，取 P 中取出一个区间 K，保证 $I-K$ 是有界区间。

说明 1. 这样取的原因是要保证定义 *11.1.10* 的前置条件成立，习题 *11.1.3* 保证 $(a,b),[a,b)$ 类型的可以取出符合条件的区间；如果是 $(a,b],[a,b]$ 类型的，直接取包含 b 的区间即可。

因为 $\{I-K,K\}$ 是 I 的一个划分，于是利用定理 11.4.1(h) 可知

$$\int_I f = \int_{I-K} f|_{I-K} + \int_K f|_K$$

因为 $P' := P-K$ 是 $I-K$ 的划分，由归纳假设可知

$$\int_{I-K} f|_{I-K} = \sum_{J\in P'}\int_J f$$

从而

$$\begin{aligned}\int_I f &= \int_{I-K} f|_{I-K} + \int_K f|_K \\ &= \sum_{J\in P'}\int_J f + \int_K f|_K \\ &= \sum_{J\in P}\int_J f\end{aligned}$$

11.4.4

对定理 11.4.3

$$min(f,g)(x) = -max(-f,-g)(x)$$

然后利用定理 11.4.1(b) 可证。

对定义 11.4.5

$$
\begin{aligned}
f_+g_- &= -f_+(-g)_- \\
f_-g_+ &= -(-f)_-g_+ \\
f_-g_- &= (-f)_-(-g)_-
\end{aligned}
$$

然后利用定理 11.4.1 可证。