

## 14.4 习题

张志聪

2025 年 4 月 24 日

### 14.4.1

按度量空间的定义（定义 12.1.2），我们需证明  $d_{B(X \rightarrow Y)}$  满足下面四个公理：

- (a) 对任意的  $f \in B(X \rightarrow Y)$ ，我们有  $d_{B(X \rightarrow Y)}(f, f) = 0$ 。  
由定义 14.4.2 可知， $d_{B(X \rightarrow Y)}(f, f) = \sup\{d_Y(f(x), f(x)) : x \in X\}$ ，  
因为任意  $x \in X$ ， $d_Y(f(x), f(x)) = 0$ ，所以  $\sup\{d_Y(f(x), f(x)) : x \in X\} = \sup\{0\} = 0$ ，即  $d_{B(X \rightarrow Y)}(f, f) = 0$
- (b)（正性）对任意两个不同的  $f, g \in B(X \rightarrow Y)$ ，我们有  $d_{B(X \rightarrow Y)}(f, g) > 0$ 。  
因为  $f \neq g$ ，那么，存在  $x_0 \in X$  使得  $f(x_0) \neq g(x_0)$ ，于是  $d_Y(f(x_0), g(x_0)) > 0$ ，所以  $\sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\} > 0$ ，即  $d_{B(X \rightarrow Y)}(f, g) > 0$
- (c)（对称性）对任意的  $f, g \in B(X \rightarrow Y)$ ，我们有  $d_{B(X \rightarrow Y)}(f, g) = d_{B(X \rightarrow Y)}(g, f)$

由定义 14.4.2 可知，

$$d_{B(X \rightarrow Y)}(f, g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

$$d_{B(X \rightarrow Y)}(g, f) = \sup\{d_Y(g(x), f(x)) : x \in X\}$$

令

$$A := \{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

$$B := \{d_Y(g(x), f(x)) : x \in X\}$$

容易证明  $A = B$ ，所以  $\sup A = \sup B$ ，即  $d_{B(X \rightarrow Y)}(f, g) = d_{B(X \rightarrow Y)}(g, f)$

- (d) (三角不等式)对任意的  $f, g, h \in B(X \rightarrow Y)$ , 我们有  $d_{B(X \rightarrow Y)}(f, h) \leq d_{B(X \rightarrow Y)}(f, g) + d_{B(X \rightarrow Y)}(g, h)$ 。

由定义 14.4.2 可知, 我们需证明:

$$\sup\{d_Y(f(x), h(x)) : x \in X\} \leq \sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\} + \sup\{d_Y(g(x), h(x)) : x \in X\}$$

令

$$A := \{d_Y(f(x), h(x)) : x \in X\}$$

$$B := \{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

$$C := \{d_Y(g(x), h(x)) : x \in X\}$$

任意  $a_0 \in A$ , 存在  $x \in X$  使得

$$a_0 = d_Y(f(x), h(x))$$

我们有

$$d_Y(f(x), h(x)) \leq d_Y(f(x), g(x)) + d_Y(g(x), h(x))$$

又因为

$$d_Y(f(x), g(x)) \in B$$

$$d_Y(g(x), h(x)) \in C$$

综上可得,  $\sup A \leq \sup B + \sup C$ , 命题得证。

**说明 1.**  $\sup A \leq \sup B + \sup C$  这个结论可用反证法证明, 假设  $\sup A > \sup B + \sup C$ , 那么存在  $a \in A$  使得  $\sup A > a > \sup B + \sup C$ , 因为  $a \in A$ , 所有存在  $x \in X$  使得

$$a = d_Y(f(x'), h(x'))$$

由上面的讨论可知, 存在  $b \in B, c \in C$  使得

$$a \leq b + c$$

这会导致以下矛盾

$$b + c > \sup B + \sup C$$

## 14.4.2

•  $\Rightarrow$

对任意的  $\epsilon > 0$ , 因为  $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  是依度量  $d_{B(X \rightarrow Y)}$  收敛于  $f$ , 所以存在  $N \geq 1$ , 使得只要  $n \geq N$ , 就有

$$d_{B(X \rightarrow Y)}(f^{(n)}, f) < \epsilon$$

即

$$\sup\{d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) : x \in X\} < \epsilon$$

综上可得, 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $N \geq 1$ , 使得只要  $n \geq N$  和  $x \in X$ , 就有

$$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < \epsilon$$

所以,  $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  一致收敛于  $f$ 。

•  $\Leftarrow$

对任意  $\epsilon > 0$ , 因为  $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  一致收敛于  $f$ , 所以存在  $N \geq 1$ , 使得只要  $n \geq N$  和  $x \in X$ , 就有

$$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < \epsilon$$

对每一个  $n$ , 令

$$A_n := \{d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) : x \in X\}$$

由于  $A_n$  是实数集合, 且存在上界  $\epsilon$ , 所以其上确界小于  $\epsilon$ , 即  $\sup A_n < \epsilon$ 。

综上可得, 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $N \geq 1$ , 使得只要  $n \geq N$ , 就有

$$d_{B(X \rightarrow Y)}(f^{(n)}, f) < \epsilon$$

所以,  $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  是依度量  $d_{B(X \rightarrow Y)}$  收敛于  $f$ 。

### 14.4.3

设  $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  是  $C(X \rightarrow Y)$  中的柯西函数序列, 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 使得只要  $p, q \geq N$ , 就有

$$d_{B(X \rightarrow Y)}(f^{(p)}, f^{(q)}) = \sup\{d_Y(f^{(p)}(x), f^{(q)}(x)) : x \in X\} < \epsilon$$

对任意  $x \in X$ , 构造序列  $(f^{(n)}(x))_{n=1}^{\infty}$ , 因为对  $p, q \geq N$  我们有

$$d_Y(f^{(p)}(x), f^{(q)}(x)) \leq d_{B(X \rightarrow Y)}(f^{(p)}, f^{(q)}) < \epsilon$$

由此可知,  $(f^{(n)}(x))_{n=1}^{\infty}$  是柯西序列, 由题设  $(Y, d_Y)$  是一个完备的度量空间可得,  $(f^{(n)}(x))_{n=1}^{\infty}$  收敛, 不妨设为  $y_x$ 。

定义函数  $f : X \rightarrow Y, f(x) = y_x = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x), x \in X$ 。接下来我们证明  $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  收敛于  $f$ 。

任意  $x \in X$ , 因为  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x)$ , 那么, 存在  $N' > 0$ , 使得只要  $k \geq N'$ , 就有

$$d_Y(f^{(k)}(x), f(x)) < \epsilon$$

综上,  $n > N, k > \max(N, N')$  我们有

$$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) \leq d_Y(f^{(n)}(x), f^{(k)}(x)) + d_Y(f^{(k)}(x), f(x)) < 2\epsilon$$

即:

$$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < 2\epsilon$$

(注意: 以上说明了, 不管  $x$  取什么值, 都会可以找到一个上界。)

由  $x$  的任意性可得, 对任意  $n > N, x \in X$  都有

$$d_{B(X \rightarrow Y) | C(X \rightarrow Y) \times C(X \rightarrow Y)}(f^{(n)}, f) < 2\epsilon$$

于是可得  $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  一致收敛于  $f$ , 由命题 14.4.4 可知,  $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  收敛于  $f$ 。

又因为  $C(X \rightarrow Y)$  是闭的, 所以  $f \in C(X \rightarrow Y)$ 。

### 14.4.4

关于拓扑的习题, 都忽略。