19.3 注释

张志聪

2025 年 6 月 6 日

说明 1. 定理 *19.3.4* 中：如何从

$$\int_{\Omega} F+f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} F+f_n$$

从而有

$$\int_{\Omega} f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n$$

证明：

左侧，由命题 19.3.3(b) 可知

$$\int_{\Omega} F+f = \int_{\Omega} F + \int_{\Omega} f$$

右侧，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} F+f_n = \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{\Omega} F + \int_{\Omega} f_n \right)$$

因为 $\int_{\Omega} F$ 是定值，不妨设 $c = \int_{\Omega} F$。

所以

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\left(\int_\Omega F+\int_\Omega f_n\right) &= \liminf_{n\to\infty}\left(c+\int_\Omega f_n\right)\\
&= \sup_n \inf_{m\geq n}\left(c+\int_\Omega f_m\right)\\
&= \sup_n\left(c+\inf_{m\geq n}\left(\int_\Omega f_m\right)\right)\\
&= c+\sup_n\left(\inf_{m\geq n}\left(\int_\Omega f_m\right)\right)\\
&= \int_\Omega F+\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n
\end{aligned}$$

综上可得

$$\int_\Omega f \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n$$

说明 2. 定理 *19.3.4* 中：为什么

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega F-f_n = \int_\Omega F-\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega f_n$$

证明：

我们有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega F-f_n = \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega F-\int_\Omega f_n$$

因为 $\int_\Omega F$ 是定值，不妨设 $c=\int_\Omega F$。

所以

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\left(\int_\Omega F-\int_\Omega f_n\right) &= \liminf_{n\to\infty}\left(c-\int_\Omega f_n\right)\\
&= \sup_n \inf_{m\geq n}\left(c-\int_\Omega f_m\right)\\
&= c+\sup_n \inf_{m\geq n}\left(-\int_\Omega f_m\right)
\end{aligned}$$

接下来需要证明：

$$\sup_n \inf_{m\geq n}\left(-\int_\Omega f_m\right) = -\inf_n \sup_{m\geq n}\left(\int_\Omega f_m\right)$$

把 $(\int_\Omega f_n)_{n=1}^\infty$ 看做实数序列 $(a_n)_{n=1}^\infty$，相应的，我们需要证明：

$$\liminf_{n\to\infty} -a_n = -\limsup_{n\to\infty} a_n$$

对任意集合 A，设 $\sup(A) = L^+$，$\inf(A) = L^-$，于是对任意 $x \in A$，我们有

$$\begin{aligned} x &\leq L^+ \\ x &\geq L^- \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} -x &\geq -L^+ \\ -x &\leq -L^- \end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned} \sup(-A) &= -L^- = -\inf(A) \\ \inf(-A) &= -L^+ = -\sup(A) \end{aligned}$$

应用以上命题，我们有

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} -a_n &= \sup_n \inf_{m\geq n} -a_m \\ &= \sup_n(-\sup_{m\geq n} a_m) \\ &= -\inf_n \sup_{m\geq n} a_m \\ &= -\limsup_{n\to\infty} a_n \end{aligned}$$