9.1 习题

张志聪

2024 年 12 月 1 日

9.1.1

$\overline{X} = \overline{Y}$ 等价于 $\overline{X} \subseteq \overline{Y}, \overline{Y} \subseteq \overline{X}$。

- $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$。

  任意 $x \in \overline{X}$，因为 x 是附着点，所以对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $y \in X$ 使得 $|x - y| \leq \epsilon$。

  由题设 $X \subseteq Y$ 可知，$y \in Y$，于是由定义 9.1.8（附着点）可得，x 也是 $\overline{Y}$ 的附着点，即 $x \in \overline{Y}$。

  由 x 的任意性可知 $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$。

- $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$。

  任意 $x \in \overline{Y}$，因为 x 是附着点，所以对任意 $\frac{1}{2}\epsilon > 0$，都存在 $y \in Y$ 使得 $|x - y| \leq \frac{1}{2}\epsilon$。

  由题设 $Y \subseteq \overline{X}$ 可知，$y \in \overline{X}$，所以 y 是 X 的附着点，于是存在 $y_x \in X$ 使得 $|y - y_x| \leq \frac{1}{2}\epsilon$。

  于是由命题 4.3.7（c）可知 $|x - y_x| \leq \epsilon$，所以 x 也是 X 的附着点。

  由 x 的任意性可知 $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$。

9.1.2

- $X \subseteq \overline{X}$。

  任意 $x \in X$，对于任意的 $\epsilon > 0$，有 $|x - x| \leq \epsilon$，所以 x 是 X 的附着点。

由 x 的任意性可知 $X \subseteq \overline{X}$。

- $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$。

  - $\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$。

    任意 $x \in \overline{X \cup Y}$，因为 x 是附着点，所以对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $y \in X \cup Y$ 使得 $|x - y| \leq \epsilon$。

    如果 $y \in X$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得，x 也是 X 的附着点。

    如果 $y \in Y$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得，x 也是 Y 的附着点。

    综上 $x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$。

  - $\overline{X} \cup \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$。

    任意 $x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$，于是要么 $x \in \overline{X}$，要么 $x \in \overline{Y}$（或者两个皆成立）。

    以 $x \in \overline{X}$ 为例，因为 x 是 X 的附着点，所以对任意 $\epsilon > 0$，存在 $y \in X$ 使得 $|x - y| \leq \epsilon$。

    因为 $y \in X \cup Y$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得，x 也是 $X \cup Y$ 的附着点。

    同理，$x \in \overline{Y}$ 时也成立。

    综上 $x \in \overline{X \cup Y}$。

- $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$。

  任意 $x \in \overline{X \cap Y}$，因为 x 是 $X \cap Y$ 的附着点，所以对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $y \in X \cap Y$，使得 $|x - y| \leq \epsilon$。

  因为 $y \in X \cap Y$，所以 $y \in X$ 且 $y \in Y$，则由定义 9.1.8（附着点）可得 x 是 X 的附着点且是 Y 的附着点，即 $x \in \overline{X} \cap \overline{Y}$

- 如果 $X \subseteq Y$，那么 $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$。

  任意 $x \in \overline{X}$，因为 x 是 X 的附着点，所以对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $y \in X$，使得 $|x - y| \leq \epsilon$。

  因为 $X \subseteq Y$，所以 $y \in Y$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得 x 也是 Y 的附着点，即 $x \in \overline{Y}$。

9.1.3

- $\mathbb{N}$ 的闭包是 $\mathbb{N}$。

  由引理 9.1.11 可得 $\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{N}}$。

  现在证明附着于 $\mathbb{N}$ 的点只能是 $\mathbb{N}$ 的元素。

  假设实数 x 是 $\mathbb{N}$ 的附着点且 $x \notin \mathbb{N}$，由命题 5.4.12（有理数对实数的界定）与命题 4.4.1（由有理数确定的整数散布）可得，存在唯一的整数 n 使得 $n < x < n+1$（即：x 在两个自然数之间）。

  设 $\epsilon = \frac{1}{2}min(x-n, n+1-x)$，此时不存在 $y \in \mathbb{N}$ 使得 $|x-y| \leq \epsilon$，与 x 是附着点矛盾。

- $\mathbb{Z}$ 的闭包是 $\mathbb{Z}$。

  由引理 9.1.11 可得 $\mathbb{Z} \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$。

  现在证明附着于 $\mathbb{Z}$ 的点只能是 $\mathbb{Z}$ 的元素。

  证明过程与 $\mathbb{N}$ 一致，这里不做赘述。

- $\mathbb{Q}$ 的闭包是 $\mathbb{R}$。

  即任意实数 x 都是 $\mathbb{Q}$ 的附着点。对任意 $\epsilon > 0$，取 $y = x + \epsilon$，由命题 5.4.14 可知，存在有理数 $q \in \mathbb{Q}$ 使得 $x < q < y$，此时 $|x-q| \leq \epsilon$。

- $\mathbb{R}$ 的闭包是 $\mathbb{R}$。

  由引理 9.1.11 可得 $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$。

  而有定义 9.1.8 可知，不存在 $\mathbb{R}$ 外的附着点，否则不满足定义了。

- $\varnothing$ 的闭包是 $\varnothing$。

  因为 $\varnothing$ 中没有元素，也就没有 $x \in R$ 能够满足定义 9.1.8（附着点）的定义。

9.1.4

$$X := [0, 1)$$
$$Y := (1, 2]$$

此时，

$$\overline{X \cap Y} = \varnothing$$
$$\overline{X} \cap \overline{Y} = \{1\}$$

9.1.5

- $\Rightarrow$

  任意 $\alpha \in \overline{X}$，对任意的正自然数 n，设 X_n 表示集合

  $$X_n := \{x \in X, |x - \alpha| \leq 1/n\}$$

  由于 α 是附着点，所以 X_n 是非空集合。

  利用选择公理，能够找到一个序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 使得 $a_n \in X_n$ 对所有的 $n \geq 1$ 均成立。

  以上构造的序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是收敛于 x 且每一个元素都属于 X。

- $\Leftarrow$

  对任意 $\epsilon > 0$，由 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x 可知，存在 N 使得 $n \geq N$ 时，

  $$|a_n - x| \leq \epsilon$$

  因为序列中的完全是由 X 中的元素构成的，于是可得 x 是附着点。

9.1.6

说明 1. *这里所说的闭集，应该是和定义 9.1.15 对应的，所以应该是* $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$

- $\overline{X}$ 是闭集（即 $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$）

  由引理 9.1.11 可知 $\overline{X} \subseteq \overline{\overline{X}}$，现在需要证明 $\overline{\overline{X}} \subseteq \overline{X}$。

  设任意 $x'' \in \overline{\overline{X}}$，对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $y' \in \overline{X}$，使得

  $$|x'' - y'| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

  因为 y' 也是 X 的附着点，所以存在 $y \in X$ 使得

  $$|y - y'| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

  于是由命题 4.3.7（c）可知，

  $$|x'' - y| \leq \epsilon$$

  所以 x'' 也是 X 的附着点，即 $x'' \in \overline{X}$。

- 换个表达方式：$X \subseteq Y, \overline{Y} = Y$，那么 $\overline{X} \subseteq Y$（即：$\overline{X} \subseteq \overline{Y}$）。

  任意 $x \in \overline{X}$，所以对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 $y \in Y$ 使得

  $$|x - y| \leq \epsilon$$

  因为 $X \subseteq Y$，于是 $y \in Y$，所以 x 也是 Y 的附着点，即 $x \in \overline{Y}$。

9.1.7

设

$$X := X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n = \bigcup_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} X_i$$

换句话说，要证明 $\overline{X} = X$。

由引理 9.1.11 可知，$X \subseteq \overline{X}$，接下来我们需要证明 $\overline{X} \subseteq X$。

任意 $x \in \overline{X}$，对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $y \in X$ 使得

$$|x - y| \leq \epsilon$$

因为 $y \in X$，由公理 3.11（并集）可知存在 X_i 使得 $y \in X_i$，于是 $x \in \overline{X_i}$，由题设可知 $X_i = \overline{X_i}$，所以 $x \in X_i$，于是 $x \in X$。

9.1.8

设

$$X := \bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$$

换句话说，要证明 $\overline{X} = X$。

由引理 9.1.11 可知，$X \subseteq \overline{X}$，接下来我们需要证明 $\overline{X} \subseteq X$。

任意 $x \in \overline{X}$，对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $y \in X$ 使得

$$|x - y| \leq \epsilon$$

因为 $y \in X$，由式（3.4）可知对任意 X_α 都有 $y \in X_\alpha$，于是 $x \in \overline{X_\alpha}$，由题设可知 $X_\alpha = \overline{X_\alpha}$，再次由式（3.4）可知 $x \in X$。

9.1.9

- $\Rightarrow$

  任意 $x \in \overline{X}$，对任意 $\epsilon > 0$，都有存在 $y \in X$ 使得

  $$|x - y| \leq \epsilon$$

  即 $W_x := \{y : y \in X, |x - y| \leq \epsilon\}$ 是非空集；

  - $W_x \setminus \{x\} \neq \varnothing$，则 x 也是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点，所以 x 是极限点。
  - $W_x \setminus \{x\} = \varnothing$，可知 $x \in X$，且因为 $W_x \setminus \{x\}$ 是空集，所以任意 $y \in X \setminus \{x\}$ 都满足 $|x - y| > \epsilon$（特别地 $X \setminus \{x\} = \varnothing$ 空虚的成立），所以 x 是 X 的孤立点。

- $\Leftarrow$

  观察定义，如果 x 是 X 的极限点，无法说明 $x \in X$，如果是孤立点却能保证 $x \in X$（定义 9.1.18 孤立点是按蕴含关系定义的，应该是表述的不准确应是当且仅当的关系，否则无法推出 $x \in X$），而根据引理 9.1.11 可知 $X \subseteq \overline{X}$，所以孤立点肯定是附着点。

  接下来要对极限点进行说明。按照定义 9.1.18 可知，X 的任意极限点 x 是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点，因为 $X \setminus \{x\} \subseteq X$，所以 x 是 X 的附着点。

说明 2. 错误推论：X 是实直线的一个子集，对于任意实数 x，要么是 X 的极限点，要么是 X 的孤立点。

按照定义 *9.1.8* 可知，一个实数 x 要么是 X 的附着点，要么不是。

习题 *9.1.9* 中已经证明，当 x 是附着点，则 x 要么是 X 的极限点，要么是孤立点。

当 x 不是附着点，则 $x \notin X$（否则肯定是附着点），按照定义 *9.1.18* 可知 x 不会是孤立点；x 也不会极限点，因为 $X \setminus \{x\} = X$（因为 $x \notin X$），所以如果是极限点，则是附着点（习题 *9.1.10* 的反推），与假设矛盾。至此可知，此时的 x 既不是孤立点也不是极限点。

9.1.10

- $\Rightarrow$ X 是有界的，按照定义 9.1.22 可知，存在某个实数 $M > 0$ 使得 $X \subset [-M, M]$，即任意 $x \in X$ 都满足 $|x| \leq M$，那么由定义 5.5.1（上界）可知 M 是 X 的一个上界，由定理 5.5.9（最小上界的存在性）可知 $sup(X)$ 是存在，且由定义 5.5.5（最小上界）可知 $sup(X) \leq M$；同理可得最大下界 $inf(X)$ 且 $-M \leq inf(X)$；

  又因为 $inf(X) \leq sup(X)$ 可得（可以直接通过定义证明，但不能直接使用引理 6.4.13，因为实数子集可能不是至多可数的）

  $$-M \leq inf(X) \leq sup(X) \leq M$$

- $\Leftarrow$ 设 $M := max(|inf(X)|, |sup(X)|)$，有最小上界的定义可知，对任意 $x \in X$ 都有

  $$-M \leq inf(X) \leq x \leq sup(X) \leq M$$

  所以 $X \subset [-M, M]$，由此可知 X 是有界的。

9.1.11

反证法，假设 $\overline{X}$ 不是有界的。

因为 X 是有界，那么存在 $M > 0$ 使得 $X \subset [-M, M]$，即任意 $x \in X$ 都满足 $-M \leq x \leq M$；

因为 $\overline{X}$ 不是有界的，那么对任意实数 $M+\epsilon, \epsilon > 0$，存在 $x \in \overline{X}$，$x > M+\epsilon$ 或 $x < -M-\epsilon$，这里以 $x > M+\epsilon$ 为例；

因为 x 是 X 的附着点，都存在 $y \in X$ 使得

$$|x-y| \le \epsilon$$
$$\Rightarrow$$
$$y-\epsilon \le x \le y+\epsilon$$

因为 $y \in X$，所以 $-M \le y \le M$，于是可得

$$-M-\epsilon \le x \le M+\epsilon$$

这与 $x > M+\epsilon$ 矛盾。

9.1.12

- 有限个；

  不妨设集合个数为 $n, n \in \mathbb{N}$，设每个有界子集的找到 M 分别为 $M_1, M_2, \ldots, M_n$，那么定义 $M := max(M_1, M_2, \ldots, M_n)$（对 n 进行归纳，就可以确定该 M 是可以得到的，参照引理 5.1.14 的证明），可证并集 $X \subset [-M, M]$（证明略）

- 无限个；

  说明 3. 这里无法使用归纳原理进行证明，因为实数子集可能不是至多可数的。

  反证法，假设并集 X 不是有界的。

  那么，存在 $x \in X$ 大于任意实数；由公理 3.11（并集）可知，存在某个子集 $S \in X$使得$x \in S$，由题设子集 S 是由上界的，即存在 M 使得 $S \subset [-M, M]$，所以 $-M < x < M$；存在矛盾。

9.1.13

- （a）$\Rightarrow$ （b）

由题设（a）X 是有界的可知，序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是有界序列，利用定理 6.6.8 可知，$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 至少有一个收敛的子序列 $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$，不妨设子序列收敛于 L。

由引理 9.1.14 可知，L 是 X 的一个附着点，由题设（a）X 是闭的可知，任意附着点 $x \in X$，所以 $L \in X$

- （b）$\Rightarrow$ （a）

  由题设（b）和推论 9.1.17 可知，X 是闭的。

  反证法，假设 X 不是有界的，那么，对任意的正自然数 n，设 X_n 表示集合

  $$X_n := \{x \in X : |x| > n\}$$

  是非空的。利用选择公理，能够找到一个序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 使得 $a_n \in X_n$ 对所有的 $n \geq 1$ 均成立（特别的，a_0 可以任取 X 中的元素）。设序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的任意子序列为 $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$，由定义 6.6.1（子序列）可知 $n_j \geq j$，于是 $j > 0$ 时 $|a_{n_j}| > j$，可得子序列是无界的，所以该子序列发散，与题设矛盾。

9.1.14

证明框架：

设有限子集为 X，因为是有限集，所以肯定是有界的（可以通过元素个数 n 进行归纳，这里不做赘述）。

X 有界且 X 是有限集，可得满足定理 9.1.24（b）前置条件，于是可得 X 是闭的。

9.1.15

- S 是 E 的附着点。

  反证法，假设 S 不是 E 的附着点，即存在 $\epsilon > 0$，使得

  $$|S - y| > \epsilon$$

  对所有的 $y \in E$ 均成立。

由上式可得，如果 $y > S + \epsilon$，则 S 不是上界，这与 S 是 E 的最小上界矛盾；如果 $y < S - \epsilon$，则 $S - \epsilon$ 也是上界且比 S 小，这与 S 是 E 的最小下界矛盾。

- S 是 $\mathbb{R} \setminus E$ 的附着点。

  由集合公理可得，一个实数 x 要么属于 E 要么属于 $\mathbb{R} \setminus E$。

  反证法，假设 S 不是 $\mathbb{R} \setminus E$ 的附着点，即存在 $\epsilon > 0$，使得

  $$|S - y| > \epsilon$$

  对所有的 $y \in \mathbb{R} \setminus E$ 均成立。

  由上式可得，如果 $y > S + \epsilon$，那么存在实数 $x \in (S, S + \epsilon]$ 则既不属于 E 也属于 $\mathbb{R} \setminus E$，与事实矛盾；同理如果 $y < S - \epsilon$，那么存在实数 $x \in [S - \epsilon, S)$ 则既不属于 E 也属于 $\mathbb{R} \setminus E$，与事实矛盾；