18.2 注释

张志聪

2025 年 5 月 18 日

说明 1. $\mathbb{R}^n$ 自身就被可数个单位立方体 $(0,1)^n$ 覆盖，如何覆盖？

证明：

我们用以下方式覆盖 $\mathbb{R}^n$：

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^n} ((0,1)^n + q)$$

其中，有理数 $\mathbb{Q}$ 是可数的（推论 8.1.15），又由推论 8.1.14 可知 $\mathbb{Q}^n$ 也是可数的。$(0,1)^n + q$ 表示单位立方体平移到 q 这个位置。

接下来，需要证明这个集合确实可以覆盖 $\mathbb{R}^n$。

对任意 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，由实数的构造方式可得，对任意分量 $1 \leq j \leq n$，存在有理数 q_j，使得

$$x_j - q_j \in (0,1)$$

令 $q = (q_1, \cdots, q_n)$，则 $x \in (0,1)^n + q$。

$\{A^{(j)} : j \in J; x_n \in (a,b)\}$

说明 2. 虽然 $\mathbb{R}$ 的一维测度是 $+\infty$，但是 $\mathbb{R}^2$ 的整个 x 轴的二维外测度却是 0。

证明：

设 $\mathbb{R}^2$ 的整个 x 轴是区间 $X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$。

对于每一个整数 z，$B_z := \prod_{i=1}^{2} [a_i, b_i]$，其中 $[a_1, b_1] = [z-1, z+1]$，$[a_2, b_2] = [0,0]$，于是

$$m^*(B_z) = 2 \times 0 = 0$$

全体的 $z \in \mathbb{Q}, B_z$ 的并集就是整个目标集合 X，所以

$$m^*(X) \leq \sum_{z \in \mathbb{Q}} m^*(B_z) = 0$$