3.6 习题

2024 年 3 月 21 日

3.6.1

证明.
①X 和 X 有相等的基数。

构造一个从 X 到 X 的函数 *f*，使得 *f(x)=x*（$\{x \in X\}$）。函数 f 是双射函数，是显而易见的，这里不做证明了。

②如果 X 和 Y 有相等的基数，那么 Y 和 X 有相等的基数。

有 X 和 Y 有相等的基数，可知存在一个双射：$f : X \to Y$。那么存在 f 的逆 $f^{-1} : Y \to X$，由逆的定义可知 f^{-1} 是双射函数。

③如果 X 和 Y 有相等的基数且 Y 和 Z 有相等的基数，那么 X 和 Z 有相等的基数。

由 X 和 Y 有相等的基数，可知存在一个双射：$f : X \to Y$。由 Y 和 Z 有相等的基数，可知存在一个双射：$g : Y \to Z$。那么 g 和 f 的复合函数为 $g \circ f : X \to Z$。

由习题 *3.3.7* 可知 $g \circ f$ 是双射函数。由此可知存在一个双射：$g \circ f : X \to Z$，所以 X 和 Z 有相等的基数。

3.6.2

证明.
①充分性：一个集合 X 的基数为 *0*，则 X 是空集。

那么存在从 X 到 $\{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$ 的双射：$f : X \to \{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$。而 $\{i \in N : 1 \leq i \leq 0\}$ 是 $\varnothing$，即 $f : X \to \varnothing$。如果 X 不是空集，那么则存在一个 $x \in X$ 使得 $f(x) \in \varnothing$，这显然是不成立的，所以 X 是空集

②必要性：X 是空集，则 X 的基数为 *0*。

若 X 是空集，由习题 *3.3.3* 知 $f:\varnothing\to\varnothing$ 为双射，而 $\{i\in N:1\leq i\leq 0\}=\varnothing$，即存在双射函数 $f:\varnothing\to\{i\in N:1\leq i\leq 0\}$，由定义 *3.6.5* 可知集合 X 基数为 *0.*

3.6.3

证明.
对 n 进行归纳：

n=0 时，f 是空函数，命题空成立。

归纳假设 *n=k* 时，命题成立。

下面我们证明该命题对于 *k++* 也为真。设集合 $N_k=\{i\in \mathsf{N}:1\leq i\leq k\}, N_{k++}=\{i\in \mathsf{N}:1\leq i\leq k++\}$。函数 $f_{k++}:N_{k++}\to N$ 是一个函数，我们可以由 f_{k++} 定义出一个函数 $f_k:N_k\to N$，对任意 $i\in N_k, f_k(i)=f_{k++}(i)$。由归纳假设可知，存在一个自然数 M 使得 $f_k(i)\leq M, i\in N_k$，即 $f_{k++}(i)\leq M, i\in N_k$，此时我们可以取 $f_{k++}(k++), M$ 中的较大值为 M'，由此可知该 M' 使得 $f_{k++}(i)\leq M', i\in N_{k++}$。归纳法完成。

3.6.4

（a）设 X 是一个有限集，设 x 是一个对象并且 x 不是 X 中的元素。那么 $X\cup\{x\}$ 是有限的，且 $\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$

证明.
X 是有限集，不妨设 X 的基数是自然数 n。因此存在从 X 到 $\{i\in N:1\leq i\leq n\}$ 的双射函数 f。定义出一个函数 $g:X\cup\{x\}\to\{i\in N:1\leq i\leq n{+}1\}$，使得 $g(x)=n+1$，$g(i)=f(i), i\in X$。由 g 的定义可知其是双射函数，且 $X\cup\{x\}$ 的基数是 *n+1*，所以 $X\cup\{x\}$ 是有限的，且 $\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$

（b）设 X 和 Y 都是有限集，那么 $X\cup Y$ 是有限的，且 $\#(X\cup Y)\leq\#(X)+\#(Y)$。另外，如果 X 和 Y 是不相交的（即 $X\cap Y=\varnothing$），那么 $\#(X\cup Y)=\#(X)+\#(Y)$

证明.
X 和 Y 都是有限集，不妨设 X 和 Y 的基数分别为 m 和 n。通过对 n 进行归纳，完成证明；

n=0 时，即 Y 的基数是 *0*，也就是说 $Y=\varnothing$，$X\cup Y=X\cup\varnothing=X$，此时（$b$）命题显然是成立的。

归纳假设 n=k 时，(b) 命题成立。

现在需证明 n=k++，任取 $x \in Y, Z = Y \backslash \{x\}$，由引理 *3.6.9* 可知，$Z$ 的基数为 k，由归纳假设可知，X 与 Z 满足命题 (b)，由此可知 $X \cup Z$ 是有限的；

$X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\}$。

① $X \cap Y = \varnothing$，由此可知 $x \notin X \cup Z$，且由归纳假设知 $\#(X \cup Z) = \#(X) + \#(Z)$。由命题 ($a$) 可知 $X \cup Z \cup \{x\}$ 是有限的，且 $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$，即 $X \cup Y$ 是有限的，且 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 = \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$，即 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$；

② $X \cap Y \neq \varnothing$

如果 $x \in X \cup Z$ 则 $X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\} = X \cup Z$，即 $X \cup Y = X \cup Z$ 由于同一集合只有一个基数，所以 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z)$，又由归纳假设可知 $\#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Z)$，所以 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$。

如果 $x \notin X \cup Z$,(由 $X \cap Y \neq \varnothing$,则必须 $X \cap Z \neq \varnothing$ 否则与假设矛盾,所以 $\#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Z)$)由命题($a$)可知 $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$,即 $X \cup Y$ 是有限的，且 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 \leq \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$，即 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$；

综上，n=k++ 情况也成立，至此，(b) 命题成立。

(c) 设 X 是一个有限集，Y 是 X 的一个子集。那么 Y 是有限的，且 $\#(Y) \leq \#(X)$。另外，如果 $Y \neq X$（即 Y 是 X 的一个真子集），那么我们有 $\#(Y) < \#(X)$。

证明.

对 X 的基数进行归纳。

X 的基数为 *0*，即 $X = \varnothing$，此时 Y 是 X 的子集，则 $Y = \varnothing$，很明显 Y 是有限的（基数是 *0*），且 $\#(Y) \leq \#(X)$。而命题的后半部分，因为空集不存在真子集，所以空成立。

归纳假设 n=k 时，X 的基数为 k，命题 (c) 成立。

现需证明 n=k++，命题 (c) 成立。若 $Y = X$ 显然 $\#(Y) \leq \#(X)$；若 $Y \neq X$，则存在 $x \in X$，使得 $Y \subseteq (X \backslash x)$，由归纳假设可知 $\#(Y) \leq \#(X \backslash x)$，由引理 *3.6.9* 可知 $\#(Y) < \#(X)$。

综上命题 (c) 成立。

(d) 如果 X 是一个有限集，并且 $f : X \to Y$ 是一个函数，那么 $f(X)$

是一个有限集并且满足 $\#(f(X)) \leq \#(X)$。另外，如果 f 是一对一的，那么 $\#(f(X)) = \#(X)$。

证明.

对 X 的基数 n 进行归纳；

归纳基始 n=0，即 $X = \varnothing$，由定义 3.4.1（集合的像）可知 $f(X) = \varnothing$，即 $\#(f(X)) = 0$，此时命题（d）成立

n=k++ 时，设 $X' = X \backslash \{x\}$，由归纳假设可知 $\#(f(X')) \leq \#(X')$，

① $f(X') = f(X)$，则 $\#(f(X)) = \#(f(X')) \leq \#(X') < \#(X)$。此时 f 不是双射，命题后半部分空成立。

② $f(X') \subsetneq f(X)$ 则 $f(x) \notin f(X')$，且 $f(X) = f(X') \cup f(x)$，由命题（a）可知 $\#(f(X)) = \#(f(X')) + 1$，有 $\#(X) = \#(X') + 1$，所以由归纳假设 $\#(f(X')) \leq \#(X')$ 可知 $\#(f(X')) + 1 \leq \#(X') + 1$，即 $\#(f(X)) \leq \#(X)$；若 f 是一对一的，则 $X' \backslash \{x\} \to Y \backslash \{f(x)\}$ 也是一对一，由归纳假设知 $\#(f(X')) = \#(X')$，由此可知 $\#(f(X')) + 1 = \#(X') + 1$，$\#(f(X)) = \#(X)$。综上，$n$=$k$++ 时命题（$d$）成立。

至此，命题成立

（e）设 X 和 Y 都是有限集，那么笛卡尔积 $X \times Y$ 是有限的并且 $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$。