

6.4 习题

2024 年 7 月 27 日

6.4.1

(1) 序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c , 那么对任意实数 $\epsilon > 0$, 都是最终 ϵ - 接近于 c 的, 即: 能够找到某个 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 ϵ - 接近于 c 的。并且对于任意 $N' \geq m$, 取 $N_0 := \max(N, N')$, 此时 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 是 ϵ - 接近于 c 的, 即: a_n 是 ϵ - 接近于 c , 对 $n \geq N_0$ 均成立, 所以 c 是 ϵ - 附着于 $(a_n)_{n=N'}^{\infty}$ 的。由 ϵ 的任意性, 可知 c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

(2) 反证法, 存在另一个极限点 d , 且 $d \neq c$ 。 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c , 那么对实数 $\epsilon > 0$, 是最终 ϵ - 接近于 c 的。即: 能够找到 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 ϵ - 接近于 c 的。

同时 d 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点, 那么, d 是 ϵ - 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的, 那么存在一个 $n \geq N$ 使得 a_n 是 ϵ - 接近于 d 的, 如果 $d > c$, 取 $0 < \epsilon < (d-c)/2$, 此时, $|a_n - d| \leq \epsilon$ 与 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 无法同时满足, 即 a_n 无法同时 ϵ - 接近于 c, d 。

$d \leq c$ 同理。

6.4.2

这里只说明极限点和上极限, 因为下极限的证明可以用上极限类推。

设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个实数序列, c 是一个实数, 且 $m' \geq m$ 是一个整数, $k \geq 0$ 是一个非负整数。

(1) 与习题 6.1.3 类似的结论

(1.1) c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 极限点, 当且仅当 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 极限点。

$\Rightarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 极限点, 当且仅当 “对任意 $\epsilon > 0$, 对每一个 $N \geq m$, c 都是 ϵ - 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的”, 我们把引号中的性质定义声明为 P , 即对任意 N , 只要 $N \geq m$ 都具有性质 P 。因为 $m' \geq m$, 于是对任意 N , $N \geq m' \geq m$ 都具有性质 P , 所以 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点。

$\Leftarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点。对任意 $\epsilon > 0$, 对每一个 N ,

如果 $N \geq m'$, 由于 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点, 那么, c 都是 ϵ - 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的;

如果 $m \leq N < m'$, 我们要证明此时 c 也是 ϵ - 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$, 即: 要证明存在一个 $n \geq N$ 使得 a_n 是 ϵ - 接近于 c 。我们可以取 $n \geq m'$, 那么 n 也是大于 N , 还是由 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点, 保证了 n 的存在性。

综上 c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

(1.2) c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限, 当且仅当 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限。

$\Rightarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限, 即: 序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的下确界是 c 。序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集。

反证法, 假设 c 不是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限, 设 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限是 c' 【这里其实要证明 c' 的存在性。可以通过以下命题得到 c' 是存在的: 有上界序列存在实数上极限, 否则上极限不是实数, 而是 $+\infty$ 】。

如果 $c' > c$, 那么, 存在 $m \leq N_0 < m'$ 使得 $c \leq a_{N_0}^+ < c'$, 因为 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的子集, 所以 $\sup((a_n)_{n=m'}^{\infty}) \leq \sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$, 又因为 $c' \leq \sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})$, 于是 $c' \leq \sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$, 即: $c' \leq a_{N_0}^+$ 。这与 $c \leq a_{N_0}^+ < c'$ 矛盾。

如果 $c > c'$, 因为序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集, 所以 $\inf((a_N^+)_{N=m'}^{\infty}) \geq \inf((a_N^+)_{N=m}^{\infty})$, 即: $c' \geq c$, 这与 $c > c'$ 矛盾。

综上, $c = c'$ 。

$\Leftarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限, 即: 序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的下确界是 c 。序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集。

反证法, 假设 c 不是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限, 设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限是 c' 。

如果 $c > c'$, 那么, 存在 $m \leq N_0 < m'$ 使得 $c' \leq a_{N_0}^+ < c$, 因为 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的子集, 所以 $\sup((a_n)_{n=m'}^{\infty}) \leq \sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$, 又因为 $c \leq \sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})$, 于是 $c \leq \sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$, 即: $c < a_{N_0}^+$ 。这与 $c' \leq a_{N_0}^+ < c$ 矛盾。

如果 $c < c'$, 因为序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集, 所以 $\inf((a_N^+)_{N=m'}^{\infty}) \geq \inf((a_N^+)_{N=m}^{\infty})$, 即: $c' \geq c$, 这与 $c < c'$ 矛盾。

综上, $c = c'$ 。

与习题 6.1.4 类似的结论

该问题是 6.1.3 的拓展, 这里我只证明一种情况。

(2.1) c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点, 当且仅当 c 是 $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

如果我们能证明 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 与 $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 相等的, 然后通过 (1.1) 就可以证明该命题, 接下来我们证明这两个序列的相等的。

通过定义 5.5.1 可知, 序列就是函数, 是一个从集合 Z 到 R 的函数。于是我们要证明两个序列相等, 只需要证明其对应函数相等。通过定义 3.3.7 (函数的相等) 来进行接下来的证明。

设 $f: N \rightarrow R$ 为函数 $f(n) = a_{n+k}$, 设 $g: N \rightarrow N$ 为函数 $g(m) = m$ 。那么 $f \circ g = f(g(m)) = a_{g(m)+k} = a_{m+k}$ 。

设 $f': N \rightarrow R$ 为函数 $f'(n) = a_n$, 设 $g': N \rightarrow N$ 为函数 $g'(m) = m+k$ 。那么 $f' \circ g' = f'(g'(m)) = a_{m+k}$ 。

由 $f \circ g, f' \circ g'$ 的构造过程可知两个具有相同的定义域, 又对于任意的 $x \in N$, $f \circ g(x) = a_{x+k}, f' \circ g'(x) = a_{x+k}$, 所以 $f \circ g(x) = f' \circ g'(x)$, 由此可知两个函数相等, 即两个序列相等。

6.4.3

不妨设 $E := \{a_n : n \geq m\}$, $M = \sup(E), M' = \inf(E)$ 。

(c)

由例 6.2.10 可知 $M \geq M'$, 接下来我只证明 $L^+ \leq M$ (可以类推 $M' \leq L^-$) 和 $L^- \leq L^+$ 。

反证法, 假设 $L^+ > M$ 。由命题 6.3.6 可知对任意 $n \geq m$, 都有 $a_n \leq M$ 。因为 $L^+ := \inf(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 则也由命题 6.3.6 可知存在 $N \geq m$ 使得 $a_N^+ > L^+$, 由 $a_N^+ := \sup(a_n)_{n=N}^{\infty}$, 可知存在 $n \geq N$ 使得 $a_n > L^+$, 这与任意 $a_n \leq M$ 矛盾。

反证法, 假设 $L^- > L^+$, 由 $L^- := \sup(a_N^-)_{N=m}^{\infty}$ 可知存在 $N_0 \geq m$ 使得 $a_{N_0}^- > L^+$, 由因为 $L^+ := \inf(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$, 所以存在 $N_1 \geq m$ 使得 $a_{N_0}^- > a_{N_1}^+$ 【否则上极限就不是 L^+ 了, 而是一个大于等于 $a_{N_0}^-$ 的数了】。由 $a_{N_0}^- := \inf(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 定义, 可知对 $n \geq N_0$ 都有 $a_n \geq a_{N_0}^-$, 由 $a_{N_1}^+ := \sup(a_n)_{n=N_1}^{\infty}$ 定义, 可知对 $n \geq N_1$ 都有 $a_n \leq a_{N_1}^+$, 取 $n \geq \max(N_0, N_1)$ 此时 $a_{N_0}^- \leq a_n \leq a_{N_1}^+$, 这与 $a_{N_0}^- > a_{N_1}^+$ 矛盾。

(d)

这里我只证明 $c \leq L^+$, 因为 $L^- \leq c$ 可以类推。

反证法, 假设 $c > L^+$, 由 $L^+ := \inf(a_n^+)_{n=m}^\infty$ 可知, 由命题 6.3.6 可知, 存在 $N_0 \geq m$ 使得 $a_{N_0}^+ < c$, 又因为 $a_{N_0}^+ := \sup(a_n)_{n=N_0}^\infty$, 所以任意 $n \geq N_0$ 都有 $a_n \leq a_{N_0}^+$, 由此可知,

$$\begin{aligned} |c - a_n| &= |c - a_{N_0}^+ + a_{N_0}^+ - a_n| \\ &= |c - a_{N_0}^+| + |a_{N_0}^+ - a_n| \\ &> |c - a_{N_0}^+| \end{aligned}$$

此时 c, a_n 的距离总是大于 $|c - a_{N_0}^+|$, 这与 c 是极限点的定义矛盾。

(e)

这里我只证明 L^+ 是极限点, 因为 L^- 可以类推。

反证法, 假设 L^+ 不是极限点, 那么通过极限点的定义 6.4.1 可知, 存在 $\epsilon > 0, N_0 \geq m$, 此时 L^+ 不是 ϵ - 附着于 $(a_n)_{n=N_0}^\infty$ 的, 即对任意 $n \geq N_0$, 都有,

$$\begin{aligned} |L^+ - a_n| &> \epsilon \\ \Rightarrow \\ a_n &> L^+ + \epsilon \text{ 或 } a_n < L^+ - \epsilon \end{aligned}$$

因为 $L^+ := \inf(a_n^+)_{n=m}^\infty$, 那么对任意 $N \geq m$ 都有 $a_N^+ \geq L^+$ 。又 $a_N^+ := \sup(a_n)_{n=N}^\infty$ 。综上, 我们可以得到, 对任意 $N \geq m, n \geq N$ 都有:

$$\begin{cases} a_n \leq a_N^+ \\ L^+ \leq a_N^+ \end{cases} \quad (1)$$

(1) 如果 $n \geq N_0, a_n > L^+ + \epsilon$, 那么,

$$a_N^+ \geq a_n > L^+ + \epsilon$$

而对于哪些 $N < N_0$, 由 a_N^+ 的定义可知, $a_N^+ \geq a_{N_0}^+$, 于是此时 $L^+ + \epsilon$ 是上极限, 这与下确界的唯一性矛盾 (上极限其实就是集合的下确界)。

(2) 如果 $n \geq N_0, a_n < L^+ - \epsilon$, 由此可知, $N \geq N_0$ 时,

$$a_N^+ \leq L^+ - \epsilon$$

这与 $L^+ \leq a_N^+$ 矛盾。

(f)

\Rightarrow

由命题 6.4.5 可知 c 是极限点, 如果 $L^+ \neq c$, 那么由 (e) 可知 L^+ 也是极限点, 这与命题 6.4.5 的后半部分相悖。

\Leftarrow

由于 $L^+ = L^-$, 由 (e) 可知, $(a_n)_{n=m}^\infty$ 有且只有一个极限点, 也就是说 c 是极限点。接下来要证明序列收敛与 c 。

反证法, 假设 c 序列不收敛于 c , 那么, 存在 $\epsilon > 0$, 找不到 $N \geq m$, 使得 $n \geq N$ 时, 都有 $|a_n - c| \leq \epsilon$, 即: 总是存在 $|a_n - c| > \epsilon$ 。

(1) 如果 $a_n > c + \epsilon$, 由 L^+, a_N^+ 的定义可知对任意 $N \geq m, n \geq N$ 都有,

$$\begin{cases} a_n \leq a_N^+ \\ L^+ \leq a_N^+ \end{cases} \quad (2)$$

由此可得 $a_N^+ \geq c + \epsilon = L^+ + \epsilon$ 对任意 N 均成立, 由此可知上极限不是 L^+ , 这与题设相悖。

(2) 如果 $a_n < c - \epsilon$, 同理可证其与下极限是 L^- 相悖。

6.4.4

这里我只证明 (1) (3), 其他的可以类推。

(1)

不妨设

$$M = \sup(b_n)_{n=m}^\infty$$

$$M' = \sup(a_n)_{n=m}^\infty$$

反证法, 假设 $M' > M$, 取 $m, M < m < M'$, 由命题 6.3.6 可知至少存在一个 $n \geq m$ 使得 $m < a_n \leq M'$, 此时 $a_n > m > M$, 由于 M 是上确界, 所以 $b_n \leq M$, 于是 $a_n > b_n$, 与题设相悖。

(3)

不妨设

$$L^+ = \inf(b_n^+)_{n=m}^\infty$$

$$L^{+'} = \inf(a_n^+)_{n=m}^\infty$$

又因为对任意 $N \geq m$ 都有

$$a_N^+ := \sup(a_n)_{n=N}^\infty$$

$$b_N^+ := \sup(b_n)_{n=N}^\infty$$

由 (1) 可知 $b_N^+ \geq a_N^+$, 于是由 (2) 可知 $L^{+'} \leq L^+$

6.4.5

由命题 6.4.12 (f) 可知, $(a_n)_{n=m}^\infty, (c_n)_{n=m}^\infty$ 收敛于 L , 那么, 两者的上极限 L^+ 和下极限 L^- 都等于 L , 即: $L^+ = L^- = L$ 。

设 $(b_n)_{n=m}^\infty$ 的上极限和下极限分别为 $L^{+'}, L^{-'}$ 。由引理 6.4.15 可知,

$$\begin{cases} L^- \leq L^{-'} \leq L^- \\ L^+ \leq L^{+'} \leq L^+ \end{cases} \quad (3)$$

由此可知 $L^{+'} = L^{-'} = L$, 由命题 6.4.12 (f) 可知 $(b_n)_{n=m}^\infty$ 收敛于 L

6.4.6

定义 $a_n := 1 - \frac{1}{n}, b_n := 1 - \frac{1}{n+1}$, 满足 $a_n < b_n$, 此时 $\sup(a_n)_{n=1}^\infty = \sup(b_n)_{n=1}^\infty = 1$ 。

引理 6.4.13 中描述的是 $a_n \leq b_n$, 包含 $a_n < b_n$ 的情况, 其结果是 $\sup(a_n)_{n=m}^\infty \leq \sup(b_n)_{n=m}^\infty$, 也包含 $\sup(a_n)_{n=1}^\infty = \sup(b_n)_{n=1}^\infty$ 的情况。

6.4.7

(1) 证明推论 6.4.17。

\Rightarrow

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在且等于 0, 则对任意实数 $\epsilon > 0$, 存在 N 使得 $n \geq N$ 时, $|x - 0| = |x| \leq \epsilon$ 均成立。由于 $||x| - 0| = |x| \leq \epsilon$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

\Leftarrow

因为 $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, 又由极限定律 (定理 6.1.19) 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} -|a_n| = -1 \times 0 = 0$, 由推论 6.4.14 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在且等于 0

(2) 换成其他某个数字, 该推论不成立, 因为夹逼定理的左右值无法相等。

6.4.8

(1) 当序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 有上界, 则该序列存在有限的 L^+ 【这是由定理 5.5.9 保证的】, 由命题 6.4.12 (d) (e) 可知, 上极限是序列的最大极限点。

(2) 当序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 无上界, 此时每一个 $N \geq m$, a_N^+ 都是无上界的, 由 L^+ 的定义可知 $L^+ = +\infty$ 。由题设可知 $+\infty$ 是极限点, 且 $+\infty$ 大于任意实数, 由此可知上极限是序列的最大极限点。

6.4.9

定义一个分段函数即可,

$$\begin{cases} a_n = 0 \text{ (n 除以 3 余 0)} \\ a_n = -n \text{ (n 除以 3 余 1)} \\ a_n = n \text{ (n 除以 3 余 2)} \end{cases} \quad (4)$$

6.4.10

反证法, 假设 c 不是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。即: 存在 $\epsilon' > 0, N_0 \geq m$, 找不到 $n \geq N_0$ 使得 $|a_n - c| < \epsilon'$ 。下面要证明这个 N_0 是不存在的。

c 是 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点, 那么, 对任意 $\epsilon > 0$, 对每一个 $N \geq m$ 都存在 $n \geq N$ 使得 $|b_n - c| \leq \epsilon$, 即: $c - \epsilon \leq b_n \leq c + \epsilon$ 。

又找到的 b_n 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点, 那么, 对每一个 $N' \geq m$ 都存在 $n' \geq N'$ 使得 $|a_{n'} - b_n| \leq \epsilon$, 即: $b_n - \epsilon \leq a_{n'} \leq b_n + \epsilon$ 。

由 $c - \epsilon \leq b_n \leq c + \epsilon$ 可知,

$$c - 2\epsilon \leq a_{n'} \leq c + 2\epsilon$$

对任意 ϵ (把 ϵ' 看做 $\frac{1}{2}\epsilon$), $N' \geq m$ 上式都成立, 可知 N_0 是不存在的。