5.6 为什么

2024 年 6 月 8 日

1. 设 $x \geq 0$ 是一个非负实数，$n \geq 1$ 是一个正整数，集合 $E := \{y \in R : y \geq 0且y^n \leq x\}$，此时，集合 E 中包含 0

证明：

按照定义 5.6.1 $0^n = 0$，所以 $0^n \in E$。

2. 如果 $y > 1$，且 $n \geq 1$ 是一个正整数，那么 $y^n > 1$

证明：

对 n 进行归纳。

$n = 1$ 时，按照定义 5.6.1 $y^n = y^1 = y^0 \times y = 1 \times y = y$，因为 $y > 1$，所以 $y^n > 1$。

归纳假设 $n = k$ 时，$y^k > 1$。

当 $n = k + 1$ 时，$y^{k+1} = y^k \times y$，于是由归纳假设可知，

$$y^k > 1$$

$$y^k \times y > 1 \times y > 1$$

综上，归纳完成。

3. 如果 $y > x$，且 $y > 1, n \geq 1$，所以 $y^n > x$

证明：

对 n 进行归纳。

当 $n = 1$ 时，$y^1 = y$，所以 $y^n > x$。

归纳假设，$n = k$ 时，$y^k > x$。

当 $n = k + 1$ 时，$y^{k+1} = y^k \times y$，由归纳假设可知 $y^k > x$，所以，

$$y^k \times y > xy$$

又因为，

$$y > 1$$
$$yx > x$$

于是 $y^k \times y > xy > x$。

综上，归纳完成。

4.x 是一个非负实数，证明 $x^{1/1} = x = x^1$

证明：

由定义 5.6.1 可知，$x^1 = x^0 \times x = 1 \times x = x$。

设 $E = \{y \in R : y \geq 0且y^1 \leq x\}$,由定义 5.6.4 可知,$x^{1/1} = sup(E) = x$。

5. 如果 y 和 z 是正的且 $y^n = z^n$，那么 $y = z$。

证明：

假设 $y^n = r$，由引理 5.6.6（b）可知 $y = r^{1/n}$，

同理 $z = r^{1/n}$。

相等的传递性可知 $y = z$。