17.6 习题

张志聪

2025 年 5 月 14 日

17.6.1

- (1) f 是压缩映射。

  令 $x_0, x_1 \in [a, b]$ $x_0 = x_1$ 显然满足压缩映射的条件，我们接下来关注 $x_0 < x_1$ 的情况。

  在区间 $[x_0, x_1]$，由推论 10.2.9（中值定理）可知，存在 $x \in [x_0, x_1]$，使得

  $$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x)$$
  $$f(x_1) - f(x_0) = f'(x)(x_1 - x_0)$$
  $$|f(x_1) - f(x_0)| = |f'(x)||x_1 - x_0|$$

  由题设可知 $|f'(x)| \leq 1$，所以

  $$|f(x_1) - f(x_0)| \leq |x_1 - x_0|$$

  所以，f 是压缩映射。

- (2) $|f'(x)| < 1, f'$ 连续的，那么 f 是一个严格压缩映射。

  如果 f 是常值函数，那么对任意 $x \in [a, b]$，都有 $f'(x) = 0$，显然命题成立。

  我们接下来关注 f 不是常值函数的情况。

  由 (1) 的证明过程可知，对任意 $x_0, x_1 \in [a, b]$，存在 $x \in (x_0, x_1)$ 有

  $$|f(x_1) - f(x_0)| = |f'(x)||x_1 - x_0|$$

因为 f' 连续，由命题 9.6.7 可知（最大值原理），存在 $x_{max}, x_{min} \in [a, b]$
使得 f' 达到最大值 $f'(x_{max})$ 和最小值 $f'(x_{min})$。令 $c = max(|f'(x_{max})|, |f'(x_{min})|)$，
于是对任意 x 都有 $|f'(x)| \leq c < 1$，所以

$$|f(x_1) - f(x_0)| = |f'(x)||x_1 - x_0| \leq c|x_1 - x_0|$$

所以 f 是一个严格压缩映射。

17.6.2

反证法，假设存在 x_0 使得 $|f'(x_0)| > 1$。

以 $f'(x_0) > 1$ 为例，对 $\epsilon = \frac{1}{2}(f'(x_0) - 1)$，存在 $\delta > 0$ 使得只要 $|x - x_0| < \delta$，就有

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| &\leq \epsilon|x - x_0| \\
|f'(x_0)||x - x_0| - \epsilon|x - x_0| \leq |f(x) - f(x_0)| &\leq |f'(x_0)||x - x_0| + \epsilon|x - x_0| \\
(|f'(x_0)| - \epsilon)|x - x_0| &\leq |f(x) - f(x_0)| \\
(\frac{1}{2}f'(x_0) + 1)|x - x_0| &\leq |f(x) - f(x_0)|
\end{aligned}$$

因为 $(\frac{1}{2}f'(x_0) + 1) > 1$，这与 f 是压缩映射矛盾。

17.6.3

$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$。

f 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上可微。

任意 $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 都有

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |sin(x) - sin(y)| \\
&= |sin(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}) - sin(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2})| \\
&= |sin(\frac{x+y}{2})cos(\frac{x-y}{2}) + cos(\frac{x+y}{2})sin(\frac{x-y}{2}) \\
&- (sin(\frac{x+y}{2})cos(-\frac{x-y}{2}) + cos(\frac{x+y}{2})sin(-\frac{x-y}{2}))| \\
&= |2cos(\frac{x+y}{2})sin(\frac{x-y}{2})| \\
&\leq |2sin(\frac{x-y}{2})| \\
&< 2|\frac{x-y}{2}| = |x-y|
\end{aligned}$$

因为 $f'(x) = sin'(x) = cos(x)$，于是当 $x = 0$ 时 $f'(0) = cos(0) = 1$。

17.6.4

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x|}{2}$。
f 在 $x = 0$ 处是不可微的，因为左右导数不相等：
左导数

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-x}{2} - 0}{x} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

右导数

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{2} - 0}{x} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

17.6.5

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x - x^2)' \\
&= 1 - 2x
\end{aligned}$$

于是任意 $x \in [0,1]$，我们有

$$|f'(x)| \leq 1$$

由习题 17.6.1 可知 f 是一个压缩映射。

注意，现在我们还不能说 f 不是严格压缩映射。

反证法，假设存在 $0 < c < 1$ 使得 $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$。

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |x - x^2 - y + y^2| \\
&= |x - y + y^2 - x^2| \\
&= |(x - y) + (y + x)(y - x)| \\
&= |(x - y)[1 - (y + x)]| \\
&= |x - y||1 - (y + x)|
\end{aligned}$$

因为 $x, y \in [0,1]$，所以 $|1 - (y + x)| \in [0,1]$，因为 $0 < c < 1$ 是一个定值，那么，存在

$$|1 - (y + x)| > c$$

于是

$$|f(x) - f(y)| = |x - y||1 - (y + x)| > c|x - y|$$

存在矛盾。

17.6.6

设 f 是 X 上的压缩映射任意压缩映射。

任意 $x_0 \in X$，设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中收敛于 x_0 的序列。

对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 1$ 使得只要 $n \geq N$，都有

$$|x^{(n)} - x_0| < \epsilon$$

又因为 f 是 X 上的压缩映射，于是

$$|f(x^{(n)}) - f(x_0)| \leq |x^{(n)} - x_0| < \epsilon$$

所以，序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $f(x_0)$。

由定理 13.1.4(b) 可知，f 在 x_0 处连续。因为 x_0 的任意性可知 f 在是连续的。

17.6.7

- (1) f 最多有一个不动点。

  反证法，假设 f 不止一个不动点。设 x_0, x_1 是 f 的不动点，即

  $$x_0 = f(x_0)$$
  $$x_1 = f(x_1)$$

  于是

  $$d(f(x_1), f(x_0)) = d(x_1, x_0)$$

  这与 f 是严格压缩映射矛盾。

- (2) X 是一个非空的完备空间，那么 f 恰好有一个不动点。

  因为 X 是非空的，可以任取 $x_0 \in X$，递归地定义

  $$x_1 = f(x_0)$$
  $$x_2 = f(x_1)$$
  $$x_3 = f(x_2)$$
  $$\vdots$$

  于是

  $$d(x_{n+1}, x_n) \le c^n d(x1, x_0)$$

  （通过归纳法证明）

  由引理 7.3.3 可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c^n d(x_1, x_0) = \frac{d(x_1,x_0)}{1-c}$。

  对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \ge 1$ 使得只要 $p-1, q \ge N$ 其中 $q > p$，都有

  $$\sum_{n=0}^{q} c^n d(x_1, x_0) - \sum_{n=0}^{p-1} c^n d(x_1, x_0) = d(x_{p+1}, x_p) + d(x_{p+2}, x_{p+1}) + \cdots + d(x_q, x_{q-1}) \le \epsilon$$

因为

$$d(x_q, x_p) \leq d(x_{p+1}, x_p) + d(x_{p+2}, x_{p+1}) + \cdots + d(x_q, x_{q-1}) \leq \epsilon$$

又 $p = q$ 时，$d(x_q, x_p) = 0 \leq \epsilon$。

综上可得 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 是柯西序列。因为 X 是完备的度量空间，所以 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于某个值 $x' \in X$。

接下来证明 x' 是 f 的不动点。

因为 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x'，那么，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N_0 \geq 0$，使得只要 $n \geq N_0$ 都有 $d(x_n, x') < \frac{1}{2}\epsilon$，又因为 f 是一个严格压缩映射，所以

$$d(f(x'), f(x_n)) \leq cd(x', x_n) \leq c\frac{1}{2}\epsilon < \frac{1}{2}\epsilon$$

又由 $f(x_n)$ 的构造方式可得 $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ 也收敛于 x'。那么，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N_1 \geq 0$，使得只要 $n \geq N_1$ 都有 $d(f(x_n), x') < \frac{1}{2}\epsilon$。

综上，取 $N = \max(N_0, N_1)$，$n \geq N$，我们有

$$\begin{aligned} d(f(x'), x') &\leq d(f(x'), f(x_n)) + d(f(x_n), x') \\ &< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可知，$x' = f(x')$。

17.6.8 ⊛

$$d(x_0, y_0) = d(f(x_0), g(y_0)) = d(f(x_0), f(y_0)) + d(f(y_0), g(y_0)) \leq cd(x_0, y_0) + \epsilon$$

$$d(x_0, y_0) = d(f(x_0), g(y_0)) = d(f(x_0), g(x_0)) + d(g(x_0), g(y_0)) \leq \epsilon + c'd(x_0, y_0)$$

可得

$$d(x_0, y_0) \leq \frac{\epsilon}{1-c}$$
$$d(x_0, y_0) \leq \frac{\epsilon}{1-c'}$$

所以

$$d(x_0, y_0) \leq \frac{\epsilon}{1-\min(c, c')}$$