19.3 习题

张志聪

2025 年 6 月 5 日

19.3.1

我们有

$$\left|\int_\Omega f\right| = \left|\int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-\right|$$

因为 $\int_\Omega f^+, \int_\Omega f^-$ 都是非负的有限实数，运用实数的三角不等式，我们有

$$\left|\int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-\right| \le \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^-$$

综上可得

$$\left|\int_\Omega f\right| \le \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^-$$

利用引理 19.2.10，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f| &= \int_\Omega f^+ + f^- \\ &= \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^-\end{aligned}$$

所以，综上

$$\left|\int_\Omega f\right| \le \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^- = \int_\Omega |f|$$

19.3.2

- (a)

f 是绝对可积函数，即 $\int_\Omega |f| < \infty$ 是有限的，于是由命题 19.2.6 可知，

$$\begin{aligned}\int_\Omega |cf| &= \int_\Omega |c||f| \\ &= |c| \int_\Omega |f| < \infty\end{aligned}$$

所以，cf 也是绝对可积函数。

- $c = 0$

  于是 $cf = 0$，易得

  $$\int_\Omega cf = 0 = c \int_\Omega f$$

- $c > 0$

  于是由定义 19.3.2 和命题 19.2.6(b) 可知，

  $$\begin{aligned}\int_\Omega cf &= \int_\Omega (cf)^+ - \int_\Omega (cf)^- \\ &= \int_\Omega cf^+ - \int_\Omega cf^- \\ &= c\int_\Omega f^+ - c\int_\Omega f^- \\ &= c\int_\Omega f\end{aligned}$$

- $c < 0$

  此时，我们有

  $$\begin{aligned}(cf)^+ &= |c| f^- \\ (cf)^- &= |c| f^+\end{aligned}$$

于是由定义 19.3.2 和命题 19.2.6(b) 可知，

$$\begin{aligned}\int_\Omega cf &= \int_\Omega (cf)^+ - \int_\Omega (cf)^- \\ &= \int_\Omega |c|f^- - \int_\Omega |c|f^+ \\ &= |c|\int_\Omega f^- - |c|\int_\Omega f^+ \\ &= |c|(\int_\Omega f^- - \int_\Omega f^+) \\ &= |c|(-\int_\Omega f) \\ &= c\int_\Omega f\end{aligned}$$

综上可得

$$\int_\Omega cf = c\int_\Omega f$$

- (b)

  我们有

$$\int_\Omega |f| < \infty$$
$$\int_\Omega |g| < \infty$$

对任意 $x \in \Omega$，我们有

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

即

$$|f+g| \leq |f| + |g|$$

于是利用 19.2.6(c) 可得

$$\int_\Omega |f+g| \leq \int_\Omega |f| + \int_\Omega |g| < \infty$$

所以，$f+g$ 是绝对可积函数。

(2)

我们有

$$f + g = (f+g)^+ - (f+g)^- \tag{1}$$
$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \tag{2}$$

由 (1)(2) 可得

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

因为等式两边都是非负可测函数，利用引理 19.2.10 可得

$$\int_\Omega (f+g)^+ + f^- + g^- = \int_\Omega (f+g)^- + f^+ + g^+$$
$$\int_\Omega (f+g)^+ + \int_\Omega f^- + \int_\Omega g^- = \int_\Omega (f+g)^- + \int_\Omega f^+ + \int_\Omega g^+$$
$$\int_\Omega (f+g)^+ - \int_\Omega (f+g)^- = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- + \int_\Omega g^+ - \int_\Omega g^-$$
$$\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g$$

- (c)

  因为 $f(x) \le g(x)$，于是可得

$$f^+(x) \ge g^+(x)$$
$$f^-(x) \le g^-(x)$$

  所以

$$\int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- \le \int_\Omega g^+ - \int_\Omega g^-$$
$$\Longrightarrow$$
$$\int_\Omega f \le \int_\Omega g$$

- (d)

  由命题 19.2.6(d) 可知，

$$\int_\Omega f^+ = \int_\Omega g^+$$
$$\int_\Omega f^- = \int_\Omega g^-$$

所以

$$\int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^- = \int_\Omega g^+ + \int_\Omega g^-$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_\Omega f = \int_\Omega g$$