14.5 习题

张志聪

2025 年 3 月 19 日

14.5.1

- (a) 有界函数的有限和是有界的。

  成立；

  对有限和的个数 n 进行归纳。

  $n=0$ 时，空虚的为真；

  $n=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{1} f^{(n)} = f^{(1)}$，因为 $f^{(1)}$ 是有界的，于是命题为真；

  归纳假设 $n=k$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{k} f^{(n)}$ 是有界的；

  $n=k+1$ 时，

  $$\sum_{n=1}^{k+1} f^{(n)} = \sum_{n=1}^{k} f^{(n)} + f^{(k+1)}$$

  由归纳假设可知 $\sum\limits_{n=1}^{k} f^{(n)}$ 是有界的，又因为 $f^{(k+1)}$ 是有界的，于是存在 $M, M' > 0$，使得只要 $x \in X$，都有

  $$|\sum_{n=1}^{k} f^{(n)}(x)| < M$$

  $$|f(x)| < M'$$

  于是可得

  $$|\sum_{n=1}^{k+1} f^{(n)}| \leq M + M'$$

综上可得，$\sum\limits_{n=1}^{k+1} f^{(n)}$ 有界；

归纳完成，命题成立。

- (b) 连续函数的有限和是连续的。

  成立；证明与 (a) 类似，略。

- (c) 一致连续函数的有限和是一致连续的。

  成立；证明与 (a) 类似，略。

14.5.2

按照书中提示证明。

由题设可知，任意 n 都有 $f^{(n)} \in C(X \to \mathbb{R})$，由因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||f^{(n)}||_\infty$ 收敛，于是可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||f^{(n)}||_\infty$ 是柯西序列，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 1$，使得只要 $p, q \geq N, p \leq q$ 都有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{q} ||f^{(n)}||_\infty - \sum_{n=1}^{p} ||f^{(n)}||_\infty \\
&= ||f^{(p)}||_\infty + ||f^{(p+1)}||_\infty + \cdots + ||f^{(q)}||_\infty \\
&< \epsilon
\end{aligned}
$$

又我们有

$$
\begin{aligned}
&d_{B(X \to \mathbb{R})}(\sum_{n=1}^{p} f^{(n)}, \sum_{n=1}^{q} f^{(n)}) \\
&= \sup\{|\sum_{n=p+1}^{q} f^{(n)}(x)| : x \in X\} \\
&\leq ||f^{(p)}||_\infty + ||f^{(p+1)}||_\infty + \cdots + ||f^{(q)}||_\infty \\
&< \epsilon
\end{aligned}
$$

于是可得，部分和构成的序列 $(\sum\limits_{n=1}^{N} f^{(n)})_{N=1}^{\infty}$ 是 $C(X \to \mathbb{R})$ 中的柯西序列，利用定理 14.4.5 可知，$(\sum\limits_{n=1}^{N} f^{(n)})_{N=1}^{\infty}$ 收敛于 $C(X \to \mathbb{R})$ 中的一个函数 f，

由命题 14.4.4 可知，$(\sum_{n=1}^{N} f^{(n)})_{N=1}^{\infty}$ 一致收敛于 f，所以，无限级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ 一致收敛于 f。