17.3 习题

张志聪

2025 年 5 月 8 日

17.3.1

v 是零向量，等式显然成立，接下来我们讨论 v 不是零向量的情况。

f 在 x_0 处可微，所以由定义 17.2.2（可微性），我们有

$$\lim_{x \to x_0; x \in E - \{x_0\}} \frac{\|f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

令 $x = x_0 + tv$，则当 $x \to x_0$ 时，$t \to 0$（只关注 $t > 0$）。代入后：

$$\lim_{t \to 0; t > 0} \frac{\|f(x_0 + tv) - (f(x_0) + f'(x_0)(tv))\|}{\|tv\|} = 0$$
$$\lim_{t \to 0; t > 0} \frac{\|f(x_0 + tv) - f(x_0) - f'(x_0)(tv)\|}{\|tv\|} = 0$$

对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对所有的 $x \in B(x_0, \delta)\ \{x_0\}$（即：$(x_0 + tv) \in B(x_0, \delta)\ \{x_0\}$）。都有

$$\frac{\|f(x_0 + tv) - f(x_0) - f'(x_0)(tv)\|}{\|tv\|} < \epsilon$$
$$\frac{\|f(x_0 + tv) - f(x_0) - tf'(x_0)(v)\|}{t\|v\|} < \epsilon$$
$$\frac{\|\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)(v)\|}{\|v\|} < \epsilon$$
$$\|\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)(v)\| < \epsilon\|v\|$$

（变换过程中，$f'(x_0)$ 的线性性来自可微性的定义）

由 $\epsilon > 0$ 是任意值，$\|v\|$ 是定值，可知

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)(v)$$

$$\Longrightarrow$$

$$D_v f(x_0) = f'(x_0)(v)$$