19.3 习题

张志聪

2025 年 6 月 6 日

19.3.1

我们有

$$\left|\int_{\Omega} f\right| = \left|\int_{\Omega} f^{+} - \int_{\Omega} f^{-}\right|$$

因为 $\int_{\Omega} f^{+}, \int_{\Omega} f^{-}$ 都是非负的有限实数，运用实数的三角不等式，我们有

$$\left|\int_{\Omega} f^{+} - \int_{\Omega} f^{-}\right| \leq \int_{\Omega} f^{+} + \int_{\Omega} f^{-}$$

综上可得

$$\left|\int_{\Omega} f\right| \leq \int_{\Omega} f^{+} + \int_{\Omega} f^{-}$$

利用引理 19.2.10，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |f| &= \int_{\Omega} f^{+} + f^{-} \\ &= \int_{\Omega} f^{+} + \int_{\Omega} f^{-}\end{aligned}$$

所以，综上

$$\left|\int_{\Omega} f\right| \leq \int_{\Omega} f^{+} + \int_{\Omega} f^{-} = \int_{\Omega} |f|$$

19.3.2

- (a)

f 是绝对可积函数，即 $\int_\Omega |f| < \infty$ 是有限的，于是由命题 19.2.6 可知，

$$\begin{aligned}\int_\Omega |cf| &= \int_\Omega |c||f| \\ &= |c| \int_\Omega |f| < \infty\end{aligned}$$

所以，cf 也是绝对可积函数。

- $c = 0$

  于是 $cf = 0$，易得

  $$\int_\Omega cf = 0 = c \int_\Omega f$$

- $c > 0$

  于是由定义 19.3.2 和命题 19.2.6(b) 可知，

  $$\begin{aligned}\int_\Omega cf &= \int_\Omega (cf)^+ - \int_\Omega (cf)^- \\ &= \int_\Omega cf^+ - \int_\Omega cf^- \\ &= c\int_\Omega f^+ - c\int_\Omega f^- \\ &= c\int_\Omega f\end{aligned}$$

- $c < 0$

  此时，我们有

  $$\begin{aligned}(cf)^+ &= |c|f^- \\ (cf)^- &= |c|f^+\end{aligned}$$

于是由定义 19.3.2 和命题 19.2.6(b) 可知，

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega cf &= \int_\Omega (cf)^+ - \int_\Omega (cf)^- \\
&= \int_\Omega |c|f^- - \int_\Omega |c|f^+ \\
&= |c|\int_\Omega f^- - |c|\int_\Omega f^+ \\
&= |c|(\int_\Omega f^- - \int_\Omega f^+) \\
&= |c|(-\int_\Omega f) \\
&= c\int_\Omega f
\end{aligned}
$$

综上可得

$$\int_\Omega cf = c\int_\Omega f$$

- (b)

  我们有

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |f| < \infty \\
\int_\Omega |g| < \infty
\end{aligned}
$$

对任意 $x \in \Omega$，我们有

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$$

即

$$|f+g| \le |f| + |g|$$

于是利用 19.2.6(c) 可得

$$\int_\Omega |f+g| \le \int_\Omega |f| + \int_\Omega |g| < \infty$$

所以，$f+g$ 是绝对可积函数。

(2)

我们有

$$f+g=(f+g)^+-(f+g)^- \tag{1}$$
$$f+g=(f^+-f^-)+(g^+-g^-) \tag{2}$$

由 (1)(2) 可得

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

因为等式两边都是非负可测函数，利用引理 19.2.10 可得

$$\int_\Omega (f+g)^+ + f^- + g^- = \int_\Omega (f+g)^- + f^+ + g^+$$
$$\int_\Omega (f+g)^+ + \int_\Omega f^- + \int_\Omega g^- = \int_\Omega (f+g)^- + \int_\Omega f^+ + \int_\Omega g^+$$
$$\int_\Omega (f+g)^+ - \int_\Omega (f+g)^- = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- + \int_\Omega g^+ - \int_\Omega g^-$$
$$\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g$$

- (b-减法)

  扩展 (b)：函数 $f-g$ 是绝对可积的，并且 $\int_\Omega (f-g) = \int_\Omega f - \int_\Omega g$。（不假设 g,f 的大小关系）。

  对任意 $x\in\Omega$，我们有

  $$|f(x)-g(x)| \le |f(x)|+|g(x)|$$

  因为 f,g 都是可测函数，由推论 18.5.7 可知 $|f(x)-g(x)|$ 是可测函数。

  由命题 19.2.6(c) 和 (b) 可得

  $$\int_\Omega |f(x)-g(x)| \le \int_\Omega |f(x)|+|g(x)| = \int_\Omega |f(x)| + \int_\Omega |g(x)| < \infty$$

  所以，$f-g$ 是绝对可积函数。

  我们有

  $$f-g=(f-g)^+-(f-g)^- \tag{3}$$
  $$f-g=(f^+-f^-)-(g^+-g^-) \tag{4}$$

由 (3)(4) 可得

$$(f-g)^+ + f^- + g^+ = (f-g)^- + f^+ + g^-$$

因为等式两边都是非负可测函数，利用引理 19.2.10 可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f-g)^+ + f^- + g^+ &= \int_\Omega (f-g)^- + f^+ + g^- \\ \int_\Omega (f-g)^+ + \int_\Omega f^- + \int_\Omega g^+ &= \int_\Omega (f-g)^- + \int_\Omega f^+ + \int_\Omega g^- \\ &\Longrightarrow \\ \int_\Omega (f-g) &= \int_\Omega f - \int_\Omega g\end{aligned}$$

- (c)

  因为 $f(x) \le g(x)$，于是可得

$$\begin{aligned}f^+(x) &\ge g^+(x) \\ f^-(x) &\le g^-(x)\end{aligned}$$

  所以

$$\begin{aligned}\int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- &\le \int_\Omega g^+ - \int_\Omega g^- \\ &\Longrightarrow \\ \int_\Omega f &\le \int_\Omega g\end{aligned}$$

- (d)

  由命题 19.2.6(d) 可知，

$$\begin{aligned}\int_\Omega f^+ &= \int_\Omega g^+ \\ \int_\Omega f^- &= \int_\Omega g^-\end{aligned}$$

所以

$$\int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^- = \int_\Omega g^+ + \int_\Omega g^-$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_\Omega f = \int_\Omega g$$

19.3.3

注意：不能直接利用命题 19.3.3(b)。

- 方法一：使用习题 19.3.2(b-减法)

$$\int_{\mathbb{R}} g - f = \int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} f = 0$$

由命题 19.2.6(a) 可得，$g - f$ 是几乎处处为零，命题得证。

- 方法二：直接证明

考虑集合

$$A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$$

我们需要证明 $m(A) = 0$。

反证法，假设 $m(A) \neq 0$。

令 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

因为 $g(x) \geq f(x)$ 且 g, f 都是绝对可积的可测函数，所以 h 是可测的（根据引理 18.5.10）且是非负的。而且还是绝对可积的。

因为 $m(A) \neq 0$，所以 h 不是几乎处处为零，利用命题 19.2.6(a) 可得

$$\int_{\mathbb{R}} h > 0$$

我们有

$$g(x) = f(x) + h(x)$$

由命题 19.3.3(b) 可得

$$\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} h$$
$$\Longrightarrow$$
$$\int_{\mathbb{R}} g > \int_{\mathbb{R}} f$$

这与题设 $\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} f$ 矛盾。假设不成立，命题得证。