

8.2 注释

张志聪

2024 年 11 月 23 日

★定义8.2.1定义明确性

假设双射函数 $h : \mathbb{N} \rightarrow X$ 。需要证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(g(n)) = \sum_{m=0}^{\infty} f(h(m))$$

可以定义 a_n 为

$$a_n := f(g(n))$$

现在，根据命题 7.4.3 只需要找到一个双射。

定义 $w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 为

$$w(m) := h^{-1} \circ g(m)$$

因为 g 是 $\mathbb{N} \rightarrow X$ 的双射，且 h 是 $\mathbb{N} \rightarrow X$ 的双射，那么 h^{-1} 是 $\mathbb{N} \rightarrow X$ 的双射，所以，这两个函数的复合函数 w 是双射函数。又因为

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(h(m)) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{w(m)}$$

由命题 7.4.3 可知

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{w(m)} \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f(g(n)) &= \sum_{m=0}^{\infty} f(h(m)) \end{aligned}$$

★定理8.2.2

(1) 书中

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \leq \sum_{(n,m) \in X} f(n,m)$$

应该是错的，这里应该是相等的，即：

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M = \sum_{(n,m) \in X} f(n,m)$$

(2) 书中“当 $M \rightarrow \infty$ 时，对上面的式子取上确界可得（利用极限定律并对 N 使用归纳法）”

应该是错的，这里是对 M 进行归纳， N 是看做固定值的。

(3) 证明： $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f(n,m)$ 是绝对收敛的，那么 $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f_+(n,m)$ 和 $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f_-(n,m)$ 也都是绝对收敛的。

反证法，假设 f_+ 是发散的，由 $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f(n,m)$ 的部分和 S_N 等于 $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f_+(n,m)$ 的部分和 S_{N+} ， $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f_-(n,m)$ 的部分和 S_{N-} 相加，即：

$$S_N = S_{N+} + S_{N-}$$

（注意：这里的部分和都是序列每项取绝对值的部分和）。

由于 $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ 收敛，所以，对任意 $\epsilon > 0$ ，都存在一个整数 M' ，当 $N \geq M'$ 使得

$$|S_N - L| \leq \epsilon \quad (1)$$

当如果 f_+ 是发散的，那个，存在一个整数 M'' ，当 $N \geq M''$ 使得

$$S_{N+} > L + \epsilon$$

又因为 $S_{N-} \geq 0$ ，所以，取 $M = \max(M', M'')$ ，当 $N \geq M$ 使得

$$\begin{aligned} |S_N - L| &= |S_{N+} + S_{N-} - L| \\ &> \epsilon \end{aligned}$$

显然，与 (1) 式存在矛盾。所以 f_+ 是收敛的。同理可证 f_- 收敛。

(4) 最后一句话，有个需要证明的部分。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(n, m) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_+(n, m) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_-(n, m)$$

其中， $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_+(n, m)$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_-(n, m)$ 绝对收敛的。

感觉是结论是明显的，但这里有以下问题：

- 书中没有明确定义双重级数。
- 回到定义 7.2.2 (级数的收敛)，部分和 $S_N = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{\infty} f(n, m)$ 因为其包含一个无限级数，处理起来没有想象中那么简单。

不妨设 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_+(n, m)$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_-(n, m)$ 的部分和分别是 S_{N+} , S_{N-} 。
那么，如果能证明：

$$S_N = S_{N+} + S_{N-}$$

则利用极限定律，可以完成证明。

对 m 进行归纳， $m = 0$ 时，由命题 7.1.11 (b) 可知

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^0 f(n, m) \\ &= \sum_{n=0}^N f(n, 0) \\ S_{N+} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^0 f_+(n, m) \\ &= \sum_{n=0}^N f_+(n, 0) \\ S_{N-} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^0 f_-(n, m) \\ &= \sum_{n=0}^N f_-(n, 0) \end{aligned}$$

因为 $f(n, 0) = f_+(n, 0) + f_-(n, 0)$ ，由引理 7.1.4 (c) 可知

$$S_N = S_{N+} + S_{N-}$$

归纳假设 $m = k$ 时, 命题成立。

$m = k + 1$ 时, 由引理 7.1.4 (a) 可知

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{k+1} f(n, m) \\ &= \sum_{n=0}^N \left(\sum_{m=0}^k f(n, m) + f(n, k+1) \right) \end{aligned}$$

同理可知

$$\begin{aligned} S_{N+} &= \sum_{n=0}^N \left(\sum_{m=0}^k f_+(n, m) + f_+(n, k+1) \right) \\ S_{N-} &= \sum_{n=0}^N \left(\sum_{m=0}^k f_-(n, m) + f_-(n, k+1) \right) \end{aligned}$$

因为 $k \in \mathbb{N}$ (即: 是有限值), 所以

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N \left(\sum_{m=0}^k f(n, m) + f(n, k+1) \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^k f(n, m) + \sum_{n=0}^N f(n, k+1) \end{aligned}$$

同理 S_{N+}, S_{N-} 同样成立。

利用归纳假设, 可以证得 $S_N = S_{N+} + S_{N-}$ 。

至此, 归纳完成。

然后利用极限定律, 即可完成证明。

(5) 前提一定要是绝对收敛么?

是的。首先第二个等式用到了命题 7.4.3, 而该命题的前提就是要求级数是绝对收敛的。

对于第一个等式, 在刚刚 (3) 中, f 是绝对收敛, 则 f_+, f_- 也是绝对收敛的。而在 f 是条件收敛的情况下, 是没有这个性质的, 这里举一个反例

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / n$$

由命题 7.2.12 (交错级数判别法) 可知, 该级数收敛。而级数 $f_+ := \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 是调和函数, 是发散的 (推论 7.3.7)。