实数的连续性

张志聪

2025 年 5 月 26 日

说明 1. 在《陶哲轩实分析》(第三版)这个本书中,在第 9 章开头 ① 中说明本书没有严格定义“连续统”,给人的感觉是实数 $\mathbb{R}$ 的连续性陶哲轩没有证明。但我个人觉得陶哲轩已经完成了证明。

1. 直观

离散集合与连续统是相对的概念。粗略的说，如果集合中的每一个元素与剩余元素之间有一段非零的距离，那么这个集合就是离散的；如果一个集合是连通的并且没有“洞”，那么这个集合就是一个连续统。

陶哲轩用定理 6.4.18（实数的完备性）已经隐含了实数的连续性，实数的完备性就是实数“连续性”的一种正式数学表达。而且证明完备性的方法也有多种比如戴德金分割（《数学分析八讲-辛钦》的方法）、柯西序列是收敛序列（《陶正轩实分析》的方法）等。

如果实数有空洞 $l \notin \mathbb{R}$，就可以构造一个实数序列不断趋近 l，但因为 $l \notin \mathbb{R}$，导致这个序列无法收敛到某个实数。

特别地，陶哲轩是通过上极限与下极限相等来证明定理 6.4.18 的，也就依赖了柯西序列一定存在上极限和下极限（极限点的定义说明其本身就是实数），但书中缺少这个说明，接下来我们证明下柯西序列一定具有上极限（下极限类似）。

设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是任意实数柯西序列。

因为 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是实数柯西序列，由引理 5.1.15 可知，序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有界的，即存在一个实数 $M > 0$，使得 $|a_n| \leq M$。

我们有

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf(a_N^+)_{N=1}^\infty$$

其中

$$a_N^+ = \sup(a_n)_{n=N}^\infty$$

于是可知 $(a_N^+)_{N=1}^\infty$ 是一个单调递减的序列，由命题 6.3.8（单调有界序列收敛于实数，这个命题的证明过程会依赖定理 5.5.9）可知，且

$$\lim_{N\to\infty} a_N^+ = \inf(a_N^+)_{N=1}^\infty \leq M$$

命题得证。