19.1 习题

张志聪

2025 年 6 月 1 日

19.1.1

(1)

因为 f 是简单函数，设 $f(\Omega)=\{c_1,c_2,\cdots,c_N\}$，定义：

$$E_j:=\{x\in\Omega:f(x)=c_j\},\quad 1\le j\le N$$

这些集合两两不交，且 $\bigcup_{j=1}^N E_j=\Omega$。

同理，设 $g(\Omega)=\{d_1,d_2,\cdots,d_M\}$，定义：

$$X_k:=\{x\in\Omega:g(x)=d_k\},\quad 1\le k\le M$$

这些集合也两两不交，且 $\bigcup_{k=1}^M X_k=\Omega$。

考虑集合：

$$W:=\{W_{j,k}:=E_j\cap X_k:1\le j\le N,\ 1\le k\le M\}$$

由于交集运算，$W_{j,k}$ 两两不交，且它们的并集仍为 Ω，因此 W 构成了 Ω 的一个有限划分。

对任意 $x\in\Omega$，存在唯一的 j,k 使得 $x\in W_{j,k}$，此时有：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=c_j+d_k$$

因为 c_j+d_k 的可能取值至多为 $N\times M$ 个有限个数，所以 $f+g$ 的取值是有限的。

因此，$f+g$ 是简单函数。

(2)

特别地 cf 也是简单函数。此时 $cf(\Omega)=\{c\times c_1,c\times c_2,\cdots,c\times c_N\}$，满足简单函数的定义。

19.1.2

因为 f 是简单函数，设 $f(\Omega)=\{c_1,c_2,\cdots,c_N\}$，定义：

$$E_j:=\{x\in\Omega:f(x)=c_j\},\quad 1\le j\le N$$

这些集合两两不交，且 $\bigcup_{j=1}^{N}E_j=\Omega$。

因为 f 是可测函数，所以对任意 $1\le j\le N$，$f^{-1}(c_j)=E_j$ 都是可测集合。

对于任意 $x\in\Omega$，存在 E_j 使得 $x\in E_j$，此时 $f(x)=c_j$，又因为对

$$\sum_{i=1}^{N}c_i\chi_{E_i}(x)$$

当 $i\neq j$ 时，由特征函数的定义可知 $c_i\chi_{E_i}=0$;

当 $i=j$ 时，由特征函数的定义可知 $c_i\chi_{E_i}=c_j$;

所以

$$\sum_{i=1}^{N}c_i\chi_{E_i}(x)=c_j$$

综上可得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}c_i\chi_{E_i}(x)$$

由 x 的任意性可知，$f=\sum\limits_{i=1}^{N}c_i\chi_{E_i}$

19.1.3

设 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是函数序列，其中 $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$，

$$f_n(x)=\sup\{\frac{j}{2^n}:j\in\mathbb{Z},\frac{j}{2^n}\le min(f(x),2^n)\}$$

接下来证明该序列是否满足所需的性质。

(1) 证明 $f_1(x)\ge 0$。

$$\begin{aligned}f_1(x)&=\sup\{\frac{j}{2^1}:j\in\mathbb{Z},\frac{j}{2^1}\le min(f(x),2^1)\}\\&=\sup\{\frac{j}{2}:j\in\mathbb{Z},\frac{j}{2}\le min(f(x),2)\}\end{aligned}$$

因为 f 是非负的，所以 $min(f(x),2) \geq 0$。

现在证明 $f_1(x) \geq 0$，反证法，假设 $f_1(x) < 0$，即

$$f_1(x) = \sup\{\frac{j}{2} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2} \leq min(f(x),2)\} < 0$$

当 $j = 0$ 时，$0 \in \{\frac{j}{2} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2} \leq min(f(x),2)\}$，这与上确界 $f_1(x) < 0$ 矛盾，假设不成立。

(2) 证明 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 序列是递增的，即 $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$。

我们有

$$f_n(x) = \sup\{\frac{j}{2^n} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^n} \leq min(f(x),2^n)\}$$
$$f_{n+1}(x) = \sup\{\frac{j}{2^{n+1}} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^{n+1}} \leq min(f(x),2^{n+1})\}$$

因为 $2^n < 2^{n+1}$，所有

$$min(f(x),2^n) \leq min(f(x),2^{n+1})$$

反证法，假设 $f_n(x) > f_{n+1}(x)$，即存在 $y \in \{\frac{j}{2^n} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^n} \leq min(f(x),2^n)\}$ 使得

$$y > f_{n+1}(x)$$

y 可表示成 $\frac{j_0}{2^n}$ 的形式，即 $y = \frac{j_0}{2^n}$，于是我们有

$$\frac{j_0}{2^n} > f_{n+1}(x)$$

于是可得

$$\frac{j_0}{2^n} \leq min(f(x),2^n) \leq min(f(x),2^{n+1})$$

这表明 $\frac{j_0}{2^n} = \frac{2j_0}{2^{n+1}} \in \{\frac{j}{2^{n+1}} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^{n+1}} \leq min(f(x),2^{n+1})\}$，于是存在矛盾。

(3) 证明 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 序列逐点收敛于 f。

对任意 $x_0 \in \Omega, \epsilon > 0$。我们有

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

因为 $f(x_0)$ 是定值，所以存在 $N \geq 1$ 使得只要 $n \geq N$，就有

$$2^n \geq f(x_0)$$

于是可得，当 $n \geq N$ 时，

$$min(f(x_0), 2^n) = f(x_0)$$

存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $\frac{k}{2^n} \leq f_n(x_0) < \frac{k+1}{2^n}$（参考习题 5.5.2），又有

$$\frac{k}{2^n} \in \{\frac{j}{2^n} : j \in \mathbb{Z}, \frac{j}{2^n} \leq min(f(x_0), 2^n) = f(x_0)\}$$

综上可得，存在 $n \geq N$ 使得

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{2^n}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

所以存在 $N' \geq N$，使得

$$\frac{1}{2^n} < \epsilon$$

综上，对任意 $x_0 \in \Omega, \epsilon > 0$，存在 N'，使得只要 $n \geq N'$，就有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

所以 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 序列逐点收敛于 f。