9.4 习题

张志聪

2024 年 12 月 4 日

9.4.1

按照定义 9.4.1 可知（a）等价于 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$（定义 9.3.6），即：$(a) \Leftrightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

- (b) $\Rightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

  （b）满足 9.3.9（b），所以 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$。

- (c) $\Rightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 成立，那么 $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ 成立，于是满足定义 9.3.6，所以 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$。

- (d) $\Rightarrow f$ 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$

  因为 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$，所以 $|x - x_0| \leq \delta$ 命题成立，于是 $|x - x_0| < \delta$ 时命题也成立。

  于是满足定义 9.3.6，所以 f 在 x_0 处沿着 X 收敛于 $f(x_0)$。

9.4.2

例 9.4.2、例 9.4.3 已经说明了证明过程，唯一的区别是定义域的不同的。

9.4.3

任意 $x_0 \in R$，设序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是任意一个完全由 R 中元素构成并且收敛于 x_0 的序列。

对任意 $\epsilon > 0$，我们希望

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\le \epsilon \\
|a^x - a^{x_0}| &\le \epsilon \\
a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1| &\le \epsilon \\
|a^{x-x_0} - 1| &\le \epsilon / a^{x_0}
\end{aligned}
$$

- 当 $x - x_0 > 0$，由引理 6.5.3 可知，存在正整数 N'，使得

  $$|a^{x-x_0} - 1| \le \epsilon / a^{x_0}$$

  当 $x - x_0 \le 1/N'$ 时成立。

  所以当 $\delta' = 1/N'$ 时，$|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta'$ 的 $x \in R$ 均成立。

- 当 $x - x_0 < 0$，由引理 6.5.3 和极限定律可知，$\lim_{n\to\infty} x^{-(1/n)} = 1$，类似地，存在正整数 N''，使得

  $$|a^{x-x_0} - 1| \le \epsilon / a^{x_0}$$

  当 $x - x_0 \ge -(1/N'')$ 即 $x_0 - x \le 1/N''$ 时成立。

  所以当 $\delta'' = 1/N''$ 时，$|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta''$ 的 $x \in R$ 均成立。

取 $\delta = min(\delta', \delta'')$ 时，$|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$ 对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in R$ 均成立。于是 f 在 x_0 处沿着 R 收敛于 $f(x_0)$。