

13.2 习题

张志聪

2025 年 2 月 13 日

13.2.1

方法一：使用连续的定义证明

• (a)

– \Rightarrow

对任意 $\epsilon > 0$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$, 因为 f 在 x_0 处连续, 存在 $\delta_f > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta_f$, 就有

$$d_{l^2}(f(x), f(x_0)) = |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

类似地, 存在 $\delta_g > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta_g$, 就有

$$d_{l^2}(g(x), g(x_0)) = |g(x) - g(x_0)| < \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

综上, $\delta < \min(\delta_f, \delta_g)$, 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta$, 就有

$$\begin{aligned} d_{l^2}(f \oplus g(x), f \oplus g(x_0)) &= d_{l^2}((f(x), g(x)), (f(x_0), g(x_0))) \\ &= \sqrt{|f(x) - f(x_0)|^2 + |g(x) - g(x_0)|^2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

所以 $f \oplus g$ 在 x_0 处是连续的。

– \Leftarrow

任意 $\epsilon > 0$, 由于 $f \oplus g$ 在 x_0 处是连续的, 所以存在 $\delta > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta$, 就有

$$\begin{aligned} d_{l^2}(f \oplus g(x), f \oplus g(x_0)) &= d_{l^2}((f(x), g(x)), (f(x_0), g(x_0))) \\ &= \sqrt{|f(x) - f(x_0)|^2 + |g(x) - g(x_0)|^2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &< \epsilon \\ |g(x) - g(x_0)| &< \epsilon \end{aligned}$$

即

$$d_{l^2}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

$$d_{l^2}(g(x), g(x_0)) < \epsilon$$

于是可得 f, g 在 x_0 处是连续的。

- (b)

可以由 (a) 直接推出。

方法二：使用书中的提示

- (a)

— \Rightarrow

任意 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列, 因为 f, g 在 x_0 处连续, 由命题 13.1.4(b) 可知, 序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $f(x_0)$ (书中有说在没有特殊说明的时, 提到度量空间 $R^n (n \geq 1)$ 指的就是欧几里得度量)。序列 $(g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $g(x_0)$ 。

由命题 12.1.18(d) 可知, $(f(x^{(n)}), g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $(f(x_0), g(x_0))$, 由 13.1.4(b) 可知 $f \oplus g$ 在 x_0 处是连续的。

— \Leftarrow

任意 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列, 因为 $f \oplus g$ 在 x_0 处是连续的, 由命题 13.1.4(b) 可知, 序列 $(f \oplus g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty} = (f(x^{(n)}), g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $(f(x_0), g(x_0))$, 由命题 12.1.18(d) 可知序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $f(x_0)$, 序列 $(g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $g(x_0)$, 所以由 13.1.4(b) 可知 f, g 在 x_0 处连续。

• (b)

可以由 (a) 直接推出。

13.2.2

任意 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 \mathbb{R}^2 中依度量 d_{l^2} 收敛于 (x_0, y_0) 的序列, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $x^{(n)} = (a_n, b_n)$, 由命题 12.1.18 可知, 序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0 , 序列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 y_0 。由定理 6.1.19 (极限定律) 可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= x_0 + y_0 \end{aligned}$$

由定理 13.1.4(连续性保持收敛性)(b) 可知, 函数 $f(x, y) = x + y$ 在点 (x_0, y_0) 处是连续的。由 (x_0, y_0) 的任意性可知 $f(x, y) = x + y$ 是连续的。

同理可证其他函数。

13.2.3

定义 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, 任意 $x \in X$ 都有 $g(x) = 0$, 于是 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数。又由于 $|f|(x) = \max(f(x), -f(x)) = \max(f(x), g(x) - f(x))$, 因为 $f: X \rightarrow \mathbb{R}, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续函数, 由推论 13.2.3 可知 $g - f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 再次利用推论 13.2.3 可知 $|f|: X \rightarrow \mathbb{R}$ 也是连续函数。

13.2.4

(1)

任意 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 设 $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ 是 \mathbb{R}^2 中依度量 d_{l^2} 收敛于 (x_0, y_0) 的序列, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $x^{(n)} = (a_n, b_n)$ 。

由命题 12.1.18 可知, 序列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ 收敛于 x_0 , 序列 $(b_n)_{n=1}^\infty$ 收敛于 y_0 。于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\pi_1(x^{(n)})) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 = \pi_1(x_0, y_0)$$

所以 π_1 是连续的;

同理可证 π_2 是连续的。

(2)

$g_1(x, y) = f(\pi_1(x, y)) = f \circ \pi_1(x, y)$, 由推论 13.1.7 可知 g_1 是连续的;

同理可证 g_2 是连续的。

13.2.5

(1)

任意 $0 \leq i \leq n$ 和 $0 \leq j \leq m$,

$$c^{ij} x^i y^j = c^{ij} \pi_1^i(x, y) \pi_2^j(x, y)$$

由推论 13.2.3(b) 可知是连续函数。再次利用推论 13.2.3(b) 可知, 有限个连续函数相加的结果是连续函数。

(2)

证明参考推论 13.2.3 的证明。

因为 f, g 都是连续的, 那么 $f \oplus g$ 是连续的。由 (1) 可知函数 P 是连续的。我们把这两个函数复合在一起, 那么根据推论 13.1.7 可知, $P(f, g)(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的。

13.2.6

• \Rightarrow

证明方法与习题 13.2.1 的证明方法 (方法二) 相同, 不再赘述。

• \Leftarrow

成立; 证明方法与习题 13.2.1 的证明方法 (方法二) 相同, 不再赘述。

13.2.7

这道题，没有用书中的提示证明。使用的证明方法与习题 13.2.5 一致。

任意 $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in I$, $c(i_1, i_2, \dots, i_k)$ 是常数, $x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_k^{i_k}$ 由习题 13.2.4 和推论 13.2.3(b) 可知分别都是连续的, 再次利用推论 13.2.3(b) 可知 $c(i_1, i_2, \dots, i_k)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_k^{i_k}$ 是连续函数。

因为 I 是有限子集, 由推论 13.2.3(b) 可知有限个连续函数相加的结果是连续函数, 即 $P(x_1, \dots, x_k)$ 是连续函数。

13.2.8

(1) $(X \times Y, d_{X \times Y})$ 是度量空间。

证明度量是否满足四个公理

- (a)

对任意的 $(x, y) \in X \times Y$,

$$d_{X \times Y}((x, y), (x, y)) = d_X(x, x) + d_Y(y, y) = 0$$

注意, 因为 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 都是度量空间, 所以 $d_X(x, x) = 0, d_Y(y, y) = 0$ 。

- (b) 正性

对任意两个不同的 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$,

$$d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y') > 0$$

注意, 因为 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 都是度量空间, 所以 $d_X(x, x') > 0, d_Y(y, y') > 0$ 。

- (c) 对称性

对任意两个 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$,

$$\begin{aligned} d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) &= d_X(x, x') + d_Y(y, y') \\ &= d_X(x', x) + d_Y(y', y) \\ &= d_{X \times Y}((x', y'), (x, y)) \end{aligned}$$

- (d) 三角不等式

对任意三个 $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in X \times Y$,

$$\begin{aligned}
 d_{X \times Y}((x, y), (x'', y'')) &= d_X(x, x'') + d_Y(y, y'') \\
 &\leq d_X(x, x') + d_X(x', x'') + d_Y(y, y') + d_Y(y', y'') \\
 &= d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) + d_{X \times Y}((x', y'), (x'', y''))
 \end{aligned}$$

综上, $(X \times Y, d_{X \times Y})$ 是度量空间。

(2) 与命题 12.1.18 类似的结论。

如果 $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ 是度量空间 $(X \times Y, d_{X \times Y})$ 中的序列, 其中 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, $x_1^{(k)} \in X, x_2^{(k)} \in Y$, $x = (x_1, x_2)$ 是 $X \times Y$ 中的点, 那么下面两个命题是等价的。

(a) $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x 。

(b) 序列 $(x_1^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ 在 X 中收敛于 x_1 , 序列 $(x_2^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x_2 。

证明:

- (a) \Rightarrow (b)
- (b) \Rightarrow (a)