10.3 习题

张志聪

2024 年 12 月 14 日

10.3.1

反证法，假设 $f'(x_0) < 0$。

f 在 x_0 处可微，那么，以下极限存在

$$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

由定义 9.3.6 可知，对 $\epsilon = -\frac{1}{2} f'(x_0) > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| \le -\frac{1}{2} f'(x_0)$$
$$\Longrightarrow$$
$$\frac{3}{2} f'(x_0) \le \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \frac{1}{2} f'(x_0)$$
$$\Longrightarrow$$
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X$ 均成立。

这显然是矛盾的，因为，当 $x > x_0$ 时，由 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ 可得，$f(x) < f(x_0)$；当 $x < x_0$ 是，由 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ 可得，$f(x) > f(x_0)$；这与 f 是单调递增的矛盾。

10.3.2

$$f(x) = \begin{cases} x; x \in (-1, 0) \\ x^2; x \in [0, 1) \end{cases}$$

与命题 10.3.1 不矛盾的原因是，不满足命题的前置条件：f 在 0 处是可微的。

10.3.3

$$f(x) = x^3; x \in (-1, 1)$$

f 在 0 处可微的，且 $f'(0) = 0$，而 f 是严格单调递增的。

10.3.4

只证明 f 严格单调递增的情况，严格单调递减证明类似。

反证法，假设 f 不是严格单调递增的，那么，存在 $x, y \in [a, b], x < y$ 且 $f(x) \geq f(y)$，由推论 10.2.9（中值定理）可知，存在 $c \in (x, y)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$$

与题设任意 $x \in [a, b]$ 均有 $f'(x) > 0$ 矛盾。

10.3.5

$$f(x) = \begin{cases} x + 1; x \in (-1, -\frac{1}{2}) \\ x - 1; x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

区别在于：定义域不是连续的