14.2 习题

张志聪

2025 年 3 月 13 日

14.2.1

（a）

- $\Rightarrow$

  任意 $x_0 \in \mathbb{R}$，因为 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是收敛于 0 的实数列，那么，$(x_0 - a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是收敛于 x_0 的实数列。

  因为 f 是连续的，那么 f 在 x_0 处也是连续的，由定理 13.1.4(b) 可知，序列 $(f(x_0 - a_n))_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 $f(x_0)$，即

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_0 - a_n) = f(x_0)$$

  由 x_0 的任意性可知，f_{a_n} 逐点收敛于 f。

- $\Leftarrow$

  反证法，假设 f 不是连续的，那么，存在 f 在 x_0 处不连续。由定理 13.1.4(b) 可知，存在 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x_0 的序列，使得 $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ 不收敛于 $f(x_0)$。

  构造 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 实数列，其中 $a_n = x_0 - x_n$，由极限定律可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。我们有

  $$f_{a_n}(x_0) = f(x_0 - a_n) = f(x_0 - (x_0 - x_n)) = f(x_n)$$

  综上，由 f_{a_n} 逐点收敛于 f 可知，

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_0 - a_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

  这与 $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ 不收敛于 $f(x_0)$ 矛盾。

（b）

- $\Rightarrow$

  任意 $x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$。$f$ 是一致连续的，由定义 13.3.4（一致连续性）可知，存在 $\delta > 0$ 使得只要 $x, x' \in \mathbb{R}$ 满足 $d(x, x') = |x - x'| < \delta$，就有 $d(f(x), f(x')) = |f(x) - f(x')| < \epsilon$。

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 0，所以，存在 N 使得只要 $n \geq N$ 就有

  $$|a_n| < \delta$$

  又我们有

  $$f_{a_n}(x) = f(x - a_n)$$

  综上可得，任意 $x \in \mathbb{R}, n \geq N$，此时 $d(x, x - a_n) < \delta$，我们有

  $$d(f(x), f(x - a_n)) < \epsilon$$

  所以 f_{a_n} 一致收敛于 f。

- $\Leftarrow$

  反证法，假设 f 不是一致连续的，那么，存在 $\epsilon_0 > 0$，对任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 $x_n, x'_n \in \mathbb{R}, d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$，有 $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \epsilon_0$。

  利用选择公理，构造 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 0 的实数列, 其中 $a_n = x_n - x'_n$。我们有

  $$f_{a_n}(x_n) = f(x_n - (x_n - x'_n)) = f(x'_n)$$

  因为序列 f_{a_n} 一致收敛于 f，所以存在 $N > 0$ 使得对所有的 $n \geq N$ 都有

  $$d(f_{a_n}(x_n), f(x_n)) = d(f(x'_n), f(x_n)) < \epsilon_0$$

  存在矛盾。

14.2.2

- (a)

任意 $x_0 \in X$，因为 $f^{(n)}$ 一致收敛于 f，所以对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $N > 0$ 使得对所有的 $n \geq N$ 都有

$$d_Y(f^{(n)}(x_0), f(x_0)) < \epsilon$$

于是可得

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = f(x_0)$$

由 x_0 的任意性可知，$f^{(n)}$ 逐点收敛于 f。

- (b)
  - 证明逐点收敛于零函数 0。

    任意 $x_0 \in (-1, 1)$，由引理 6.5.2 可知，

    $$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_0^n = 0$$

  - 不一致收敛于任意函数 $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$。

    反证法，假设 $f^{(n)}$ 一致收敛于 $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$，由 (a) 和逐点极限 f 的唯一性可得，f 是零函数。

    因为 $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{N}} \in (-1, 1)$，我们有

    $$\left| f^{(N)}((\frac{1}{2})^{\frac{1}{N}}) - 0 \right| = \frac{1}{2} > \epsilon$$

    所以，不存在满足要求的 N。

- (c)
  - 逐点收敛于 g。

    利用引理 7.3.3，证明略

  - 不一致收敛于 g。

    任意 $x \in X$，我们有

    $$\sum_{n=1}^{N} f(x) = \frac{x(1 - x^N)}{1 - x}$$

$c = \frac{1}{2}^{\frac{1}{N+1}}$ 于是

$$
\begin{aligned}
|\sum_{n=1}^{N} f(x) - g(x)| &= |\frac{c(1-c^N)}{1-c} - \frac{c}{1-c}| \\
&= \frac{c^{N+1}}{1-c} > c^{N+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

所以，不存在满足要求的 N。

- 换成闭区间 $[-1, 1]$

  $x = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ 不是收敛的，所以 $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f^{(n)}(x)$ 不会是逐点收敛的，进一步，也不会是一致收敛的。

14.4.3

任意 $x_0 \in X$，因为 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，所以对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $y \in \mathbb{R}, |f(x_0), y| < \delta$ 就有

$$|g(f(x_0)) - g(y)| < \epsilon$$

因为 $f^{(n)}$ 在 X 上逐点收敛于函数 $f : X \to \mathbb{R}$，所以，存在一个 $N > 0$ 使得对所有的 $n > N$ 都有

$$|f^{(n)}(x_0) - f(x_0)| < \delta$$

综上可得，对任意的 $x_0 \in X$，存在一个 $N > 0$ 使得对所有的 $n > N$ 都有

$$|g(f(x_0)) - g(f^{(n)}(x_0))| < \epsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty} g(f^{(n)}(x_0)) = g(f(x_0))$$

由 x_0 的任意性可知，函数 $h \circ f^{(n)}$ 在 X 上逐点收敛于 $h \circ f$。

14.2.4

因为 $f : X \to Y$ 是一个有界函数,所以在 Y 中存在一个球 $B(Y, d_Y)(y_0, R)$ 使得对所有的 $x \in X$ 都有 $f(x) \in B(Y, d_Y)(y_0, R)$。因为 f_n 一致收敛于函

数 f，所以对 $\epsilon = 1 > 0$，存在 $N > 0$，使得只要 $x \in X, n \geq N$ 都有

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

于是可得

$$d_Y(f_n(x), y_0) < R + \epsilon$$

对于 $n < N$，因为 f_n 是度量空间 (Y, d_Y) 有界函数序列，所以在 Y 中存在球 $B(Y, d_Y)(y_1, R_1), B(Y, d_Y)(y_2, R_2), \ldots, B(Y, d_Y)(y_{N-1}, R_{N-1})$，对所有的 $x \in X$ 都有

$$f_n(x) \in B(Y, d_Y)(y_i, R_i), i = 1, 2, \ldots, N-1$$

令

$$r = \max_{i=1,2,\ldots,N-1} d_Y(y_i, y_0) + \max_{i=1,2,\ldots,N-1} R_i + R + \epsilon \geq R + \epsilon$$

所以对任意的 $x \in X$，$n < N$ 有

$$d_Y(f_n(x), y_0) \leq d_Y(f_n(x), y_n) + d_Y(y_n, y_0) < R_n + d_Y(y_n, y_0) < r$$

综上，对所有的 $x \in X$ 和所有的正整数 n 都有

$$d_Y(f_n(x), y_0) \leq r$$

即

$$f_n(x) \in B(Y, d_Y)(y_0, r)$$

至此，命题得证。