

9.2 习题

张志聪

2024 年 12 月 1 日

9.2.1

- $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$

成立；因为对任意 $x \in R$ 都有（用到了定义 3.3.10）

$$\begin{aligned} ((f + g) \circ h)(x) &= (f + g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= f \circ h(x) + g \circ h(x) \end{aligned}$$

- $f \circ (g + h) = (f \circ h) + (f \circ g)$

不成立；设 $f(x) = x^2, g(x) = x, h(x) = -x$ ，则

$$\begin{aligned} f \circ (g + h)(1) &= f((g + h)(1)) \\ &= f(g(1) + h(1)) \\ &= f(1 - 1) \\ &= f(0) \\ &= 0^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f \circ h) + (f \circ h) &= f(h(1)) + f(h(1)) \\
&= f(1) + f(-1) \\
&= 1^2 + (-1)^2 \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$f \circ (g + h)(1) \neq (f \circ h) + (f \circ h)$$

- $(f + g) \cdot h = (f \cdot h) + (g \cdot h)$

成立；因为对任意 $x \in R$ 都有（第 3 个等式用到了命题 5.3.11），

$$\begin{aligned}
((f + g) \cdot h)(x) &= (f + g)(x) \cdot h(x) \\
&= (f(x) + g(x)) \cdot h(x) \\
&= f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x) \\
&= (f \cdot h)(x) + (g \cdot h)(x)
\end{aligned}$$

- $f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)$

成立；因为对任意 $x \in R$ 都有（第 3 个等式用到了命题 5.3.11），

$$\begin{aligned}
(f \cdot (g + h))(x) &= f(x) \cdot (g + h)(x) \\
&= f(x) \cdot (g(x) + h(x)) \\
&= f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x) \\
&= (f \cdot g)(x) + (f \cdot h)(x)
\end{aligned}$$