

17.6 注释

张志聪

2025 年 5 月 13 日

说明 1. $\overline{B(0, r)}$ 是 \mathbb{R}^n 中以原点为中心的球, $\overline{B(0, r)}$ 是完备度量空间。

设 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 是 $\overline{B(0, r)}$ 中的柯西序列, 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N \geq 1$, 使得只要 $p, q \geq N$, 都有

$$d(x_p, x_q) < \epsilon$$

于是, 对 x_p, x_q 的任意分量 $1 \leq j \leq n$, 都有

$$x_p^{(j)} - x_q^{(j)} < \epsilon$$

因此, 每个分量序列 $(x_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ 都是柯西序列, 由定理 6.4.18 可知, $(x_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ 收敛于某个实数 L_j , 因此, 由命题 12.1.18 可知 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 收敛, 因为 $\overline{B(0, r)}$ 是闭集, 于是由命题 12.2.5(b) 可知, $(L_1, L_2, \dots, L_n) \in \overline{B(0, r)}$ 。

综上, 命题成立。