15.6 习题

张志聪

2025 年 4 月 16 日

15.6.1

设 $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d), z_3 = (e, f)$。

- (a) 可交换性：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$。

  按照定义 15.6.3（复数的加法运算）可知，

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a + c, b + d) \\
z_2 + z_1 &= (c + a, d + b)
\end{aligned}
$$

  因为

$$
\begin{aligned}
a + c &= c + a \\
b + d &= d + b
\end{aligned}
$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

- (b) 结合性：$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$。

  我们有

$$
\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_2 &= (a + c, b + d) + (e, f) \\
&= (a + c + e, b + d + f)
\end{aligned}
$$

  又因为

$$
\begin{aligned}
z_1 + (z_2 + z_3) &= (a, b) + (c + e, d + f) \\
&= (a + c + e, b + d + f)
\end{aligned}
$$

于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

- (c) 恒等性：$z_1 + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z_1$。

  我们有，

$$
\begin{aligned}
z_1 + 0_{\mathbb{C}} &= (a, b) + (0, 0) \\
&= (a, b)
\end{aligned}
$$

  又因为

$$
\begin{aligned}
0_{\mathbb{C}} + z_1 &= (0, 0) + (a, b) \\
&= (a, b)
\end{aligned}
$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$z_1 + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z_1$$

- (d) 逆元性：$z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0_{\mathbb{C}}$。

  由 (a) 可交换性可知

$$z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1$$

  我们有，

$$
\begin{aligned}
z_1 + (-z_1) &= (a, b) + (-a, -b) \\
&= (0, 0) \\
&= 0_{\mathbb{C}}
\end{aligned}
$$

15.6.2

设 $z_1=(a,b),z_2=(c,d),z_3=(e,f)$。

- (a) 可交换性：$z_1z_2=z_2z_1$。

  由定义 15.6.5 可知，

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(a,b)(c,d)\\&=(ac-bd,ad+bc)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2z_1&=(c,d)(a,b)\\&=(ca-db,cb+da)\end{aligned}$$

  因为

$$ac-bd=ca-db$$
$$ad+bc=cb+da$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$z_1z_2=z_2z_1$$

- (b) 结合性：$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$。

  因为

$$\begin{aligned}(z_1z_2)z_3&=((a,b)(c,d))(e,f)\\&=(ac-bd,ad+bc)(e,f)\\&=((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e)\\&=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1(z_2z_3)&=(a,b)((c,d)(e,f))\\&=(a,b)(ce-df,cf+de)\\&=(a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df))\\&=(ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf)\end{aligned}$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$$

- (c) 恒等性：$z_1 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} z_1 = z_1$。

  由 (a) 可知

  $$z_1 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} z_1$$

  又有

  $$\begin{aligned} z_1 1_{\mathbb{C}} &= (a,b)(1,0) \\ &= (a \times 1 - b \times 0, a \times 0 + b \times 1) \\ &= (a,b) \\ &= z_1 \end{aligned}$$

- (d) 分配性：$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ 和 $(z_2 + z_3) z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1$。

  因为

  $$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a,b)((c,d) + (e,f)) \\ &= (a,b)(c+e, d+f) \\ &= (a(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e)) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} z_1 z_2 + z_1 z_2 &= (a,b)(c,d) + (a,b)(e,f) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \end{aligned}$$

  于是，由定义 15.6.2 中关于相等的定义可知，

  $$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

  同理可得，

  $$(z_2 + z_3) z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1$$

15.6.3

这个引理是想说明：形式符号 $z = (a,b)$ 与 $z = a + bi$ 是等价的。

因为

$$\begin{aligned}a+bi&=(a,0)+(b,0)(0,1)\\&=(a,0)+(0,b)\\&=(a,b)\end{aligned}$$

从而，$a+bi$ 与 (a,b) 就是一回事。

15.6.4

设 $z=a+bi, w=c+di$。

- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$。

  因为

  $$z+w=a+bi+c+di=a+c+(b+d)i$$

  于是

  $$\overline{z+w}=a+c-(b+d)i$$

  又

  $$\begin{aligned}\overline{z}+\overline{w}&=a-bi+c-di\\&=a+c-(b+d)i\end{aligned}$$

  所以，$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$。

- $\overline{-z}=-\overline{z}$。

  $$\begin{aligned}\overline{-z}&=\overline{-a-bi}\\&=-a+bi\end{aligned}$$

  $$\begin{aligned}-\overline{z}&=-(a-bi)\\&=-a+bi\end{aligned}$$

  所以，$\overline{-z}=-\overline{z}$。

- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$。

  因为

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(a+bi)(c+di)} \\ &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} \\ &= (ac-bd)-(ad+bc)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z}\,\overline{w} &= \overline{a+bic+di} \\ &= (a-bi)(c-di) \\ &= ac-bd-(ad+bc)i\end{aligned}$$

  所以，$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$。

- $\overline{\overline{z}} = z$。

$$\begin{aligned}\overline{\overline{z}} &= \overline{\overline{a+bi}} \\ &= \overline{a-bi} \\ &= a+bi \\ &= z\end{aligned}$$

- $\overline{z} = \overline{w}$ 当且仅当 $z = w$。

  - $\Rightarrow$

$$\begin{gathered}\overline{z} = \overline{w} \\ a-bi = c-di\end{gathered}$$

    于是，$a = c$ 且 $-b = -d$，即 $a = c$ 且 $b = d$。所以 $z = w$。

  - $\Leftarrow$

    $z = w$，所以 $a = c$ 且 $b = d$。

$$\begin{gathered}\overline{z} = a-bi \\ \overline{w} = c-di\end{gathered}$$

于是 $a=c$ 且 $-b=-d$，所以 $\overline{z}=\overline{w}$。

- $\overline{z}=z$ 当且仅当 z 是一个实数。
  - $\Rightarrow$

    $\overline{z}=z$，那么 $-b=b$，所以 $b=0$，即 $\Im(z)=0$，所以 z 是一个实数。
  - $\Leftarrow$

    z 是一个实数，$\Im(z)=0$，于是 $b=0$，所以 $\overline{z}=z$。

15.6.5

设 $z=a+bi$，所以 $\Re(z)=a, \Im(z)=b$。
又因为

$$\begin{aligned}\frac{z+\overline{z}}{2}&=\frac{a+bi+a-bi}{2}\\&=\frac{2a}{2}\\&=a\\&=\Re(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z-\overline{z}}{2i}&=\frac{a+bi-(a-bi)}{2i}\\&=\frac{b2i}{2i}\\&=b\\&=\Im(z)\end{aligned}$$

15.6.6

设 $z=a+bi, w=c+di$。

- 恒等式 $z\overline{z}=|z|^2$，从而有 $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$。

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2 - b^2 i^2 - abi + abi \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \sqrt{a^2+b^2}^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

于是，$z\overline{z} = |z|^2$，从而有 $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$。

- $|zw| = |z||w|$ 且 $|\overline{z}| = |z|$。

  由之前的讨论可得，

  $$\begin{aligned} |zw| &= \sqrt{zw\overline{zw}} \\ &= \sqrt{zw\overline{z}\,\overline{w}} \\ &= \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} \\ &= \sqrt{|z|^2|w|^2} \\ &= |z||w| \end{aligned}$$

  $|\overline{z}| = |z|$ 直接可以从复数绝对值定义中得到。

- 不等式 $-|z| \leq \Re(z) \leq |z|$。

  因为

  $$|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2$$

  由引理 5.6.9(d)（更准确的说是实数版本）可得

  $$|z| \geq |a| \geq \Re(z) = a$$

  于是，

  $$-|z| \leq -|a| \leq a = \Re(z)$$

- 不等式 $-|z| \le \Im(z) \le |z|$。

  与上一个不等式证明方式一致。

- 不等式 $|z| \le |\Re| + |\Im|$。

  因为

$$\begin{aligned}(|\Re| + |\Im|)^2 &= (|a| + |b|)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| \\ &\ge a^2 + b^2 = |z|^2\end{aligned}$$

  由引理 5.6.9(d)（更准确的说是实数版本）可得

$$|z| \le |\Re| + |\Im|$$

- 三角不等式 $|z+w| \le |z| + |w|$。

  按照书中的提示进行证明。

  由之前的命题可得，

$$\Re(z\overline{w}) \le |z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|$$

  于是，

$$\Re(z\overline{w}) \le |z||w|$$

  利用习题 15.6.5 可得，

$$\begin{aligned}\Re(z\overline{w}) &= \frac{z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}}{2} \\ &= \frac{z\overline{w} + \overline{z}w}{2}\end{aligned}$$

  于是，

$$\begin{aligned}\frac{z\overline{w} + \overline{z}w}{2} &\le |z||w| \\ z\overline{w} + \overline{z}w &\le 2|z||w|\end{aligned}$$

然后，不等式两端加上 $|z|^2+|w|^2$，

$$\begin{aligned}
z\overline{w}+\overline{z}w+|z|^2+|w|^2 &\le 2|z||w|+|z|^2+|w|^2\\
z\overline{w}+\overline{z}w+z\overline{z}+w\overline{w} &\le (|z|+|w|)^2\\
(z+w)(\overline{z+w}) &\le (|z|+|w|)^2\\
|z+w|^2 &\le (|z|+|w|)^2\\
|z+w| &\le |z|+|w|
\end{aligned}$$

15.6.7

注意：实数也是复数，所以复数的相关性质，实数也具备。
因为

$$\begin{aligned}
|z/w| &= |zw^{-1}|\\
&= \big|z|w|^{-2}\overline{w}\big|\\
&= \left|\frac{z\overline{w}}{|w|^2}\right|\\
&= |\frac{1}{|w|^2}||z\overline{w}|\\
&= \frac{1}{|w|^2}|z||\overline{w}|\\
&= \frac{|\overline{w}|}{|w|^2}|z|\\
&= \frac{|z|}{|w|}
\end{aligned}$$

15.6.8

注意：实数也是复数，所以复数的相关性质，实数也具备。

- $\Rightarrow$
- $\Leftarrow$

$$
\begin{aligned}
|z+w| &= |cw+w| \\
&= |(c+1)w| \\
&= |c+1||w|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|z|+|w| &= |cw|+|w| \\
&= |c||w|+|w| \\
&= |c+1||w|
\end{aligned}
$$

所以 $|z+w| = |z|+|w|$。

15.6.9

$z = \Re(z) + \Im(z)i$。

- $\Rightarrow$

  （1）$\lim\limits_{n\to\infty} \Re(z_n) = \Re(z)$。

  反证法，假设 $\lim\limits_{n\to\infty} \Re(z_n)$ 不收敛于 $\Re(z)$。

  于是存在 ϵ，不存在 $N>0$，使得只要 $n \geq N$，就有

  $$|\Re(z_n) - \Re(z)| < \epsilon$$

  即对所有的 n 都有

  $$|\Re(z_n) - \Re(z)| \geq \epsilon$$

  又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$，所以对 $\epsilon > 0$，存在 $N>0$，使得只要 $n \geq N$，都有

  $$
  \begin{aligned}
  & |z_n - z| < \epsilon \\
  & \implies \\
  & \sqrt{(\Re(z_n) - \Re(z))^2 + (\Im(z_n) - \Im(z))^2} < \epsilon
  \end{aligned}
  $$

因为

$$\sqrt{(\Re(z_n) - \Re(z))^2 + (\Im(z_n) - \Im(z))^2} > |\Re(z_n) - \Re(z)| \geq \epsilon$$

存在矛盾。

所以，$\lim_{n\to\infty} \Re(z_n) = \Re(z)$。

（2）$\lim_{n\to\infty} \Im(z_n) = \Im(z)$。

证明类似，不做赘述。

- $\Leftarrow$

  对任意 $\epsilon > 0$。

  因为 $\lim_{n\to\infty} \Re(z_n) = \Re(z)$，存在 $N_1 > 0$，使得只要 $n \geq N_1$，都有

$$|\Re(z_n) - \Re(z)| < \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

  同理，因为 $\lim_{n\to\infty} \Im(z_n) = \Im(z)$，存在 $N_2 > 0$，使得只要 $n \geq N_2$，都有

$$|\Im(z_n) - \Im(z)| < \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

  取 $N = max(N_1, N_2)$，使得只要 $n \geq N$，都有

$$\begin{aligned}|z_n - z| &= \sqrt{(\Re(z_n) - \Re(z))^2 + (\Im(z_n) - \Im(z))^2} \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

  由 ϵ 的任意性可得，$\lim_{n\to\infty} z_n = z$。

15.6.10

由定义 12.4.9（完备度量空间）可知，我们需要证明，度量空间 $(\mathbb{C}, d)$ 中的任意 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 柯西序列都有极限。

对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得只要 $p, q \geq N$，都有

$$\begin{aligned}|z_p - z_q| &< \epsilon \\ &\Longrightarrow \\ \sqrt{(\Re(z_p) - \Re(z_q))^2 + (\Im(z_p) - \Im(z_q))^2} &< \epsilon\end{aligned}$$

所以，

$$\sqrt{(\Re(z_p) - \Re(z_q))^2} < \epsilon$$
$$\Longrightarrow$$
$$|\Re(z_p) - \Re(z_q)| < \epsilon$$

所以 $(\Re(z_n))_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列，由于 $\mathfrak{z}_\mathfrak{n}$ 都是实数，实数度量空间是完备的，所以，$(\Re(z_n))_{n=1}^{\infty}$ 是收敛序列。

同理可得，$(\Im(z_n))_{n=1}^{\infty}$ 是收敛序列。

综上，利用引理 15.6.13 可得，$(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛。

15.6.11

- f 是双射。

  证明 f 是单射和双射即可，证明略。

- f, f^{-1} 都是连续函数。

  （1）f 是连续函数。

  任意 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$，设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的序列，其中 $x^{(n)} := (x_n, y_n)$，并且序列收敛于 (x_0, y_0)，我们需要证明 $(f(x^n))_{n=1}^{\infty}$ 即 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 其中 $z_n = x_n + y_n i$ 收敛于 $f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 i$。

  由命题 12.1.18 可知，

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$
  $$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

  由引理 15.6.13 可知，$(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $f(x_0, y_0)$。

  （2）f^{-1} 是连续函数。

  证明方式与（1）类似，证明略。

15.6.12

我们构造出这样一个通路：

对任意 $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$，定义 $\gamma(x) = (1-x)z_0 + z_1 x$，其中 $x \in [0,1]$。
以上定义的通道满足：

- $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$。
- γ 是连续的。（可以直接使用引理 15.6.14 证明。）

道路连通蕴含连通性，所以，$\mathbb{C}$ 是连通的。

15.6.13

- （1）证明：E 是紧致的，当且仅当 E 既是闭的又是有界的。
  - $\Rightarrow$

    利用推论 12.5.6 可证。
  - $\Leftarrow$ 设 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中的任意序列。

    按照习题 15.6.11 中定义的 f^{-1}，我们有 $E' = f^{-1}(E), E' \subseteq \mathbb{R}$。

    因为 $\mathbb{C}$ 的通常度量 d 是与欧几里得度量是一致的，所以，E 是闭的又是有界的，那么，E' 也是闭的又是有界的。

    所以，$(f^{-1}(z_n))_{n=1}^{\infty}$ 存在收敛的 R^2 上的子序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，其对应的复数序列为 $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$。

    由命题 12.1.18(d) 可知，我们有以下极限存在，

    $$\lim_{n\to\infty} \Re(f(a_n))$$
    $$\lim_{n\to\infty} \Im(f(a_n))$$

    所以，由引理 15.6.13 可知，$\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ 极限存在。

    综上，由 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 的任意性可得，E 是紧致的。
- （2）$\mathbb{C}$ 不是紧致的。

  $\mathbb{C}$ 的子集 $\mathbb{R}$ 都不是紧致的，$\mathbb{C}$ 不可能是紧致的。

  或者直接举一个反例 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，其中 $a_n = n$，这个序列就没有收敛的子序列。

15.6.14

只证明其中的某几个。

- $(z_n+w_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛，并且 $\lim_{n\to\infty} z_n+w_n = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n$。

  因为 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的复数序列，由引理 15.6.13 可知，以下极限存在

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{R}(z_n)$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}(z_n)$$

  同理可得，以下极限存在

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{R}(w_n)$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}(w_n)$$

  又因为，对任意 n 都有，

$$\mathfrak{R}(z_n+w_n) = \mathfrak{R}(z_n) + \mathfrak{R}(w_n)$$

  于是由极限定理（引理 6.1.19）可知，

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{R}(z_n+w_n) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{R}(z_n) + \lim_{n\to\infty} \mathfrak{R}(w_n)$$

  同理可得，

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}(z_n+w_n) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}(z_n) + \lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}(w_n)$$

  再次利用 15.6.13 可知，$(z_n+w_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛，并且

$$\lim_{n\to\infty} z_n+w_n = z$$

  其中，$\mathfrak{R}(z) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{R}(z_n) + \lim_{n\to\infty} \mathfrak{R}(w_n), \mathfrak{I}(z) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}(z_n) + \lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}(w_n)$，所以，

$$\lim_{n\to\infty} z_n+w_n = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n$$

- $(\overline{z_n})_{n=1}^{\infty}$ 收敛，并且 $\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}$。

不妨设 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 z，即 $\overline{\lim_{n\to\infty} z_n} = z$，于是

$$\lim_{n\to\infty} \Re(z_n) = \Re(z)$$
$$\lim_{n\to\infty} \Im(z_n) = \Im(z)$$

对每一个 n，都有

$$\overline{z_n} = \Re(z_n) - \Im(z_n)i$$

于是由极限定理（引理 6.1.19）可知，

$$\lim_{n\to\infty} -\Im(z_n) = -\Im(z)$$

综上，利用引理 15.6.13 可知，

$$\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}$$

15.6.15

按照书中的提示进行证明。

（1）首先，$1 \neq 0$。假设 1 是负数。

由负运算公理可知 -1 是正的，那么，由可乘性可得 $-1 \times -1 = 1$ 是正数，与假设矛盾。

综上可得，1 是正数，从而 -1 是负数。

（2）不一致的证明（由公理集合推演得到一个矛盾的结果）。

$z = i$，$z \neq 0$，由三歧性可知，i 要么是负数，要么是正数。

如果 i 是正数，那么，由可乘性公理得 $i^2 = -1$ 是正数，这与（1）矛盾。

如果 i 是负数，那么，由负运算可得 $-i$ 是正数，由可乘性公理得 $(-i)^2 = -1$ 是正数，这与（1）矛盾。

综上，公理间存在矛盾。

15.6.16

- （1）叙述并证明关于复数的比值判别法。

- 比值判别法：设 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} z_n$ 是一个所有项都不为零的复数级数（不为零的假设是为了保证下文中的比值 $|z_{n+1}|/|z_n|$ 是有意义的）。
  * 如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1$，那么级数 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} z_n$ 是绝对收敛的（从而是条件收敛的。）
  * 如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$，那么级数 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} z_n$ 不是条件收敛的（从而不可能是绝对收敛的）。
  * 在其他情况下，我们无法给出任何结论。
- 证明

  （1）如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1$。

  因为 $|z_n|$ 是实数，于是利用推论 7.5.3（比值判别法）可知，级数 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} z_n$ 是绝对收敛的。

  接下来，证明绝对收敛的复数序列必定条件收敛。

  设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是绝对收敛的复数序列，其中 $a_n = x_n + y_n i$。由于 $|a_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$，于是

  $$|x_n| \le |a_n|$$
  $$|y_n| \le |a_n|$$

  于是可得，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ 这两个实数序列都是绝对收敛的，所以，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在，由引理 15.6.13 可知，以下极限存在，

  $$\lim_{n\to\infty} a_n$$

  综上可得，绝对收敛的复数序列必定条件收敛。

  所以，级数 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} z_n$ 是绝对收敛的，从而是条件收敛的。

  （2）如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$。

  所以，存在 $c > 1$ 和对应的 $N \ge m$，使得 $n \ge N$，就有

  $$|z_{n+1}| > |z_N| c^{n+1-N}$$

  所以，$n \to +\infty$ 时，$|z_n| \to +\infty$，所以 $(z_n)_{n=m}^{\infty}$ 是发散的，利用 7.2.6（零判别法）（更准确的说法是复数版本）级数 $\sum\limits_{n=m}^{\infty} z_n$ 是发散的。

（3）直接利用习题 7.5.3 即可，把实数级数看做复数级数的特例。

- （2）利用比值定理证明对任意的 z，$\exp(z)$ 都是收敛的。

  因为，对任意复数 z，都有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{\frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|z^n|}{n!}} &= \limsup_{n\to\infty}\frac{|z^{n+1}|}{|z^n|}\frac{1}{n+1}\\ &= \limsup_{n\to\infty}\frac{|z^n||z|}{|z^n|}\frac{1}{n+1}\\ &= \limsup_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}\\ &= 0<1\end{aligned}$$

  于是利用复数级数的比值判别法可知，$\exp(z)$ 绝对收敛，从而是条件收敛的。

- （3）$\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)$。