8.2 习题

张志聪

2024 年 11 月 17 日

8.2.1

令

$$S = \left\{ \sum_{x\in A} |f(x)| : A \subseteq X, A\text{是有限集} \right\}$$

- $\Rightarrow$ 如果 X 是有限集，这是命题是显然的；

  如果 X 是可数集。因为 X 是可数集，那么存在双射函数 $g : \mathbb{N} \to X$，又因为级数 $\sum_{x\in X} f(x)$ 绝对收敛，那么

  $$\sum_{x\in X} |f(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} |f(g(n))|$$

  任意元素 $e \in S, e = \sum_{x\in A} |f(x)| : A \subseteq X$，所以有一个有限集 $N' \subseteq \mathbb{N}, A = g(N')$，因为 N' 是有限集，所有存在自然数 k，使得 $max(N') \leq k$，于是，

  $$e = \sum_{x\in A} |f(x)| = \sum_{n\in N'} |f(g(n))| \leq \sum_{n=0}^{k} |f(g(n))| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f(g(n))|$$

  所以，e 是有限的，由 e 的任意性可知，集合 S 有上界，所以，

  $$\sup \left\{ \sum_{x\in A} |f(x)| : A \subseteq X, A\text{是有限集} \right\} < \infty$$

- $\Leftarrow$ 反证法，假设级数 $\sum_{x\in X} f(x)$ 绝对发散。

因为

$$\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X,A\text{是有限集}\right\}<\infty$$

设 $\sup S\le M$。因为 $\sum\limits_{x\in X}f(x)$ 绝对发散，所以存在自然数 N 使得

$$\sum_{n=0}^{N}|f(g(n))|>M$$

令 $A=g(n\in\mathbb{N}:0\le n\le N)$，因为 A 是有限集，且 $A\in S$，所以

$$\sum_{x\in A}|f(x)|=\sum_{n=0}^{N}|f(g(n))|\le M$$

存在矛盾。

8.2.2

这道题没有证明的必要了，提示就是一个简要的证明了。

8.2.3

说明 1. 当 X 是不可数集时，由于 $\sum\limits_{x\in X}f(x):=\sum\limits_{x\in X:f(x)\neq 0}f(x)$，所以，由引理 *8.2.5* 可知，$\{x\in X:f(x)\neq 0\}$ 是至多可数的，于是证明时只需说明至多可数的情况即可。

只讨论 X 可数集，X 是有限集，命题 *7.2.14* 已经覆盖。

因为 $\sum\limits_{x\in X}f(x)$，$\sum\limits_{x\in X}g(x)$ 绝对收敛，所以存在某个双射 $h:\mathbb{N}\to X$，使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(h(n))$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g(h(n))$ 是绝对收敛点的，且

$$\sum_{x\in X}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(h(n))$$

$$\sum_{x\in X}g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g(h(n))$$

- （a）由定义 8.2.1 可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(f(h(n))+g(h(n))\big)$ 绝对收敛，可以说明 $\sum\limits_{x\in X}\big(f(x)+g(x)\big)$ 是绝对收敛的。

  因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(h(n))$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g(h(n))$ 绝对收敛，由命题 7.2.14（a）可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|f(h(n))|+|g(h(n))|$ 收敛，设其收敛与 M，又因为

  $$|f(n)+g(n)|\leq|f(n)|+|g(n)|$$

  于是由命题 7.3.1 可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|f(h(n))+g(h(n))|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{x\in X}\big(f(x)+g(x)\big)$ 是绝对收敛的。

  $$\sum_{x\in X}\big(f(x)+g(x)\big)=\sum_{x\in X}f(x)+\sum_{x\in X}g(x)$$

  该公式的所有项都是绝对收敛的，也就是说其也是条件条件收敛的，由命题 7.2.14（a）保证了该公式的正确性。

- （b）$\sum\limits_{x\in X}f(x)$ 绝对收敛，可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(h(n))$ 绝对收敛于某个实数 M。$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|cf(h(n))|$ 的部分和 $S_{Nc}\leq|c|M$，命题 7.3.1 保证了该级数收敛。

  $$\sum_{x\in X}cf(x)=c\sum_{x\in X}f(x)$$

  由命题 7.2.14（b）可知保证。

- （c）⇒：X_1,X_2 一定有一个是可数集，不妨设 X_1 是可数集。反证法，假设 $\sum\limits_{x\in X_1}f(x)$ 绝对发散，不妨设 $\sum\limits_{x\in X}f(x)$ 绝对收敛于 M。因为 X_1 是可数集，所以存在某个双射 $h_1:\mathbb{N}\to X_1$，由于 $\sum\limits_{x\in X_1}f(x)$ 绝对发散，所以存在一个整数 N 使得

  $$\sum_{n=0}^{N}|f(h_1(n))|>M$$

因为 X_1 是 X 的子集，所以有限集 $Y := \{x \in X_1, f(x) \leq N\}$ 也是 X 的子集，取 $m = max(h^{-1}(Y))$，此时，

$$\sum_{n=0}^{m} |f(h(n))| > M$$

存在矛盾。

至于等式，证明起来，不是那么简单，因为这里的集合是不一致的，接下来的证明注意对集合的处理。

∘ 如果 X_2 也是可数集，那么存在双射 $h_1 : \mathbb{N} \to X_1$，$h_2 : \mathbb{N} \to X_2$，定义 $h : \mathbb{N} \to X$ 如下：

$$\begin{cases} h(2n) = h_1(n) \\ h(2n+1) = h_2(n) \end{cases} \tag{1}$$

以上定义的 h 是双射。因为

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \big(f(h_1(n)) + f(h_2(n))\big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f(h(n)) \end{aligned}$$

于是，

$$\sum_{x\in X_1} f(x) + \sum_{x\in X_2} f(x) = \sum_{x\in X} f(x)$$

∘ 如果 X_2 是有限集，设基数是 m，定义 $Y := \{i \in \mathbb{N} : i < m\}$，存在双射 $h_1 : \mathbb{N} \setminus Y \to X_1$

说明 2. 因为 X_1 是可数集，则存在双射 $h_1 : \mathbb{N} \to X_1$，又因为

$\sum_{x \in X_1} f(x)$ 是绝对收敛的，所以

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x \in X_1} f(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(h_1(n)) \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} f(h_1(n-m))
\end{aligned}
$$

第二个等式的成立可以通过部分和序列的相等证明，思路如下：设 $\sum_{n=0}^{\infty} f(h_1(n))$、$\sum_{n=m}^{\infty} f(h_1(n-m))$ 的部分和分别为 S_N, S'_N。由 $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ 序列的收敛性，并由命题 *7.2.5* 可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在一个整数 $K, n \geq K+m$，使得

$$
\begin{aligned}
&|S_n - S'_n| \\
&= |\sum_{n=p}^{p+m} f(h_1(n))| \leq \epsilon \qquad p \text{ 大于等于 } K
\end{aligned}
$$

这里的 $n \geq K+m$ 的原因是，$S_0 = S'_m$，所以 S_n 比 S'_n 多 m 个项，所以这 m 个项必须都是大于 K 的项，相加才会小于等于 ϵ，所有两者的部分和是最终 $-\epsilon$ 相等的，所以收敛于同一个值。

$h_2 : Y \to X_2$，定义 $h : \mathbb{N} \to X$ 如下：

$$
\begin{cases}
h(n) = h_1(n-m) \text{ if } n \geq m \\
h(n) = h_2(n) \text{ if } n < m
\end{cases}
\tag{2}
$$

以上定义的 h 都是双射。因为

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{m-1} f(h_2(n)) + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=m}^{N} f(h_1(n)) \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} f(h(n))
\end{aligned}
$$

于是，

$$\sum_{x\in X_1} f(x) + \sum_{x\in X_2} f(x) = \sum_{x\in X} f(x)$$

$\Leftarrow$ 绝对收敛的证明与上一个等式的等式一致（上个等式的证明不需要其是绝对收敛的），这里说一下思路：因为，

$$\sum_{x\in X_1} |h(x)| + \sum_{x\in X_2} |h(x)| = \sum_{x\in X} |h(x)|$$

证明方法与条件收敛的等式一致，因为，$\sum\limits_{x\in X_1} |h(x)|$, $\sum\limits_{x\in X_2} |h(x)|$ 都是收敛的，所以 $\sum\limits_{x\in X} |h(x)|$ 也是收敛的。

- （d）是命题 7.1.11（c）的扩展，证明方式也是一致的，都是利用级数的值与双射的选取无关，具体证明略。

8.2.4

说明 3. $\sum\limits_{n\in A_+} a_n$ 的含义是什么，因为 A_+ 是一个集合，也就意味着其中的元素是没有顺序的，那么，$\sum\limits_{n\in A_+} a_n$ 收敛，是否任意顺序的求和都是收敛的？

回顾书中定义 *8.2.1* 是没有明确说明的，我个人推测是任意顺序的收敛（如果能找到佐证，我会回来纠正）。因为存在异议，所以接下来的证明，没有对顺序进行要求（或假设），直观感受就是：你爱什么顺序就什么顺序，我们只利用收敛与发散的性质。

当然这里的 A_+ 具有特殊性，因为 $a_n : n \in A_+$ 都是非负数，只要存在某个顺序的求和是收敛的，也就意味着是绝对收敛的，命题 *7.4.3*（级数的重排列）进而保证了，任意顺序求和也是收敛的。

A_- 也具有特殊性，有命题 *7.2.14*（*b*）也能保证，其是绝对收敛的，从而再次利用命题 *7.4.3*（级数的重排列），可以说明其任意顺序求和也是收敛的。

通过说明可知，这里的条件收敛与绝对收敛是一致的。

- 如果两个级数都是收敛的，则由命题 8.2.6（绝对收敛级数的定律）可知，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 也是绝对收敛的，与题设矛盾。

- 如果只有一个是收敛的，也就意味着另一个是发散的。这里不妨设 $\sum_{n\in A_+}$ 是收敛于 M。那么，对任意的 $\epsilon > 0$，存在整数 N_+ 使得 $n \geq N_+$ 部分和

  $$|S_n^+ - M| \leq \epsilon$$

  也就是说 S_n^+ 是一个有限值，而 $\sum_{n\in A_-} a_n$ 是发散的，其部分和 S_n^- 可以小于任何实数。即对任意实数 r，存在 n 使得

  $$|S_n^- + S_n^+| \geq r$$

  与题设 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 收敛矛盾。

8.2.5

- 因为如果是有限集，则必定是条件收敛的，与命题 8.2.7 矛盾。

- 与命题 8.2.7 矛盾。

- 单射由 n_j 的定义保证的。【感觉没啥好说的啊，或者是我没读懂题】

- 反证法，假设情形 I 出现了有限次，不妨设 K 后情形 I 不再满足，即：$i = K$ 时，$\sum_{0\leq i<K} a_{n_i} = M \geq L$，此时，$M = M_+ + M_-$，其中 M_+ 是 A_+ 中元素 j 对应的 a_j 求和，其中 M_- 是 A_- 中元素 j 对应的 a_j 求和。因为 $\sum_{n\in A_-} a_n$ 是发散的，存在 N_-，当 $n \geq N_-$ 使得其部分和 $S_n^- < L - M^+$，此时，$M^+ + S_n^- < L$，情形 II 不再满足。

- 满射由 n_j 的定义保证的。【感觉没啥好说的啊，或者是我没读懂题】

- 由推论 7.2.6 可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，即对任意 $\epsilon > 0$，都存在整数 $N, n \geq N$ 使得 $|a_n - 0| \leq \epsilon$。

  因为情形 I 与情形 II 的都是无限多次的，且在 A_+, A_- 都是以递增的方式取出的，所以 a_{j+}, a_{j-} 最终都会大于 N，于是 $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = 0$。

- 由 $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = 0$ 可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在整数 N，对所有的 $j \geq N$ 都有

$$|a_{n_j}| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

因为情形 I 与情形 II 都会出现无限次，也就是说在 N 之后，即 $j \geq N, j \to \infty$，

$$\sum_{0\leq i<j} a_{n_i}$$

会翻转无限次，设翻转的位置为 $k_0, k_1, \ldots$。设 $(a_{n_i})_{i=0}^{\infty}$ 序列的部分和为 S_N，对任意 $n_1, n_2 \geq N, n_1 \neq n_2$，因为 n_1, n_2 一定在两个翻转点之间（或正好在翻转点上），而这些翻转点与 L 的距离都小于 $\frac{1}{2}\epsilon$，由命题 4.3.7（f）可知，

$$\begin{cases} |S_{n_1} - L| \leq \frac{1}{2}\epsilon \\ |S_{n_2} - L| \leq \frac{1}{2}\epsilon \end{cases}$$

由上式可得，

$$|S_{n_1} - S_{n_2}| \leq \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知其收敛于 L。

说明 4. 刚看到这个命题很反直觉，反驳的理由也很朴素：你怎么排序，还不是这些东西嘛。

看完证明过程，可以发现其证明思路是找到一个收敛序列，虽然还是那些东西，但适当的顺序能使得序列最终 $\epsilon-$ 接近于 L，举一个反例，把 A_+ 放在序列的前面，就会发现最终 $\epsilon-$ 接近于 L 的 N 就找不到了，因为 A_+ 是一个无限集，且是发散的，于是，我们无法跨越这个屏障，找到一个有限的值 N。

8.2.6

$\sum\limits_{n\in A_+} a_n$ 就是发散的，所以其是发散到 $+\infty$