11.4 习题

张志聪

2024 年 12 月 24 日

11.4.1

仿照定理 11.4.3 的证明，做以下说明：

对任意 $\epsilon > 0$，由 $\int_I f = \underline{\int}_I f$ 可知，存在一个分段常数函数函数 $\underline{f} : I \to \mathbb{R}$ 在 I 上从下方控制 f，并且有

$$\int_I \underline{f} \geq \int_I f - \epsilon$$

类似地，我们能够找到一个分段常数函数 $\underline{g} : I \to \mathbb{R}$ 在 I 上从下方控制 g，并且有

$$\int_I \underline{g} \geq \int_I g - \epsilon$$

而且我们还能找到分段常数函数 $\overline{f}$ 和 $\bar{(}g)$ 分别在 I 上从上方控制 f 和 g，并且有

$$\int_I \overline{f} \leq \int_I f + \epsilon$$

和

$$\int_I \overline{g} \leq \int_I g + \epsilon$$

- (a)

  由以上说明，可得 $\underline{f} + \underline{g}$ 在 I 上从下方控制 $f + g$，而 $\overline{f} + \overline{g}$ 在 I 上从上方控制 $f + g$，所以有

$$\int_I \underline{f} + \underline{g} \leq \underline{\int}_I f + g \leq \overline{\int}_I f + g \leq \int_I \overline{f} + \overline{g}$$

从而

$$0 \leq \overline{\int}_I f + g - \underline{\int}_I f - g \leq \int_I (\overline{f} + \overline{g}) - (\underline{f} - \underline{g})$$

由于

$$\overline{f}(x) = \underline{f}(x) + (\overline{f} - \underline{f})(x) \leq \underline{f}(x) + 2\epsilon$$

类似地，有

$$\overline{g}(x) = \underline{g}(x) + (\overline{g} - \underline{g})(x) \leq \underline{g}(x) + 2\epsilon$$

于是

$$(\overline{f} + \overline{g}) - (\underline{f} - \underline{g}) \leq 4\epsilon$$

- (b)
- (c)