13.4 习题

张志聪

2025 年 2 月 17 日

13.4.1

从 E 中任选一个元素组成集合 E_1，$E_2 := E \setminus E_1$。

当使用离散度量 d_disc 时，所有集合都既是开的又是闭的，又 $E = E_1 \cup E_2$，所以 E 是不连通的。

13.4.2

- $\Rightarrow$

  因为 (X, d) 是连通的空间，且 f 是连续的，那么由定理 13.4.6 可知，$f(X)$ 是连通的，又由习题 13.4.1 可知 $f(X)$ 中只能含有一个元素，所以 f 是常数函数。

- $\Leftarrow$

  f 是常数函数，按照连续的定义可知，f 是连续的。

13.4.3

- (b) $\implies$ (c)

  讨论 X 是非空集合，在广义实数 $\mathbb{R}^*$ 中，$\sup(X), \inf(X)$ 是存在的，让 $M := \sup(X), m := \inf(X)$。

  任意 $z \in (m, M)$，存在 $x, y \in X$ 使得 $x < z < y$，因为 (b) 成立，所以 $[x, y] \in X$，所以 $z \in X$，由 z 的任意性可知 $(m, M) \subseteq X$，而 X 中的任意元素（除了 m, M）都属于 (m, M)，于是 X 可以表示成区间

（$[m,M],[m,M),(m,M],(m,M)$ 中的任意一种），m,M 是否属于 X，只会影响区间的表示（闭的或开的）。

- (c) $\implies$ (b)

  X 是区间，那么，按照定义 9.1.1 可知，任意 $x,y\in X$ 且 $x<y$，$[x,y]$ 包含在 X 中是显然的。

13.4.4

反证法，假设 $f(E)$ 不是连通的，那么存在两个不相交的非空开集 V 和 W 使得 $f(E)=V\cup W$。

由习题 13.1.6，习题 13.1.7 和定理 13.1.5(c) 可知，集合 $f^{-1}(V)$ 和 $f^{-1}(W)$ 都是非空开集，并且不相交。（如果存在 $x\in f^{-1}(V)\cap f^{-1}(W)$，那么 $f(x)\in V\cap W$，这与 V 和 W 不相交矛盾。）$E=f^{-1}(V)\cup f^{-1}(W)$ 是易证的。（对任意 $x\in E$，$f(x)$ 要么属于 V 要么属于 W，于是可得 $x\in f^{-1}(V)$ 或 $x\in f^{-1}(W)$。）

综上，E 是不连通的，这与题设矛盾。

13.4.5

由定理 13.4.6 可知 $f(E)$ 是连通的。

任意 $f(a),f(b)\in f(E)$，设 $f(a)<f(b)$（$f(a)\geq f(b)$ 证明类似）。由定理 13.4.5(b) 可知，$[f(a),f(b)]\subseteq f(E)$，因为 $f(a)\leq y\leq f(b)$，于是可得 $y\in[f(a),f(b)]\subseteq f(E)$，所以存在 $c\in E$ 使得 $f(c)=y$。

13.4.6