7.1 习题

2024 年 8 月 4 日

7.1.1

【a】

由定义 7.1.1 可知，

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$
$$= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=n+1}^{p} a_i$$
$$= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p$$

$$\sum_{i=m}^{p} a_i$$
$$= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p$$

于是，

$$\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{p} a_i$$
$$= \sum_{i=m}^{p} a_i$$

【b】【c】【d】的证明与【a】类似，证明略

【e】

归纳法证明。

归纳基始 $m = n$，此时，

$$|\sum_{i=m}^{n} a_i| = |a_m|$$
$$\sum_{i=m}^{n} |a_i| = |a_m|$$

满足 $|\sum_{i=m}^{n} a_i| \leq \sum_{i=m}^{n} |a_i|$

归纳假设 $m < n = j - 1$ 时，命题成立。

$n = j++$ 时，由（a）可知，

$$\begin{aligned} & |\sum_{i=m}^{j} a_i| \\ & = |\sum_{i=m}^{j-1} a_i + a_j| \\ & \leq |\sum_{i=m}^{j-1} a_i| + |a_j| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=m}^{j} |a_i| \\ & = \sum_{i=m}^{j-1} |a_i| + |a_j| \\ & \geq |\sum_{i=m}^{j-1} a_i| + |a_j| \qquad \textbf{【归纳假设保证的】} \end{aligned}$$

于是 $|\sum_{i=m}^{j} |a_i| \geq |\sum_{i=m}^{j-1} a_i| + |a_j| \geq |\sum_{i=m}^{j} a_i|$

归纳完毕。

【f】与**【e】**类似，可通过归纳法证明。

7.1.2

【a】由于 X 是空集，所以定义 7.1.6 中的 $n = 0$，于是，取一个从 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le 0\}$ 到 X 的双射 g，所以，

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in X} f(x) \\
&= \sum_{i=1}^{0} f(g(i)) \\
&= 0
\end{aligned}$$