11.8 习题

张志聪

2025 年 1 月 4 日

11.8.1

我们通过对 n 进行归纳来证明。更准确地说，设 $P(n)$ 具有如下性质：如果 I 是有界区间且 P 是 I 的一个基数为 n 的划分。那么

$$\alpha[I] = \sum_{J \in P} \alpha[J]$$

最基本的情况 $P(0)$ 是平凡的，I 能够被分割成一个空划分的唯一可能是 I 本身就是空集，在这种情况下，容易得到结论。情形 $P(1)$ 也非常容易，I 能够被划分成一个单元素集合 $\{J\}$ 的唯一可能就是 $I = J$，此时同样可以容易地得到结论。

现在归纳地假设存在某个 $n \geq 1$ 使得 $P(n)$ 为真，接下来我们证明 $P(n+1)$ 为真。设 I 是一个有界区间，并且设 P 是 I 的一个基数为 $n+1$ 的划分。

如果 I 是空集或者单点集，那么 P 中的所有区间也一定是空集或者单点集，从而每个区间的 α 长度都为零，此时结论是平凡的。因此，我们假设 I 是形如 $(a,b), (a,b], [a,b)$ 或 $[a,b]$ 的区间。

首先假设 $b \in I$，即 I 是 $(a,b]$ 或 $[a,b]$。由 $b \in I$ 可知，P 中存在一个区间 K 包含 b。由于 K 是包含在 I 中的，所以 K 一定是形如 $(c,b], [c,b]$ 或 $\{b\}$ 的区间，其中 c 是满足 $a \leq c \leq b$ 的实数（当 $K = \{b\}$ 时，令 $c := b$）。特别地，这意味着当 $c > a$ 时，集合 $I - K$ 是形如 $[a,c]$、(a,c)、$(a,c]$ 或 $[a,c)$ 的区间；而当 $c = a$ 时，$I - K$ 就是单点集或者空集。无论是哪种情

形，容易得出

$$\begin{cases}\alpha[I]=\alpha[b]-\alpha[a]\\ \alpha[K]=\alpha[b]-\alpha[c]\\ \alpha[I-K]=\alpha[c]-\alpha[a]\end{cases}$$

于是

$$\alpha[I]=\alpha[K]+\alpha[I-K]$$

另外，因为 P 构成了 I 的一个划分，所以 $P-\{K\}$ 构成了 $I-K$ 的一个划分。根据归纳假设可知，

$$\alpha[I-K]=\sum_{J\in P-\{K\}}\alpha[J]$$

结合这两个等式（利用有限集合的加法定律，参见命题 7.1.11）可得，

$$\alpha[I]=\sum_{J\in P}\alpha[J]$$

结论得证。

现在假设 $b\notin I$，即 I 是 (a,b) 或 $[a,b)$，同样存在一个形如 (c,b) 或 $[c,b)$ 的区间 K（参见习题 11.1.3）。特别地，这意味着当 $c>a$ 时，集合 $I-K$ 是形如 $[a,c]$、(a,c)、$(a,c]$ 或 $[a,c)$ 的区间；而当 $a=c$ 时，$I-K$ 就是单点集或者空集。接下来的论证与上文一样。

11.8.2

（1）叙述

分段常值黎曼-斯蒂尔杰斯积分是独立于划分的：设 I 是一个有界区间，并且设 $f:I\to\mathbb{R}$ 是一个函数。如果 P 和 P' 都是 I 的划分，并且 f 关于 P 和 P' 都是分段常数函数，$\alpha:X\to\mathbb{R}$ 是定义在某个包含 I 的区域 X 上的函数，那么 $p.c.\int_{[P]}fd\alpha=p.c.\int_{[P']}fd\alpha$

（2）证明

参考习题 11.2.3 的证明。

令 $Q:=P\#P'$，由引理 11.2.7 可知，f 是关于 Q 上的分段常数函数。

接下来证明:

$$p.c.\int_{[P]} fd\alpha = p.c.\int_{[Q]} fd\alpha \tag{1}$$

$$p.c.\int_{[P']} fd\alpha = p.c.\int_{[Q]} fd\alpha \tag{2}$$

对任意 $K \in P$，定义

$$Q_K := \{X \in Q : X \subseteq K\}$$

证明 $K = Q_K$。反证法，假设 $K \neq Q_K$。由 Q_K 的构造方式，易知 $Q_K \subseteq K$，如果假设成立，那么，存在 $x \in K$，$x \notin Q_K$。因为 Q 中一定存在 J 使得 $x \in J$，由 Q 比 P 更细，可知存在 $W \in P$ 使得 $J \subseteq W$，由划分的定义可知 $W = K$，因为如果 $W \neq K$，则与定义 11.1.10（划分）中每个元素恰好属于 P 中的一个有界区间矛盾，存在了两个区间都包含 x。于是可知 $J \in Q_K$，与假设矛盾。

由 $K = Q_K$ 可知，$p.c.\int_{[K]} fd\alpha = p.c.\int_{[Q_K]} fd\alpha$，由 K 的任意性，可知（1）式成立。

类似地，可证（2）式成立。命题得证。

11.8.3

可以参考 11.2.16 的证明；P98 中关于**元证明**的说明可能帮助理解。证明略

11.8.4

（1）叙述

设 I 是一个有界区间，并且设 f 是定义在 I 上的一致连续函数，$\alpha : X \to \mathbb{R}$ 是定义在某个包含 I 的区域 X 上的单调递增函数，那么 f 在 I 上关于 α 是黎曼-斯蒂尔杰斯可积的。

（2）证明

参考定理 11.5.1 的证明。

根据命题 9.9.15 可知，f 是有界的。那么我们要证明 $\underline{\int}_I fd\alpha = \overline{\int}_I fd\alpha$。

如果 I 是一个单点集或者空集，那么命题是平凡的。设 I 是四个区间 $[a,b]$、(a,b)、$(a,b]$ 和 $[a,b)$ 中的任意一个，其中 $a < b$ 是实数。

设 $\epsilon > 0$ 是任意的，由一致连续性可知，存在一个 $\delta > 0$ 使得只要 $x, y \in I$ 满足 $|x-y| < \delta$，就有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$。根据阿基米德性质可知，存在一个整数 $N > 0$ 使得 $(b-a)/N < \delta$。

注意，我们可以把 I 划分成 N 个区间 $J_1, ..., J_N$，设该划分为 P，其中每个区间长度都是 $(b-a)/N$。于是可得，

$$\overline{\int}_I f d\alpha \leq \sum_{k=1}^{N} \left(\sup_{x \in J_k} f(x) \alpha[J_k] \right)$$

注意，以上无需类似 11.3.9（黎曼和）的定义，可以看做函数 $g : I \to \mathbb{R}$ 对任意 $J_k \in P, x \in J_k$ 都有 $g(x) = \sup\limits_{x \in J_k} f(x)$，于是 g 是定义在 I 上的分段常数函数，并且它从上方控制 f。

又

$$\underline{\int}_I f d\alpha \geq \sum_{k=1}^{N} \left(\inf_{x \in J_k} f(x) \alpha[J_k] \right)$$

特别地，

$$\overline{\int}_I f d\alpha - \underline{\int}_I f d\alpha \leq \sum_{k=1}^{N} \left(\sup_{x \in J_k} f(x) - \inf_{x \in J_k} f(x) \right) \alpha[J_k]$$

但是，因为 $|J_k| = (b-a)/N < \delta$，所以对所有的 $x, y \in J_k$ 均有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$。
特别地，我们有

$$f(x) < f(y) + \epsilon \text{对所有的} x, y \in J_k \text{均成立}$$

对 $f(x)$ 取上确界可得（应该是对 $f(x)$ 取上确界，而不是书中的对 x 取上确界），

$$\sup_{x \in J_k} f(x) \leq f(y) + \epsilon \text{对所有的} y \in J_k \text{均成立}$$

然后对 $f(y)$ 取下确界可得，

$$\sup_{x \in J_k} f(x) \leq \inf_{x \in J_k} f(y) + \epsilon$$

把这个式子代入到前面的不等式可得，

$$
\begin{aligned}
\overline{\int}_I fd\alpha - \underline{\int}_I fd\alpha &\leq \sum_{k=1}^{N} \epsilon\alpha[J_k] \\
&= \epsilon \sum_{k=1}^{N} \alpha[J_k] \\
&= \epsilon\alpha[I]
\end{aligned}
$$

又因为 $\epsilon > 0$ 是任意的，而 $\alpha[I]$ 是定值。所以 $\overline{\int}_I fd\alpha - \underline{\int}_I fd\alpha$ 不可能是正的。命题得证。

11.8.5

由定理 9.9.16 可知，f 在 $[-1, 1]$ 上是一致连续的。由习题 11.8.4 可知，

$$
\int_{[-1,1]} fdsgn
$$

是黎曼-斯蒂尔杰斯可积的。

由引理 9.6.3 可知，f 是有界的，那么，存在 $M > 0$ 使得

$$
|f(x)| \leq M, 对任意 x \in [-1, 1]
$$

对任意 $\epsilon > 0$，因为 f 在 $[-1, 1]$ 上是连续函数，所以存在 $\delta > 0$ 使得

$$
|f(x) - f(0)| < \epsilon, 对任意 x \in (-\delta, \delta)
$$

接下来对 $[-1, 1]$ 进行如下划分 $P := \{[-1, -\delta], (-\delta, \delta), [\delta, 1]\}$，并定义函数 $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ 如下

$$
g(x) = \begin{cases} f(0) + \epsilon, x \in (-\delta, \delta) \\ M, x \in [-1, -\delta] \cup [\delta, 1] \end{cases}
$$

因为 g 是从上方控制 f 的，于是

$$\begin{aligned}
\overline{\int}_{[-1,1]} f dsgn &\leq p.c.\int_{[P]} gdsgn \\
&= \int_{[-1,-\delta]} gdsgn + \int_{[\delta,1]} gdsgn + \int_{(-\delta,\delta)} gdsgn \\
&= Msgn[[-1,-\delta]] + Msgn[[\delta,1]] + (f(0)+\epsilon)sgn[(-\delta,\delta)] \\
&= M(-1-(-1)) + M(1-1) + (f(0)+\epsilon)(1-(-1)) \\
&= 2f(0) + 2\epsilon
\end{aligned}$$

类似地，可得

$$\underline{\int}_{[-1,1]} f dsgn \geq 2f(0) - 2\epsilon$$

于是我们有

$$2f(0) - 2\epsilon \leq \underline{\int}_{[-1,1]} f dsgn \leq \overline{\int}_{[-1,1]} f dsgn \leq 2f(0) + 2\epsilon$$

因为 ϵ 是任意的，所以 $\int_{[-1,1]} f dsgn = 2f(0)$