

## 18.4 习题

张志聪

2025 年 5 月 26 日

### 18.4.1

$A$  是  $\mathbb{R}$  中的开集, 不妨设  $A = (a, b)$  其中  $a < b, a, b \in \mathbb{R}$ 。于是

$$m^*(A) = b - a$$

(1) 当  $b \leq 0$  时,  $A \cap (0, \infty) = \emptyset, A \setminus (0, \infty) = A$ , 于是

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (0, \infty)) + m^*(A \setminus (0, \infty)) &= m^*(\emptyset) + m^*(A) \\ &= m^*(A) \end{aligned}$$

(2) 当  $b > 0 > a$  时,  $A \cap (0, \infty) = (0, b), A \setminus (0, \infty) = (a, 0]$ 。

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (0, \infty)) + m^*(A \setminus (0, \infty)) &= m^*((0, b)) + m^*((a, 0]) \\ &= b + m^*((a, 0]) \end{aligned}$$

接下来, 我们计算  $m^*((a, 0])$ 。

因为, 我们有

$$(a, 0) \subseteq (a, 0]$$

对任意  $\epsilon > 0$ , 我们又有

$$(a, 0] \subseteq (a, \epsilon)$$

由引理 18.2.5(vii) 可知,

$$\begin{aligned} m^*((a, 0)) &\leq m^*((a, 0]) \leq m^*((a, \epsilon)) \\ &\implies \\ -a &\leq m^*((a, 0]) \leq \epsilon - a \end{aligned}$$

令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 然后使用夹逼定理, 可以得到

$$m^*((a, 0]) = -a$$

综上可得

$$m^*(A \cap (0, \infty)) + m^*(A \setminus (0, \infty)) = b - a = m^*(A)$$

(3) 当  $a \geq 0$  时,  $A \cap (0, \infty) = A, A \setminus (0, \infty) = \emptyset$ 。于是

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (0, \infty)) + m^*(A \setminus (0, \infty)) &= m^*(A) + m^*(\emptyset) \\ &= m^*(A) \end{aligned}$$

综上可得, 命题  $m^*(A) = m^*(A \cap (0, \infty)) + m^*(A \setminus (0, \infty))$  得证。

## 18.4.2

有一点需要注意  $E := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ , 其中  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  不是固定值, 在集合定义中, 未被限制的变量都是自由的, 所以在这个集合中, 前面的分量  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  完全自由, 只有最后一个分量  $x_n > 0$ 。

$A$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开盒子, 那么, 对任意  $A$  可以表示成

$$A = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$$

于是

$$\begin{aligned} A \cap E &= \prod_{i=1}^{n-1} (a_i, b_i) \times ((a_n, b_n) \cap (0, \infty)) \\ A \setminus E &= \prod_{i=1}^{n-1} (a_i, b_i) \times ((a_n, b_n) \setminus (0, \infty)) \end{aligned}$$

由习题 18.2.2 可知,

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E) &\leq m^*\left(\prod_{i=1}^{n-1} (a_i, b_i)\right) m^*((a_n, b_n) \cap (0, \infty)) \\ m^*(A \setminus E) &\leq m^*\left(\prod_{i=1}^{n-1} (a_i, b_i)\right) m^*((a_n, b_n) \setminus (0, \infty)) \end{aligned}$$

于是可得

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \leq m^*\left(\prod_{i=1}^{n-1} (a_i, b_i)\right)(m^*((a_n, b_n) \cap (0, \infty)) + m^*((a_n, b_n) \setminus (0, \infty)))$$

利用习题 18.4.1(viii) 可得

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) &\leq m^*\left(\prod_{i=1}^{n-1} (a_i, b_i)\right)m^*((a_n, b_n)) \\ &= m^*\left(\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)\right) \\ &= m^*(A) \end{aligned}$$

又由引理 18.2.5 可知

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

综上可得

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

### 18.4.3

令  $E$  等于半空间。对任意  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ，引理 18.2.5(viii) 可得

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

对任意  $\epsilon > 0$ ，由外测度的定义可知，存在  $(B_j)_{j \in J}$  覆盖  $A$ ，使得

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \text{vol}(B_j) &\leq m^*(A) + \epsilon \\ &\implies \\ \sum_{j \in J} \text{vol}(B_j) - \epsilon &\leq m^*(A) \end{aligned}$$

由推论 18.2.7，我们有

$$m^*(B_j) = \text{vol}(B_j)$$

于是由习题 18.4.2 可知, 对任意  $j \in J$ , 都有

$$m^*(B_j) = m^*(B_j \cap E) + m^*(B_j \setminus E)$$

于是, 我们有

$$\sum_{j \in J} \text{vol}(B_j) = \sum_{j \in J} m^*(B_j \cap E) + \sum_{j \in J} m^*(B_j \setminus E)$$

因为

$$\begin{aligned} \bigcup_{j \in J} (B_j \cap E) &\subseteq A \cap E \\ \bigcup_{j \in J} (B_j \setminus E) &\subseteq A \setminus E \end{aligned}$$

于是由引理 18.2.5(viii) 或 (x) 可得

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E) &\leq \sum_{j \in J} m^*(B_j \cap E) \\ m^*(A \setminus E) &\leq \sum_{j \in J} m^*(B_j \setminus E) \end{aligned}$$

综上可得

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) - \epsilon \leq m^*(A)$$

由  $\epsilon$  的任意性可知, 并结合  $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$ , 我们就有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

于是由定义 18.4.1 可知,  $E$  是可测的。

#### 18.4.4

- (a)

对  $\mathbb{R}^n$  的每一个子集  $A$ , 我们有

$$\begin{aligned} A \cap E &= A \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E) \\ A \setminus E &= A \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \end{aligned}$$

因为  $E$  是可测的, 所以

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \\ &= m^*(A \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)) \end{aligned}$$

于是可得,  $\mathbb{R}^n \setminus E$  是可测的。

• (b)

因为  $E$  是可测的, 所以对  $\mathbb{R}^n$  的每一个子集  $A$ , 我们有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

又因为

$$\begin{aligned} A \cap (E + x) &= (A - x) \cap E + x \\ A \setminus (E + x) &= (A - x) \setminus E + x \end{aligned}$$

因为  $A - x$  也是  $\mathbb{R}^n$  的子集, 于是以下等式依然成立:

$$m^*(A - x) = m^*((A - x) \cap E) + m^*((A - x) \setminus E)$$

利用引理 18.2.5(xiii) (平移不变性), 我们有

$$\begin{aligned} m^*(A - x + x) &= m^*((A - x) \cap E + x) + m^*((A - x) \setminus E + x) \\ &\implies \\ m^*(A) &= m^*(A \cap (E + x)) + m^*(A \setminus (E + x)) \end{aligned}$$

于是可得  $x + E$  是可测的。

由定义 18.4.1 可知  $m(E) = m^*(E)$ , 再次利用引理 18.2.5(xiii) (平移不变性)

$$m(E) = m^*(E) = m^*(x + E) = m(x + E)$$

• (c)  $\otimes$

$E_1$  是可测的, 所以对任意  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , 我们有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \setminus E_1) \quad (1)$$

$E_2$  也是可测的, 且因为  $(A \cap E_1) \subseteq \mathbb{R}^n$ , 于是我们有

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E_1) &= m^*((A \cap E_1) \cap E_2) + m^*((A \cap E_1) \setminus E_2) \\ &= m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 \setminus E_2) \end{aligned}$$

同样的,  $(A \setminus E_1) \subseteq \mathbb{R}^n$ , 于是

$$\begin{aligned} m^*(A \setminus E_1) &= m^*((A \setminus E_1) \cap E_2) + m^*((A \setminus E_1) \setminus E_2) \\ &= m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2)) \end{aligned}$$

代入 (1) 式可得:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 \setminus E_2) + m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

令这个为式子 (0)

观察  $A \setminus (E_1 \cap E_2)$ , 利用命题 3.1.28(h), 我们有

$$\begin{aligned} A \setminus (E_1 \cap E_2) &= (A \setminus E_1) \cup (A \setminus E_2) \\ &= (A \cap E_1 \setminus E_2) \cup (A \cap E_2 \setminus E_1) \cup (A \setminus (E_1 \cup E_2)) \end{aligned}$$

于是由命题 18.2.5(viii) 可知,

$$m^*(A \setminus (E_1 \cap E_2)) \leq m^*(A \cap E_1 \setminus E_2) + m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

这里有:

$$m^*(A \setminus (E_1 \cap E_2)) = m^*(A \cap E_1 \setminus E_2) + m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

反证法, 假设上式不成立, 那么就有

$$m^*(A \setminus (E_1 \cap E_2)) < m^*(A \cap E_1 \setminus E_2) + m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

又因为

$$A = (A \cap (E_1 \cap E_2)) \cup (A \setminus (E_1 \cap E_2))$$

再次利用命题 18.2.5(viii) 可知,

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \setminus (E_1 \cap E_2))$$

$\implies$

$$m^*(A) < m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 \setminus E_2) + m^*(A \cap E_2 \setminus E_1) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2))$$

这与式 (0) 存在矛盾，假设不成立。

结合式 (0) 可得

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + m^*(A \setminus (E_1 \cap E_2)) \quad (2)$$

所以  $E_1 \cap E_2$  是可测的。

利用集合运算关系（命题 3.1.28），我们有

$$E_1 \cup E_2 = \mathbb{R}^n \setminus ((\mathbb{R}^n \setminus E_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E_2))$$

由 (a) 可知， $\mathbb{R}^n \setminus E_1$  和  $\mathbb{R}^n \setminus E_2$  都是可测的。由刚才的证明可知  $(\mathbb{R}^n \setminus E_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E_2)$  也是可测的，再次利用 (a) 可知， $\mathbb{R}^n \setminus ((\mathbb{R}^n \setminus E_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E_2))$  是可测的。

• (d)

对  $N$  进行归纳即可证明。

• (e)

– 开盒子

任意开盒子为  $B = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ ，于是

$$B = \left( \bigcap_{i=1}^n \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > a_i\} \right) \cap \left( \bigcap_{i=1}^n \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i < b_i\} \right)$$

（注意，右侧括号内都是半空间平移后的形式）

由引理 18.4.2（半空间都是可测的），并且利用引理 (b)(d)(c) 可知， $B$  是可测的。

– 闭盒子

任意闭盒子为  $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ，因为

$$B = (a_1, a_2, \dots, a_n) + \prod_{i=1}^n [0, b_i - a_i]$$

令  $E = \prod_{i=1}^n [0, b_i - a_i]$ ，由 (b)（平移不变性）可知，我们只需证明  $E$  是可测的即可。

又因为

$$\mathbb{R}^n \setminus E = \left( \bigcup_{i=1}^n \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i < 0\} \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^n \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > (b_i - a_i)\} \right)$$

由引理 18.4.2 (半空间都是可测的), 并且利用引理 (b)(d)(c) 可知,  $E$  是可测的。

• (f)

对于  $\mathbb{R}^n$  的任意子集, 我们有

$$A \cap E \subseteq E$$

利用引理 18.2.5(vii) (单调性) 可知,

$$m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$$

结合引理 18.2.5(vi) (正性) 可知,

$$m^*(A \cap E) = 0$$

因为

$$A \setminus E \subseteq A$$

再次利用引理 18.2.5(vii) (单调性)

$$m^*(A \setminus E) \leq m^*(A)$$

又因为

$$(A \setminus E) \cup E = A$$

利用引理 18.2.5(viii) (有限次可加性)

$$\begin{aligned} m^*(A) &\leq m^*(A \setminus E) + m^*(E) \\ &= m^*(A \setminus E) + 0 \\ &= m^*(A \setminus E) \end{aligned}$$

综上可得

$$m^*(A) = m^*(A \setminus E)$$

于是我们有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

所以,  $E$  是可测的。



## 18.4.5

反证法，假设  $E$  是可测的。如同在命题 18.3.3 中描述的，由  $m^*(E) \neq 0$  可知，存在一个有限的整数  $n > 0$  使得  $m^*(E) = m(E) > 1/n$ 。现在令  $J$  表示  $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$  的基数为  $3n$  的有限子集。 $E$  是可测的，那么由引理 18.4.4(b) 和引理 18.4.5 可知，

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{q \in J} q + E\right) &= \sum_{q \in J} m(q + E) \\ &= \sum_{q \in J} m(E) \\ &= 3nm^*(E) \\ &> 3n \frac{1}{n} \\ &= 3 \end{aligned}$$

即（按照定义 18.4.1 中的定义）

$$m^*\left(\bigcup_{q \in J} q + E\right) > 3$$

而由命题 18.3.3 中有  $\bigcup_{q \in J} q + E \subseteq X$ ，那么

$$m^*\left(\bigcup_{q \in J} q + E\right) \leq m^*(X)$$

这与  $1 \leq m^*(X) \leq 3$  矛盾。

## 18.4.6

(1)

对  $J$  的基数  $n$  进行归纳。 $\bigcup_{j \in J} E_j$  表示成  $\bigcup_{j=1}^n E_j$ 。（可以建立对应双射，细节不做说明了。）

归纳基始  $n = 1$  时，这是显然的：

$$m^*(A \cap E_1) = m^*(A \cap E_1)$$

归纳假设  $n = k$  时, 我们有

$$m^*(A \cap \bigcup_{j=1}^k E_j) = \sum_{j=1}^k m^*(A \cap E_j)$$

$n = k + 1$  时, 令  $F = \bigcup_{j=1}^k E_j$ , 因为  $E_{k+1}$  是可测的, 由引理 18.4.4(d) 可知,  $F \cup E_{k+1}$  也是可测的, 于是我们有

$$m^*(A \cap (F \cup E_{k+1})) = m^*(A \cap (F \cup E_{k+1}) \cap E_{k+1}) + m^*(A \cap (F \cup E_{k+1}) \setminus E_{k+1})$$

由命题 3.1.18 可得 (有用到  $E_j$  之间不相交这个条件)

$$\begin{aligned} A \cap (F \cup E_{k+1}) \cap E_{k+1} &= ((A \cap F) \cup (A \cap E_{k+1})) \cap E_{k+1} \\ &= (E_{k+1} \cap (A \cap F)) \cup (E_{k+1} \cap (A \cap E_{k+1})) \\ &= E_{k+1} \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} A \cap (F \cup E_{k+1}) \setminus E_{k+1} &= ((A \cap F) \cup (A \cap E_{k+1})) \setminus E_{k+1} \\ &= A \cap F \end{aligned}$$

(第二个等式可能只能使用集合相等 (定义 3.1.4) 的定义证明了)

综上可得, 并结合归纳假设

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (F \cup E_{k+1})) &= m^*(A \cap (F \cup E_{k+1}) \cap E_{k+1}) + m^*(A \cap (F \cup E_{k+1}) \setminus E_{k+1}) \\ &= m^*(E_{k+1}) + m^*(A \cap F) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} m^*(A \cap E_j) \end{aligned}$$

归纳完成。

(2)

令  $A = \bigcup_{j \in J} E_j$ , 代入

$$\begin{aligned} m^*(A \cap \bigcup_{j \in J} E_j) &= \sum_{j \in J} m^*(A \cap E_j) \\ &\implies \\ m^*(\bigcup_{j \in J} E_j) &= \sum_{j \in J} m^*(E_j) \end{aligned}$$

## 18.4.7

我们有

$$B \setminus A = B \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$$

因为  $A$  是可测的, 所以由引理 18.4.4(a) 可知  $\mathbb{R}^n \setminus A$  是可测的, 再次利用引理 18.4.4(c) 可知,  $B \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$  也是可测的。(通过证明过程可以知道, 没有用到  $A \subseteq B$  这个题设)

因为  $A \subseteq B$ , 所以  $A, B \setminus A$  是不相交的, 又因为

$$A \cup (B \setminus A) = B$$

于是由引理 18.4.5 可知

$$\begin{aligned} m(A \cup (B \setminus A)) &= m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \\ &\implies \\ m(B \setminus A) &= m(B) - m(A) \end{aligned}$$

## 18.4.8

(1)

按书中的提示, 记:

$$J = \{j_1, j_2, \dots\}, F_N = \bigcup_{k=1}^N \Omega_{j_k}, E_N = F_N \setminus F_{N-1}$$

于是可得

$$\begin{aligned} F_N &= \bigcup_{n=1}^N E_n \\ \bigcup_{j \in J} \Omega_j &= \lim_{N \rightarrow \infty} F_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \end{aligned}$$

因为  $E_N$  的可测性由推论 18.4.8 保证, 又因为  $E_N$  之间都是不相交的可测集, 于是由引理 18.4.8 (可数可加性) 可知,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  是可测集, 进而  $\bigcup_{j \in J} \Omega_j$  是可测集。

(2)

利用命题 3.1.28(h) (德摩根定律), 我们有

$$\bigcap_{k=1}^N \Omega_k = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^N (\mathbb{R}^n \setminus \Omega_k)$$

于是, 我们有

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus \Omega_k)$$

(这里不是从有限版本直接推导出可数无限版本的, 需要单独证明下, 3-1-comment.tex 中有证明)

利用引理 16.4.4(a) 可知,  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_k$  是可测的, 并利用刚才的结论, 可以完成证明。

## 18.4.9

首先, 证明  $Q^2$  是可测集。

思路与例 18.2.9 一致。对于任意  $(x, y) \in Q^2$ , 单点集  $\{(x, y)\}$  的外测度都是 0, 由引理 18.4.4 可知  $\{(x, y)\}$  是可测的。又  $Q^2$  是全体  $\{(x, y)\}$  的并集, 而且  $Q^2$  是可数的, 所以  $Q^2$  是可测集, 并且外测度为 0。

(1)  $A$  是可测集。

因为  $[0, 1]^2$  也可以用闭盒子表示, 所以  $[0, 1]^2$  也是可测的。于是利用推论 18.4.7 可知  $A = [0, 1]^2 \setminus Q^2$  也是可测的。

(2)  $m^*(A) = 1$ 。

由推论 18.4.7 可知,

$$\begin{aligned} m(A) &= m([0, 1]^2 \setminus Q^2) \\ &= m([0, 1]^2) - m(Q^2) \\ &= 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

(3)  $A$  没有内点。

反证法, 设存在  $(x_0, y_0) \in A$ , 且  $(x_0, y_0)$  是  $A$  的内点。那么存在  $r > 0$  使得开球  $B((x_0, y_0), r) \subseteq A$ 。

任意  $(x, y)$  只要满足以下条件, 就有  $(x, y) \in B(x, r)$ :

$$\begin{aligned} |x_0 - x| &< \sqrt{1/2}r \\ |y_0 - y| &< \sqrt{1/2}r \end{aligned}$$

由命题 5.4.14 (有理数的稠密性) 可知, 存在  $x, y$  都是有理数, 并且  $(x, y) \in B(x, r)$ , 进而  $(x, y) \in A$ , 这与  $A$  的定义矛盾。

### 18.4.10

因为  $B$  是测度为 0 的勒贝格可测集, 又题设有  $A \subseteq B$ , 由引理 18.2.5(vii) (单调性) 可知, 所以

$$m^*(A) \leq m^*(B) = m(B) = 0$$

结合由引理 18.2.5(vi) (正性) 可知,

$$m^*(A) = 0 \tag{3}$$

引理 18.4.4(f) 可知,  $A$  是可测的。