# 4.2 习题

2024 年 5 月 2 日

**说明.** 在本节的证明过程中，用到一些在 4.1 节未提到的整数代数定律，但都很明显，我就没有特别说明证明了

## 4.2.1

证明：

设 $x = a//b, y = c//d, z = e//f$ 为有理数, 其中 $a, c, e$ 是整数，$b, d, f$ 是不为零的整数。

（1）自反性

$ab = ab$，由定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $x = x$

（2）对称性

假设 $x = y$，由定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $ad = bc$，再次利用定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $y = x$

（3）传递性

假设 $x = y, y = z$，由定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $ad = bc, cf = de$，又

$$ad = bc$$
$$adf = bcf$$

$$cf = de$$
$$bcf = bde$$

所以：$adf = bcf = bde, adf = bde$，由推论 4.1.9 可知 $af = be$，所以 $x = z$

**说明.** 其实这里需要引入一个额外的命题，$a = b$，$a, b, c$ 都是整数，那么 $ac = bc$。这个命题相对简单，这里说一下证明思路，先证明自然数符合该命题，然后再推广到整数。

## 4.2.2

证明：

（1）乘积的定义是明确的

假设 $a//b = a'//b'$，那么 $ab' = a'b$，

$$(a//b) * (c//d) = (ac)//(bd) \tag{1}$$
$$(a'//b')//(c//d) = (a'c)//(b'd) \tag{2}$$

因此我们要证明的是 $acb'd = bda'c$，由推论 4.1.9（整数的消去律）可知，只需证明 $ab' = ba'$，由假设可知该等式成立；

（2）负数的定义是明确的

假设 $a//b = a'//b'$，那么 $ab' = a'b$，

$$-(a//b) = (-a)//b \tag{3}$$
$$-(a'//b') = (-a')//b' \tag{4}$$

因此我们要证明的是 $(-a)b' = (-a')b$，由习题 4.1.3 可知

$$(-a)b' = (-1) \times ab'$$
$$(-a')b = (-1) \times a'b$$

由推论 4.1.9（整数的消去律）可知，只需证明 $ab' = a'b$，由假设可知该等式成立；

## 4.2.3

证明：

我们记 $x=a//b, y=c//d, z=e//f$，其中 $a,c,e$ 是整数，$b,d,f$ 是不为零的整数。

（1）$x+y=y+x$

$$\begin{aligned} x+y &= (a//b)+(c//d) \\ &= (ad+bc)//(bd) \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} y+x &= (c//d)+(a//b) \\ &= (cb+da)//(db) \end{aligned}$$

由定义 4.2.1（有理数的相等定义）可知要证明 $x+y=y+x$，只需证明 $(ad+bc)(db)=(cb+da)(bd)$，利用整数的代数定律可知，等式成立。

（2）$x+0=0+x=x$

$$\begin{aligned} x+0 &= (a//b)+(0//1) \\ &= (a1+b0)//(b) \\ &= a//b \\ &= x \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} 0+x &= (0//1)+(a//b) \\ &= (0b+1a)//(b) \\ &= a//b \\ &= x \end{aligned}$$

（3）$x+(-x)=(-x)+(x)=0$

由（1）可知 $x+(-x)=(-x)+(x)$

$$
\begin{aligned}
x+(-x) &= (a//b)+[(-a)//b] \\
&= [ab+(-a)b]//bb \\
&= [ab+(-1)\times ab]//bb \\
&= [ab(1+(-1))]//bb \\
&= [ab(0)]//bb \\
&= 0//bb \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（4）$xy = yx$

$$
\begin{aligned}
xy &= (a//b)*(c//d) \\
&= (ac)//(bd)
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
yx &= (c//d)*(a//b) \\
&= (ca)//(db)
\end{aligned}
$$

现只需证明 $acdb = bdca$，由整数的代数定律可知，等式成立。

（5）$(xy)z = x(yz)$

$$
\begin{aligned}
(xy)z &= [(a//b)*(c//d)]*(e//f) \\
&= (ac//bd)*(e//f) \\
&= ace//bdf
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
x(yz) &= a//b * [(c//d) * (e//f)] \\
&= a//b * (ce//df) \\
&= ace//bdf
\end{aligned}
$$

（6）$x1 = 1x = x$

由（4）可知 $x1 = 1x$

$$
\begin{aligned}
x1 &= (a//b) * (1//1) \\
&= (a1//b) \\
&= a//b \\
&= x
\end{aligned}
$$

（7）$x(y+z) = xy + xz$

$$
\begin{aligned}
x(y+z) &= (a//b)[c//d + e//f] \\
&= (a//b)[(cf+de)//df] \\
&= [a(cf+de)]//bdf \\
&= (acf+ade)//bdf
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
xy + xz &= (a//b) * (c//d) + (a//b) * (e//f) \\
&= (ac//bd) + (ae//bf) \\
&= (acbf + bdae)//bdbf
\end{aligned}
$$

由有理数相等的定义可知,我们此时只需证明 $(acf+ade)bdbf = bdf(acbf+$

$bdae)$。

$$\begin{aligned}(acf+ade)bdbf &= acfbdbf+adebdbf\\ &= abbcdff+abbddef\\ bdf(acbf+bdae) &= bdfacbf+bdfbdae\\ &= abbcdff+abbddef\end{aligned}$$

所以 $(acf+ade)bdbf = bdf(acbf+bdae)$。

（8）$(y+z)x = yx+zx$

由（4）可知

$$\begin{aligned}(y+z)x &= x(y+z)\\ xy &= yx\\ xz &= zx\end{aligned}$$

综上，可知 $(y+z)x = x(y+z) = xy+xz = yx+zx$，命题得证；

## 4.2.4

**说明.** 由有理数的定义可知，有理数是由整数构造而成，通过整数的三歧性，可以推导出有理数的三歧性。

设 $x$ 为任意有理数，由有理数的定义可知，存在 $x = a/b$，其中 $a, b$ 是整数。

首先证明（a）(b)（c）中至少有一个为真。我们有如下三种情况：$a$、$b$ 同号，$a$、$b$ 异号，$a$ 为 0。

如果 $a, b$ 同号，也就是说，要么 $a, b$ 都是正整数，要么 $a, b$ 都是负整数。如果 $a, b$ 都是正整数，由定义 4.2.6 可知 $x$ 是正的；如果 $a, b$ 都是负整

数，不妨设 $a=-a', b=-b'$，其中 $a', b'$ 是正整数，此时，

$$\begin{aligned} x &= a/b \\ &= (-a')/(-b') \\ &= a'/b' \end{aligned}$$

所以 $x$ 是正的。

如果 $a, b$ 是异号，要么 $a$ 是正整数 $b$ 负整数，或反之。如果 $a$ 是正整数 $b$ 负整数，不妨设 $b=-b'$，其中 $b'$ 是正整数，此时，

$$\begin{aligned} x &= a/b \\ &= a/(-b') \\ &= -(a/b') \end{aligned}$$

所以 $x$ 是负的；同理可证 $a$ 是负整数 $b$ 正整数时，$x$ 是负的。

如果 $a$ 为 0，则 $x=a/b=0/1=0$。

所以（a）(b)（c）中至少有一个为真

现在我们证明（a)、(b)、(c）最多有一个为真。

（a)、(b）不能同时为真，如果（a)、(b）同时为真，当 $x=a/b=0$，则 $a=0$，当 $x=a/b$ 是正的，则 $a$ 是正整数，这与正整数大于 0 矛盾。

（a)、(c）不能同时为真，如果（a)、(b）同时为真，当 $x=a/b=0$，则 $a=0$，当 $x=a/b$ 是负数，则 $(-a)$ 是正整数，这与 $a=0$ 矛盾，因为 $(-0)=0$；

（b)、(c）不能同时为真，如果（b)、(c）同时为真，那么存在 $x=a/b, x=(-a')/b'$，其中 $a, b, a', b'$ 是正整数，

$$\begin{aligned} a/b &= (-a')/b' \\ ab' &= (-a')b \end{aligned}$$

由于 $ab'$ 是正整数，所以 $(-a')b$ 也一定是正整数，但很明显在 $-a'$ 是负整数，$b$ 是正整数的情况下，$(-a')b$ 是负整数，存在矛盾，所以（b)、(c）不能同时为真。

所以（a)（b)（c）最多有一个为真。

**说明.** 在（b）、（c）不能同时为真的证明过程中，用到一个命题：a，b 是正自然数【也可以把 a，b 看成正整数】，那么 (-a)b 是负整数。

证明：

$$\begin{aligned}(-a)b &= (0-a)(b-0) \\ &= (0*b+a*0)-(ab+0*0) \\ &= -ab\end{aligned}$$

因为 $ab$ 是正自然数，所以 $-ab$ 是负整数。

## 4.2.5


## 4.2.5


证明：

（a）（序的三歧性）命题 $x=y$、$x<y$ 和 $x>y$ 中恰有一个为真。

有引理 4.2.7（有理数的三歧性）可知，$x-y$ 的值只有以下三种情况：（1）$x-y$ 是 0，此时 $x=y$【无法 $x-y=0, x=y$ 直接得到，证明比较简单，这里省略】；（2）$x-y$ 是正有理数，由定义 4.2.9（有理数的排序）可知 $x>y$；（3）$x-y$ 是负有理数，由定义 4.2.9（有理数的排序）可知 $x<y$；

（b）（序是反对称的）我们有 $x<y$ 当且仅当 $y>x$。

充分性：如果 $x<y$，由定义 4.2.8 可知 $x-y$ 是一个负有理数，即存在两个正整数 $a$ 和 $b$ 使得 $x-y=(-a)/b$，现在只需证明 $y-x=a/b$ 即可证明充分性。由

$$\begin{aligned}x-y+y-x &= 0 \\ (-a)/b+(y-x) &= 0 \\ (-a)/b+(y-x)+a/b &= a/b \\ y-x &= a/b\end{aligned}$$

可知 $y-x=a/b>0$，所有 $y>x$。

必要性：证明同上。

（c）（序是可传递的）如果 $x < y$ 且 $y < z$，那么 $x < z$。

由 $x < y, y < z$ 与（b）可知 $y > x, z > y$，所以 $y - x = a, z - y = b$，其中 $a, b$ 是正有理数，由此可知:

$$\begin{aligned} z - x &= z - y + y - x \\ &= (z - y) + (y - x) \\ &= a + b \end{aligned}$$

所以 $z - x$ 是正有理数，所以 $z > x$，由（b）可知 $x < z$。

（d）（加法保持序不变）如果 $x < y$，那么 $x + z < y + z$。

$$\begin{aligned} (y + z) - (x + z) &= (y + z) - x - z \qquad \text{【见说明】} \\ &= y + z - x - z \\ &= y - x \end{aligned}$$

由 $x < y$ 和（b）可知 $y - x$ 是正有理数，所以 $x + z < y + z$。

**说明.** 以上的证明中用到命题：$x, y$ 是有理数，$-(x+y) = (-x)+(-y)$。

证明：

不妨设 $x = a/b, y = c/d$，其中 $a, b, c, d$ 是整数，且 $b, d$ 不为零。

$$\begin{aligned} -(x + y) &= -(a/b + c/d) \\ &= -[(ad + bc)/bd] \\ &= -(ad + bc)/bd \\ &= (-1) \times (ad + bc)/bd \qquad \text{【习题 4.1.3】} \end{aligned}$$

又

$$
\begin{aligned}
(-x)+(-y) &= (-a)/b+(-c)/d \\
&= [(-a)d+b(-c)]/bd \\
&= [(-1)ab+(-1)bc]/bd && \text{【习题 4.1.3】} \\
&= (-1)\times(ab+bc)/bd && \text{【命题 4.1.6】}
\end{aligned}
$$

由上可知 $-(x+y)=(-x)+(-y)$。

（e）（正的乘法保持序不变）如果 $x<y$ 且 $z$ 是正的，那么 $xz<yz$。

不妨设 $x=a/b, y=c/d, z=e/f$，其中 $a,b,c,d,e,f$ 是整数，且 $b,d,f$ 不为零的正整数。

$$
\begin{aligned}
yz-xz &= c/d*e/f-a/b*e/f \\
&= ce/df-ae/bf \\
&= (cebf-aedf)/dfbf
\end{aligned}
$$

由于 $b,d,f$ 是不为零的正整数，所以 $dfbf$ 是整数，由此 $yz-xz$ 的正负由 $cebf-aedf$ 的正负决定。由于 $x<y$ 可知:

$$
\begin{aligned}
y-x &= c/d-a/b \\
&= cb+(-a)d/db \\
\rightarrow cb-ad>0
\end{aligned}
$$

综上：

$$
\begin{aligned}
cebf-aedf &= ef(cb-ad) && \text{命题 4.1.6} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

所以 $yz-xz>0$，于是 $yz>xz$ 命题成立。

## 4.2.6

证明：

不妨设 $x=a/b, y=c/d, z=e/f$，其中 $a,b,c,d,e,f$ 是整数，且 $b,d,f$ 不为零的正整数，$e$ 是负整数。由习题 4.2.5（e）的证明可知：

$$\begin{aligned} xz-yz &= a/b*e/f-c/d*e/f \\ &= ae/bf-ce/df \\ &= (aedf-bfce)/bfdf \\ &= ef(ad-bc)/bfdf \end{aligned}$$

由 $x<y$ 可知 $ad-bc>0$，又 $z$ 是负数，所以 $ef<0$。现在只需证明正整数与负整数的乘积是负数。

设 $n,m$ 都是正自然数，

$$\begin{aligned} n(-m) &= (n-0)(0-m) \\ &= (n*0+0*m)-(0*0+nm) \\ &= -nm \end{aligned}$$

由 $n(-m)$ 是正自然数 $nm$ 的负数，所有 $n(-m)$ 是负整数。

由此可知 $ef(ad-bc)$ 是负有理数，所以 $xz-yz$ 是负有理数，按照定义 4.2.8（有理数的排序）可知 $xz>yz$。