16.1 习题

张志聪

2025 年 4 月 24 日

16.1.1

（1）k 的存在性。

对任意实数 x，令 $A := \{l \in \mathbb{Z} : l \leq x\}, k := \sup(A)$。

由命题 5.4.12（负实数有类似的命题）可知，存在有理数 q 和整数 N 使得

$$q \leq x \leq N$$

由命题 4.4.1 可知，存在一个整数 M 使得 $M \leq q$，于是

$$M \leq x \leq N$$

于是 A 非空，且有上界。

接下来，证明上确界是存在的，且上确界属于 A。换言之，任意一个元素为整数的非空有界集合都有一个最大元素。

由命题 5.5.9（最小上界的存在性）可知，A 存在上确界，设 k 是 A 的上确界。

反证法，假设 $k \notin A$。

任取 $a_0 \in A$（因为 A 是非空，所以 a_0 是存在的。）因为 $k \notin A, a_0 \in A$，所以存在 $a_1 \in A$，且 $a_1 > a_0$（否则 $a_0 = k$ 就是上确界了，与假设矛盾）。因为 $a_1 > a_0$，所以，$a_1 \geq a_0 + 1$（A 中的元素都是整数）。递归地构造出 $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$。

所以，对任意 $n \geq 1$，都有 $a_n \geq a_0 + n$。于是，只要 n 足够大，就可以取到 $a_n > k$，这与 k 是 A 的上确界矛盾。

综上，整数 k 是存在的。

（2）$y \in [0,1)$。

接下来，证明：令 $y = x - k$，$y \in [0,1)$。

如果，$y \geq 1$，那么，$x = k + y \geq k + 1$，这与 k 是 A 的上确界矛盾（因为 $k+1 \in A$）。

同理，$y < 0$，$x = k + y < k$，同样与 k 是 A 的上确界矛盾。（因为 $k \notin A$。）

综上，$y \in y \in [0,1)$。

16.1.2

f 是 Z 周期的，所以，我们只需要了解它在 $[0,1)$ 上的取值就行了。

- (a)

  因为 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续的，那么，f 在 $[0,1]$ 上也是连续的。

  证明与引理 9.6.3 相同（不能直接使用 9.6.3，函数的值域不同）。

  反证法，假设 f 在 $[0,1]$ 是无界的。那么，对任意实数 $M > 0$，都存在 $x \in [0,1)$，使得 $|f(x)| \geq M$。

  特别地，对于每一个自然数 n，集合 $\{x \in [0,1] : |f(x)| \geq n\}$（这里 $f(x)$ 是复数，但 $|f(x)|$ 是实数）都是非空的。所以我们可以选取 $[0,1]$ 中的一个序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 使得 $|f(x_n)| \geq n$ 对所有的 n 均成立。由于这个序列属于 $[0,1]$，从而根据 9.1.24 可知，存在一个收敛于某个极限 $L \in [0,1]$ 的子序列 $(x_{n_j})_{j=0}^{\infty}$，其中 $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ 是一个递增的自然数序列。特别地，对于所有的 $j \in \mathbb{N}$，均有 $n_j \geq j$。

  因为 f 在 $[0,1]$ 上连续，所以它在 L 处是连续的，并且我们有

  $$\lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = f(L) \tag{1}$$

  所以序列 $(f(x_{n_j}))_{j=0}^{\infty}$ 是收敛的，从而是有界的。另外，我们从序列的构造过程中看出 $|f(x_{n_j})| \geq n_j \geq j$ 对所有的 j 均成立，从而序列 $(f(x_{n_j}))_{j=0}^{\infty}$ 是无界的，这是一个矛盾。

  f 在 $[0,1]$ 上有界，所以在 $[0,1)$ 上也有界。

- (b)

以 $f+g$ 为例，只需证明 $f+g$，满足连续的 $\mathbb{Z}$ 周期复值函数的空间（即：$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$）性质即可。

$f+g$ 的连续性，证明略。

现在证明 $f+g$ 是 $\mathbb{Z}$ 周期性的。

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &= f(x+k)+g(x+k)\\ &= (f+g)(x+k)\end{aligned}$$

命题得证。

- (c)

  连续性由推论 14.3.2 保证。

  接下来，需要证明，f 是 $\mathbb{Z}$ 周期性的。

  反证法，假设 f 不是 $\mathbb{Z}$ 周期性的，那么，存在 $x_0 \in [0,1)$，使得 $f(x_0) \neq f(x_0+k)$（其中，k 是任意整数）。

  因为，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 f，那么，令 $\epsilon = |f(x_0)-f(x_0+k)|$，存在 $N \geq 1$ 使得只要 $n \geq N$，就有

$$\begin{aligned}|f(x_0)-f_n(x_0)| &< \frac{1}{4}\epsilon\\ |f(x_0+k)-f_n(x_0+k)| = |f(x_0+k)-f_n(x_0)| &< \frac{1}{4}\epsilon\end{aligned}$$

  我们有，

$$\begin{aligned}|f(x_0)-f(x_0+k)| &= |f(x_0)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0+k)|\\ &\leq |f(x_0)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0+k)|\\ &< \frac{1}{4}\epsilon+\frac{1}{4}\epsilon\\ &= \frac{1}{2}\epsilon\end{aligned}$$

  存在一个矛盾。

16.1.3

- (a) $(C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C}), d_\infty)$ 符合定义 12.1.2（度量空间）。

  符合下面四个公理：

  - (1) 对任意的 $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，我们有 $d_\infty(f,f) = 0$。

    因为，$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} 0 = 0$，即：$d_\infty(f,f) = 0$。
  - (2)（正性）对任意两个不同的 $f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$,我们有 $d_\infty(f,g) > 0$。

    因为 $f \neq g$，所以，存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_0) \neq g(x_0)$，于是 $d_\infty(f,g) \geq |f(x_0) - g(x_0)| > 0$。
  - (3) （对称性）对任意的 $f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，我们有 $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$。

    $$\begin{aligned} d_\infty(f,g) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x) - f(x)| \\ &= d_\infty(g,f) \end{aligned}$$
  - (4)（三角不等式）对任意的 $f, g, h \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$,我们有 $d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$。

    反证法，假设 $d_\infty(f,h) > d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$。

    由上确界的定义和命题 6.3.6 可知，存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得

    $$\begin{aligned} d_\infty(f,h) &> |f(x_0) - h(x_0)| \\ &> d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h) \\ &\geq |f(x_0) - g(x_0)| + |g(x_0) - h(x_0)| \end{aligned}$$

    综上，我们有

    $$|f(x_0) - h(x_0)| > |f(x_0) - g(x_0)| + |g(x_0) - h(x_0)|$$

    因为对任意 $x \in \mathbb{R}$，我们有

    $$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &= |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \end{aligned}$$

存在矛盾。

- (d) $(C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C}), d_\infty)$ 是完备的。

  利用定理 14.4.5 可证。