

10.5 注释

张志聪

2024 年 12 月 20 日

说明 1. 综合 1, 2, 个人判断, 陶哲轩书中的洛必达法则的表述存在问题。

1 书中洛必达法则 I 和 II 有区别, 感觉两者表达的不一致?

主要有以下问题:

- I 中直接就是 $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, 但 II 中却要 $\lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在。

- II 中 $\lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 难道不是一定存在么?

题设中 f, g 在 $[a, b]$ 上是可微的, 且任意 $x \in [a, b], g'(x) \neq 0$, 即 $f'(a), g'(a)$ 存在, 且 $g'(a) \neq 0$, 此时, 按照定义 10.1.1 可得,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a; x \in [a, b] \setminus \{a\}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= f'(a) \\ \lim_{x \rightarrow a; x \in [a, b] \setminus \{a\}} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} &= g'(a)\end{aligned}$$

集合 $[a, b] \setminus \{a\} = (a, b]$, 按照命题 9.3.14, 极限就是,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{aligned}$$

此时为啥还要判断存在性呢???

2 和我本科期间学的洛必达定理表达不一样?

- 本科期间是 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, 而不是 $f(a) = 0$, 后者的条件更强了。
- 维基百科与百度百科表达的方式与本科期间一致。