12.5 习题

张志聪

2025 年 2 月 6 日

12.5.1

等价的，指的是相互之间可以推导。

- $\Rightarrow$

  定义 9.1.22 概念下，Y 是有界的，那么存在实数 $M > 0$ 使得 $Y \subset [-M, M]$，那么令 $r > M$，此时 $Y \subset [-M, M] \subset B(0, r)$，满足定义 12.5.3。

- $\Leftarrow$

  定义 12.5.3 概念下，Y 是有界的，那么存在一个包含 Y 的球 $B(0, r)$，令 $M > r$，此时 $Y \subset B(0, r) \subset [-M, M]$，满足定义 9.1.22。

12.5.2

- 完备性

  反证法，假设不是完备的，那么存在柯西序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 不在 (X, d) 中收敛。

  度量空间 (X, d) 是紧致的，由定义 12.5.1 可知，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 存在一个子序列收敛于某个 $x_0, x_0 \in X$, 由引理 12.4.9 可知，原序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 也收敛于 x_0。与假设矛盾。

- 有界性

反证法，不是有界的。那么，对 $x \in X$，任意正整数 n 都有

$$X_n := X \setminus B(x, n)$$

都是非空的。

由选择公理，能够找到一个序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x_n \in X_n$，对所有的 $n \geq 1$ 均成立。由于 (X, d) 是紧致的，所以 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 存在一个收敛于 $L \in X$ 的子序列 $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$。

于是对任意 $\epsilon > 0$，存在 N 使得

$$d(x_{n_j}, L) < \epsilon$$

对任意 $j \geq N$ 均成立。

于是我们有

$$d(x_{n_j}, x) \leq d(x_{n_j}, L) + d(L, x) < \epsilon + d(L, x)$$

对任意 $j \geq N$ 均成立。

当取 $N' = max(N, [\epsilon + d(L, x)] + 1)$

$$d(x_{n_j}, x) > n_j \geq N' > \epsilon + d(L, x)$$

对任意的 $j \geq N'$ 均成立。

存在矛盾，假设不成立。

12.5.3

- $\Rightarrow$

  利用推论 12.5.6 可证。

- $\Leftarrow$

  E 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，所以按照欧几里得空间的定义：

  $$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

  于是 E 是有界闭集，那么任意坐标分量构成的集合都是有界闭集（这里可以通过反证法证明，如果坐标分量 $x^{(j)}$ 构成的集合不是有界闭集，那么 E 将不会是有界闭集。）

对 E 中的任意序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$,由定理 9.1.24 可知,对于坐标分量 $j=1$ 可以得到一个收敛的子序列 $(x_n^{(1)})_{n=1}^{\infty}$，再次利用定理 9.1.24，可在子序列 $(x_n^{(1)})_{n=1}^{\infty}$ 基础上得到坐标分量 $j=2$ 上收敛的子序列 $(x_n^{(2)})_{n=1}^{\infty}$，依次进行下去，最后得到一个序列 $(x_n^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 对于每个坐标分量 $1 \leq j \leq n$，都是收敛的，利用命题 12.1.18(d) 可知，序列在欧几里得度量、出租车度量、上确界范数上收敛。

12.5.4

定义 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x)=0$，令 $V=(-1,1)$。此时 V 是开集，$f(V)=1$ 是闭集。

12.5.5

定义 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x)=1/x$，令 $F=[1,+\infty)$。此时 F 是闭集，$f(F)=(0,1]$ 是开集。

12.5.6

在紧致度量空间 $(K_1, d|_{K_1\times K_1})$ 中，考察集合 $V_n := K_1 \setminus K_n$，K_i 是闭的，则 V_n 是开的，否则与命题 12.2.15(e) 矛盾。

我们有

$$V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset ...$$

反证法，假设 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$。由命题 3.1.26(h)（德 $\circ$ 摩根定律）可知

$$\begin{aligned} K_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n &= (K_1 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus K_2) \cup (K_1 \setminus K_3) \cup ... \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \end{aligned}$$

由假设 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$ 可知

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = K_1$$

于是由定理 12.5.8 可知，存在 $N \geq 1$ 使得 $K_1 \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{N} V_n$。

由 $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset ...$ 可知，存在 $j > N$，$x_0 \in V_j, x_0 \notin \bigcup\limits_{n=1}^{N} V_n$，于是 $x_0 \notin K_1$，这与 $V_j \subset K_1$ 矛盾，故假设不成立。

12.5.7

- (a)
  - $\Rightarrow$

    Z 是紧致的，由推论 12.5.6 可知 Z 是闭的。
  - $\Leftarrow$

    Z 是闭的，设 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Z 中的序列，因为 $Z \subseteq Y$，所以 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是 Y 中的序列，因为 Y 是紧致的，于是存在一个收敛的子序列 $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$。又因为 Z 是闭集，由命题 12.2.15(b) 可知，子序列 $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 Z 中的值，所以 Z 也是紧致的。
- (b)

  设 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $Y_1 \cup Y_2 ... \cup Y_n$ 中的序列，那么，在某个 $Y_j (1 \leq j \leq n)$ 中有无限多个项（反证法可以证明）。于是在 Y_j 中可以得到 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的子序列 $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$，又因为 Y_j 是紧致子集，所以子序列 $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ 存在收敛的子序列。综上可得 $Y_1 \cup Y_2 ... \cup Y_n$ 是紧致的。
- (c)

  子集 $Y : \{x_0\}$ 是单点集，那么 Y 中的序列只能是常数序列 $(x_0)_{n=1}^{\infty}$，显然，此时 Y 是紧致的。

  子集 Y 不是单点集且是有限子集,那么可以通过有限个单点集 $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 的并集得到 Y，由 (b) 可得 Y 是紧致的。

12.5.8

任意 $k \in \mathbb{N}$。

$k \neq 1$ 有

$$\begin{aligned} d_{l^1}(e^{(1)}, e^{(k)}) &= |e_1^{(1)} - e_1^{(k)}| + |e_k^{(1)} - e_k^{(k)}| \\ &= |1-0| + |0-1| \\ &= 2 \end{aligned}$$

$k = 1$ 有

$$d_{l^1}(e^{(1)}, e^{(1)}) = 0$$

于是 $e^{(n)} \subseteq B(e^{(1)}, 3)$，所以 $e^{(n)}$ 是有界的。

设 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $\{e^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ 中的收敛序列，由之前的讨论可知，存在 $N \geq 1$ 使得

$$x_j = x_k$$

对所有的 $j, k \geq N$ 均成立。所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的极限值属于 $\{e^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$。

12.5.9

- $\Rightarrow$

  (X, d) 是紧致的，那么，对于 X 中的任意序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$，存在一个收敛的子序列 $(x_{nj})_{j=1}^{\infty}$ 某个值 L，由命题 6.6.6 可知，L 是 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的极限点。

- $\Leftarrow$

  X 中的任意序列都至少有一个极限点，由命题 6.6.6 可知，序列存在一个收敛的子序列，所以 (X, d) 是收敛的。

12.5.10

- (a)

  因为 n 正整数,可取 $r = max(d(x^{(1)}, x^{(2)}), d(x^{(1)}, x^{(3)}), ..., d(x^{(1)}, x^{(n)}))$。

  由题设可知，对任意 $x \in X$，都存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $x \in B(x^{(i)}, \epsilon)$，由三角不等式可知

$$d(x, x^{(1)}) \leq d(x, x^{(i)}) + d(x^{(i)}, x^{(1)}) < \epsilon + r$$

可得 $X \subseteq B(x^{(1)}, \epsilon + r)$，所以 X 是有界的。

- (b)

  对任意 $\epsilon > 0$，定义 $B_x := B(x, \epsilon), x \in X$，于是我们有 $X \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} B_x$，由命题 12.5.8 可知，存在 X 的有限子集 F 使得

  $$X \subseteq \bigcup_{x \in F} B_x$$

- (c)

  假设 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的序列，按照定义 12.5.2（紧致性），我们需要证明 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 存在一个收敛的子序列。

  对任意 $\epsilon > 0$，由于 X 是完全有界的，那么，存在一个正整数 n 使得 $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x^{(i)}, \frac{1}{2}\epsilon)$，因为 n 是正整数，于是存在某个 $B(x^{(i)}, \frac{1}{2}\epsilon), 1 \leq i \leq n$ 中有无限个项（序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的项）。位于 $B(x^{(i)}, \epsilon)$ 中的项组成一个子序列 $(x^{ij})_{j=1}^{\infty}$，$x_0, x_1 \in B(x^{(i)}, \epsilon)$ 都有

  $$d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x^{(i)}) + d(x^{(i)}, x_1) < \epsilon$$

  N 为 x^{i1} 在原序列中的下标，那么

  $$d(x^{(j)}, x^{(k)}) < \epsilon$$

  对所有的 $j, k \geq N$ 均成立。

  类似地，在子序列 $(x^{ij})_{j=1}^{\infty}$ 可以递归处理得到一个柯西序列（这里也可以使用选择公理，操作方式类似于引理 8.4.5 的证明），由 X 的完备性可知，该柯西序列收敛。

12.5.11

按照书中的提示进行证明。

反证法，假设 X 不是紧致的，那么由习题 12.5.9 可知存在一个序列 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，它没有极限点。“于是，对于每一个 $x \in X$，都存在一个包含 x 的球 $B(x, \epsilon)$，它最多包含序列中有限多个元素”。又因为 X 可以被有限子覆盖（即有限个 $B(x, \epsilon)$ 可以包含 X），这意味着序列 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中的项是有限的，存在矛盾。

说明 1. 于是，对于每一个 $x \in X$，都存在一个包含 x 的球 $B(x, \epsilon)$，它最多包含序列中有限多个元素，其实不是太明显，需要额外说明下。

没找到证明方法!!!

12.5.12

- (a)

  对 X 中的任意柯西序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$，因为是柯西序列，对任意 $1 > \epsilon > 0$，存在 $N \geq 1$ 使得

  $$d_{disc}(x_j, x_k) < \epsilon$$

  对所有的 $j, k \geq N$ 均成立，由离散度量 d_{disc} 的定义，对所有的 $j, k \geq N$ 都有 $x_j = x_k$，于是可以得到一个收敛的子序列 $(x_n)_{n=N}^{\infty}$ 收敛于 $x_N, x_N \in X$。

- (b)

  利用习题 12.5.10(c)，当 X 是完全有界的，那么 X 是紧致的。

  当 X 不是完全有界的，那么 X 不是紧致的。证明框架：不是完全有界的，可以取一个等距的序列，比如: $(2+n)_{n=1}^{\infty}$。

12.5.13

由定理 12.5.7（海涅-博雷尔定理）可知，我们只需证明 $E \times F$ 是一个有界闭集。

设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $E \times F$ 中依 d_{l^2} 的收敛序列，其中 $a_n = (x_n, y_n), x_n \in E, y_n \in F$，假设 $\lim_{n \to \infty} x_n = L, L = (x, y)$，由命题 12.1.18 可知，$x_n \to x, y_n \to y$ 当 $n \to \infty$。E, F 是 $\mathbb{R}$ 的两个紧致子集，于是 E, F 都是完备的，所以 $x \in E, y \in F$。由命题 12.2.15(b) 可知，$E \times F$ 是闭集。

因为 E, F 是 $\mathbb{R}$ 的两个紧致子集，那么由命题 12.5.5 可知 E, F 是完备和有界的，所以存在 M_1, M_2 使得 $E \subseteq B(0, M_1) = [-M_1, M_2], F \subseteq B(0, M_2) = [-M_2, M_2]$。令

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

任意 $(x,y)\in E\times F$，有

$$d_{l^2}((x,y),(0,0))=\sqrt{x^2+y^2}\le M$$

由此可得 $E\times F\subseteq B_{d_{l^2}}(0,M+1)$，所以 $E\times F$ 是有界。

12.5.14

设 $R:=\inf\{d(x_0,y):y\in E\}$（$d(x_0,y)\ge 0$ 利用定理 5.5.9 可知 R 是存在的。），由下确界的定义，对任意 $n\in\mathbb{N}$，存在 $y\in E$ 使得 $d(x_0,y)\le R+\frac{1}{n}$，利用选择公理，可以构造 E 中的序列

$$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$$

满足 $d(x_0,x^{(n)})\le R+\frac{1}{n}$。

因为 E 是紧致的，那么 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 存在收敛的子序列 $(x^{(nk)})_{k=1}^{\infty}$，设 $x:=\lim\limits_{k\to\infty}x^{(nk)}$，因为 E 是紧致的，那么也是完备的，所以 $x\in E$。

对任意 $\epsilon>0$，存在 $K\ge 1$ 使得

$$d(x^{(nk)},x)<\frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $k\ge K$ 均成立。

可以让 $k\ge K$ 并且 $\frac{1}{nk}<\frac{1}{2}\epsilon$，我们有

$$R\le d(x_0,x)\le d(x_0,x^{(nk)})+d(x^{(nk)},x)<R+\frac{1}{nk}+\frac{1}{2}\epsilon<R+\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知，$d(x_0,x)=R$。

12.5.15

反证法，假设 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}K_\alpha=\varnothing$。

任意 $\alpha\in I$，由命题 12.2.15(e) 可知，$X\setminus K_\alpha$ 是开集，于是

$$X=X\setminus\bigcap_{\alpha\in I}K_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}(X\setminus K_\alpha)$$

因为 X 是紧致的，由定理 12.5.8 可知，存在 I 的一个有限子集 F 使得

$$X\subseteq\bigcup_{\alpha\in F}(X\setminus K_\alpha)=X\setminus\bigcap_{\alpha\in F}K_\alpha$$

可得

$$\bigcap_{\alpha \in F} K_\alpha = \varnothing$$

这与题设中的有限交性质矛盾。