13.4 习题

张志聪

2025 年 2 月 18 日

13.4.1

从 E 中任选一个元素组成集合 E_1，$E_2 := E \setminus E_1$。

当使用离散度量 d_disc 时，所有集合都既是开的又是闭的，又 $E = E_1 \cup E_2$，所以 E 是不连通的。

13.4.2

- $\Rightarrow$

  因为 (X, d) 是连通的空间，且 f 是连续的，那么由定理 13.4.6 可知，$f(X)$ 是连通的，又由习题 13.4.1 可知 $f(X)$ 中只能含有一个元素，所以 f 是常数函数。

- $\Leftarrow$

  f 是常数函数，按照连续的定义可知，f 是连续的。

13.4.3

- (b) $\implies$ (c)

  讨论 X 是非空集合，在广义实数 $\mathbb{R}^*$ 中，$\sup(X), \inf(X)$ 是存在的，让 $M := \sup(X), m := \inf(X)$。

  任意 $z \in (m, M)$，存在 $x, y \in X$ 使得 $x < z < y$，因为 (b) 成立，所以 $[x, y] \in X$，所以 $z \in X$，由 z 的任意性可知 $(m, M) \subseteq X$，而 X 中的任意元素（除了 m, M）都属于 (m, M)，于是 X 可以表示成区间

（$[m,M],[m,M),(m,M],(m,M)$ 中的任意一种），m,M 是否属于 X，只会影响区间的表示（闭的或开的）。

- (c) $\implies$ (b)

  X 是区间，那么，按照定义 9.1.1 可知，任意 $x,y\in X$ 且 $x<y$，$[x,y]$ 包含在 X 中是显然的。

13.4.4

反证法，假设 $f(E)$ 不是连通的，那么存在两个不相交的非空开集 V 和 W 使得 $f(E)=V\cup W$。

由习题 13.1.6，习题 13.1.7 和定理 13.1.5(c) 可知，集合 $f^{-1}(V)$ 和 $f^{-1}(W)$ 都是非空开集，并且不相交。（如果存在 $x\in f^{-1}(V)\cap f^{-1}(W)$，那么 $f(x)\in V\cap W$，这与 V 和 W 不相交矛盾。）$E=f^{-1}(V)\cup f^{-1}(W)$ 是易证的。（对任意 $x\in E$，$f(x)$ 要么属于 V 要么属于 W，于是可得 $x\in f^{-1}(V)$ 或 $x\in f^{-1}(W)$。）

综上，E 是不连通的，这与题设矛盾。

13.4.5

由定理 13.4.6 可知 $f(E)$ 是连通的。

任意 $f(a),f(b)\in f(E)$，设 $f(a)<f(b)$（$f(a)\geq f(b)$ 证明类似）。由定理 13.4.5(b) 可知，$[f(a),f(b)]\subseteq f(E)$，因为 $f(a)\leq y\leq f(b)$，于是可得 $y\in[f(a),f(b)]\subseteq f(E)$，所以存在 $c\in E$ 使得 $f(c)=y$。

13.4.6

反证法，假设 $\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha$ 是不连通的，那么，$\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha$ 中存在两个不相交的开集 V 和 W 使得 $\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha=V\cup W$，任意 $\alpha\in I$，取 $V_\alpha=V\cap E_\alpha, W_\alpha=W\cap E_\alpha$，由命题 12.3.4(a) 可知，$V_\alpha$ 和 W_α 都是相对于 E_α 的开集，因为 E_α 是连通的，所以 V_α 和 W_α 必须有一个是空集，否则 E_α 是不连通的，于是任意 $\alpha\in I$，要么 $E_\alpha\subseteq V$ 要么 $E_\alpha\subseteq W$。因为 V,W 是非空的，那么存在 $\alpha,\alpha'\in I$ 使

得 $E_\alpha \subseteq V, E_{\alpha'} \subseteq W$，因为 V, W 是不相交的，所以 $E_\alpha \cap E_{\alpha'} = \varnothing$，于是 $\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha = \varnothing$，与题设矛盾。

13.4.7

说明 1. *这里不能直接用定理 13.4.6 证明，因为* $\gamma([0,1]) \subseteq E$*，而不是* $\gamma([0,1]) = E$*。*

说明 2. *逆命题我没有证，主要是没读懂逆命题应该证明什么*

反证法，假设 E 是不连通的。那么，E 中存在两个不相交的开集 V 和 W 使得 $E = V \cup W$。取 $x \in V, y \in W$，设 $Y := \gamma([0,1]), Y \subseteq E$，可得 $Y \cap V \neq \varnothing, Y \cap W \neq \varnothing$，又由命题 12.3.4(a) 可知 $V \cap Y$ 和 $W \cap Y$ 都是相对于 Y 的开集，因为 $V \cap W = \varnothing$，所以 $(V \cap Y) \cap (W \cap Y) = \varnothing$，又因为 $(V \cap Y) \cup (W \cap Y) = Y$ 可得，Y 是不连通的，但通过定理 13.4.6 可得，Y 是连通的，存在矛盾。

13.4.8

（1）

反证法，假设 $\overline{E}$ 不连通，那么，$\overline{E}$ 中存在两个不相交的开集 V, W 使得 $\overline{E} = V \cup W$。定义 $V' := V \cap E, W' := W \cap E$，于是我们有 $V' \cap W' = \varnothing$（因为 V, W 不相交），并且 $V' \cup W' = E$（因为 $E \subseteq \overline{E}$）。

接下来，我们需要证明 V', W' 不是空集。任意 $x \in V$，如果 $x \in E$，那么 $x \in V' = V \cap E$。如果 $x \in \partial E$，因为 V 是开集，那么存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \subseteq V$，此时一定存在 $y \in B(x, r) \cap E$，否则 x 将是外点，与 x 是边界点矛盾，于是 $y \in V' = V \cap E$。综上，所以 V' 不是空集。类似的，W' 也不是空集。

综上可得 $E = V' \cup W'$，且 V', W' 是 E 中的非空开集，所以 E 是不连通的，与题设矛盾。

（2）逆命题是否成立？

不成立。比如 $\overline{E} := [-1, 1]$，$E := (-1, 0) \cup (0, 1)$。

13.4.9

（1）证明：这是一种等价关系。

- 自反性 $(x \sim x)$

  任意 $x \in X$，集合 $\{x\}$ 是连通的且 $x \in \{x\}$，于是可得 $x \sim x$。

- 对称性 $(x \sim y \implies y \sim x)$

  因为 $x \sim y$，所以存在一个同时包含 x, y 的连通子集 $E \subseteq X$，这也表明 $y \sim x$。

- 传递性 $(x \sim y, y \sim z \implies x \sim z)$

  $x \sim y$，所以存在一个同时包含 x, y 的连通子集 $E \subseteq X$。$y \sim z$，所以存在一个同时包含 y, z 的连通子集 $F \subseteq X$。

  因为 $x \in E, x \in F$，所以 $E \cap F \neq \varnothing$，并且 E, F 都是连通集，由习题 13.4.6 可知 $E \cup F$ 是连通的，且 $E \cup F$ 中包含 x, z，所以 $x \sim z$。

（2）这种关系的等价类全是连通的闭集。

13.4.10

定理：

(X, d) 是一个紧致连通度量空间，并设 $f : X \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，设 $M := \sup\limits_{x \in X} f(x)$ 是 f 的最大值，$m := \inf\limits_{x \in X} f(x)$ 是 f 的最小值，并且设 y 是介于 m 和 M 之间的一个实数（即：$m < y < M$），那么存在一个 $c \in X$ 使得 $f(c) = y$。更进一步，$f(X) = [m, M]$。

证明：

由命题 13.3.2 可知，存在 $x_{max} \in X$ 使得 $f(x_{max}) = M$，存在 $x_{min} \in X$ 使得 $f(x_{min}) = m$。由推论 13.4.7（介值定理）可知，存在 $c \in X$ 使得 $f(c) = y$。