13.3 习题

张志聪

2025 年 2 月 16 日

13.3.1

设 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 是 $f(K)$ 中的任意序列，序列 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 K 中序列，且 $f(x^n)$ 是 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 中的项。因为 K 是紧致的，那么存在一个收敛的子序列 $(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$，不妨设子序列收敛于 $x_0 \in K$。

又因为 f 是连续的，所以 f 在 x_0 处连续，由定理 13.1.4(b) 可知，序列 $(f(x^{(n_j)}))_{j=1}^{\infty}$ 依度量 d_Y 收敛于 $f(x_0) \in f(K)$，又因为 $(f(x^{(n_j)}))_{j=1}^{\infty}$ 是 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 的子序列，由定义 12.5.1（紧致性）可知，$f(K)$ 是紧致的。

13.3.2

（1）f 是有界的。

由定理 13.3.1 可知，$f(X)$ 是紧致的，由推论 12.5.6 可知，f 是有界的。

（2）f 在某个点 $x_{max} \in X$ 处取到最大值，并且在某个点 $x_{min} \in X$ 处取到最小值。

我们只证明 f 在某个点 $x_{max} \in X$ 处取到最大值，最小值的证明类似。

因为 f 是有界，那么，$\mathbb{R}$ 中存在一个包含 $f(X)$ 的球 $B(y_0, r), y_0 \in \mathbb{R}, r > 0$。现在设 E 表示集合

$$E := \{f(x), x \in X\}$$

（即：E := f(X)）。根据上述内容可知，这个集合是 $B(y_0, r)$ 的子集，而且 E 还是非空集合。根据最小上界原理可知（E 是 $\mathbb{R}$ 的子集），它有一个实数上确界 $sup(E)$。

记 $m := sup(E)$，根据上确界的定义可知，对所有的 $y \in E$ 均有 $y \leq m$。而根据 E 的定义可知，这意味着 $f(x) \leq m$ 对所有的 $x \in X$ 均成立。因此，为了证明 f 在某个点达到最大值，我们只需要找到一个 $x_{max} \in X$ 使得 $f(x_{max}) = m$ 即可。

设 $n \geq 1$ 是任意一个整数，那么 $m - \frac{1}{n} < m = sup(E)$。因为 $sup(E)$ 是 E 的最小上界，那么 $m - \frac{1}{n}$ 不可能是 E 的上界，从而存在一个 $y \in E$ 使得 $m - \frac{1}{n} < y$。又由 E 的定义可知，这蕴含着存在一个 $x \in X$ 使得 $m - \frac{1}{n} < f(x)$。

现在我们按照下面的方法选取一个序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$：对于每一个 n，选取 x_n 为 $x \in X$ 中使得 $m - \frac{1}{n} < f(x_n)$ 的元素。（这里需要用到选择公理）这是 X 中的一个序列，因为 X 是紧致的，我们可以找到一个收敛于某极限 $x_{max} \in X$ 的子序列 $(x_{nj})_{j=1}^{\infty}$，其中 $n_1 < n_2 < ...$。因为 $(x_{nj})_{j=1}^{\infty}$ 收敛于 x_{max} 并且 f 在 x_{max} 处连续, 于是由定理 13.1.4(b) 可知

$$\lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = f(x_{max})$$

另外，根据该序列的构造过程可知，

$$f(x_{n_j}) > m - \frac{1}{n_j} \geq m - \frac{1}{j}$$

从而对上式两端同时取极限可得，

$$f(x_{max}) = \lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) \geq \lim_{j \to \infty} m - \frac{1}{j} = m$$

另外，$f(x) \leq m$ 对所有的 $x \in X$ 均成立，从而 $f(x_{max}) \leq m$。联合这两个不等式就得到 $f(x_{max}) = m$，结论得证。

13.3.3