

15.1 习题

张志聪

2025 年 3 月 30 日

15.1.1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n(x-a)^n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} |x-a|$$

- (a)

由定义 15.1.3 (收敛半径) 可知,

(1) $R = +\infty$, 那么, $|x-a| > R$ 这个前置条件无法成立。

(2) $R = 0$, 那么, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = +\infty$, 且 $|x-a| > 0$, 所以,
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} |x-a| > 1$, 由定理 7.5.1(b) 可知, 级数发散。

(3) $R > 0$ (R 是实数)。那么, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$, 于是, $|x-a| > R$,
那么, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} |x-a| = \frac{1}{R} |x-a| > 1$, (注意: $|x-a|$ 此时可以看做常数, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} |x-a| = \frac{1}{R} |x-a|$ 可以通过反证法证明) 由定理 7.5.1(b) 可知, 级数发散。

- (b)

由定义 15.1.3 (收敛半径) 可知,

(1) $R = +\infty$, 那么, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = 0$ 且 $|x-a| < R$ 总能成立, 于是 $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} |x-a| = 0$, 由定理 7.5.1(a) 可知, 级数绝对收敛。

(2) $R = 0$, 那么, $|x-a| < R$ 这个前置条件无法成立。

(3) $R > 0$ (R 是实数)。那么, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$, 于是, $|x - a| < R$, 那么, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} |x - a| = \frac{1}{R} |x - a| < 1$, 由定理 7.5.1(b) 可知, 级数绝对收敛。

• (c)

(1) 一致收敛于 f 。

由定义 14.5.2 (无限级数) 可知, 我们需要证明 $N \rightarrow \infty$ 时, 部分和 $\sum_{n=0}^N f^{(n)}$, 其中 $f^{(n)} := c_n(x - a)^n$, 沿着 $[a - r, a + r]$ 一致收敛于 f 。

于是, 利用 14.5.7 (威尔斯特拉斯 M 判别法), 我们需要证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f^{(n)}\|_{\infty}$$

是收敛的。

因为 $|c_n(x - a)^n|$ 在 $[a, a + r]$ 上是单增的, 所以 $x_0 = a + r$ 时, $f^{(n)} = c_n(x_0 - a)^n$ 取最大值, 即 $\|f^{(n)}\|_{\infty} = |c_n(x_0 - a)^n|$ 。

同理, $x_0 = a - r$ 时, $f^{(n)} = c_n(x_0 - a)^n$ 取最大值。

由 (b) 可得, 对任意 $x_0 \in [a - r, a + r]$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_0 - a)^n$ 是绝对收敛的, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x_0 - a)^n|$ 是收敛的。

特别地, $x_0 = a + r$ 或 $x_0 = a - r$, 级数也是收敛的, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} \|f^{(n)}\|_{\infty}$ 收敛。

于是可知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}$ 一致收敛于某个函数, 即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ 一致收敛于某个函数。(注意: 这里的函数用 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ 本身表示, 它代表一致收敛的函数 f)。

(2) f 是连续的。

对于每一个 N , 函数 $\sum_{n=0}^N f^{(n)}$ 都是连续的 (这里其实有借助定义 14.5.2), 由推论 14.3.2 可知, f 是连续的。

• (d)

令 $f_n = c_n(x - a)^n$, 于是 f_n 是连续且可微的, 且导函数 $f'_n = n c_n(x - a)^{n-1}$ 也是连续的。

我们有 ($r < R$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n r^{n-1}$$

结合例 15.1.15 可知:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (n c_n r^n)^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \limsup_{n \rightarrow \infty} (c_n r^n)^{\frac{1}{n}} \\ &< 1 \end{aligned}$$

于是可得 $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n r^n$ 收敛。

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n r^{n-1} = r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n r^n$$

可得, $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n r^{n-1}$ 收敛。

综上, 由威尔斯特拉斯 M 判别法可知, $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ 一致收敛于某个函数 g 。

又 $x_0 = a$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_0 - a)^n = 0$$

$F_N = \sum_{n=1}^N c_n (x - a)^n$ 是一个可微函数, 并且其倒数 $F'_N = \sum_{n=1}^N n c_n (x - a)^{n-1} = \sum_{n=1}^N f'_N$ 是连续的。又由之前的讨论可知, 导函数序列 F'_N 一致收敛于某个函数 g , 并且存在一点 $x_0 = a$ 使得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_N(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_0 - a)^n = 0$, 由定理 14.7.1 可知, 函数序列 F_N 一致收敛于一个可微函数, 由该函数的唯一性可知, F_N 一致收敛于 f , 并且 f 的导函数等于 g 。所以 $g = f'$ 。

• (e)

由推论 14.6.2 可知,

$$\begin{aligned}
 \int_{[y,z]} f &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[y,z]} x_n (x-a)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1} \Big|_y^z \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (z-a)^{n+1}}{n+1} - \frac{c_n (y-a)^{n+1}}{n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^{n+1} - (y-a)^{n+1}}{n+1}
 \end{aligned}$$

15.1.2

- (a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- (b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

使用推论 7.3.7、命题 7.2.12 (交错级数判别法) 可以验证是否正确。

- (c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

使用推论 7.3.7、命题 7.2.12 (交错级数判别法) 可以验证是否正确。

- (d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

使用推论 7.3.7、命题 7.2.12 (交错级数判别法) 可以验证是否正确。

- (d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 14.5.8 中有说明。