

10.4 习题

张志聪

2024 年 12 月 16 日

10.4.1

- (a)

g 的反函数为 $g^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $g^{-1}(y) = y^n$, 因为 $g^{-1}(x) = x^n$ 是既连续又严格单调递增 (这里没有做详细证明), 由命题 9.8.3 可知, 它的反函数 g 也是既连续又严格单调递增的。

- (b)

由题设和 (a), 并利用定理 10.4.3 (反函数定理) 可知, g 在 $(0, +\infty)$ 上可微的, 并且, 对任意 $x_0 \in (0, +\infty)$, $y_0 = g(x_0) = x_0^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \frac{1}{g^{-1}(y_0)} \\ &= \frac{1}{ny_0^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{y_0^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{(x_0^{\frac{1}{n}})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{x_0^{1-\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

10.4.2

q 是有理数, 所以可以表示成 $q = \frac{a}{b}$ 其中 a, b 都是整数, 且 b 是不等于零的正整数。

于是 $f(x) = x^q$ 可以表示成 $f(x) = x^{\frac{a}{b}}$ 。

• (a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{a}{b}} \\ &= (x^{\frac{1}{b}})^a \end{aligned}$$

◦ $p = 0, a = 0$

此时, $f(x) = x^0 = 1, f'(x) = 0$, 命题成立。

◦ $p > 0, a > 0$

令 $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), g(x) = x^{\frac{1}{b}}, h: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), h(x) = x^a$ 。

于是可得 $f(x) = (h \circ g)(x)$, 因为 g, h 在定义域上可微 (g 的可微习题 10.4.1(b) 保证), 由定理 10.1.15 (链式法则) 可得, f 在定义域上可微。

由定理 10.1.15 (链式法则) 和习题 10.4.1(b) 可得, 对任意 $x_0 \in (0, +\infty), y_0 = g(x_0) = x_0^{\frac{1}{b}}$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= (h \circ g)'(x_0) \\ &= h'(y_0)g'(x_0) \\ &= a(y_0)^{a-1} \frac{1}{b} x_0^{\frac{1}{b}-1} \\ &= a(x_0^{\frac{1}{b}})^{a-1} \frac{1}{b} x_0^{\frac{1}{b}-1} \\ &= \frac{a}{b} x_0^{\frac{a-1}{b}} x_0^{\frac{1}{b}-1} \\ &= \frac{a}{b} x_0^{\frac{a}{b}-1} \\ &= qx_0^{q-1} \end{aligned}$$

◦ $q < 0, a < 0$

令 $p = -q$, 于是 $p > 0, f(x) = x^p = x^{-p} = \frac{1}{x^p}$ 。

由前一个证明和定理 10.1.13(g) 可知,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= -\frac{px_0^{p-1}}{(x_0^p)^2} \\ &= -\frac{px_0^{p-1}}{x_0^{2p}} \\ &= -px_0^{-p-1} \\ &= qx_0^{q-1} \end{aligned}$$

• (b)

说明 1. 习题有点问题 $x-1$ 是不能等于零的, 所以 $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1; x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}} \frac{x^q - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1; x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}} \frac{x^q - 1^q}{x - 1}$$

可见, 这里是函数在 $x = 1$ 处的导数, 于是 $f'(1) = q1^0 = q$

10.4.3

• (a)

证明框架: 通过证明左右极限存在且相等, 证明极限的存在。

证明右极限, 我们必须证明

$$\lim_{x \rightarrow 1; x \in (1, +\infty)} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

根据命题 9.3.9 可知, 只需证明: 对任意一个由 $(1, +\infty)$ 中的元素构成的且收敛于 1 的序列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1} = \alpha$$

对任意 $\epsilon > 0$, 由命题 5.4.14 可知, 存在有理数 q, p 使得

$$\begin{aligned} \alpha - \frac{1}{2}\epsilon &< q < \alpha \\ \alpha &< p < \alpha + \frac{1}{2}\epsilon \end{aligned}$$

由命题 4.3.3(g) 可知 $d(p, q) < \epsilon$ 。

由引理 5.6.9(e) 可知, $a_n > 1$ 时 $a_n^q < a_n^\alpha < a_n^p$ 于是,

$$\frac{a_n^p - f(1)}{a_n - 1} < \frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1} < \frac{a_n^q - f(1)}{a_n - 1}$$

由命题 10.4.2(b) 可知,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^q - f(1)}{a_n - 1} &= q \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^p - f(1)}{a_n - 1} &= p\end{aligned}$$

由夹逼定理可得

$$\begin{aligned}q &\leq \sup\left(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}\right)_{n=1}^\infty \leq p \\ q &\leq \inf\left(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}\right)_{n=1}^\infty \leq p\end{aligned}$$

由 $d(q, p) < \epsilon$ 且 ϵ 是任意的, 可得,

$$\sup\left(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}\right)_{n=1}^\infty = \inf\left(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}\right)_{n=1}^\infty = \alpha$$

如果不相等, 则会出现以下矛盾, (注意: 上确界与下确界是确定, 所以两者的差值也是确定的)

$$d(q, p) > \sup\left(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}\right)_{n=1}^\infty - \inf\left(\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}\right)_{n=1}^\infty$$

由上可得, 右极限是存在的, 不妨设为 L 。

如果 $L \neq \alpha$, 设 $L > \alpha, \delta = L - \alpha$, 取 $\epsilon < \delta$, 此时 $L > \alpha + \epsilon > p_1$, 与 $L \leq p$ 存在矛盾。

由此可得, 右极限存在且等于 α 。

类似地, 左极限也存在且等于 α 。(注意在左极限中 $x-1 < 0, x^q > x^{p_1}$)

- (b)

由定义 10.1.1 可知，要证明对任意 $x_0 \in (0, +\infty)$ ，以下极限的存在性，

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow x_0; x \in (0, +\infty) \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in (0, +\infty) \setminus \{x_0\}} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in (0, +\infty) \setminus \{x_0\}} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{x}{x_0} - 1} \frac{x_0^\alpha}{x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0; x \in (0, +\infty) \setminus \{x_0\}} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{x}{x_0} - 1} x_0^{\alpha-1} \\
 &= \alpha x_0^{\alpha-1}
 \end{aligned}$$

最后一个等式使用了命题 9.3.14（函数的极限定律）

说明 2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in (0, +\infty) \setminus \{x_0\}} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{x}{x_0} - 1} = \alpha$$

这一步可以通过定义 9.3.6 证明。