16.4 习题

张志聪

2025 年 5 月 1 日

16.4.1

反证法，假设 f 不是恒等于零的。

f 是紧支撑的，不妨设其支撑在区间 $[a,b]$ 上，于是，对所有的 $x \in [a,b]$ 都有 $f(x) \neq 0$。

因为 f 不是恒等于零的，所以存在 $x_0 \in [a,b]$，使得 $f(x_0) \neq 0$。又存在整数 N，使得 $N + x_0 > b$，因为 $x_0 + N \notin [a,b]$，所以 $f(x_0 + N) = 0$。

又因为 f 是 $\mathbb{Z}$ 周期函数，所以 $f(x_0 + N) = f(x_0) \neq 0$。

存在矛盾。

16.4.2

先证明 f 是一致连续的，因为 f 在 $\mathbb{R}$ 上是连续的，所以 f 在 $([0,1],d)$ 这个紧致度量空间上是连续的，于是由定理 13.3.5 可知，f 是一致连续的。这可以周期性地推广到整个 $\mathbb{R}$ 上。（这里无法直接使用定理 9.9.16，因为这里的值域是复数）。

同理可得，g,h 是一致连续的。

- (a) 封闭性
  - (1) 连续性

    因为 f 是有界的，所以存在一个 $M > 0$，使得对于所有的 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $|f(x)| \leq M$。

    设 $\epsilon > 0$ 是任意的，因为 g 是一致连续的，所以存在一个 $\delta > 0$，使得只要 $|x - y| \leq \delta$，就有 $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon$。

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta$，

$$\begin{aligned}
&|f * g(x) - f * g(x_0)| \\
&= \left| \int_{[0,1]} f(y)g(x-y)dy - \int_{[0,1]} f(y)g(x_0-y)dy \right| \\
&= \left| \int_{[0,1]} f(y)(g(x-y) - g(x_0-y))dy \right| \\
&\leq \int_{[0,1]} |f(y)(g(x-y) - g(x_0-y))|dy \\
&\leq \int_{[0,1]} M|(g(x-y) - g(x_0-y))|dy \\
&\leq M \int_{[0,1]} \epsilon dy \\
&= M\epsilon
\end{aligned}$$

于是有 $|f * g(x) - f * g(x_0)| \leq M\epsilon$。由于 M 是定制并且 ϵ 是任意的，因此我我们可以得出 $f * g$ 在 x_0 处连续的。

由 x_0 的任意性，$f * g$ 连续。

– (2)$\mathbb{Z}$ 周期

设 k 是整数，因为 $f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{C})$，我们有

$$\begin{aligned}
f * g(x+k) &= \int_{[0,1]} f(y)g(x+k-y)dy \\
&= \int_{[0,1]} f(y)g(x-y)dy \\
&= f * g(x)
\end{aligned}$$

所以 $f * g$ 是 $\mathbb{Z}$ 周期的。

- (b) 交换性

$$f * g(x) = \int_{[0,1]} f(y)g(x-y)dy$$

令 $u = x - y$，则 $y = x - u$。当 y 从 $0 \to 1$ 时，u 从 $x \to x - 1$。但由于 f, g 都是周期为 1 的函数，积分可以调整到任意长度为 1 的区间，

因此我们将积分限改为 $0 \to 1$：

$$\begin{aligned}
g * f(x) &= \int_{[0,1]} g(y)f(x-y)dy \\
&= \int_{[x,x-1]} g(x-u)f(u)d(x-u) \\
&= \int_{[x-1,x]} g(x-u)f(u)du \\
&= \int_{[0,1]} f(u)g(x-u)du \\
&= \int_{[0,1]} f(y)g(x-y)dy
\end{aligned}$$

所以，$f * g = g * f$。

- (c) 双线性性质

$$\begin{aligned}
f * (g+h) &= \int_{[0,1]} f(y)(g+h)(x-y)dy \\
&= \int_{[0,1]} f(y)(g(x-y)+h(x-y))dy \\
&= \int_{[0,1]} f(y)g(x-y)+f(y)h(x-y)dy \\
&= \int_{[0,1]} f(y)g(x-y)dy + \int_{[0,1]} f(y)h(x-y)dy \\
&= f * g + f * h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f+g) * h &= \int_{[0,1]} (f+g)(y)h(x-y)dy \\
&= \int_{[0,1]} (f(y)+g(y))h(x-y)dy \\
&= \int_{[0,1]} f(y)h(x-y)+g(y)h(x-y)dy \\
&= f * h + g * h
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c(f*g) &= c\int_{[0,1]} f(y)g(x-y)dy \\
&= \int_{[0,1]} cf(y)g(x-y)dy \\
&= (cf)*g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c(f*g) &= c\int_{[0,1]} f(y)g(x-y)dy \\
&= \int_{[0,1]} f(y)cg(x-y)dy \\
&= f*(cg)
\end{aligned}
$$

16.4.3

- (1)

$$
\begin{aligned}
F_N &= \sum_{n=-N}^{N}(1-\frac{|n|}{N})e_n \\
&= \sum_{n=-N}^{N}(\frac{N-|n|}{N})e_n \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=-N}^{N}(N-|n|)e_n
\end{aligned}
$$

接下来，我们证明 $\sum\limits_{n=-N}^{N}(N-|n|)e_n = |\sum\limits_{n=0}^{N-1}e_n|^2$，即可完成证明。

对 N 进行归纳。

归纳基始，$N=1$ 时，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N}(N-|n|)e_n &= \sum_{n=-1}^{1}(1-|n|)e_n \\
&= (1-|-1|)e_n + (1-|0|)e_n + (1-|n|)e_n \\
&= e_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\sum_{n=0}^{N-1} e_n|^2 &= \left|\sum_{n=0}^{0} e_n\right|^2 \\
&= |e_0|^2 \\
&= |e^{2\pi 0 i}|^2 \\
&= |1|^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

命题成立。

归纳假设 $N=K$ 时，命题成立。

$N=K+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-(K+1)}^{K+1} (K+1-|n|)e_n \\
&= \sum_{n=-K}^{K} (K+1-|n|)e_n + \sum_{n=-(K+1)}^{-(K+1)} (K+1-|n|)e_n + \sum_{n=K+1}^{K+1} (K+1-|n|)e_n \\
&= \sum_{n=-K}^{K} e_n + \sum_{n=-K}^{K} (K-|n|)e_n + (K+1-|-(K+1)|)e_{-(K+1)} + (K+1-|K+1|)e_{K+1} \\
&= \sum_{n=-K}^{K} e_n + \sum_{n=-K}^{K} (K-|n|)e_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{K} e_n\right|^2 \\
&= \left|\sum_{n=0}^{K-1} e_n + \sum_{n=K}^{K} e_n\right|^2 \\
&= \left|(\sum_{n=0}^{K-1} e_n) + e_K\right|^2 \\
&= \left((\sum_{n=0}^{K-1} e_n) + e_K\right)\overline{\left((\sum_{n=0}^{K-1} e_n) + e_K\right)} \\
&= \left((\sum_{n=0}^{K-1} e_n) + e_K\right)\left((\sum_{n=0}^{K-1} e_{-n}) + e_{-K}\right) \\
&= \left((\sum_{n=0}^{K-1} e_n) + e_K\right)\left((\sum_{n=0}^{K-1} e_{-n}) + e_{-K}\right) \\
&= (\sum_{n=0}^{K-1} e_n)(\sum_{n=0}^{K-1} e_{-n}) + (\sum_{n=0}^{K-1} e_n)e_{-K} + e_K(\sum_{n=0}^{K-1} e_{-n}) + e_K e_{-K} \\
&= \left|\sum_{n=0}^{K-1} e_n\right|^2 + \sum_{n=0}^{K-1} e_{n-K} + (\sum_{n=0}^{K-1} e_{-n+K}) + e_0 \\
&= \sum_{n=-K}^{K} (K-|n|)e_n + \sum_{n=-K}^{-1} e_n + (\sum_{n=1}^{K} e_n) + e_0 \\
&= \sum_{n=-K}^{K} (K-|n|)e_n + \sum_{n=-K}^{K} e_n
\end{aligned}
$$

归纳完成，命题得证。

- (2)

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} e_n &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n - \sum_{n=N}^{\infty} e_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e_n - e_N \sum_{n=N}^{\infty} e_{n-N} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e_n - e_N \sum_{n=0}^{\infty} e_n \\
&= \frac{1}{1-e_1} - e_N \frac{1}{1-e_1} \\
&= \frac{1-e_N}{1-e_1} \\
&= \frac{e_N - 1}{e_1 - 1} \\
&= \frac{e_N - e_0}{e_1 - e_0} \\
&= \frac{e^{2\pi i N x} - e^0}{e^{2\pi i x} - e^0} \\
&= \frac{e^{2\pi i N x - \pi i x} - e^{-\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \\
&= \frac{e^{\pi i N x + \pi i N x - \pi i x} - e^{-\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \\
&= \frac{e^{\pi i (N-1) x + \pi i N x} - e^{-\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \\
&= \frac{e^{\pi i (N-1) x}(e^{\pi i N x} - e^{-\pi i N x})}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \\
&= \frac{e^{\pi i (N-1) x}(2isin(\pi N x))}{2isin(\pi x)} \\
&= \frac{e^{\pi i (N-1) x} sin(\pi N x)}{sin(\pi x)}
\end{aligned}
$$

- (3)

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,1]} F_N(x)dx &= \int_{[0,1]} \sum_{n=-N}^{N} (1-\frac{|n|}{N}) e_n dx \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \int_{[0,1]} (1-\frac{|n|}{N}) e_n dx \\
&= \sum_{n=-N}^{N} (1-\frac{|n|}{N}) \int_{[0,1]} e_n dx
\end{aligned}
$$

因为 $n=0$ 时，$\int_{[0,1]} e_n dx = 1$，$n>0$ 时，$\int_{[0,1]} e_n dx = 0$，所以

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-N}^{N} (1-\frac{|n|}{N}) \int_{[0,1]} e_n dx \\
&= \sum_{n=0}^{0} (1-\frac{|0|}{N}) 1 \\
&= (1-\frac{|0|}{N}) 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$