18.5 注释

张志聪

2025 年 5 月 31 日

说明 1. *引理 18.5.10 中，证明：*

$$g^{-1}((a,+\infty]) = \bigcup_{n\geq 1} f_n^{-1}((a,+\infty])$$

证明：

这是上确界函数，书中没找到明确定义的地方，这里先说明一下：

$\sup\limits_{n\geq 1} f_n$ 表示一系列函数 f_n（其中 $n \geq 1$）的上确界函数。具体来说，对于每一个自变量 x，这个函数的值是所有函数 f_n 在 x 处的上确界（即最小的上界）。数学表达式为：

$$\left(\sup_{n\geq 1} f_n\right)(x) = \sup(f_1(x), f_2(x), \cdots)$$

- 从右到左

  设任意 $x_0 \in g^{-1}((a,+\infty])$，那么 $g(x_0) \in (a,+\infty]$，由上确界函数的定义可知，存在 $f_n(x_0) = g(x_0)$，从而 $g^{-1}((a,+\infty]) \subseteq \bigcup\limits_{n\geq 1} f_n^{-1}((a,+\infty])$。

- 从左到右

  设任意 $x_0 \in \bigcup\limits_{n\geq 1} f_n^{-1}((a,+\infty])$，那么存在某个 n，使得 $f_n(x_0) \in (a,+\infty]$，于是我们有

  $$g(x_0) \geq f_n(x_0) > a$$

  所以 $x_0 \in g^{-1}((a,+\infty])$，从而 $\bigcup\limits_{n\geq 1} f_n^{-1}((a,+\infty]) \subseteq g^{-1}((a,+\infty])$。

说明 2. *引理 18.5.10，f_n 逐点收敛于函数 f 时，f 是可测的。*

证明：

只需证明 $f = \inf\limits_{N\geq 1}\sup\limits_{n\geq N} f_n = \sup\limits_{N\geq 1}\inf\limits_{n\geq N} f_n$ 即可。以 $f = \inf\limits_{N\geq 1}\sup\limits_{n\geq N} f_n$ 为例，$f = \sup\limits_{N\geq 1}\inf\limits_{n\geq N} f_n$ 证明类似。

f_n 逐点收敛于函数 f，那么对任意 $x\in\Omega, \epsilon > 0$，存在 $N'\geq 1$ 使得只要 $n\geq N'$ 就有

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

于是可得

$$|f(x) - \sup_{n\geq N'} f_n(x)| \leq \epsilon$$

$$|f(x) - \inf_{n\geq N'} f_n(x)| \leq \epsilon$$

因为

$$\sup_{n\geq N'} f_n(x) \geq \inf_{n\geq N'} f_n(x)$$

由 $\sup\limits_{n\geq N} f_n(x)$ 单调递减和 $\inf\limits_{n\geq N} f_n(x)$ 单调递增，于是有，

$$\inf_{N\geq 1}\sup_{n\geq N} f_n(x) \leq \sup_{n\geq N'} f_n(x) \tag{1}$$

$$\inf_{n\geq N'} f_n(x) \leq \sup_{N\geq 1}\inf_{n\geq N} f_n(x) \tag{2}$$

利用引理 6.4.13（比较原理）可知

$$\sup_{N\geq 1}\inf_{n\geq N} f_n(x) \leq \inf_{N\geq 1}\sup_{n\geq N} f_n(x)$$

结合 (1)(2) 式，我们有

$$\inf_{n\geq N'} f_n(x) \leq \inf_{N\geq 1}\sup_{n\geq N} f_n(x) \leq \sup_{n\geq N'} f_n(x)$$

综上可得

$$|f(x) - \inf_{N\geq 1}\sup_{n\geq N} f_n(x)| \leq \epsilon$$

所以由 x, ϵ 的任意性可知，$f = \inf\limits_{N\geq 1}\sup\limits_{n\geq N} f_n$。