# 9.1 习题

张志聪

2024 年 11 月 29 日

## 9.1.1

$\overline{X}=\overline{Y}$ 等价于 $\overline{X}\subseteq\overline{Y},\overline{Y}\subseteq\overline{X}$。

- $\overline{X}\subseteq\overline{Y}$。

  任意 $x\in\overline{X}$，因为 $x$ 是附着点，所以对任意 $\epsilon>0$，都存在 $y\in X$ 使得 $|x-y|\le\epsilon$。

  由题设 $X\subseteq Y$ 可知，$y\in Y$，于是由定义 9.1.8（附着点）可得，$x$ 也是 $\overline{Y}$ 的附着点，即 $x\in\overline{Y}$。

  由 $x$ 的任意性可知 $\overline{X}\subseteq\overline{Y}$。

- $\overline{Y}\subseteq\overline{X}$。

  任意 $x\in\overline{Y}$，因为 $x$ 是附着点，所以对任意 $\frac{1}{2}\epsilon>0$，都存在 $y\in Y$ 使得 $|x-y|\le\frac{1}{2}\epsilon$。

  由题设 $Y\subseteq\overline{X}$ 可知，$y\in\overline{X}$，所以 $y$ 是 $X$ 的附着点，于是存在 $y_x\in X$ 使得 $|y-y_x|\le\frac{1}{2}\epsilon$。

  于是由命题 4.3.7（c）可知 $|x-y_x|\le\epsilon$，所以 $x$ 也是 $X$ 的附着点。

  由 $x$ 的任意性可知 $\overline{Y}\subseteq\overline{X}$。

## 9.1.2

- $X\subseteq\overline{X}$。

  任意 $x\in X$，对于任意的 $\epsilon>0$，有 $|x-x|\le\epsilon$，所以 $x$ 是 $X$ 的附着点。

由 $x$ 的任意性可知 $X \subseteq \overline{X}$。

- $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$。

  - $\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$。

    任意 $x \in \overline{X \cup Y}$，因为 $x$ 是附着点，所以对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $y \in X \cup Y$ 使得 $|x - y| \leq \epsilon$。

    如果 $y \in X$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得，$x$ 也是 $X$ 的附着点。

    如果 $y \in Y$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得，$x$ 也是 $Y$ 的附着点。

    综上 $x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$。

  - $\overline{X} \cup \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$。

    任意 $x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$，于是要么 $x \in \overline{X}$，要么 $x \in \overline{Y}$（或者两个皆成立）。

    以 $x \in \overline{X}$ 为例，因为 $x$ 是 $X$ 的附着点，所以对任意 $\epsilon > 0$，存在 $y \in X$ 使得 $|x - y| \leq \epsilon$。

    因为 $y \in X \cup Y$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得，$x$ 也是 $X \cup Y$ 的附着点。

    同理，$x \in \overline{Y}$ 时也成立。

    综上 $x \in \overline{X \cup Y}$。

- $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$。

  任意 $x \in \overline{X \cap Y}$，因为 $x$ 是 $X \cap Y$ 的附着点，所以对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $y \in X \cap Y$，使得 $|x - y| \leq \epsilon$。

  因为 $y \in X \cap Y$，所以 $y \in X$ 且 $y \in Y$，则由定义 9.1.8（附着点）可得 $x$ 是 $X$ 的附着点且是 $Y$ 的附着点，即 $x \in \overline{X} \cap \overline{Y}$

- 如果 $X \subseteq Y$，那么 $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$。

  任意 $x \in \overline{X}$，因为 $x$ 是 $X$ 的附着点，所以对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $y \in X$，使得 $|x - y| \leq \epsilon$。

  因为 $X \subseteq Y$，所以 $y \in Y$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得 $x$ 也是 $Y$ 的附着点，即 $x \in \overline{Y}$。

## 9.1.3

- $\mathbb{N}$ 的闭包是 $\mathbb{N}$。

  由引理 9.1.11 可得 $\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{N}}$。

  现在证明附着于 $\mathbb{N}$ 的点只能是 $\mathbb{N}$ 的元素。

  假设实数 $x$ 是 $\mathbb{N}$ 的附着点且 $x \notin \mathbb{N}$，由命题 5.4.12（有理数对实数的界定）与命题 4.4.1（由有理数确定的整数散布）可得，存在唯一的整数 $n$ 使得 $n < x < n+1$（即：$x$ 在两个自然数之间）。

  设 $\epsilon = \frac{1}{2}min(x-n, n+1-x)$，此时不存在 $y \in \mathbb{N}$ 使得 $|x-y| \leq \epsilon$，与 $x$ 是附着点矛盾。

- $\mathbb{Z}$ 的闭包是 $\mathbb{Z}$。

  由引理 9.1.11 可得 $\mathbb{Z} \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$。

  现在证明附着于 $\mathbb{Z}$ 的点只能是 $\mathbb{Z}$ 的元素。

  证明过程与 $\mathbb{N}$ 一致，这里不做赘述。

- $\mathbb{Q}$ 的闭包是 $\mathbb{R}$。

  即任意实数 $x$ 都是 $\mathbb{Q}$ 的附着点。对任意 $\epsilon > 0$，取 $y = x + \epsilon$，由命题 5.4.14 可知，存在有理数 $q \in \mathbb{Q}$ 使得 $x < q < y$，此时 $|x-q| \leq \epsilon$。

- $\mathbb{R}$ 的闭包是 $\mathbb{R}$。

  由引理 9.1.11 可得 $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$。

  而有定义 9.1.8 可知，不存在 $\mathbb{R}$ 外的附着点，否则不满足定义了。

- $\varnothing$ 的闭包是 $\varnothing$。

  因为 $\varnothing$ 中没有元素，也就没有 $x \in R$ 能够满足定义 9.1.8（附着点）的定义。

## 9.1.4

$$\begin{aligned} X &:= [0, 1) \\ Y &:= (1, 2] \end{aligned}$$

此时，

$$\begin{aligned} \overline{X \cap Y} &= \varnothing \\ \overline{X} \cap \overline{Y} &= \{1\} \end{aligned}$$

## 9.1.5

- $\Rightarrow$

  任意 $\alpha \in \overline{X}$，对任意的正自然数 $n$，设 $X_n$ 表示集合

  $$X_n := \{x \in X, |x - \alpha| \le 1/n\}$$

  由于 $\alpha$ 是附着点，所以 $X_n$ 是非空集合。

  利用选择公理，能够找到一个序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 使得 $a_n \in X_n$ 对所有的 $n \ge 1$ 均成立。

  以上构造的序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是收敛于 $x$ 且每一个元素都属于 $X$。

- $\Leftarrow$

  对任意 $\epsilon > 0$，由 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 $x$ 可知，存在 $N$ 使得 $n \ge N$ 时，

  $$|a_n - x| \le \epsilon$$

  因为序列中的完全是由 $X$ 中的元素构成的，于是可得 $x$ 是附着点。

## 9.1.6

**说明 1.** *这里所说的闭集，应该是和定义 9.1.15 对应的，所以应该是* $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$

- $\overline{X}$ 是闭集（即 $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$）

  由引理 9.1.11 可知 $\overline{X} \subseteq \overline{\overline{X}}$，现在需要证明 $\overline{\overline{X}} \subseteq \overline{X}$。

  设任意 $x'' \in \overline{\overline{X}}$，对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $y' \in \overline{X}$，使得

  $$|x'' - y'| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

  因为 $y'$ 也是 $X$ 的附着点，所以存在 $y \in X$ 使得

  $$|y - y'| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

  于是由命题 4.3.7（c）可知，

  $$|x'' - y| \leq \epsilon$$

  所以 $x''$ 也是 $X$ 的附着点，即 $x'' \in \overline{X}$。

- 换个表达方式：$X \subseteq Y, \overline{Y} = Y$，那么 $\overline{X} \subseteq Y$（即：$\overline{X} \subseteq \overline{Y}$）。

  任意 $x \in \overline{X}$，所以对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 $y \in Y$ 使得

  $$|x - y| \leq \epsilon$$

  因为 $X \subseteq Y$，于是 $y \in Y$，所以 $x$ 也是 $Y$ 的附着点，即 $x \in \overline{Y}$。

## 9.1.7

设

$$X := X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n = \bigcup_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} X_i$$

换句话说，要证明 $\overline{X} = X$。

由引理 9.1.11 可知，$X \subseteq \overline{X}$，接下来我们需要证明 $\overline{X} \subseteq X$。

任意 $x \in \overline{X}$，对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $y \in X$ 使得

$$|x - y| \leq \epsilon$$

因为 $y \in X$，由公理 3.11（并集）可知存在 $X_i$ 使得 $y \in X_i$，于是 $x \in \overline{X_i}$，由题设可知 $X_i = \overline{X_i}$，所以 $x \in X_i$，于是 $x \in X$。

## 9.1.8

设

$$X := \bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$$

换句话说，要证明 $\overline{X} = X$。

由引理 9.1.11 可知，$X \subseteq \overline{X}$，接下来我们需要证明 $\overline{X} \subseteq X$。

任意 $x \in \overline{X}$，对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $y \in X$ 使得

$$|x - y| \leq \epsilon$$

因为 $y \in X$，由式（3.4）可知对任意 $X_\alpha$ 都有 $y \in X_\alpha$，于是 $x \in \overline{X_\alpha}$，由题设可知 $X_\alpha = \overline{X_\alpha}$，再次由式（3.4）可知 $x \in X$。

## 9.1.9

- $\Rightarrow$

  任意 $x \in \overline{X}$，对任意 $\epsilon > 0$，都有存在 $y \in X$ 使得

  $$|x - y| \leq \epsilon$$

  即 $W_x := \{y : y \in X, |x - y| \leq \epsilon\}$ 是非空集；

  - $W_x \setminus \{x\} \neq \varnothing$，则 $x$ 也是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点，所以 $x$ 是极限点。
  - $W_x \setminus \{x\} = \varnothing$，可知 $x \in X$，且因为 $W_x \setminus \{x\}$ 是空集，所以任意 $y \in X \setminus \{x\}$ 都满足 $|x - y| > \epsilon$（特别地 $X \setminus \{x\} = \varnothing$，则空虚的成立），所以 $x$ 是 $X$ 的孤立点。

- $\Leftarrow$

  观察定义，如果 $x$ 是 $X$ 的极限点，无法说明 $x \in X$，如果是孤立点却能保证 $x \in X$，而根据引理 9.1.11 可知 $X \subseteq \overline{X}$，所以孤立点肯定是附着点。

  接下来要对极限点进行说明。按照定义 9.1.18 可知，$X$ 的任意极限点 $x$ 是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点，因为 $X \setminus \{x\} \subseteq X$，所以 $x$ 是 $X$ 的附着点。

**说明 2.** 错误推论：$X$ 是实直线的一个子集，对于任意实数 $x$，要么是 $X$ 的极限点，要么是 $X$ 的孤立点。

按照定义 *9.1.8* 可知，一个实数 $x$ 要么是 $X$ 的附着点，要么不是。

习题 *9.1.9* 中已经证明，当 $x$ 是附着点，则 $x$ 要么是 $X$ 的极限点，要么是孤立点。

当 $x$ 不是附着点，则 $x \notin X$（否则肯定是附着点），按照定义 *9.1.18* 可知 $x$ 不会是孤立点；$x$ 也不会极限点，因为 $X \setminus \{x\} = X$（因为 $x \notin X$），所以如果是极限点，则是附着点（习题 *9.1.10* 的反推），与假设矛盾。至此可知，此时的 $x$ 既不是孤立点也不是极限点。

## 9.1.10