10.5 注释

张志聪

2025 年 4 月 9 日

说明 1. 个人判断，陶哲轩书中的洛必达法则的表述存在问题。

主要有以下问题：

- II 中 $\lim_{x\to a;x\in(a,b]}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 是一定存在的。

  题设中 f,g 在 $[a,b]$ 上是可微的，且任意 $x\in[a,b], g'(x)\neq 0$，即 $f'(a), g'(a)$ 存在，且 $g'(a)\neq 0$，此时，按照定义 10.1.1 可得，

$$\lim_{x\to a;x\in[a,b]\setminus\{a\}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

$$\lim_{x\to a;x\in[a,b]\setminus\{a\}}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

  集合 $[a,b]\setminus\{a\}=(a,b]$，按照命题 9.3.14，极限就是，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a;x\in(a,b]}\frac{f'(x)}{g'(x)}\\&=\lim_{x\to a;x\in(a,b]}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\\&=\frac{f'(a)}{g'(a)}\end{aligned}$$

  此时为啥还要判断存在性呢???

后来，在第 1 版的《陶哲轩实分析》勘误网页中发现，已经说明了其中问题。

网页：https://terrytao.wordpress.com/books/analysis-i/

原文如下：

说明 2. *In Proposition 10.5.2, the hypothesis that f,g be differentiable on [a,b] may be weakened to being continuous on [a,b] and differentiable on (a,b], with g' only assumed to be non-zero on (a,b] rather than [a,b].*

翻译：在命题 *10.5.2* 中，关于 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可微的假设可以弱化为：在 $[a,b]$ 上连续且在 $(a,b]$ 上可微，且 g' 仅需在 $(a,b]$ 上非零（而非原条件要求的 $[a,b]$ 上）。

2 和我本科期间学的洛必达定理表达不一样。

- 本科期间是 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，而不是 $f(a)=0$，后者的条件更强了。

2.1 定理 1

说明 3. 设

- （*1*）当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零。
- （*2*）在点 a 的某个去心领域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$。
- （*3*）$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

同济版本的证明，个人觉得是不对的。可以直接利用命题 10.5.2 进行证明。只需做如下转换即可：

设函数 h 如下：$x=a$ 时 $h(a)=0$,$x\neq a$ 时，$h(x)=f(x)$。

同理设函数 H 如下，$x=a$ 时 $H(a)=0$,$x\neq a$ 时，$H(x)=h(x)$。

由前置条件（2），我们存在一个点 a 的去心领域 $(a-\epsilon,a+\epsilon)$。设 $(a,\delta]\subseteq(a-\epsilon,a+\epsilon)$。

于是

$$\lim_{x\to a;x\in(a,\delta]}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a;x\in(a,\delta]}\frac{h'(x)}{H'(x)}$$

利用命题 10.5.2，得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a; x\in(a,\delta]} \frac{h'(x)}{H'(x)} &= \lim_{x\to a; x\in(a,\delta]} \frac{h(x)}{H(x)} \\
&= \lim_{x\to a; x\in(a,\delta]} \frac{f(x)}{F(x)}
\end{aligned}
$$

左极限证明类似。

综上，命题成立。