# 16.2 习题

张志聪

2025 年 4 月 26 日

## 16.2.1

设 $f(x) = f_1(x)+if_2(x), g(x) = g_1(x)+ig_2(x), h(x) = h_1(x)+ih_2(x), c = c_1 + ic_2$。

- (a)

$$\begin{aligned}
\langle g, f\rangle &= \int_{[0,1]} g(x)\overline{f(x)}dx \\
&= \int_{[0,1]} \left(g_1(x) + ig_2(x)\right)\left(f_1(x) - if_2(x)\right) dx \\
&= \int_{[0,1]} g_1(x)f_1(x) + g_2(x)f_2(x) + i(-g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x))dx \\
&= \int_{[0,1]} g_1(x)f_1(x) + g_2(x)f_2(x)dx + i\int_{[0,1]} g_2(x)f_1(x) - g_1(x)f_2(x)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_{[0,1]} f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_{[0,1]} (f_1(x) + if_2(x))(g_1(x) - ig_2(x))dx \\
&= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + i(-f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x))dx \\
&= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)dx + i\int_{[0,1]} -f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x)dx
\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}\overline{\langle f,g\rangle} &= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)dx - i\int_{[0,1]} -f_1(x)g_2(x)+f_2(x)g_1(x)dx \\ &= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)dx + i\int_{[0,1]} f_1(x)g_2(x)-f_2(x)g_1(x)dx\end{aligned}$$

所以，

$$\langle g,f\rangle = \overline{\langle f,g\rangle}$$

- (b)
  - (1) $\langle f,f\rangle \geq 0$。

    $$\begin{aligned}\langle f,f\rangle &= \int_{[0,1]} f(x)\overline{f(x)}dx \\ &= \int_{[0,1]} (f_1(x)+if_2(x))(f_1(x)-if_2(x)) \\ &= \int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x)+f_2(x)f_2(x)+i(-f_1(x)f_2(x)+f_2(x)f_1(x))dx \\ &= \int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x)+f_2(x)f_2(x)dx\end{aligned}$$

    因为

    $$f_1(x)f_1(x)+f_2(x)f_2(x)\geq 0$$

    由定理 11.4.1(e) 可知，

    $$\int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x)+f_2(x)f_2(x)dx \geq \int_{[0,1]} 0dx = 0$$

    即

    $$\langle f,f\rangle \geq 0$$

  - $\langle f,f\rangle = 0$ 当且仅当 $f=0$。
    $\Leftarrow$ 是易证的，略。

$\Rightarrow$

反证法，假设 $f$ 不是零函数，那么存在某个 $x_0 \in [0,1], f(x_0) \neq 0$，又因为 $f$ 是连续的，那么，对 $\epsilon = \frac{1}{2}|f(x_0)|$，存在 $\delta > 0$，使得只要，$|x - x_0| < \delta$，就有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$
$$|f(x_0)| - \epsilon \leq |f(x)| \leq |f(x_0)| + \epsilon$$

（以上是复数的性质，与实数是一致的，具体证明在 15-6-comment.tex 文件中）所以，

$$\int_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} |f(x)|^2 dx > 0$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}
\langle f, f \rangle &= \int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x) + f_2(x)f_2(x)dx \\
&= \int_{[0,1]} |f(x)|^2 dx \\
&= \int_{[0,x_0-\delta]} |f(x)|^2 dx + \int_{(x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x)|^2 dx + \int_{[x_0+\delta,1]} |f(x)|^2 dx \\
&> 0
\end{aligned}$$

存在矛盾。

- (c)

  证明略

- (d)

  证明略

## 16.2.2

证明 $(C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C}), d_{L^2})$。