

3.6 习题

2024 年 3 月 24 日

3.6.1

证明.

① X 和 X 有相等的基数。

构造一个从 X 到 X 的函数 f , 使得 $f(x)=x$ ($\{x \in X\}$)。函数 f 是双射函数, 是显而易见的, 这里不做证明了。

② 如果 X 和 Y 有相等的基数, 那么 Y 和 X 有相等的基数。

有 X 和 Y 有相等的基数, 可知存在一个双射: $f: X \rightarrow Y$ 。那么存在 f 的逆 $f^{-1}: Y \rightarrow X$, 由逆的定义可知 f^{-1} 是双射函数。

③ 如果 X 和 Y 有相等的基数且 Y 和 Z 有相等的基数, 那么 X 和 Z 有相等的基数。

由 X 和 Y 有相等的基数, 可知存在一个双射: $f: X \rightarrow Y$ 。由 Y 和 Z 有相等的基数, 可知存在一个双射: $g: Y \rightarrow Z$ 。那么 g 和 f 的复合函数为 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 。

由习题 3.3.7 可知 $g \circ f$ 是双射函数。由此可知存在一个双射: $g \circ f: X \rightarrow Z$, 所以 X 和 Z 有相等的基数。

3.6.2

证明.

① 充分性: 一个集合 X 的基数为 0, 则 X 是空集。

那么存在从 X 到 $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$ 的双射: $f: X \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$ 。而 $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$ 是 \emptyset , 即 $f: X \rightarrow \emptyset$ 。如果 X 不是空集, 那么则存在一个 $x \in X$ 使得 $f(x) \in \emptyset$, 这显然是不成立的, 所以 X 是空集

② 必要性: X 是空集, 则 X 的基数为 0。

若 X 是空集, 由习题 3.3.3 知 $f: \emptyset \rightarrow \emptyset$ 为双射, 而 $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\} = \emptyset$, 即存在双射函数 $f: \emptyset \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$, 由定义 3.6.5 可知集合 X 基数为 0.

3.6.3

证明.

对 n 进行归纳:

$n=0$ 时, f 是空函数, 命题空成立。

归纳假设 $n=k$ 时, 命题成立。

下面我们证明该命题对于 $k++$ 也为真。设集合 $N_k = \{i \in N: 1 \leq i \leq k\}$, $N_{k++} = \{i \in N: 1 \leq i \leq k++\}$ 。函数 $f_{k++}: N_{k++} \rightarrow N$ 是一个函数, 我们可以由 f_{k++} 定义出一个函数 $f_k: N_k \rightarrow N$, 对任意 $i \in N_k$, $f_k(i) = f_{k++}(i)$ 。由归纳假设可知, 存在一个自然数 M 使得 $f_k(i) \leq M, i \in N_k$, 即 $f_{k++}(i) \leq M, i \in N_k$, 此时我们可以取 $f_{k++}(k++), M$ 中的较大值为 M' , 由此可知该 M' 使得 $f_{k++}(i) \leq M', i \in N_{k++}$ 。归纳法完成。

3.6.4

(a) 设 X 是一个有限集, 设 x 是一个对象并且 x 不是 X 中的元素。那么 $X \cup \{x\}$ 是有限的, 且 $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$

证明.

X 是有限集, 不妨设 X 的基数是自然数 n 。因此存在从 X 到 $\{i \in N: 1 \leq i \leq n\}$ 的双射函数 f 。定义出一个函数 $g: X \cup \{x\} \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq n+1\}$, 使得 $g(x) = n+1, g(i) = f(i), i \in X$ 。由 g 的定义可知其是双射函数, 且 $X \cup \{x\}$ 的基数是 $n+1$, 所以 $X \cup \{x\}$ 是有限的, 且 $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$

(b) 设 X 和 Y 都是有限集, 那么 $X \cup Y$ 是有限的, 且 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$ 。另外, 如果 X 和 Y 是不相交的 (即 $X \cap Y = \emptyset$), 那么 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$

证明.

X 和 Y 都是有限集, 不妨设 X 和 Y 的基数分别为 m 和 n 。通过对 n 进行归纳, 完成证明:

$n=0$ 时, 即 Y 的基数是 0, 也就是说 $Y = \emptyset, X \cup Y = X \cup \emptyset = X$, 此时 (b) 命题显然是成立的。

归纳假设 $n=k$ 时, (b) 命题成立。

现在需证明 $n=k++$, 任取 $x \in Y, Z = Y \setminus \{x\}$, 由引理 3.6.9 可知, Z 的基数为 k , 由归纳假设可知, X 与 Z 满足命题 (b), 由此可知 $X \cup Z$ 是有限的;

$$X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\}.$$

① $X \cap Y = \emptyset$, 由此可知 $x \notin X \cup Z$, 且由归纳假设知 $\#(X \cup Z) = \#(X) + \#(Z)$ 。由命题 (a) 可知 $X \cup Z \cup \{x\}$ 是有限的, 且 $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$, 即 $X \cup Y$ 是有限的, 且 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 = \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$, 即 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$;

$$\textcircled{2} X \cap Y \neq \emptyset$$

如果 $x \in X \cup Z$ 则 $X \cup Y = X \cup Z \cup \{x\} = X \cup Z$, 即 $X \cup Y = X \cup Z$ 由于同一集合只有一个基数, 所以 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z)$, 又由归纳假设可知 $\#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Z)$, 所以 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$ 。

如果 $x \notin X \cup Z$, (由 $X \cap Y \neq \emptyset$, 则必须 $X \cap Z \neq \emptyset$ 否则与假设矛盾, 所以 $\#(X \cup Z) \leq \#(X) + \#(Z)$) 由命题 (a) 可知 $\#(X \cup Z \cup \{x\}) = \#(X \cup Z) + 1$, 即 $X \cup Y$ 是有限的, 且 $\#(X \cup Y) = \#(X \cup Z) + 1 \leq \#(X) + \#(Z) + 1 = \#(X) + \#(Y)$, 即 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$;

综上, $n=k++$ 情况也成立, 至此, (b) 命题成立。

(c) 设 X 是一个有限集, Y 是 X 的一个子集。那么 Y 是有限的, 且 $\#(Y) \leq \#(X)$ 。另外, 如果 $Y \neq X$ (即 Y 是 X 的一个真子集), 那么我们有 $\#(Y) < \#(X)$ 。

证明.

对 X 的基数进行归纳。

X 的基数为 0 , 即 $X = \emptyset$, 此时 Y 是 X 的子集, 则 $Y = \emptyset$, 很明显 Y 是有限的 (基数是 0), 且 $\#(Y) \leq \#(X)$ 。而命题的后半部分, 因为空集不存在真子集, 所以空成立。

归纳假设 $n=k$ 时, X 的基数为 k , 命题 (c) 成立。

现需证明 $n=k++$, 命题 (c) 成立。若 $Y = X$ 显然 $\#(Y) \leq \#(X)$; 若 $Y \neq X$, 则存在 $x \in X$, 使得 $Y \subseteq (X \setminus x)$, 由归纳假设可知 $\#(Y) \leq \#(X \setminus x)$, 由引理 3.6.9 可知 $\#(Y) < \#(X)$ 。

综上命题 (c) 成立。

(d) 如果 X 是一个有限集, 并且 $f: X \rightarrow Y$ 是一个函数, 那么 $f(X)$

是一个有限集并且满足 $\#(f(X)) \leq \#(X)$ 。另外，如果 f 是一对一的，那么 $\#(f(X)) = \#(X)$ 。

证明.

对 X 的基数 n 进行归纳；

归纳基始 $n=0$ ，即 $X = \emptyset$ ，由定义 3.4.1 (集合的像) 可知 $f(X) = \emptyset$ ，即 $\#(f(X)) = 0$ ，此时命题 (d) 成立

$n=k++$ 时，设 $X' = X \setminus \{x\}$ ，由归纳假设可知 $\#(f(X')) \leq \#(X')$ ，

① $f(X') = f(X)$ ，则 $\#(f(X)) = \#(f(X')) \leq \#(X') < \#(X)$ 。此时 f 不是双射，命题后半部分空成立。

② $f(X') \subsetneq f(X)$ 则 $f(x) \notin f(X')$ ，且 $f(X) = f(X') \cup f(x)$ ，由命题 (a) 可知 $\#(f(X)) = \#(f(X')) + 1$ ，有 $\#(X) = \#(X') + 1$ ，所以由归纳假设 $\#(f(X')) \leq \#(X')$ 可知 $\#(f(X')) + 1 \leq \#(X') + 1$ ，即 $\#(f(X)) \leq \#(X)$ ；若 f 是一对一的，则 $X' \setminus \{x\} \rightarrow Y \setminus \{f(x)\}$ 也是一对一，由归纳假设知 $\#(f(X')) = \#(X')$ ，由此可知 $\#(f(X')) + 1 = \#(X') + 1$ ， $\#(f(X)) = \#(X)$ 。综上， $n=k++$ 时命题 (d) 成立。

至此，命题成立

(e) 设 X 和 Y 都是有限集，那么笛卡尔积 $X \times Y$ 是有限的并且 $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$ 。

证明.

设 X, Y 的基数分别为 n, m ，对 n 进行归纳。

归纳基始 $n=0$ ，即 X 是空集，有笛卡尔积的定义可知， $X \times Y = \emptyset$ ，由此可知 $\#(X \times Y) = 0$ ，且 $X \times Y$ 是有限的。又 $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y) = 0$ ，所以 $n=0$ 时，命题 (e) 成立。

$n=k++$ 时，设对任意 $x \in X$ ，构造 $X' = X \setminus \{x\}$ ，由习题 3.5.5 可知 $X \times Y = (X' \cup \{x\}) \times (Y \cup Y) = (X' \times Y) \cup (\{x\} \times Y)$ ，由笛卡尔积的定义可知 $(X' \times Y) \cap (\{x\} \times Y) = \emptyset$ ，由 (b) 可知， $\#((X' \times Y) \cup (\{x\} \times Y)) = \#(X' \times Y) + \#(\{x\} \times Y)$ 由归纳假设可知 $\#(X' \times Y) = \#(X') \times \#(Y)$ ，现在只需证明 $\#(\{x\} \times Y) = \#(Y)$ ，命题就能完成证明。(在直觉上是显然的，但为了严谨性，还是需要证明)，要想证明基数相同，按照定义 3.6.1 只需找到从 $(\{x\} \times Y)$ 到 Y 的一个双射函数 $f: (\{x\} \times Y) \rightarrow Y$ 。可以定义 f 如下： $f((x, y)) = y, (x, y) \in (\{x\} \times Y)$ ，这里的 f 是双射性是显然的，为了简洁不做说明了。由此可知 $\#(X \times Y) = \#(X' \times Y) + \#(\{x\} \times Y) = \#(X' \times Y) + \#(Y)$

$= \#(X') \times \#(Y) + \#(Y) = (\#(X') + +) \times \#(Y) = \#(X) \times \#(Y)$, $n=k++$ 时命题 (e) 成立。

至此归纳完成, 命题 (e) 得到证明。

(f) 设 X 和 Y 都是有限集, 那么集合 Y^X (在公理 3.10 中被定义) 是有限的, 并且 $\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$

证明.

公理 3.10 中对幂集公理的定义, 很难定量分析, 我们使用其他公理对幂集公理重新定义。

I 为一个集合, 并对每一个元素 $y_0 \in I$ 均有一个集合 A_{y_0} , $A_{y_0} = \{f \text{ 是 } X \text{ 到 } Y \text{ 的函数}, f(x_0) = y_0\} : y_0 \in Y\}$ 幂集定义如下: $W = \bigcup_{y \in I} A_y = \bigcup \{A_y : y \in I\}$

现在需要证明该定义和幂集公理的等价性。

$f \in W \Leftrightarrow$ 存在 $y \in I$ 使得 $f \in A_y$, 由此可知 f 是 X 到 Y 的函数, 所以 $f \in Y^X$ 。

$f \in Y^X$, 由于 f 是 X 到 Y 的函数, 则对 $x_0 \in X$ 有 $y = f(x_0)$, $y \in Y$, 所以 $f \in A_y$, 所以 $f \in W$ 。

综上可证该定义和幂集公理的等价性。

设 X, Y 的基数分别为 n, m , 通过对 n 进行归纳, 证明该命题。

归纳基始 $n=0$, 即 $X = \emptyset$, 而 $f : \emptyset \rightarrow Y$ 的函数, 由函数相等的定义可知是唯一的, 所以 $\#(Y^X) = 1, \#(Y)^{\#(X)} = m^0 = 1$, 由此可知 $\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$, 在 $n=0$ 时命题 (f) 成立

$n=k++$ 时, 设 $X' = X \setminus \{x_0\}, x_0 \in X$, 证明 $\#(A_{y_0}) = \#(Y^{X'})$, 函数 $G : A_{y_0} \rightarrow Y^{X'}$, 定义如下: $g = G(f), x \in X', f(x) = g(x)$ 。

证明函数 G 的定义是合法, 即证明 g 的唯一性, 假设存在 g 满足定义, 即对任意 $f \in A_{y_0}$, 存在 $g'(x) = f(x) = g(x)$, 由函数相等的定义可知 $g = g'$, g 的唯一性得证。

证明 G 是双射的, 先证明单射, 如果 G 不是单射, 则存在 $f_1 \neq f_2$, 有相同的函数值 g , 由于 $f_1 \neq f_2$ 所以存在 $x \in X', f_1(x) \neq f_2(x)$, 有 G 的定义可知 $g(x) = f_1(x) = f_2(x)$, 这与 $f_1(x) \neq f_2(x)$ 矛盾, 所以 G 是单射。

证明 G 是满射的, 对任意函数值 $g \in Y^{X'}$, 可以定义出一个函数 $f : X \rightarrow Y, f(x_0) = y, f(x) = g(x)$, 该函数 $f \in A_{y_0}$, 所以 G 是满射的。

由此可知 $\#(A_{y_0}) = \#(Y^{X'}) = m^k$

由 A_y 的定义方式可知是不相交的, 即对任意 $y_0 \neq y_1, A_{y_0} \cap A_{y_1} = \emptyset$, 由 (b) 可知 $\#(W) = \sum_{y \in I} \#(A_y) = m \times \#(Y^{X'}) = m \times (m^k) = m^{k++}$, 由此可知 $n=k++$ 命题 (f) 也成立。

至此命题 (f) 成立。

3.6.5

证明.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \quad (1)$$

$$B \times A = \{(b, a) : b \in B, a \in A\} \quad (2)$$

现在定义函数 $f : A \times B \rightarrow B \times A, f(a, b) := (b, a)$ 。

接下来要证明 f 的双射性 (为了简洁不做说明了)。

由命题 3.6.14 可知

$$\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B) \quad (3)$$

$$\#(B \times A) = \#(B) \times \#(A) \quad (4)$$

又因为 $A \times B, B \times A$ 之间存在一个双射 f , 所以两个集合之间有相同的基数, 由此通过 (3) (4) 可知 $\#(A) \times \#(B) = \#(B) \times \#(A)$

3.6.6

证明.

①构造双射

由公理 3.10 (幂集公理) 可知,

$$(A^B)^C = \{f : f \text{ 是一个定义域为 } C, \text{ 值域为 } A^B \text{ 的函数}\} \quad (5)$$

$$A^{B \times C} = \{g : g \text{ 是一个定义域为 } B \times C, \text{ 值域为 } A \text{ 的函数}\} \quad (6)$$

定义函数 $G : (A^B)^C \rightarrow A^{B \times C}$ 如下: $G(f) := g, f, g$ 满足以下性质: 对任意 $b \in B, c \in C$ 有 $[f(c)](b) = g(b, c)$

现需证明 G 是满足函数定义的, 对相同的输入只存在唯一的函数值。函数 f 对任意 $b \in B, c \in C$ 存在 g, g' 使得 $[f(c)](b) = g(b, c) = g'(b, c)$, 对任意 $b \in B, c \in C, g(b, c) = g'(b, c)$ 通过函数相等的定义可知 $g = g'$ 。

现需证明 G 是双射函数。对任意 $f \neq f'$,

$$[f(c)](b) = g(b, c) \quad (7)$$

$$[f'(c)](b) = g'(b, c) \quad (8)$$

由于 $f \neq f'$ 所以存在 (b', c') 使得 $[f(c')](b') \neq [f'(c')](b')$, 可得 $g(b', c') \neq g'(b', c')$, 所以 $g \neq g'$, 所以 G 是单射函数。

$g \in A^{B \times C}$, 对某个 $c_0 \in C$ 我们定义函数 $h_0 : B \rightarrow A, h_0(b) := g(b, c_0)$; 再对每个 $c \in C$ 我们定义函数 $f : C \rightarrow A^B, f(c) := h_c$ 。此时对任意 $c \in C, b \in B$ 有 $[f(c)](b) = h_c(b) = g(b, c)$ 。故 $G(f) = g$ 。故 G 是满射的

$$\textcircled{2} (a^b)^c = a^{bc}$$

设 A, B, C 的基数分别为 a, b, c , 由命题 3.6.14 可知

$$\#((A^B)^C) = \#(A^B)^{\#(C)} = (\#(A)^{\#B})^{\#(C)} = (a^b)^c \quad (9)$$

$$\#(A^{B \times C}) = \#A^{\#(B \times C)} = \#A^{\#(B) \times \#(C)} = a^{bc} \quad (10)$$

又 $(A^B)^C, A^{B \times C}$ 基数相同, 所以 $(a^b)^c = a^{bc}$

$$\textcircled{3} a^b \times a^c = a^{b+c}$$

通过构造明确的双射来证明: 集合 $A^B \times A^C$ 和集合 $A^{B \cup C}$ 有相同的基数 ($B \cap C = \emptyset$)。由公理 3.10 (幂集公理) 和定义 3.5.4 (笛卡尔积) 可知

$$A^B \times A^C = \{(f, f') : f \in A^B, f' \in A^C\} \quad (11)$$

$$A^{B \cup C} = \{g : g \text{ 是定义域为 } B \cup C \text{ 值域为 } A \text{ 的函数}\} \quad (12)$$

定义函数 $G : A^B \times A^C \rightarrow A^{B \cup C}$ 如下:

$$G(f, f') := g, \quad f, f', g \text{ 满足如下性质: 对任意 } b \in B, c \in C \text{ 有 } f(b) = g(b), f'(c) = g(c)$$

现需证明 G 是满足函数定义的, 对相同的输入只存在唯一的函数值。函数 f, f' 对任意 $b \in B, c \in C$ 存在 g, g' 使得 $f(b) = g(b), f'(c) = g(c); f(b) = g'(b), f'(c) = g'(c);$ 对任意 $b \in B, c \in C, g(b) = g'(b); g(c) = g'(c)$ 通过函数相等的定义可知 $g = g'$ 。

现需证明 G 是双射函数。对任意 $(f1, f2) \neq (f1', f2'), g = G(f1, f2), g' = G(f1', f2')$, 如果 $g = g'$, 那么对任意 $b \in B, c \in C$ 有 $g(b) = g'(b) = f1(b) = f1'(b), g(c) = g'(c) = f2(c) = f2'(c)$, 由此可知 $f1 = f1', f2 = f2'$, 那么 $(f1, f2) = (f1', f2')$, 这与前提 $(f1, f2) \neq (f1', f2')$ 矛盾, $g \neq g'$, 所以 G 是单射。

任意 $g \in A^{B \cup C}$, 对任意 $b \in B, c \in C$ 定义 $f1 : B \rightarrow A, f1(b) = g(b); f2 : C \rightarrow A, f2(c) = g(c)$, $f1, f2$ 满足如下性质: 对任意 $b \in B, c \in C$ 有 $f1(b) = g(b), f2(c) = g(c)$, 故 $G(f1, f2) = g$ 。故 G 是满射。

设 A, B, C 的基数分别为 a, b, c , 由命题 3.6.14 可知

$$\#(A^B \times A^C) = \#(A^B) \times \#(A^C) = \#(A)^{\#B} \times \#(A)^{\#C} = a^b \times a^c \quad (13)$$

$$\#(A^{B \cup C}) = \#(A)^{\#(B \cup C)} = \#(A)^{\#(B) + \#(C)} = a^{b+c} \quad (14)$$

又 $A^B \times A^C, A^{B \cup C}$ 基数相同, 所以 $a^b \times a^c = a^{b+c}$

3.6.7

证明.

① 充分性

假设 A 的基数小于或等于 B 基数, 则存在一个从 A 到 B 的单射 $f : A \rightarrow B$, 由定义 3.4.1 (集合的像) 可知 $f(X) \subseteq B$; 又由命题 3.6.14 (c) 可知

$$\#(f(X)) \leq \#(B) \quad (15)$$

定义函数 $g : A \rightarrow f(X), g(x) = f(x)$, 函数 g 是双射函数 (证明略), 由此可知 $\#(A) = \#(f(X))$ 。综上可知 $\#(A) = \#(f(X)) \leq \#(B)$, 必要性得证。

② 必要性

假设 $\#(A) \leq \#(B)$, 基数分别为 m, n ($m \leq n$), 由定义 3.6.5 可知, 存在双射函数 $f : A \rightarrow \{i \in N : 1 \leq i \leq m\}$ 。存在双射函数 $g : \{i \in N : 1 \leq i \leq n\} \rightarrow B$ 。由此我们可以定义从 A 到 B 的单射 $h : A \rightarrow B$ 如下: 对任意 $x \in A, h(x) = g(f(x))$ 。现在证明 h 是单射函数, 对任意 $x_1 \neq x_2$, 由于 f 是单射函数, 所以 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 又 g 是单射函数, 所以 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, 即 $h(x_1) \neq h(x_2)$, 所以 h 是单射函数。

综上命题得证