4.4 习题

2024 年 5 月 14 日

4.4.1

证明：

1. 证明 n 的存在性

由有理数的三歧性分情况讨论。

（1）$x=0$ 时，$n=0$ 满足命题 $n \leq x < n+1$。

（2）x 是正有理数时，存在正整数 a, b 使得 $x=a/b$。

当 $a<b$ 时，因为 x 是正有理数，所以 $x \geq 0$，又因为，

$$\begin{aligned} 1-x &= 1-a/b \\ &= (b-a)/b \end{aligned}$$

由于 $b>a$ 可知，$b-a>0$，由此可知 $1-x$ 是正有理数，所以 $1>x$。从而可取 $n=0$。

当 $a>b$ 时，由命题 2.3.9 可知，存在自然数 m, r 使得 $a=mb+r$ 且 $0 \leq r < b$。因为 $a=mb+r$，所以，

$$\begin{aligned} a/b &= (mb+r)/b \\ &= m+r/b \end{aligned}$$

由于 $0 \leq r/b < 1$，所以可取 $n=m$，满足命题。

（3）x 是负有理数时，存在正整数 a, b 使得 $x=(-a)/b$。

当 $a<b$ 时，取 $n=-1$，证明过程与上面类似，不在赘述

当 $a > b$ 时，取 $n = -(m+1)$，证明过程与上面类似，不在赘述

2. 证明 n 的唯一性

假设存在整数 $n_1 \neq n_2$ 并且满足

$$n_1 \leq x < n_1 + 1 \tag{1}$$

$$n_2 \leq x < n_2 + 1 \tag{2}$$

由于 $n_1 \neq n_2$，不妨假设 $n_1 < n_2$，所以存在正自然数 $a \geq 1$ 使得 $n_2 = n_1 + a$，又由假设可知 $n_2 \leq x < n_1 + 1$，因为 $n_2 = n_1 + a$，所以

$$n_1 + a \leq x < n_1 + 1$$

由 $a \geq 1$ 可知，以上公式矛盾，所以 $n_1 < n_2$ 不成立。

同理可知 $n_1 > n_2$ 不成立。

综上 $n_1 \neq n_2$ 时无法同时满足命题，至此 n 的唯一性得证。

4.4.2