12.2 习题

张志聪

2025 年 1 月 17 日

12.2.1

任意 $x_0 \in X$，要么 $x_0 \in E$ 要么 $x_0 \notin E$。

- $x_0 \in E$

  任意 $0 < r < 1$，由 d_{disc} 度量的定义可知，$B(x_0, r) = \{x_0\}$，所以 $B(x_0, r) \subseteq E$，所以 x_0 是 E 的内点。

- $x_0 \notin E$

  任意 $0 < r < 1$，由 d_{disc} 度量的定义可知，$B(x_0, r) = \{x_0\}$，所以 $B(x_0, r) \cap E = \varnothing$，所以 x_0 是 E 的外点。

12.2.2

证明路径：$(a) \implies (b) \implies (c) \implies (a)$

- $(a) \implies (b)$

  由闭包的定义（定义 12.2.9）可知，如果 (a) 成立，那么对任意的半径 $r > 0$，球 $B(x_0, r)$ 与 E 的交集总是非空的。所以 x_0 不可能是 E 的外点。

  球 $B(x_0, r)$ 与 E 的交集总是非空的，于是有两种情况。
  情况 1：$B(x_0, r) \subseteq E$，此时 x_0 是 E 的内点。
  情况 2：存在 $x \in B(x_0, r), x \notin E$，此时 x_0 是 E 的边界点。

  综上，(b) 成立。

- $(b) \implies (c)$

  (b) 成立。

  - x_0 是 E 的内点

    那么可以把序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 设置为常量序列 $(x_0)_{n=1}^{\infty}$。

  - x_0 是 E 的边界点

    那么任意 $r > 0$，都有 $B(x_0, r) \cap E \neq \varnothing$（因为如果 $B(x_0, r) \cap E = \varnothing$，那么 x_0 是 E 的外点）。

    仿照引理 8.4.5 的证明，构造序列。

    对于任意的正整数 n，设 X_n 表示集合

    $$X_n := \{x \in E : x \in B(x_0, \frac{1}{n})\}$$

    由之前的分析可得，对每一个 n 都有 X_n 是非空的。利用选择公理（或者可数选择公理），能够找到一个序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x_n \in X_n$ 对所有的 $n \geq 1$ 均成立。特别地，对所有的 n 均有 $x_n \in E \cap B(x_0, \frac{1}{n})$，于是

    $$0 \leq d(x_0, x_n) \leq \frac{1}{n}$$

    根据夹逼定理（推论 6.4.14）有 $\lim_{n \to \infty} d(x_0, x_n) = 0$，所以序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d 收敛于点 x_0。

- $(c) \implies (a)$

  (c) 成立，由收敛定义（定义 12.1.14）可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $N \geq 1$ 使得

  $$d(x_n, x_0) < \epsilon$$

  对所有 $n \geq N$ 均成立（注意：这里的把定义中的 $\leq$ 改成了 $<$，并不影响正确性）。

  做一下变形，把 ϵ 看做半径，球 $B(x_0, \epsilon)$ 与 E 的交集是非空的，这是因为对 $n \geq N$ 的 x_n 我们有 $d(x_n, x_0) < \epsilon$，所以 $x_n \in B(x_0, \epsilon)$ 且 $x_n \in E$。

  由 ϵ 的任意性可知，x_0 是 E 的附着点。

12.2.3

说明 1. 先证明以下命题：

设 (X,d) 是一个度量空间，E 是 X 的子集，并设 x_0 是 X 中的一个点。那么 x_0 要么是 E 的内点，要么是 E 的外点，要么是 E 的边界点（存在三歧性）。

证明：以下的情况是互斥的：

- $x_0 \in E$

  首先 x_0 不可能是 E 的外点，如果 x_0 是 E 的外点，那么存在 $r>0$ 使得 $B(x_0,r)\cap E=\varnothing$，因为 $d(x_0,x_0)=0$ 所以 $x_0\in B(x_0,r)$，于是 $x_0\notin E$，存在矛盾。

  以下的情况是互斥的：

  - x_0 是 E 的边界点

    由定义 *12.2.5* 可知，x_0 不可能同时是 E 的内点。

  - x_0 不是 E 的边界点

    之前已经说明 x_0 不是 E 的外点，假设 x_0 也不是 E 的内点，那么 x_0 就是 E 的边界点，存在矛盾，所以 x_0 是 E 的内点。

- $x_0 \notin E$

  首先 x_0 不可能是 E 的内点，如果 x_0 是 E 的内点，那么存在 $r>0$ 使得 $B(x_0,r)\subseteq E$，因为 $x_0\in B(x_0,r)$，所以 $x_0\in E$，这与 $x_0\notin E$ 矛盾。

  以下的情况是互斥的：

  - x_0 是 E 的外点
  - x_0 不是 E 的外点

    由定义 *12.2.5* 可知，x_0 既不是 E 的内点也不是 E 的外点，所以 x_0 是 E 的边界点。

综上，$x_0\in E$，x_0 要么是 E 的内点，要么是 E 的边界点；$x_0\notin E$，x_0 要么是 E 的外点，要么是 E 的边界点。命题得证。

- (a)

– $\Rightarrow$

  由注 12.2.6 可知 $int(E) \subseteq E$。

  任意 $x_0 \in E$，因为 E 是开的，那么 E 不包含自身的任意边界点，所以 $x_0 \notin \partial E$；由 $d(x_0, x_0) = 0$ 可知 $x_0 \notin ext(E)$。于是由说明 1 可知 $x_0 \in int(E)$，所以 $E \subseteq int(E)$。

  所以 $E = int(E)$

– $\Leftarrow$

  $E = int(E)$，那么任意 $x_0 \in E$，都有 $x_0 \in int(E)$，即 E 中不包含边界点，由定义 12.2.12 可知，E 是开的。

- (b)

  – $\Rightarrow$

    反证法，假设存在 x_0 是附着点且 $x_0 \notin E$。x_0 是 E 的附着点，那么由定义 12.2.9 可知，对任意的半径 $r > 0$，球 $B(x_0, r) \cap E \neq \varnothing$，所以可得 x_0 不可能是 E 的外点。又由说明 1 可得 x_0 要么是 E 的边界点，要么是 E 的内点。如果 x_0 是 E 的边界点，由于 E 是闭的，所以 $x_0 \in E$，与假设矛盾; 如果 x_0 是 E 的内点，于是 $x_0 \in E$，与假设矛盾。

    综上，假设不成立。

  – $\Leftarrow$

    反证法，假设 E 不是闭的，即存在边界点 x_0 且 $x_0 \notin E$。由推论 12.2.11 可知 x_0 是 E 的附着点，由题设可知 $x_0 \in E$，与假设矛盾。

- (c)

  – 球 $B(x_0, r)$ 是开集

    对任意的 $x \in B(x_0, r)$，都有 $d(x_0, x) < r$，令 $r' = r - d(x_0, x)$，于是 $B(x, r') \subseteq B(x_0, r)$，因为任意 $y \in B(x, r')$，都有

    $$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + r' = r$$

    由 (a) 可知，球 $B(x_0, r)$ 是开集。

- 闭球是闭集

  $B := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$，让 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 是 B 中任意一个收敛序列,假设 $\lim_{n\to\infty} x_n = b \notin E$,于是 $d(x_0, b) > r$,令 $\epsilon = d(x_0, b) - r > 0$，于是存在 $N \geq m$ 使得

  $$\begin{aligned} d(x_n, b) &< \epsilon \\ d(x_n, b) &< d(x_0, b) - r \\ r &< d(x_0, b) + d(x_n, b) \\ r &< d(x_0, x_n) \end{aligned}$$

  对所有 $n \geq N$ 均成立，这与 $x_n \in B$ 矛盾。

  于是 $b \in B$，由 (b) 可知，B 是闭集。

- (d)

  令 $E := \{x_0\}$，E 中的任意一个收敛序列 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 都是与 $(x_0)_{n=m}^{\infty}$ 相等，所以 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in E$。由 (b) 可知，$E$ 是闭集。

- (e) 由于 $int(E) = ext(X \setminus E), ext(E) = int(X \setminus E)$，于是可得 $\partial E = \partial(X \setminus E)$。

  - $\Rightarrow$

    E 是开的，则 $\partial E \cap E = \varnothing$，于是可得 $\partial E \subseteq (X \setminus E)$，即 $\partial E = \partial(X \setminus E) \subseteq (X \setminus E)$，所以 $X \setminus E$ 是闭的。

  - $\Leftarrow$

    $X \setminus E$ 是闭的，则 $\partial(X \setminus E) \subseteq (X \setminus E)$，由 $\partial E = \partial(X \setminus E)$ 可得 $\partial E \cap E = \varnothing$，所以 E 是开的。

- (f)

  (f.1)

  使用 (a) 可知，对任意 $x \in E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n$，对任意 $E_i (1 \leq i \leq n)$ 存在一个 $r_i > 0$ 使得 $B(x, r_i) \subseteq E_i$。

  由于 n 是有限的，所以可取 $r = \min\{r_1, r_2, ..., r_n\}$，此时 $B(x, r) \subseteq E_i (1 \leq i \leq n)$，于是再次利用 (a) 可得，$E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n$ 是开的。

  (f.2)

$F_1, ..., F_2$ 是闭的，由 (e) 可知，$X \setminus F_1, ..., X \setminus F_n$ 是开的。

命题 3.1.28(h)（德 • 摩尔定律 $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$）可知，$F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n = X \setminus ((X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) \cap ... \cap (X \setminus F_n))$, 再次利用 (e) 可知，$F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$ 是闭的。

- (g)

  (g.1)

  任意 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$，那么，存在某个 $\alpha \in I$ 使得 $x \in E_\alpha$，又因为 E_α 是开的，所以存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \subseteq E_\alpha \in \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$，所以 $\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ 是开的。

  (g.2)

  命题 3.1.28(h)（德 • 摩尔定律 $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$）可知因为 $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha)$，因为 F_α 是闭的，由 (e) 可知，$X \setminus F_\alpha$ 是开的，所以利用 (g.1) 可得 $\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha)$ 是开的，再次利用 (e) 可知 $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha)$ 是闭的，即 $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ 是闭的。

- (h)

  (h.1)

  反证法，假设 $int(E)$ 不是包含在 E 中的最大开集，即存在 $V \subseteq E, V \not\subseteq int(E)$。

  由假设可知，存在 $x \in V, x \notin int(E)$，由于 $V \subseteq E$，所以 $x \in E$，于是 $x \in int(E)$ 或 $x \in \partial E$，因为 $x \notin int(E)$，所以 $x \in \partial E$。

  由于 V 是开集，所以存在 $r > 0$，使得 $B(x, r) \subseteq V \subseteq E$，于是 x 是 E 的内点，即 $x \in int(E)$，存在矛盾。

  (h.2)

  反证法，假设 $\overline{E}$ 不是包含 E 的最小闭集，即存在 $K \supset E, K \not\supset \overline{E}$。

  由假设可知，存在 $x \in \overline{E}, x \notin K$。因为 x 是 E 的附着点，于是由命题 12.2.10(c) 可知在 E 中（也在 K 中）构造一个收敛于 x 的序列 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$，但 $x \notin K$，这与 (b) 矛盾。

12.2.4

- (a)

  反证法，假设存在 $x \in \overline{B}, x \notin C$。

  $x \notin C$，可知 $x \in X \setminus C$，而 $X \setminus C = \{x \in X : d(x, x_0) > r\}$，那么 $d(x, x_0) > r$。

  因为 $x \in \overline{B}$，所以对任意半径 $r' > 0$ 都有 $B(x, r') \cap B \neq \varnothing$，于是令 $r' = d(x_0, x) - r > 0, y \in B(x, r') \cap B$。

  按照定义 12.1.2 我们有

  $$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, y) + d(x, y) \\ d(x_0, x) - d(x_0, y) &\leq d(x, y) \end{aligned}$$

  因为 $y \in B(x, r')$ 于是 $d(x, y) < r'$，所以

  $$\begin{aligned} d(x_0, x) - d(x_0, y) \leq d(x, y) < r' &= d(x_0, x) - r \\ d(x_0, x) - d(x_0, y) &< d(x_0, x) - r \\ r &< d(x_0, y) \end{aligned}$$

  这与 $y \in B$ 矛盾。

- (b)

  在离散度量 d_{disc} 中，$B := B(x_0, 1)$，是单点集，由命题 12.2.15(d) 可知，B 是闭集，由命题 12.2.15(b) 可知，$B = \overline{B}$。

  而 $C := \{x \in X : d_{disc}(x_0, x) \leq 1\}$ 就是 X 本身，此时 $B \subset C$。