

## 6.3 习题

2024 年 7 月 28 日

说在开头的话：文中的上确界与最小上界不是一回事，最小上界是一个集合  $E$  有上界为前提的，此时的最小上界与上确界一致。而如果集合没有最小上界，那么集合的上确界被指定为  $+\infty$  【空集时被指定为  $-\infty$ 】。由此可知，最小上界定义是包含在上确界中的定义中，反之则不然。

### 6.3.1

证明  $\sup(a_n)_{n=1}^{\infty} = 1$ ，首先 1 是上界，因为  $a_n$  是递减的，且  $n = 1$  时， $a_1 = 1$ 。假设存在上界  $M < 1$ ，由  $a_1 = 1$  可知， $M$  不存在。

证明  $\inf(a_n)_{n=1}^{\infty} = 0$ ，首先，因为  $n$  是正整数，所以  $1/n > 0$ ，于是 0 是下界。假设存在下界  $m > 0$ ，由推论 5.4.13（阿基米德性质）可知，存在正整数  $M$  使得  $Mm > 1$ ，所以  $m > 1/M$ ，取  $n = M$ ，此时  $a_n = 1/M < m$ ，与  $m$  是下界矛盾。

### 6.3.2

设  $E := \{a_n : n \geq m\}$ ， $E$  是非空的实数集合， $x := \sup(E)$ 。

(1) 由定义 6.2.6 可知， $x$  要么是实数，要么是  $+\infty$ 。

如果  $x$  是实数，由最小上界定义可知， $a_n \leq x$  对所有的  $n \geq m$  均成立。

如果  $x$  是  $+\infty$ ，定义 6.2.3 可知  $a_n \leq x$ 。

(2)  $M$  是  $E$  的上界。反证法  $x > M$ 。如果  $x$  是实数，那么此时与  $x$  是  $E$  的最小上界定义矛盾。如果  $x = +\infty$ ，那么由定义 6.2.3 可知，这样的  $x \geq M$ ，按照定义 5.5.10 此时  $E$  是没有上界的，于是  $M = +\infty$ ，所以不存在  $x > M$ 。

综上,  $x \leq M$ 。

(3) 反证法。假设不存在  $n \geq m$  使得  $y < a_n \leq x$ 。

由假设可知  $a_n \leq y$  或  $a_n > x$ 。

如果  $x$  是实数, 那么,  $x$  是  $E$  的最小上界, 如果存在  $y < x, a_n \leq y$ , 那么  $y$  才是  $E$  的最小上界, 所以该情况不可能发生。如果存在  $a_n > x$ , 那么与  $x$  是最小上界矛盾, 所以该情况不可能发生。

如果  $x = +\infty$ , 表明  $E$  没有上界。所以  $a_n > x$  是不可能的。如果存在  $y < x, a_n \leq y$ , 那么,  $y$  是实数, 即  $E$  是有上界的, 这与  $E$  没有上界矛盾。

综上, 假设不成立。

### 6.3.3

由于序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是有界的实数序列, 所以集合  $E := \{a_n : n \geq m\}$  按定理 5.5.9 可知集合  $E$  有一个最小上界, 即存在  $\sup(E)$ 。

$M$  是  $E$  的上界, 由命题 6.3.6 可知, 那么  $\sup(E) \leq M$ 。

现在要证明序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是收敛的, 并且收敛于  $\sup(E)$ , 为了描述方便, 设  $x := \sup(E)$ 。

对于任意实数  $\epsilon > 0$ ,  $x - \epsilon < x$ , 由命题 6.3.6 可知, 存在一个  $n \geq m$  使得  $x - \epsilon < a_n \leq x$ , 不妨设这里的  $n$  为  $N$ , 由于序列是递增的, 且  $x$  是最小上界, 所以  $x - \epsilon < a_n \leq x$  对  $n \geq N$  均成立, 所以  $|x - a_n| \leq \epsilon$ , 即序列是最终  $\epsilon$ - 接近与  $x$ , 由于  $\epsilon$  是任意的, 所以序列收敛于  $x$ , 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x = \sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$$

### 6.3.4

反证法, 假设  $x > 1$  时,  $x^n$  收敛于某个实数  $c$ 。

因为  $(1/x)^n x^n = 1$ , 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/x)^n x^n = 1$ 。

又  $x > 1, 0 < 1/x < 1$ , 于是由极限定律 6.1.19 和命题 6.3.10 可知

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (1/x)^n x^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1/x)^n \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \\ &= 0 \times c \\ &= 0 \end{aligned}$$