

## 13.1 习题

张志聪

2025 年 2 月 11 日

### 13.1.1

- (a)  $\implies$  (c)

因为  $f(x_0) \in V$  且  $V$  是开集, 那么存在  $r > 0$  使得  $B(f(x_0), r) \subseteq V$ 。  
因为  $f$  在  $x_0$  处是连续的, 那么存在  $\delta > 0$ , 使得只要  $d_X(x_0, x) < \delta$ , 就有  $d_Y(f(x), f(x_0)) < r$ , 于是令  $U = B(x_0, \delta)$  即可满足要求, 使得  $f(U) \subseteq B(f(x_0), r) \subseteq V$ 。

- (c)  $\implies$  (b)

对于任意  $\epsilon > 0$ , 令  $V := B(f(x_0), \epsilon)$ , 那么  $V \subset Y$ 。由 (c) 可知, 存在一个包含  $x_0$  的开集  $U \subset X$ , 使得  $f(U) \subseteq V$ 。

因为  $U$  是开集, 所以存在  $B(x_0, r) \subseteq U$ , 因为序列  $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$  是  $X$  中依度量  $d_X$  收敛于  $x_0$  的序列, 于是存在  $N \geq 1$  使得

$$d_X(x_0, x^{(n)}) < r$$

对所有的  $n \geq N$  均成立。那么, 对所有的  $n \geq N$  都有

$$x^{(n)} \in B(x_0, r) \subseteq U$$

所以  $f(x^{(n)}) \in V$ , 即

$$d_Y(f(x^{(n)}), f(x_0)) < \epsilon$$

由  $\epsilon$  的任意性可知, 序列  $(f(x^{(n)}))_{n=1}^\infty$  是  $Y$  中依度量  $d_Y$  收敛于  $f(x_0)$  的序列。

- (b)  $\implies$  (a)

反证法, 假设  $f$  在  $x_0$  处是不连续的, 那么存在  $\epsilon > 0$  使得对任意的  $\delta > 0, d_X(x, x_0) < \delta$ , 都有  $d_Y(f(x), f(x_0)) > \epsilon$ , 令  $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ , 利用选择公理可以得到一个在  $X$  中依度量  $d_X$  收敛于  $x_0$  的序列  $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ , 由 (b) 可知, 序列  $(f(x^{(n)}))_{n=1}^\infty$  依度量  $d_Y$  收敛于  $f(x_0)$ , 由于对任意的  $n$  都有  $d_Y(f(x^{(n)}), f(x_0)) > \epsilon$ , 所以序列  $(f(x^{(n)}))_{n=1}^\infty$  依度量  $d_Y$  不可能收敛于  $f(x_0)$ , 存在矛盾。

### 13.1.2

由定理 13.1.4 可知 (a) 和 (b) 是等价的。

- (a)  $\implies$  (c)

任意  $x_0 \in f^{-1}(V), f(x_0) \in V$ , 因为  $V$  是开集, 所以存在  $r > 0$  使得  $B(f(x_0), r) \subseteq V$ 。  $f$  是连续的, 那么存在  $\delta > 0$  使得只要  $d_X(x_0, x) < \delta$ , 就有  $d_Y(f(x), f(x_0)) < r$ 。 所以对于任意  $x \in B(x_0, \delta)$ , 都有  $d_Y(f(x), f(x_0)) < r$ , 所以  $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), r) \subseteq V$ , 所以  $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$ 。

由  $x_0$  的任意性可知,  $f^{-1}(V)$  就是  $X$  中的开集。

- (c)  $\implies$  (a)

设  $x_0 \in X$ , 那么对任意  $\epsilon > 0, V := B(f(x_0), \epsilon)$  是  $Y$  中的开集, 由 (c) 可知  $U := f^{-1}(V)$  是  $X$  中的开集, 所以存在  $\delta > 0$  使得  $B(x_0, \delta) \subseteq U, f(B(x_0, \delta)) \subseteq V = B(f(x_0), \epsilon)$ , 即  $d_X(x_0, x) < \delta$ , 就有

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

所以  $f$  在  $x_0$  处是连续的。

由  $x_0$  的任意性可知,  $f$  是连续的。

- (c)  $\Leftrightarrow$  (d)

$F$  是闭集由命题 12.2.15(e) 可知当且仅当  $Y \setminus F$  是开集, 由 (c) 可知  $f^{-1}(Y \setminus F)$  开集。 因为  $X \setminus f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \notin F\} = f^{-1}(Y \setminus F)$ , 所以  $f^{-1}(F)$  是闭集。

反向证明类似。

### 13.1.3

- (a)

对任意  $\epsilon$ , 由于  $g$  在  $f(x_0)$  处是连续的, 那么存在  $\delta > 0$  使得只要  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \delta$ , 就有  $d_Z(g(f(x)), g(f(x_0))) < \epsilon$ 。

同理, 由于  $f$ , 在  $x_0 \in X$  处是连续的, 那么存在  $\delta' > 0$  使得只要  $d_X(x, x_0) < \delta'$ , 就有  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \delta$ 。

综上, 只要  $d_X(x, x_0) < \delta'$ , 就有  $d_Z(g(f(x)), g(f(x_0))) < \epsilon$ 。所以  $g \circ f : X \rightarrow Z$  在  $x_0$  处是连续的。

- (b)

与 (a) 证明类似, 略。

### 13.1.4

- (a)

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, g(x) = x^2$$

于是

$$g \circ f(x) = 1$$

- (b)

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, f(x) = x^2$$

于是

$$g \circ f(x) = 1$$

- (c)

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \geq 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$$

于是

$$g \circ f(x) = 1$$

### 13.1.5

任意  $x_0 \in E, \epsilon > 0$ , 只要  $d|_{E \times E}(x, x_0) < \epsilon$ , 就有

$$d_X(\iota_{E \rightarrow X}(x), \iota_{E \rightarrow X}(x_0)) = d_X(x, x_0) = d|_{E \times E}(x, x_0) < \epsilon$$

注意, 利用了  $E$  是  $X$  的子集且  $x, x_0 \in E$ 。

由  $x_0$  的任意性可知,  $\iota_{E \rightarrow X}$  是连续的。

### 13.1.6

(1)  $f|_E$  也在  $x_0$  处连续。

设  $(x_n)_{n=1}^\infty$  是  $E$  中依度量  $d_X$  收敛于  $x_0$  的序列, 因为  $E$  是  $X$  的子集, 又  $f$  在  $x_0$  处是连续的, 由定理 13.1.4(b) 可知序列  $(f(x_n))_{n=1}^\infty$  在  $x_0$  依度量  $d_Y$  收敛于  $f(x_0)$ ,  $f|_E(x) = f(x)$  所以  $f|_E$  也在  $x_0$  处连续。

(2) 逆命题。

不成立; 定义

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$E := [0, 1]$ , 于是  $x = 0$  时  $f|_E$  是连续的,  $f$  不是连续的。

(3)  $f$  是连续的, 那么  $f|_E$  就是连续的。

证明与 (1) 同理, 证明略。

### 13.1.7

(1) 对任意的  $x_0 \in X$ ,  $f$  在  $x_0$  处是连续的, 当且仅当  $g$  在  $x_0$  处是连续的。

- $\Rightarrow$

由  $f$  在  $x_0$  处连续可知, 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得只要  $d_X(x, x_0) < \delta$ , 就有  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ 。又因为对所有的  $x \in X$  都有  $g(x) = f(x)$ , 所以  $d_Y(g(x), g(x_0)) < \epsilon$ , 所以  $g$  在  $x_0$  处是连续的。

- $\Leftarrow$

证明类似, 略

(2)  $f$  是连续的, 当且仅当  $g$  是连续的。

证明略。