

9.1 习题

张志聪

2024 年 11 月 30 日

9.1.1

$\overline{X} = \overline{Y}$ 等价于 $\overline{X} \subseteq \overline{Y}, \overline{Y} \subseteq \overline{X}$ 。

- $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ 。

任意 $x \in \overline{X}$ ，因为 x 是附着点，所以对任意 $\epsilon > 0$ ，都存在 $y \in X$ 使得 $|x - y| \leq \epsilon$ 。

由题设 $X \subseteq Y$ 可知， $y \in Y$ ，于是由定义 9.1.8（附着点）可得， x 也是 \overline{Y} 的附着点，即 $x \in \overline{Y}$ 。

由 x 的任意性可知 $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ 。

- $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$ 。

任意 $x \in \overline{Y}$ ，因为 x 是附着点，所以对任意 $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ ，都存在 $y \in Y$ 使得 $|x - y| \leq \frac{1}{2}\epsilon$ 。

由题设 $Y \subseteq \overline{X}$ 可知， $y \in \overline{X}$ ，所以 y 是 X 的附着点，于是存在 $y_x \in X$ 使得 $|y - y_x| \leq \frac{1}{2}\epsilon$ 。

于是由命题 4.3.7 (c) 可知 $|x - y_x| \leq \epsilon$ ，所以 x 也是 X 的附着点。

由 x 的任意性可知 $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$ 。

9.1.2

- $X \subseteq \overline{X}$ 。

任意 $x \in X$ ，对于任意的 $\epsilon > 0$ ，有 $|x - x| \leq \epsilon$ ，所以 x 是 X 的附着点。

由 x 的任意性可知 $X \subseteq \overline{X}$ 。

- $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ 。

- $\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$ 。

任意 $x \in \overline{X \cup Y}$ ，因为 x 是附着点，所以对任意 $\epsilon > 0$ ，都存在 $y \in X \cup Y$ 使得 $|x - y| \leq \epsilon$ 。

如果 $y \in X$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得， x 也是 X 的附着点。

如果 $y \in Y$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得， x 也是 Y 的附着点。

综上 $x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$ 。

- $\overline{X} \cup \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$ 。

任意 $x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$ ，于是要么 $x \in \overline{X}$ ，要么 $x \in \overline{Y}$ （或者两个皆成立）。

以 $x \in \overline{X}$ 为例，因为 x 是 X 的附着点，所以对任意 $\epsilon > 0$ ，存在 $y \in X$ 使得 $|x - y| \leq \epsilon$ 。

因为 $y \in X \cup Y$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得， x 也是 $X \cup Y$ 的附着点。

同理， $x \in \overline{Y}$ 时也成立。

综上 $x \in \overline{X \cup Y}$ 。

- $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$ 。

任意 $x \in \overline{X \cap Y}$ ，因为 x 是 $X \cap Y$ 的附着点，所以对任意的 $\epsilon > 0$ ，存在 $y \in X \cap Y$ ，使得 $|x - y| \leq \epsilon$ 。

因为 $y \in X \cap Y$ ，所以 $y \in X$ 且 $y \in Y$ ，则由定义 9.1.8（附着点）可得 x 是 X 的附着点且是 Y 的附着点，即 $x \in \overline{X} \cap \overline{Y}$ 。

- 如果 $X \subseteq Y$ ，那么 $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ 。

任意 $x \in \overline{X}$ ，因为 x 是 X 的附着点，所以对任意的 $\epsilon > 0$ ，存在 $y \in X$ ，使得 $|x - y| \leq \epsilon$ 。

因为 $X \subseteq Y$ ，所以 $y \in Y$ 则由定义 9.1.8（附着点）可得 x 也是 Y 的附着点，即 $x \in \overline{Y}$ 。

9.1.3

- \mathbb{N} 的闭包是 \mathbb{N} 。

由引理 9.1.11 可得 $\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{N}}$ 。

现在证明附着于 \mathbb{N} 的点只能是 \mathbb{N} 的元素。

假设实数 x 是 \mathbb{N} 的附着点且 $x \notin \mathbb{N}$ ，由命题 5.4.12（有理数对实数的界定）与命题 4.4.1（由有理数确定的整数散布）可得，存在唯一的整数 n 使得 $n < x < n + 1$ （即： x 在两个自然数之间）。

设 $\epsilon = \frac{1}{2}\min(x - n, n + 1 - x)$ ，此时不存在 $y \in \mathbb{N}$ 使得 $|x - y| \leq \epsilon$ ，与 x 是附着点矛盾。

- \mathbb{Z} 的闭包是 \mathbb{Z} 。

由引理 9.1.11 可得 $\mathbb{Z} \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$ 。

现在证明附着于 \mathbb{Z} 的点只能是 \mathbb{Z} 的元素。

证明过程与 \mathbb{N} 一致，这里不做赘述。

- \mathbb{Q} 的闭包是 \mathbb{R} 。

即任意实数 x 都是 \mathbb{Q} 的附着点。对任意 $\epsilon > 0$ ，取 $y = x + \epsilon$ ，由命题 5.4.14 可知，存在有理数 $q \in \mathbb{Q}$ 使得 $x < q < y$ ，此时 $|x - q| \leq \epsilon$ 。

- \mathbb{R} 的闭包是 \mathbb{R} 。

由引理 9.1.11 可得 $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ 。

而有定义 9.1.8 可知，不存在 \mathbb{R} 外的附着点，否则不满足定义了。

- \emptyset 的闭包是 \emptyset 。

因为 \emptyset 中没有元素，也就没有 $x \in R$ 能够满足定义 9.1.8（附着点）的定义。

9.1.4

$$X := [0, 1)$$

$$Y := (1, 2]$$

此时,

$$\overline{X \cap Y} = \emptyset$$

$$\overline{X} \cap \overline{Y} = \{1\}$$

9.1.5

• \Rightarrow

任意 $\alpha \in \overline{X}$, 对任意的正自然数 n , 设 X_n 表示集合

$$X_n := \{x \in X, |x - \alpha| \leq 1/n\}$$

由于 α 是附着点, 所以 X_n 是非空集合。

利用选择公理, 能够找到一个序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 使得 $a_n \in X_n$ 对所有的 $n \geq 1$ 均成立。

以上构造的序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是收敛于 x 且每一个元素都属于 X 。

• \Leftarrow

对任意 $\epsilon > 0$, 由 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x 可知, 存在 N 使得 $n \geq N$ 时,

$$|a_n - x| \leq \epsilon$$

因为序列中的完全是由 X 中的元素构成的, 于是可得 x 是附着点。

9.1.6

说明 1. 这里所说的闭集，应该是和定义 9.1.15 对应的，所以应该是 $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$

- \overline{X} 是闭集 (即 $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$)

由引理 9.1.11 可知 $\overline{X} \subseteq \overline{\overline{X}}$ ，现在需要证明 $\overline{\overline{X}} \subseteq \overline{X}$ 。

设任意 $x'' \in \overline{\overline{X}}$ ，对任意 $\epsilon > 0$ ，都存在 $y' \in \overline{X}$ ，使得

$$|x'' - y'| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

因为 y' 也是 X 的附着点，所以存在 $y \in X$ 使得

$$|y - y'| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

于是由命题 4.3.7 (c) 可知，

$$|x'' - y| \leq \epsilon$$

所以 x'' 也是 X 的附着点，即 $x'' \in \overline{X}$ 。

- 换个表达方式： $X \subseteq Y, \overline{Y} = Y$ ，那么 $\overline{X} \subseteq Y$ (即： $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$)。

任意 $x \in \overline{X}$ ，所以对于任意 $\epsilon > 0$ ，都存在 $y \in Y$ 使得

$$|x - y| \leq \epsilon$$

因为 $X \subseteq Y$ ，于是 $y \in Y$ ，所以 x 也是 Y 的附着点，即 $x \in \overline{Y}$ 。

9.1.7

设

$$X := X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n = \bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} X_i$$

换句话说，要证明 $\overline{X} = X$ 。

由引理 9.1.11 可知， $X \subseteq \overline{X}$ ，接下来我们需要证明 $\overline{X} \subseteq X$ 。

任意 $x \in \overline{X}$ ，对任意 $\epsilon > 0$ ，都存在 $y \in X$ 使得

$$|x - y| \leq \epsilon$$

因为 $y \in X$ ，由公理 3.11 (并集) 可知存在 X_i 使得 $y \in X_i$ ，于是 $x \in \overline{X_i}$ ，由题设可知 $X_i = \overline{X_i}$ ，所以 $x \in X_i$ ，于是 $x \in X$ 。

9.1.8

设

$$X := \bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$$

换句话说, 要证明 $\overline{X} = X$ 。

由引理 9.1.11 可知, $X \subseteq \overline{X}$, 接下来我们需要证明 $\overline{X} \subseteq X$ 。

任意 $x \in \overline{X}$, 对任意 $\epsilon > 0$, 都存在 $y \in X$ 使得

$$|x - y| \leq \epsilon$$

因为 $y \in X$, 由式 (3.4) 可知对任意 X_α 都有 $y \in X_\alpha$, 于是 $x \in \overline{X_\alpha}$, 由题设可知 $X_\alpha = \overline{X_\alpha}$, 再次由式 (3.4) 可知 $x \in X$ 。

9.1.9

• \Rightarrow

任意 $x \in \overline{X}$, 对任意 $\epsilon > 0$, 都有存在 $y \in X$ 使得

$$|x - y| \leq \epsilon$$

即 $W_x := \{y : y \in X, |x - y| \leq \epsilon\}$ 是非空集;

- $W_x \setminus \{x\} \neq \emptyset$, 则 x 也是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点, 所以 x 是极限点。
- $W_x \setminus \{x\} = \emptyset$, 可知 $x \in X$, 且因为 $W_x \setminus \{x\}$ 是空集, 所以任意 $y \in X \setminus \{x\}$ 都满足 $|x - y| > \epsilon$ (特别地 $X \setminus \{x\} = \emptyset$ 空虚的成立), 所以 x 是 X 的孤立点。

• \Leftarrow

观察定义, 如果 x 是 X 的极限点, 无法说明 $x \in X$, 如果是孤立点却能保证 $x \in X$ (定义 9.1.18 孤立点是按蕴含关系定义的, 应该是表述的不准确应是当且仅当的关系, 否则无法推出 $x \in X$), 而根据引理 9.1.11 可知 $X \subseteq \overline{X}$, 所以孤立点肯定是附着点。

接下来要对极限点进行说明。按照定义 9.1.18 可知, X 的任意极限点 x 是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点, 因为 $X \setminus \{x\} \subseteq X$, 所以 x 是 X 的附着点。

说明 2. 错误推论: X 是实直线的一个子集, 对于任意实数 x , 要么是 X 的极限点, 要么是 X 的孤立点。

按照定义 9.1.8 可知, 一个实数 x 要么是 X 的附着点, 要么不是。

习题 9.1.9 中已经证明, 当 x 是附着点, 则 x 要么是 X 的极限点, 要么是孤立点。

当 x 不是附着点, 则 $x \notin X$ (否则肯定是附着点), 按照定义 9.1.18 可知 x 不会是孤立点; x 也不会极限点, 因为 $X \setminus \{x\} = X$ (因为 $x \notin X$), 所以如果是极限点, 则是附着点 (习题 9.1.10 的反推), 与假设矛盾。至此可知, 此时的 x 既不是孤立点也不是极限点。

9.1.10

- \Rightarrow X 是有界的, 按照定义 9.1.22 可知, 存在某个实数 $M > 0$ 使得 $X \subset [-M, M]$, 即任意 $x \in X$ 都满足 $|x| \leq M$, 那么由定义 5.5.1 (上界) 可知 M 是 X 的一个上界, 由定理 5.5.9 (最小上界的存在性) 可知 $\sup(X)$ 是存在, 且由定义 5.5.5 (最小上界) 可知 $\sup(X) \leq M$; 同理可得最大下界 $\inf(X)$ 且 $-M \leq \inf(X)$;

又因为 $\inf(X) \leq \sup(X)$ 可得 (可以直接通过定义证明, 但不能直接使用引理 6.4.13, 因为实数子集可能不是至多可数的)

$$-M \leq \inf(X) \leq \sup(X) \leq M$$

- \Leftarrow 设 $M := \max(|\inf(X)|, |\sup(X)|)$, 有最小上界的定义可知, 对任意 $x \in X$ 都有

$$-M \leq \inf(X) \leq x \leq \sup(X) \leq M$$

所以 $X \subset [-M, M]$, 由此可知 X 是有界的。

9.1.11

反证法, 假设 \bar{X} 不是有界的。

因为 X 是有界, 那么存在 $M > 0$ 使得 $X \subset [-M, M]$, 即任意 $x \in X$ 都满足 $-M \leq x \leq M$;

因为 \overline{X} 不是有界的, 那么对任意实数 $M + \epsilon, \epsilon > 0$, 存在 $x \in \overline{X}$, $x > M + \epsilon$ 或 $x < -M - \epsilon$, 这里以 $x > M + \epsilon$ 为例;

因为 x 是 X 的附着点, 都存在 $y \in X$ 使得

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq \epsilon \\ \Rightarrow \\ y - \epsilon &\leq x \leq y + \epsilon \end{aligned}$$

因为 $y \in X$, 所以 $-M \leq y \leq M$, 于是可得

$$-M - \epsilon \leq x \leq M + \epsilon$$

这与 $x > M + \epsilon$ 矛盾。

9.1.12

- 有限个;

不妨设集合个数为 $n, n \in \mathbb{N}$, 设每个有界子集的找到 M 分别为 M_1, M_2, \dots, M_n , 那么定义 $M := \max(M_1, M_2, \dots, M_n)$ (对 n 进行归纳, 就可以确定该 M 是可以得到的, 参照引理 5.1.14 的证明), 可证并集 $X \subset [-M, M]$ (证明略)

- 无限个;

这里无法使用归纳原理进行证明, 因为实数子集可能不是至多可数的。