6.4 习题

2025 年 5 月 26 日

6.4.1

（1）序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c，那么对任意实数 $\epsilon > 0$，都是最终 $\epsilon-$ 接近于 c 的，即: 能够找到某个 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 c 的。并且对于任意 $N' \geq m$，取 $N_0 := max(N, N')$，此时 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 c 的，即：a_n 是 $\epsilon-$ 接近于 c，对 $n \geq N_0$ 均成立，所以 c 是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N'}^{\infty}$ 的。由 ϵ 的任意性，可知 c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

（2）反证法，存在另一个极限点 d，且 $d \neq c$。$(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c，那么对实数 $\epsilon > 0$，是最终 $\epsilon-$ 接近于 c 的。即: 能够找到 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\epsilon-$ 接近于 c 的。

同时 d 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点，那么，d 是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的，那么存在一个 $n \geq N$ 使得 a_n 是 $\epsilon-$ 接近于 d 的，如果 $d > c$，取 $0 < \epsilon < (d-c)/2$，此时，$|a_n - d| \leq \epsilon$ 与 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 无法同时满足，即 a_n 无法同时 $\epsilon-$ 接近于 c, d。

$d \leq c$ 同理。

6.4.2

这里只说明极限点和上极限，因为下极限的证明可以用上极限类推。

设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个实数序列，c 是一个实数，且 $m' \geq m$ 是一个整数，$k \geq 0$ 是一个非负整数。

（1）与习题 6.1.3 类似的结论

（1.1）c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 极限点，当且仅当 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 极限点。

$\Rightarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 极限点，当且仅当"对任意 $\epsilon > 0$，对每一个 $N \geq m$，c 都是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的"，我们把引号中的性质定义声明为 P，即对任意 N，只要 $N \geq m$ 都具有性质 P。因为 $m' \geq m$，于是对任意 N，$N \geq m' \geq m$ 都具有性质 P，所以 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点。

$\Leftarrow c$ 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点。对任意 $\epsilon > 0$，对每一个 N，

如果 $N \geq m'$，由于 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点，那么，c 都是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的；

如果 $m \leq N < m'$，我们要证明此时 c 也是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$，即：要证明存在一个 $n \geq N$ 使得 a_n 是 $\epsilon-$ 接近于 c。我们可以取 $n \geq m'$，那么 n 也是大于 N，还是由 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的极限点，保证了 n 的存在性。

综上 c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

（1.2）c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限，当且仅当 c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限。

$\Rightarrow$ c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限，即：序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的下确界是 c。序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集。

反证法，假设 c 不是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限，设 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限是 c'【这里其实要证明 c' 的存在性。可以通过以下命题得到 c' 是存在的：**有上界序列存在实数上极限，否则上极限不是实数，而是 $+\infty$**】。

如果 $c' > c$，那么，存在 $m \leq N_0 < m'$ 使得 $c \leq a_{N_0}^+ < c'$，因为 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的子集，所以 $sup((a_n)_{n=m'}^{\infty}) \leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，又因为 $c' \leq sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})$，于是 $c' \leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，即：$c' \leq a_{N_0}^+$。这与 $c \leq a_{N_0}^+ < c'$ 矛盾。

如果 $c > c'$，因为序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集，所以 $inf((a_N^+)_{N=m'}^{\infty}) \geq inf((a_N^+)_{N=m}^{\infty})$，即：$c' \geq c$，这与 $c > c'$ 矛盾。

综上，$c = c'$。

$\Leftarrow$ c 是 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 的上极限，即：序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 的下确界是 c。序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集。

反证法，假设 c 不是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限，设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限是 c'。

如果 $c > c'$，那么，存在 $m \leq N_0 < m'$ 使得 $c' \leq a_{N_0}^+ < c$，因为 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的子集，所以 $sup((a_n)_{n=m'}^{\infty}) \leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，又因为 $c \leq sup((a_n)_{n=m'}^{\infty})$，于是 $c \leq sup((a_n)_{n=N_0}^{\infty})$，即：$c < a_{N_0}^+$。这与 $c' \leq a_{N_0}^+ < c$ 矛盾。

如果 $c < c'$，因为序列 $(a_N^+)_{N=m'}^{\infty}$ 是序列 $(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 的子集，所以 $inf((a_N^+)_{N=m'}^{\infty}) \geq inf((a_N^+)_{N=m}^{\infty})$，即：$c' \geq c$，这与 $c < c'$ 矛盾。

综上，$c = c'$。

与习题 6.1.4 类似的结论

该问题是 6.1.3 的拓展，这里我只证明一种情况。

（2.1）c 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点，当且仅当 c 是 $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。

如果我们能证明 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 与 $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 相等的，然后通过（1.1）就可以证明该命题，接下来我们证明这两个序列的相等的。

通过定义 5.5.1 可知，序列就是函数，是一个从集合 Z 到 R 的函数。于是我们要证明两个序列相等，只需要证明其对应函数相等。通过定义 3.3.7（函数的相等）来进行接下来的证明。

设 $f : N \to R$ 为函数 $f(n) = a_{n+k}$，设 $g : N \to N$ 为函数 $g(m) = m$。那么 $f \circ g = f(g(m)) = a_{g(m)+k} = a_{m+k}$。

设 $f' : N \to R$ 为函数 $f'(n) = a_n$，设 $g' : N \to N$ 为函数 $g'(m) = m+k$。那么 $f' \circ g' = f'(g'(m)) = a_{m+k}$。

由 $f \circ g, f' \circ g'$ 的构造过程可知两个具有相同的定义域，又对于任意的 $x \in N$，$f \circ g(x) = a_{x+k}, f' \circ g'(x) = a_{x+k}$，所以 $f \circ g(x) = f' \circ g'(x)$，由此可知两个函数相等，即两个序列相等。

6.4.3

不妨设 $E := \{a_n : n \geq m\}$，$M = sup(E), M' = inf(E)$。

（c）

由例 6.2.10 可知 $M \geq M'$，接下来我只证明 $L^+ \leq M$（可以类推 $M' \leq L^-$）和 $L^- \leq L+$。

反证法，假设 $L^+ > M$。由命题 6.3.6 可知对任意 $n \geq m$，都有 $a_n \leq M$。因为 $L^+ := inf(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 则也由命题 6.3.6 可知存在 $N \geq m$ 使得 $a_N^+ > L^+$，由 $a_N^+ := sup(a_n)_{n=N}^{\infty}$，可知存在 $n \geq N$ 使得 $a_n > L^+$，这与任意 $a_n \leq M$ 矛盾。

反证法，假设 $L^- > L^+$，由 $L^- := sup(a_N^-)_{N=m}^{\infty}$ 可知存在 $N_0 \geq m$ 使得 $a_{N_0}^- > L^+$，由因为 $L^+ := inf(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$，所以存在 $N_1 \geq m$ 使得 $a_{N_0}^- > a_{N_1}^+$【否则上极限就不是 L^+ 了，而是一个大于等于 $a_{N_0}^-$ 的数了】。由 $a_{N_0}^- := inf(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 定义，可知对 $n \geq N_0$ 都有 $a_n \geq a_{N_0}^-$，由 $a_{N_1}^+ := sup(a_n)_{n=N_1}^{\infty}$ 定义，可知对 $n \geq N_1$ 都有 $a_n \leq a_{N_1}^+$，取 $n \geq max(N_0, N_1)$ 此时 $a_{N_0}^- \leq a_n \leq a_{N_1}^+$，这与 $a_{N_0}^- > a_{N_1}^+$ 矛盾。

（**d**）

这里我只证明 $c \le L^+$，因为 $L^- \le c$ 可以类推。

反证法，假设 $c > L^+$，由 $L^+ := inf(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$ 可知，由命题 6.3.6 可知，存在 $N_0 \ge m$ 使得 $a_{N_0}^+ < c$，又因为 $a_{N_0}^+ := sup(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$，所以任意 $n \ge N_0$ 都有 $a_n \le a_{N_0}^+$，由此可知，

$$\begin{aligned}|c-a_n| &= |c-a_{N_0}^+ + a_{N_0}^+ - a_n| \\ &= |c-a_{N_0}^+| + |a_{N_0}^+ - a_n| \\ &> |c-a_{N_0}^+|\end{aligned}$$

此时 c, a_n 的距离总是大于 $|c-a_{N_0}^+|$，这与 c 是极限点的定义矛盾。

（**e**）

这里我只证明 L^+ 是极限点，因为 L^- 可以类推。

反证法，假设 L^+ 不是极限点，那么通过极限点的定义 6.4.1 可知，存在 $\epsilon > 0, N_0 \ge m$，此时 L^+ 不是 $\epsilon-$ 附着于 $(a_n)_{n=N_0}^{\infty}$ 的，即对任意 $n \ge N_0$，都有，

$$\begin{aligned}&|L^+ - a_n| > \epsilon \\ &\Rightarrow \\ &a_n > L^+ + \epsilon 或 a_n < L^+ - \epsilon\end{aligned}$$

因为 $L^+ := inf(a_N^+)_{N=m}^{\infty}$，那么对任意 $N \ge m$ 都有 $a_N^+ \ge L^+$。又 $a_N^+ := sup(a_n)_{n=N}^{\infty}$。综上，我们可以得到，对任意 $N \ge m, n \ge N$ 都有：

$$\begin{cases} a_n \le a_N^+ \\ L^+ \le a_N^+ \end{cases} \tag{1}$$

（1）如果 $n, N \ge N_0, a_n > L^+ + \epsilon$，那么，

$$a_N^+ \ge a_n > L^+ + \epsilon$$

而对于 $N < N_0$，由 a_N^+ 的定义可知，$a_N^+ \ge a_{N_0}^+$，于是此时 $L^+ + \epsilon$ 是上极限，这与下确界的唯一性矛盾（上极限其实就是集合的下确界）。

（2）如果 $n \ge N_0, a_n < L^+ - \epsilon$，由此可知，$N \ge N_0$ 时，

$$a_N^+ \le L^+ - \epsilon$$

这与 $L^+ \leq a_N^+$ 矛盾。

(f)

$\Rightarrow$

由命题 6.4.5 可知 c 是极限点，如果 $L^+ \neq c$，那么由（e）可知 L^+ 也是极限点，这与命题 6.4.5 的后半部分相悖。

$\Leftarrow$

由于 $L^+ = L^-$，由（e）可知，$(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 有且只有一个极限点，也就是说 c 是极限点。接下来要证明序列收敛与 c。

反证法，假设 c 序列不收敛于 c，那么，存在 $\epsilon > 0$，找不到 $N \geq m$，使得 $n \geq N$ 时，都有 $|a_n - c| \leq \epsilon$，即：总是存在 $|a_n - c| > \epsilon$。

（1）如果 $a_n > c + \epsilon$，由 L^+, a_N^+ 的定义可知对任意 $N \geq m, n \geq N$ 都有，

$$\begin{cases} a_n \leq a_N^+ \\ L^+ \leq a_N^+ \end{cases} \tag{2}$$

由此可得 $a_N^+ \geq c + \epsilon = L^+ + \epsilon$ 对任意 N 均成立，由此可知上极限不是 L^+，这与题设相悖。

（2）如果 $a_n < c - \epsilon$，同理可证其与下极限是 L^- 相悖。

6.4.4

这里我只证明（1）（3），其他的可以类推。

(1)

不妨设

$$M = sup(b_n)_{n=m}^{\infty}$$
$$M' = sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$$

反证法，假设 $M' > M$，取 $m, M < m < M'$，由命题 6.3.6 可知至少存在一个 $n \geq m$ 使得 $m < a_n \leq M'$，此时 $a_n > m > M$，由于 M 是上确界，所以 $b_n \leq M$，于是 $a_n > b_n$，与题设相悖。

(3)

不妨设

$$L^+ = inf(b_N^+)_{n=m}^{\infty}$$
$$L^{+'} = inf(a_N^+)_{n=m}^{\infty}$$

又因为对任意 $N \geq m$ 都有

$$a_N^+ := sup(a_n)_{n=N}^{\infty}$$
$$b_N^+ := sup(b_n)_{n=N}^{\infty}$$

由（1）可知 $b_N^+ \geq a_N^+$，于是由（2）可知 $L^{+'} \leq L^+$

6.4.5

由命题 6.4.12（f）可知，$(a_n)_{n=m}^{\infty}, (c_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 L，那么，两者的上极限 L^+ 和下极限 L^- 都等于 L，即：$L^+ = L^- = L$。

设 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 的上极限和下极限分别为 $L^{+'}, L^{-'}$。由引理 6.4.15 可知，

$$\begin{cases} L^- \leq L^{-'} \leq L^- \\ L^+ \leq L^{+'} \leq L^+ \end{cases} \tag{3}$$

由此可知 $L^{+'} = L^{-'} = L$，由命题 6.4.12（f）可知 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 L

6.4.6

定义 $a_n := 1 - \frac{1}{n}, b_n := 1 - \frac{1}{n+1}$，满足 $a_n < b_n$，此时 $sup(a_n)_{n=1}^{\infty} = sup(b_n)_{n=1}^{\infty} = 1$。

引理 6.4.13 中描述的是 $a_n \leq b_n$，包含 $a_n < b_n$ 的情况，其结果是 $sup(a_n)_{n=m}^{\infty} \leq sup(b_n)_{n=m}^{\infty}$，也包含 $sup(a_n)_{n=1}^{\infty} = sup(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 的情况。

6.4.7

（1）证明推论 6.4.17。

$\Rightarrow$

极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在且等于 0，则对任意实数 $\epsilon > 0$，存在 N 使得 $n \geq N$ 时，$|x - 0| = |x| \leq \epsilon$ 均成立。由于 $||x| - 0| = |x| \leq \epsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

$\Leftarrow$

因为 $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$，又由极限定律（定理 6.1.19）可知 $\lim\limits_{n\to\infty} -|a_n| = -1 \times 0 = 0$，由推论 6.4.14 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在且等于 0

（2）换成其他某个数字，该推论不成立，因为夹逼定理的左右值无法相等。

6.4.8

（1）当序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 有上界，则该序列存在有限的 L^+【这是由定理 5.5.9 保证的】，由命题 6.4.12（d）（e）可知，上极限是序列的最大极限点。

（2）当序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 无上界，此时每一个 $N \geq m$，a_N^+ 都是无上界的，由 L^+ 的定义可知 $L^+ = +\infty$。由题设可知 $+\infty$ 是极限点，且 $+\infty$ 大于任意实数，由此可知上极限是序列的最大极限点。

6.4.9

定义一个分段函数即可，

$$\begin{cases} a_n & = 0 \text{ (n 除以 3 余 0)} \\ a_n & = \text{-n (n 除以 3 余 1)} \\ a_n & = \text{n (n 除以 3 余 2)} \end{cases} \tag{4}$$

6.4.10

反证法，假设 c 不是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点。即：存在 $\epsilon' > 0, N_0 \geq m$，找不到 $n \geq N_0$ 使得 $|a_n - c| < \epsilon'$。下面要证明这个 N_0 是不存在的。

c 是 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点，那么，对任意 $\epsilon > 0$，对每一个 $N \geq m$ 都存在 $n \geq N$ 使得 $|b_n - c| \leq \epsilon$，即：$c - \epsilon \leq b_n \leq c + \epsilon$。

又找到的 b_n 是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 的极限点，那么，对每一个 $N' \geq m$ 都存在 $n' \geq N'$ 使得 $|a_n' - b_n| \leq \epsilon$，即：$b_n - \epsilon \leq a_n' \leq b_n + \epsilon$。

由 $c - \epsilon \leq b_n \leq c + \epsilon$ 可知，

$$c - 2\epsilon \leq a_n' \leq c + 2\epsilon$$

对任意 ϵ（把 ϵ' 看做 $\frac{1}{2}\epsilon$），$N' \geq m$ 上式都成立，可知 N_0 是不存在的。