9.9 习题

张志聪

2024 年 12 月 8 日

9.9.1

- $\Rightarrow$

  对于任意 $\epsilon > 0$，因为序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的，由定义 9.9.5 两者是最终 $\epsilon-$ 接近的，即存在正整数 $N \geq 1$ 使得 $|a_n - b_n| \leq \epsilon$ 对任意 $n \geq N$ 均成立，即序列 $(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近于 0，由定义 6.1.5（序列的收敛）可知序列 $(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 0，即 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$。

- $\Leftarrow$

  $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$，那么，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在正整数 $N \geq 1$ 使得 $|a_n - b_n| \leq \epsilon$ 对任意 $n \geq N$ 均成立，于是可得，序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近的。由定义 9.9.5 可知，序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的。

9.9.2

- $(a) \implies (b)$

  f 在 X 是一致连续的，则对任意 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ 对任意 $x, y \in X, |x - y| \leq \delta$ 均成立。

  因为 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ 是由 X 中元素构成的等价序列，那么，存在正整数 N 使得

  $$|x_n - y_n| \leq \delta$$

此时

$$|f(x_n) - f(y_n)| \le \epsilon$$

由定义 9.9.5 可知 $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ 和 $(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$ 是等价的。

- $(b) \implies (a)$

  反证法，假设 f 在 X 上不是一致连续的。那么，存在 $\epsilon_0 > 0$，对任意 $n \in \mathbb{N}$ 存在 $x_n, y_n \in X$ 当 $|x_n - y_n| < 1/n$ 都有 $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon_0$。

  由定义 9.9.5 可知，$(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的，但因为对任意 n 都有 $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon_0$ 可知，$(f(x_n))_{n=1}^{\infty}, (f(y_n))_{n=0}^{\infty}$ 不是等价的。这与题设 (b) 矛盾。

9.9.3

f 在 X 是一致连续的,则对任意 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(x)-f(y)| \le \epsilon$ 对任意 $x, y \in X, |x - y| \le \delta$ 均成立。

因为 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 是柯西序列，即存在 N 使得对任意 $n, m \ge N$ 都有

$$|x_n - x_m| \le \delta$$

此时

$$|f(x_n) - f(x_m)| \le \epsilon$$

于是可得 $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ 是柯西序列。

9.9.4

x_0 是 X 的附着点，由引理 9.1.14 可知，存在一个完全由 X 中元素构成的序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x_0。由定理 6.4.18 可得收敛序列是柯西序列，则由命题 9.9.12 可知，$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ 是柯西序列，再次利用定理 6.4.18 可得柯西序列收敛，于是 $\lim_{x \to x_0; x \in X} f(x)$ 存在。

例 9.9.10 另一种证明：

序列 $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $(0, 2)$ 中的柯西序列，但是序列 $f(1/n)_{n=1}^{\infty}$ 发散（不是柯西序列），所以根据命题 9.9.12 可知，f 不是一致连续的。

9.9.5

反证法，假设 $f(E)$ 是无界的，那么对任意的实数 M 都存在一个元素 $x \in E$ 使得 $f(x) \geq M$.

特别地，对于每一个自然数 n，集合 $\{x \in E : |f(x)| \geq n\}$ 都是非空的。所以我们可以使用选择公理选取 E 中的一个序列 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 使得 $|f(x_n)| \geq n$ 对所有的 n 均成立。由于这个序列属于有界子集 E，由定理 6.6.8 可知，$(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 有一个收敛的子序列 $(x_{n_j})_{j=0}^{\infty}$，其中 $n_0 < n_1 < n_2 < ...$ 是一个递增的自然数序列。特别地，对于所有的 $j \in N$ 均有 $n_j \geq j$。

由定理 6.4.18 可得收敛序列是柯西序列,则由命题 9.9.12 可知,$(f(x_{n_j}))_{n=0}^{\infty}$ 是柯西序列，再次利用定理 6.4.18 可得 $(f(x_{n_j}))_{n=0}^{\infty}$ 是收敛序列。

另外，我们从序列的构造过程中看出 $|f(x_{n_j})| \geq n_j \geq j$ 对所有的 j 均成立，从而序列 $(f(x_{n_j}))_{n=0}^{\infty}$ 是无界的，这是一个矛盾。

9.9.6

任意 $\epsilon > 0$，因为函数 $g : Y \to Z$ 是 Y 上的一致连续函数，存在一个 $\delta_g > 0$ 使得

$$|g(x) - g(y)| \leq \epsilon$$

对任意 $x, y \in Y, |x - y| \leq \delta_g$ 均成立。

因为函数 $f : X \to Y$ 是 X 上的一致连续函数，存在一个 $\delta_f > 0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq \delta_g$$

对任意 $x, y \in X, |x - y| \leq \delta_f$ 均成立。

综上，

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| \leq \epsilon$$

对任意 $x, y \in X, |x - y| \leq \delta_f$ 均成立。

所以，$g \circ f$ 是 X 上的一致连续函数。