12.1 习题

张志聪

2025 年 1 月 16 日

12.1.1

令 $a_n = d(x_n, x) = |x_n - x|$，于是 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个实数序列。

$(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛与 x

$\Leftrightarrow$

对任意 $\epsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n \geq N$ 时，$|x_n - x| \leq \epsilon$

$\Leftrightarrow$

对任意 $\epsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n \geq N$ 时，$a_n \leq \epsilon$

$\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

12.1.2

需要证明这里的度量 $d(x, y) := |x - y|$ 满足定义 12.1.2。

命题 4.3.3(a)，满足了定义 12.1.2 中的公理 (a),(b)（因为任意 $x, y \in \mathbb{R}, x - y$ 都是实数）；

命题 4.3.3(f)，满足了定义 12.1.2 中的公理 (c)；

命题 4.3.3(g)，满足定义 12.1.2 中的公理 (d)。

12.1.3

- (a)

  把离散度量 d_{disc} 做一点修改：当 $x = y$ 时，$d_{disc}(x, y) := 2$。

- (b)

  把离散度量 d_{disc} 做一点修改：当 $x \neq y$ 时，$d_{disc}(x,y) := 0$。

- (c)

  定义 $X := \mathbb{R} - \{0\}$ 并且度量 d 如下：

$$d(x,x) := 0$$
$$d(x,y) := |x| \; if \; x \neq y$$

- (d)

  定义 $X := \{a,b,c\}$ 并且度量 d 如下：

$$d(x,x) := 0 \; if \; x \in X$$
$$d(a,b) = d(b,a) = 1, d(b,c) = d(c,b) = 1$$
$$d(a,c) = d(c,a) = 3$$

12.1.4

任意 $x,y \in Y; x,y \in X$，所以 $d|_{Y \times Y}(x,y) = d(x,y)$，因为 d 满足所有的公理，那么 $d|_{Y \times Y}$ 也满足所有的公理。

12.1.5

（1）恒等式

证明框架：对 n 进行归纳，证明略

（2）推导出柯西-施瓦茨不等式

证明框架：对恒等式开方，且 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$ 可证。

（3）证明三角不等式

12.1.6

- 公理 (a)

当 $x=y$ 时，对任意第 i 个坐标分量都有 $(x_i-y_i)^2=0$，所以

$$\begin{aligned} d_{l^2}(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}0\right)^{1/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 公理 (b)

  当 $x\neq y$ 时，存在第 i 个坐标分量使得 $(x_i-y_i)^2>0$，所以 $d_{l^2}(x,y)>0$。

- 公理 (c)

  任意的 $x,y\in X$，它们的任意第 i 个坐标分量都有 $(x_i-y_i)^2=(y_i-x_i)^2$，所以 $d_{l^2}(x,y)=d_{l^2}(y,x)$。

- 公理 (d)

  定义 $x_i-y_i=a_i, y_i-z_i=b_i$ 于是

$$\begin{aligned} d_{l^2}(x,z) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\right)^{1/2} \\ &= d_{l^2}(x,y)+d_{l^2}(y,z) \end{aligned}$$

  综上可得

$$d_{l^2}(x,z)\leq d_{l^2}(x,y)+d_{l^2}(y,z)$$

12.1.7

- 公理 (a)

当 $x = y$ 时，对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = 0$，所以

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 = 0$$

- 公理 (b)

  当 $x \neq y$ 时，存在第 i 个坐标分量使得 $|x_i - y_i| > 0$，其他坐标分量 j 都有 $|x_j - y_j| \geq 0$，所以 $d_{l^1}(x, y) > 0$。

- 公理 (c)

  对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$，所以

  $$d_{l^1}(x, y) = d_{l^1}(y, x)$$

- 公理 (d)

  对任意第 i 个坐标分量，由命题 4.3.3(g) 可知，

  $$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

  所以，

  $$d_{l^1}(x, z) \leq d_{l^1}(x, y) + d_{l^1}(y, z)$$

12.1.8

（1）第一个不等式

$$d_{l^2}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$
$$d_{l^1}(x, y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$$

两边同时取平方

$$\begin{aligned}
(d_{l^2}(x, y))^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \\
(d_{l^1}(x, y))^2 &= (|x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|)(|x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{1 \leq j \leq n, i \neq j} |x_i - y_i||x_j - y_j|
\end{aligned}$$

由上式可得

$$
\begin{aligned}
&(d_{l^2}(x,y))^2 \leq (d_{l^1}(x,y))^2 \\
&\implies \\
&d_{l^2}(x,y) \leq d_{l^1}(x,y)
\end{aligned}
$$

（2）第二个不等式

$$d_{l^1}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

利用柯西-施瓦茨不等式可得

$$
\begin{aligned}
d_{l^1}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \left|\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{n} d_{l^2}(x,y)
\end{aligned}
$$

12.1.9

- 公理 (a)

  当 $x = y$ 时，对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = 0$，所以

  $$\sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} = 0$$

- 公理 (b)

  当 $x \neq y$ 时，存在第 i 个坐标分量使得 $|x_i - y_i| > 0$，所以

  $$\sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} > 0$$

- 公理 (c)

  对任意第 i 个坐标分量都有 $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$，所以

  $$d_{l^\infty}(x,y) = d_{l^\infty}(y,x)$$

- 公理 (d)

  对任意第 i 个坐标分量，由命题 4.3.3(g) 可知，

  $$|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

  所以，

  $$d_{l^\infty}(x,z) \le d_{l^\infty}(x,y) + d_{l^\infty}(y,z)$$

12.1.10

设 $\sup\{|x_i - y_i| : 1 \le i \le n\} = r$。
（1）第一个不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}} d_{l^2}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} r^2\right)^{1/2} \\ &= r \\ &= d_{l^\infty}(x,y)\end{aligned}$$

（2）第二个不等式
存在一个 i 使得 $|x_i - y_i| = r$。反证法，对任意 i 都有

$$|x_i - y_i| < r$$

有定义可知，度量都是有限维的，即 n 不会是 $+\infty$，取 $m = max|x_i - y_i|, 1 \le i \le n$（引理 5.1.14），此时 $m < r$ 且 m 是上界，这与 r 是最小上界矛盾（定义 5.5.5）。
所以

$$d_{l^2}(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} \ge (r^2)^{1/2} = r = d_{l^\infty}(x,y)$$

12.1.11

略

12.1.12

为了利用式 (12.1)、(12.2)，我们的证明步骤如下（需要保证是环状的）

$$(d) \implies (c) \implies (b) \implies (a)$$
$$(a) \implies (d)$$

- $(b) \implies (a)$

  (b) 成立，即 $\lim_{k\to\infty} d_{l^1}(x^{(k)}, x) = 0$，即对任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $N \geq m$ 使得 $d_{l^1}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。

  由式 12.1 可知

  $$d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq d_{l^1}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$$

  对所有的 $k \geq N$ 均成立。于是 (a) 成立。

- $(c) \implies (b)$

  任意 $\epsilon > 0$ 于是 $\epsilon' = \frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon > 0$（注意这里的 n 是固定值），因为 (c) 成立，所以存在一个 $N \geq m$ 使得 $d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon'$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。

  由式 12.2 可知

  $$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{n}} d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon' = \frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon \\ &\implies \\ &d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon\end{aligned}$$

- $(d) \implies (c)$

  (d) 成立，那么对任意 $1 \leq i \leq n, \epsilon > 0$ 存在一个 $N \geq m$ 使得 $|x_i^{(k)} - x_i| \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。

  由 l^∞ 度量的定义可知 $d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) = \sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。于是 (c) 成立。

- $(a) \implies (d)$

  (a) 成立，那么对任意 $\epsilon > 0 > 0$ 存在一个 $N \geq m$ 使得 $d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立。即（注意：以下的 $x_i^{(k)}$ 要看做实数，不能看

做“点”)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-x_i)^2\right)^{1/2}\le\epsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-x_i)^2\le\epsilon^2$$

那么，对每一个 $1\le i\le n$ 都有

$$(x_i^{(k)}-x_i)^2\le\epsilon^2$$

$$\Longrightarrow$$

$$|x_i^{(k)}-x_i|\le\epsilon$$

对所有的 $k\ge N$ 均成立。

所以 (d) 成立。

12.1.13

反证法，假设 d_{disc} 收敛于 x，但 N 不存在。那么，任意 $N\ge m$ 都至少存在一个 $n\ge N$ 使得

$$x^{(n)}\neq x$$

由离散度量 d_{disc} 的定义可知，此时 $d_{disc}(x,x^{(n)})=1$。由于 N 的任意性可知，定义 12.1.14（度量空间中序列的收敛）中的定义无法满足，与假设 d_{disc} 收敛于 x 矛盾。

12.1.14

为了推出矛盾，我们假设 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 依度量 d 同时收敛于 x,x'，设 $\epsilon=d(x,x')/3$。注意，因为 $x\neq x'$，所以 ϵ 是正的。由 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 依度量 d 收敛于 x 可知，存在一个 $N\ge m$ 使得 $d(x^{(n)},x)\le\epsilon$ 对所有的 $n\ge N$ 均成立。类似地，存在一个 $M\ge m$ 使得 $d(x^{(n)},x')\le\epsilon$ 对所有的 $n\ge M$ 均成立。特别地，如果令 $n:=max(N,M)$，那么有 $d(x^{(n)},x)\le\epsilon$ 和 $d(x^{(n)},x')\le\epsilon$，于

是根据三角不等式（定义 12.1.2 公理 (d)）可得，$d(x,x') \le 2\epsilon = 2d(x,x')/3$。所以 $d(x,x') \le 2d(x,x')/3$, 这和 $d(x,x') > 0$ 矛盾。所以度量空间中的序列不能同时收敛于两个不同的点。

12.1.15

（1）d_{l^1} 是 X 上的度量。

- 公理 (a)

  如果序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是相等的，那么对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n = b_n$，所有

$$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty},(b_n)_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| = 0$$

- 公理 (b)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 不相等，对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n - b_n| \ge 0$，且两个序列不相等，所以至少存在一个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - b_n| > 0$，所以

$$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty},(b_n)_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| > 0$$

- 公理 (c)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$，对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$，所以

$$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty},(b_n)_{n=0}^{\infty}) = d_{l^1}((b_n)_{n=0}^{\infty},(a_n)_{n=0}^{\infty})$$

- 公理 (d)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty},(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$，对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有

$$|a_n - c_n| \le |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$$

于是

$$\begin{aligned}
d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty},(c_n)_{n=0}^{\infty}) &= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n-c_n| \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty}|a_n-b_n|+|b_n-c_n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n-b_n|+\sum_{n=0}^{\infty}|b_n-c_n| \\
&= d_{l^1}((a_n)_{n=0}^{\infty},(b_n)_{n=0}^{\infty})+d_{l^1}((b_n)_{n=0}^{\infty},(c_n)_{n=0}^{\infty})
\end{aligned}$$

（2）d_{l^∞} 是 X 上的度量。

- 公理 (a)

  如果序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是相等的，那么对任意 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $a_n=b_n$，于是 $|a_n-b_n|=0$，所有

$$d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^{\infty},(b_n)_{n=0}^{\infty})=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|=0$$

- 公理 (b)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 不相等，对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $|a_n-b_n|\ge 0$，且两个序列不相等，所以至少存在一个 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $|a_n-b_n|>0$，所以

$$d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^{\infty},(b_n)_{n=0}^{\infty})=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|>0$$

- 公理 (c)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$，对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $|a_n-b_n|=|b_n-a_n|$，所以

$$d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^{\infty},(b_n)_{n=0}^{\infty})=d_{l^\infty}((b_n)_{n=0}^{\infty},(a_n)_{n=0}^{\infty})$$

- 公理 (d)

  序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty},(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 与 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$，对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 都有

$$|a_n-c_n|\le|a_n-b_n|+|b_n-c_n|$$

于是（有用到引理 6.4.13（比较原理））

$$\begin{aligned}d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty,(c_n)_{n=0}^\infty)&=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-c_n|\\&\le\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|+|b_n-c_n|\end{aligned}$$

接下来，我们需要证明

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|+|b_n-c_n|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|+\sup_{n\in\mathbb{N}}|b_n-c_n|$$

不妨设 $M:=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|+|b_n-c_n|, p:=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|, q:=\sup_{n\in\mathbb{N}}|b_n-c_n|$ 反证法，假设 $M\neq p+q$，那么 $M>p+q$ 或者 $M<p+q$，我们以 $M>p+q$ 为例，于是存在 $m, M>m>p+q$，由最小上界的性质可知（命题 6.3.6），存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得

$$|a_n-b_n|+|b_n-c_n|>m>p+q$$

于是 $|a_n-b_n|>p$ 或 $|b_n-c_n|>q$，这与 p,q 是最小上确界矛盾。

所以

$$\begin{aligned}d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty,(c_n)_{n=0}^\infty)&\le\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|+|b_n-c_n|\\&=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|+\sup_{n\in\mathbb{N}}|b_n-c_n|\\&=d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty,(b_n)_{n=0}^\infty)+d_{l^\infty}((b_n)_{n=0}^\infty,(c_n)_{n=0}^\infty)\end{aligned}$$

（3）存在一个由 X 中元素构成的序列 $x^{(1)},x^{(2)},\cdots$（即序列的序列），它依度量 d_{l^∞} 收敛但不依度量 d_{l^1} 收敛。

这里可以手动构造一个

$$\begin{aligned}(a_n)_{n=0}^\infty, a_n=1/k\\x^{(k)}=(a_n)_{n=0}^\infty\end{aligned}$$

于是 $x^{(k)}$ 收敛于 $1/k$，序列 $x^{(1)},x^{(2)},\cdots$ 依度量 d_{l^∞} 收敛于 $(a_n)_{n=0}^\infty, a_n=0$，但不依度量 d_{l^1} 收敛，这里简单说明下原因，因为两个点 $x^{(p)},x^{(q)}$，每个坐标分量 i 都有

$$|x_i^{(p)}-x_i^{(q)}|=|1/p-1/q|=\frac{1}{pq}$$

而每个点的坐标分量个数是 ∞，所以 $d_{l^1}(x^{(p)}, x^{(q)}) = \infty$

（4）任何一个依度量 d_{l^1} 收敛的序列都依度量 d_{l^∞} 收敛。

不妨设序列依度量 d_{l^1} 收敛于 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$，那么对于任意 $\epsilon > 0$ 存在一个 N，使得

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i - x_i| \leq \epsilon$$

对 $n \geq N$ 均成立。

于是可得

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i - x_i| \leq \epsilon$$

所以，序列依度量 d_{l^∞} 收敛于 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$。

12.1.16

由 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于点 $x \in X$，对于任意 $\epsilon > 0, \frac{1}{2}\epsilon > 0$，存在一个 $N \geq 1$ 使得

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

类似地，存在 $M \geq 1$ 使得

$$d(y_n, y) \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $n \geq M$ 均成立。

取 $m = max(N, M)$ 使得

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \\ &\Longrightarrow \end{aligned}$$

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n) \leq \epsilon$$

对所有的 $n \geq m$ 均成立。

由 ϵ 的任意性和 $d(x, y)$ 是常量可知

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$