5.3 文中的为什么

2024 年 5 月 23 日

1.$-LIM_{n\to\infty}a_n = LIM_{n\to\infty}(-a_n)$

证明：

由实数负运算的定义可知，

$$\begin{aligned}
-LIM_{n\to\infty}a_n &= (-1)\times LIM_{n\to\infty}a_n \\
&= LIM_{n\to\infty}-1\times LIM_{n\to\infty}a_n \\
&= LIM_{n\to\infty}(-a_n) && \text{【实数乘法定义】}
\end{aligned}$$

2. 序列 $0.1, 0.01, 0.001, ...$ **等价于零序列** $(0)_{n=1}^{\infty}$

证明：

其实序列 $0.1, 0.01, 0.001, ...$ 就是 $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$，对任意有理数 $\epsilon > 0$，当 $N \geq \frac{1}{\epsilon}$（有命题 4.4.1 保证 N 是存在的），使得对所有 $n \geq N$ 有，

$$|1/n - 0| = 1/n \leq \epsilon$$

所以序列 $0.1, 0.01, 0.001, ...$ 与零序列 $(0)_{n=1}^{\infty}$ 对任意 ϵ 是最终 $\epsilon-$ 接近的，所以两者是等价的。

3. 如何推导？

证明：

这里要先证明，有理数 x, y 具有以下性质 $|x| - |y| \leq |x - y|$。

$x = x - y + y$，然后由命题 4.3.3（b）(绝对值的三角不等式) 可知，

$$\begin{aligned}
|x| &\leq |x-y| + |y| \\
|x| - |y| &\leq |x-y| && \text{【命题 4.2.9（d）】}
\end{aligned}$$

于是性质 $|x|-|y|\le|x-y|$ 得证。

利用刚才的性质，可得，

$$\begin{aligned}|b_{n_0}|-|b_n| &\le |b_{n_0}-b_n|\\ |b_{n_0}|-|b_n| &\le \frac{1}{2}\epsilon\\ \epsilon\le|b_{n_0}| &\le \frac{1}{2}\epsilon+|b_n|\\ \epsilon &\le \frac{1}{2}\epsilon+|b_n|\\ \frac{1}{2}\epsilon &\le |b_n|\end{aligned}$$

4.$xx^{-1}=x^{-1}x=1$ **为什么？**

不妨设 $x=LIM_{n\to\infty}a_n$，那么由定义 5.3.16（实数的倒数）可知 $x^{-1}=LIM_{n\to\infty}a_n^{-1}$，所以，

$$\begin{aligned}x^{-1}x &= LIM_{n\to\infty}a_n^{-1}\times LIM_{n\to\infty}a_n\\ &= LIM_{n\to\infty}a_n^{-1}a_n\\ &= LIM_{n\to\infty}1\\ &= 1\end{aligned}$$

同时，

$$\begin{aligned}xx^{-1} &= LIM_{n\to\infty}a_n\times LIM_{n\to\infty}a_n^{-1}\\ &= LIM_{n\to\infty}a_na_n^{-1}\\ &= LIM_{n\to\infty}1\\ &= 1\end{aligned}$$

所以 $xx^{-1}=x^{-1}x=1$