6.6 习题

2024 年 12 月 1 日

6.6.1

（1）自反性

定义 $f(n)=n$ 的函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的严格递增函数，使得

$$a_n = a_{f(n)} = a_n\text{对所有的 } n\in\mathbb{N} \text{ 均成立}$$

由定义 6.6.1 可知，此时 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的一个子序列。

（2）传递性

因为 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的子序列，那么存在一个函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的严格递增函数，使得

$$b_n = a_{f(n)}\text{对所有的 } n\in\mathbb{N} \text{ 均成立}$$

因为 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 的子序列，那么存在一个函数 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的严格递增函数，使得

$$c_n = b_{g(n)}\text{对所有的 } n\in\mathbb{N} \text{ 均成立}$$

因为 f 的值域与 g 的定义域是同一个集合，我们可以把 g,f 复合，得到函数 $g\circ f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，该函数是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的严格递增函数，使得

$$c_n = a_{(g\circ f)(n)}\text{对所有的 } n\in\mathbb{N} \text{ 均成立}$$

由定义 6.6.1 可知，此时 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的子序列

6.6.2

略

6.6.3

证明存在性。这里采用的方法，是先构造出目标对象。这里需要考察的是，构造的目标是否满足要求。具体来说，对于本习题，需要确定构造的序列是存在的，并确定构造的序列的倒数是收敛于 0 的（习题 6.6.5 与本题类似）。

（1）证明序列的每一项都是存在的

归纳法证明。

$j=0$，因为序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是无界的，所以肯定存在 $|a_n| \geq 0$，取第一个满足要求的 n 即可。

说明. $j=0$ 时，如果 $a_{n_0}=0$，会导致错误，所以 b_0 应该是要限制为非零的。

归纳假设，$j-1$ 时，项是存在的。

j 时，由于序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是无界的，所以肯定存在 $|a_n| \geq j$，此时满足条件的 n 至少有一个，可以看做是一个集合，使用公理 3.5（分类公理），可以得到所有元素都大于 n_{j-1} 的集合 A，取该集合的下确界作为 n_j（这个下确界肯定是存在的，因为集合是有下界的。定理 5.5.9 的推论）。

（2）$\lim_{n\to\infty} 1/b_n$ 存在且等于 0。

对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\epsilon \geq 1/j$（因为 $1/j$ 递增且极限为 0），由 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 的构造方式，可知，取 n_j 时，$|b_j| = |a_{n_j}| \geq j$，且由序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是递增的，可知，当 $n \geq n_j$ 时，$|b_n| \geq j$ 均成立，于是 $|1/b_n| \leq 1/j \leq \epsilon$ 对 $n \geq n_j$ 均成立。

由 ϵ 的任意性，可知，$\lim_{n\to\infty} 1/b_n$ 存在且等于 0。

6.6.4

（a）$\Rightarrow$（b）

序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L，那么，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 0$，使得 $|a_n - L| \leq \epsilon$ 对 $n \geq N$ 均成立。

由子序列的定义（定义 6.6.1）可知，序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的任意子序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$，都会存在一个严格递增的函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得

$$b_n = a_{f(n)}\text{对所有的 } n \in \mathbb{N} \text{ 均成立}$$

由 f 的定义可知 $f(n) \geq n$，所以 $n \geq N$ 时，$f(n) \geq N$，所以 $|b_n - L| = |a_{f(n)} - L| \leq \epsilon$ 对 $n \geq N$ 均成立。所以，序列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L。

由于 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是任意的子序列，所以命题得证。

（b）$\Rightarrow$（a）

由自反性可知 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 也是 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的子序列，题设已经说明 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 L。

6.6.5

（a）$\Rightarrow$（b）

（1）证明序列的每一项都是存在的

归纳法证明。

$j = 0$ 时，定义 $a_{n_0} = a_0$。

归纳假设，$j-1$ 时，项是存在的。

j 时，现在要证明 $b_j := a_{n_j}$ 是存在的。由 L 是极限点，所以取 $\epsilon = 1/j > 0$，对 $N = n_{j-1}$（归纳假设，保证了 n_{j-1} 存在），存在 $n \geq N$ 使得 $|a_n - L| \leq \epsilon$，满足该条件的 n 是一个非空集合，任取一个作为 n_j。

（2）序列的收敛性

对任意实数 $\epsilon > 0$，存在 $1/j \leq \epsilon$（存在的原因是 $1/j$ 收敛于 0）。通过序列 $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ 的构造方式，可知，只要证明存在 $N, n = N$ 有 $|a_n - L| \leq 1/j$，那么，就有 $n > N$ 有 $|a_n - L| < 1/j$，即：$n \geq N$ 有 $|a_n - L| \leq 1/j$。接下来只要证明这个 N 是存在的即可。由构造方式可知 $|a_{n_j} - L| \leq 1/j \leq \epsilon$，所以，可取 $N = n_j$，即 N 是存在的。

（b）$\Rightarrow$（a）

设收敛于 L 的子序列是 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$，因为是子序列，存在一个严格递增的函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得

$$b_m = a_{f(n)} \text{对所有的 } n \in \mathbb{N} \text{ 均成立}$$

（注意：这里为了讨论的方便，把子序列的下标改为 m）因为收敛于 L，那么，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $M \geq 0$，$|b_m - L| \leq \epsilon$ 对 $m \geq M$ 均成立，因为 f 是严格递增的函数，且没有上界，对每一个 N，都存在 n 使得 $f(n) \geq max(M, N)$，

因为 $f(n) \geq M$，所以，

$$\begin{aligned} |b_m - L| &\leq \epsilon \\ |a_{f(n)} - L| &\leq \epsilon \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性，可知，L 是 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 的极限点。