7.4 习题

2024 年 10 月 3 日

7.4.1

结论很明显，难度在于如何阐明清楚。

要证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_{f(n)}|$ 有收敛，只要证明其部分和序列有上界。

证明过程可以参考命题 7.4.3（级数的重排序），这里还是比较好处理的，因为这里只需考虑收敛性。

对任意正整数 N，序列 $(f^{-1}(n))_{n=0}^{N}$ 是有限的，从而是有界的，于是存在一个 M 使得对所有的 $0\le n\le N$ 都有 $f^{-1}(n)\le M$。

特别地，对任意的 $M'\ge M$，集合 $A=\{f(m):m\in\mathbb{N};m\le M'\}$ 是 $B=\{n\in\mathbb{N};n\le M'\}$ 的子集。

于是根据命题 7.1.11，对任意的 $M'\ge M$ 都有

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{M'}|a_{f(m)}| &= \sum_{n\in A}|a_{f(m)}|\\ &\le \sum_{n\in B}|a_n|\end{aligned}$$

因为 $\sum\limits_{n\in B}|a_n|$ 是有界的，所以 $\sum\limits_{m=0}^{M'}|a_{f(m)}|$ 也是有界的。由 M' 的任意性可知其收敛。