6.3 习题

2024 年 6 月 30 日

说在开头的话：文中的**上确界与最小上界不是一回事**，最小上界是一个集合 E 有上界为前提的，此时的最小上界与上确界一致。而如果集合没有最小上界，那么集合的上确界被指定为 $+\infty$【空集时被指定为 $-\infty$】。由此可知，最小上界定义是包含在上确界中的定义中，反之则不然。

6.3.1

证明 $sup(a_n)_{n=1}^{\infty} = 1$，首先 1 是上界，因为 a_n 是递减的，且 $n = 1$ 时，$a_1 = 1$。假设存在上界 $M < 1$，由 $a_1 = 1$ 可知，M 不存在。

证明 $inf(a_n)_{n=1}^{\infty} = 0$，首先，因为 n 是正整数，所以 $1/n > 0$，于是 0 是下界。假设存在下界 $m > 0$，由推论 5.4.13（阿基米德性质）可知，存在正整数 M 使得 $Mm > 1$，所以 $m > 1/M$，取 $n = M$，此时 $a_n = 1/M < m$，与 m 是下界矛盾。

6.3.2

设 $E := \{a_n : n \geq m\}$，E 是非空的实数集合，$x := sup(E)$。

（1）由定义 6.2.6 可知，x 要么是实数，要么是 $+\infty$。

如果 x 是实数，由最小上界定义可知，$a_n \leq x$ 对所有的 $n \geq m$ 均成立。

如果 x 是 $+\infty$，定义 6.2.3 可知 $a_n \leq x$。

（2）M 是 E 的上界。反证法 $x > M$。如果 x 是实数，那么此时与 x 是 E 的最小上界定义矛盾。如果 $x = +\infty$，那么由定义 6.2.3 可知，这样的 $x \geq M$，按照定义 5.5.10 此时 E 是没有上界的，于是 $M = +\infty$，所以不存在 $x > M$。

综上，$x \leq M$。

（3）反证法。假设不存在 $n \geq m$ 使得 $y < a_n \leq x$。

由假设可知 $a_n \leq y$ 或 $a_n > x$。

如果 x 是实数，那么，x 是 E 的最小上界，如果存在 $y < x, a_n \leq y$，那么 y 才是 E 的最小上界，所以该情况不可能发生。如果存在 $a_n > x$，那么与 x 是最小上界矛盾，所以该情况不可能发生。

如果 $x = +\infty$，表明 E 没有上界。所以 $a_n > x$ 是不可能的。如果存在 $y < x, a_n \leq y$，那么，y 是实数，即 E 是有上界的，这与 E 没有上界矛盾。

综上，假设不成立。

6.3.3

由于序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是有界的实数序列，所以集合 $E := \{a_n : n \geq m\}$ 按定理 5.5.9 可知集合 E 有一个最小上界，即存在 $sup(E)$。

有命题 6.3.6 可知，M 是 E 的上界，那么 $sup(E) \leq M$。

现在要证明序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛的，并且收敛与 $sup(E)$，设 $x := sup(E)$。

对于任意实数 $\epsilon > 0$，$x - \epsilon < x$，由命题 6.3.6 可知，存在一个 $n \geq m$ 使得 $x - \epsilon < a_n \leq x$，不妨设这里的 n 为 N，由于序列是递增的，所以存在 $n \geq N$ 使得 $x - \epsilon < a_n \leq x$ 均成立，所以 $|x - a_n| \leq \epsilon$，即序列是最终 $\epsilon-$ 接近与 x，由于 ϵ 是任意的，所以序列收敛于 x，即：$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x = sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$