15.3 习题

张志聪

2025 年 4 月 4 日

15.3.1

因为部分和有以下关系：

$$\sum_{n=0}^{N}(a_{n+1}-a_n)b_n+\sum_{n=0}^{N}a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)=-a_0b_0+a_Nb_N$$

由题设可知，等式右侧

$$\lim_{N\to\infty}-a_0b_0+a_Nb_N=-a_0b_0+AB$$

因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)b_n$ 收敛可知，部分和

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(a_{n+1}-a_n)b_n$$

收敛。

我们有

$$\sum_{n=0}^{N}a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)=-a_0b_0+a_Nb_N-\sum_{n=0}^{N}(a_{n+1}-a_n)b_n$$

于是利用定理 6.1.19 可知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)$ 收敛，且

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)&=\lim_{N\to\infty}(-a_0b_0+a_Nb_N)-\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(a_{n+1}-a_n)b_n\\&=AB-a_0b_0-\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(a_{n+1}-a_n)b_n\end{aligned}$$