

14.6 习题

张志聪

2025 年 3 月 19 日

14.6.1

设 $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$ 一致收敛于 f ，即部分和 $\sum_{n=1}^N f^{(n)}$ 一致收敛于 f 。于是由定理 14.6.1 可知，

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \sum_{n=1}^N f^{(n)} \\ &= \int_{[a,b]} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f^{(n)} \\ &= \int_{[a,b]} f \\ &= \int_{[a,b]} \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)} \end{aligned}$$

(注意：最后一个等式，仔细观察定义 14.5.2 即可得到。)

又对任意 $\epsilon > 0$ ，存在 $N \geq 1$ 使得对于所有的 $k > N$ 和所有的 $x \in [a, b]$ 都有

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^k f^{(n)} - f(x) \right| < \epsilon \\ & \sum_{n=1}^k f^{(n)} - \epsilon < f(x) < \sum_{n=1}^k f^{(n)} + \epsilon \end{aligned}$$

上式两端在 $[a, b]$ 上求积分可得,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \left(\sum_{n=1}^k f^{(n)} - \epsilon \right) &\leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} \left(\sum_{n=1}^k f^{(n)} + \epsilon \right) \\ \sum_{n=1}^k \int_{[a,b]} f^{(n)} - \epsilon(b-a) &\leq \int_{[a,b]} f \leq \sum_{n=1}^k \int_{[a,b]} f^{(n)} + \epsilon(b-a) \end{aligned}$$

上面的论述证明了对任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $N \geq 1$ 使得对所有的 $k \geq N$ 都有

$$\left| \sum_{n=1}^k \int_{[a,b]} f^{(n)} - \int_{[a,b]} f \right| \leq 2\epsilon(b-a)$$

由于 ϵ 是任意的, 因此 $\sum_{n=1}^N \int_{[a,b]} f^{(n)}$ 收敛于 $\int_{[a,b]} f$ 。综上可得,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[a,b]} f^{(n)} = \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$$