11.10 习题

张志聪

2025 年 1 月 8 日

11.10.1

因为 F, G 在闭区间 $[a, b]$ 上可微，则 F, G 都是连续函数，于是推论 11.5.2 可知，F, G 都是 $[a, b]$ 上的黎曼可积的函数。

由定理 11.4.5 可知，$FG', F'G$ 都是 $[a, b]$ 上的黎曼可积的函数。

由定理 10.1.13(d) 可知

$$(FG)' = F'G + FG'$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} (FG)' &= \int_{[a,b]} F'G + \int_{[a,b]} FG' \\ &= (FG)(b) - (FG)(a)\end{aligned}$$

第一个等式使用了定理 11.4.1(a)，第二个等式使用了定理 11.9.4（微积分第二基本定理）。于是经过变换可得

$$\int_{[a,b]} FG' = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a,b]} F'G$$

11.10.2

- $\phi^{-1}(J)$ 是连通的。

  反证法，假设 $\phi^{-1}(J)$ 不是连通的，那么存在 $x, y \in \phi^{-1}(J), x \neq y$ 且 $x < c < y$ 满足 $c \notin \phi^{-1}(J)$。

由 ϕ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数可知

$$\phi(x) \leq \phi(c) \leq \phi(y)$$

而由假设可知 $c \notin \phi^{-1}(J)$，所以 c 应该小于 J 的左端点 J_l（大于 J 的右端点，同理），于是

$$\phi(c) \leq \phi(J_l)$$

满足上述两个不等式只能是

$$\phi(c) = \phi(x) = \phi(y)$$

因为 $\phi(x) \in J$，于是 $\phi(c) \in J$ 进而 $c \in \phi^{-1}(J)$，存在矛盾。

- c_J 还是 $f \circ \phi$ 在 $\phi^{-1}(J)$ 上的常数值。

  任意 $x \in \phi^{-1}(J)$，由集合 $\phi^{-1}(J)$ 的定义可知，

$$\phi(x) \in J$$

  于是

$$(f \circ \phi)(x) = f(\phi(x)) = c_J$$

- $\mathbf{Q}$ 是 $[a,b]$ 的一个划分。

  任意 $x \in [a,b]$，都有 $\phi(x) \in [\phi(a), \phi(b)]$，因为 $\mathbf{P}$ 是 $[\phi(a), \phi(b)]$ 的一个划分，所以存在一个 $J \in \mathbf{P}$ 使得

$$\phi(x) \in J$$

  于是

$$x \in \phi^{-1}(J)$$

  是否还存在另一个区间 $K \in \mathbf{P}$ 使得

$$x \in \phi^{-1}(K)$$

  不会存在，因为如果存在，则 $\phi(x) \in K, \phi(x) \in J$ 这与 $\mathbf{P}$ 是划分矛盾。

- $\phi[\phi^{-1}(J)] = |J|$

  不妨设 J 的左右端点为 l, r，现在需要证明

$$\begin{cases} \sup \phi^{-1}(J) = \phi^{-1}(r) \\ \inf \phi^{-1}(J) = \phi^{-1}(l) \end{cases}$$

  反证法，假设存在 $x \in \phi^{-1}(J)$ 且 $x > \phi^{-1}(r)$。因为 $x \in \phi^{-1}(J)$，所以

$$\phi(x) \in J$$

  又因为 $x > \phi^{-1}(r)$，且 ϕ 在闭区间 $[a, b]$ 上单调递增的连续函数，所以

$$\phi(x) > \phi(\phi^{-1}(r)) = r$$

  这与 $\phi(x) \in J$ 矛盾，所以不存在这样的 x。于是

$$\sup \phi^{-1}(J) = \phi^{-1}(r)$$

  类似地，可得

$$\inf \phi^{-1}(J) = \phi^{-1}(l)$$

  于是

$$\begin{aligned} \phi[\phi^{-1}(J)] &= \phi(\sup \phi^{-1}(J)) - \phi(\inf \phi^{-1}(J)) \\ &= r - l \end{aligned}$$

  又因为

$$|J| = r - l$$

  综上，命题得证。

11.10.3

设 $\epsilon > 0$，那么我们能够找到一个在 $[a, b]$ 上从上方控制 f 的分段常数函数 $\overline{f}$ 和一个在 $[a, b]$ 上从下方控制 f 的分段常数函数 $\underline{f}$，它们使得

$$\int_{[a,b]} f - \epsilon \le \int_{[a,b]} \underline{f} \le \int_{[a,b]} \overline{f} \le \int_{[a,b]} f + \epsilon$$

令 $\overline{g}(x) = \overline{f}(-x), \underline{g}(x) = \underline{f}(-x)$ 是 $[-b, -a]$ 上的函数。对任意 $x \in [-b, -a]$，有

$$\overline{g}(x) = \overline{f}(-x) \geq f(-x) = g(x)$$

所以 $\overline{g}$ 在 $[-b, -a]$ 上从上方控制 g。类似地，$\underline{g}$ 在 $[-b, -a]$ 上从下方控制 g。

对任意 $J \in \mathbf{P}$ 我们定义 $G_J := \{x \in [-b, -a] : -x \in J\}$，于是 $\mathbf{P}' := \{G_J : J \in \mathbf{P}\}$ 是 $[-b, -a]$ 的一个划分。

此外，任意 $G_J \in \mathbf{P}', \overline{g}$ 在 G_J 上的常数值也是 $\overline{f}$ 在 J 上的常数值。类似地，任意 $G_J \in \mathbf{P}', \underline{g}$ 在 G_J 上的常数值也是 $\underline{f}$ 在 J 上的常数值。

于是

$$\begin{aligned}
\int_{[-b,-a]} \overline{g} &= p.c. \int_{[-b,-a]} \overline{g} \\
&= \sum_{G_J \in \mathbf{P}'} c_J |G_J| \\
&= \sum_{J \in \mathbf{P}} c_J |J| \\
&= \int_{[a,b]} \overline{f}
\end{aligned}$$

类似地，

$$\int_{[-b,-a]} \underline{g} = \int_{[a,b]} \underline{f}$$

所以

$$\int_{[a,b]} f - \epsilon \leq \int_{[-b,-a]} \underline{g} \leq \underline{\int}_{[-b,-a]} g \leq \overline{\int}_{[-b,-a]} g \leq \int_{[-b,-a]} \overline{g} \leq \int_{[a,b]} f + \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知，据此可得出结论。

11.10.4

（1）命题

设 $[a, b]$ 是一个闭区间，$\phi : [a, b] \to [\phi(b), \phi(a)]$ 是一个单调递减的可微函数，并且使得 ϕ' 是黎曼可积的。设 $f : [\phi(b), \phi(a)] \to \mathbb{R}$ 是 $[\phi(b), \phi(a)]$ 上的黎曼可积的函数，那么 $(f \circ \phi)\phi' : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是 $[a, b]$ 上是黎曼可积的，并

且

$$\int_{[a,b]}(f\circ\phi)\phi' = -\int_{[\phi(b),\phi(a)]} f$$

（2）证明

令 $h:[-b,-a]\to[\phi(b),\phi(a)], h(x):=\phi(-x)$，那么 h 是单调递增的可微函数；因为

$$h'(x) = -\phi'(-x)$$

由习题 11.10.3 可知 $\phi'(-x)$ 是黎曼可积的,利用定理 11.4.1(b) 可知 $-\phi'(-x)$ 是黎曼可积的，即 h' 是黎曼可积的。

利用命题 11.10.7 可得

$$\begin{aligned}
\int_{[-b,-a]}(f\circ h)h' &= \int_{[\phi(b),\phi(a)]} f \\
\int_{[-b,-a]}(f\circ\phi(-x)) - \phi'(-x)dx &= \int_{[\phi(b),\phi(a)]} f \\
-\int_{[-b,-a]}(f\circ\phi(-x))\phi'(-x)dx &= \int_{[\phi(b),\phi(a)]} f
\end{aligned}$$

再由习题 11.10.3 可知

$$\begin{aligned}
-\int_{[-b,-a]}(f\circ\phi(-x))\phi'(-x)dx &= \int_{[\phi(b),\phi(a)]} f \\
-\int_{[a,b]}(f\circ\phi(x))\phi'(x)dx &= \int_{[\phi(b),\phi(a)]} f \\
-\int_{[a,b]}(f\circ\phi)\phi' &= \int_{[\phi(b),\phi(a)]} f
\end{aligned}$$

注意：什么时候会加 dx 书中 P239 有说明。据此可得出结论。