4.2 习题

2024 年 5 月 1 日

1. 在本节的证明过程中，用到一些在 *4.1* 节未提到的整数代数定律，但都很明显，我就没有特别说明证明了

4.2.1

证明：

设 $x = a//b, y = c//d, z = e//f$ 为有理数，其中 a, c, e 是整数，b, d, f 是不为零的整数。

（1）自反性

$ab = ab$，由定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $x = x$

（2）对称性

假设 $x = y$，由定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $ad = bc$，再次利用定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $y = x$

（3）传递性

假设 $x = y, y = z$，由定义 4.2.1（有理数相等的定义）可知 $ad = bc, cf = de$，又

$$ad = bc$$
$$adf = bcf$$

$$cf = de$$
$$bcf = bde$$

所以：$adf = bcf = bde, adf = bde$，由推论 4.1.9 可知 $af = be$，所以 $x = z$

说明. 其实这里需要引入一个额外的命题，$a = b$，a, b, c 都是整数，那么 $ac = bc$。这个命题相对简单，这里说一下证明思路，先证明自然数符合该命题，然后再推广到整数。

4.2.2

证明：

（1）乘积的定义是明确的

假设 $a//b = a'//b'$，那么 $ab' = a'b$，

$$(a//b) * (c//d) = (ac)//(bd) \tag{1}$$

$$(a'//b')//(c//d) = (a'c)//(b'd) \tag{2}$$

因此我们要证明的是 $acb'd = bda'c$，由推论 4.1.9（整数的消去律）可知，只需证明 $ab' = ba'$，由假设可知该等式成立；

（2）负数的定义是明确的

假设 $a//b = a'//b'$，那么 $ab' = a'b$，

$$-(a//b) = (-a)//b \tag{3}$$

$$-(a'//b') = (-a')//b' \tag{4}$$

因此我们要证明的是 $(-a)b' = (-a')b$，由习题 4.1.3 可知

$$(-a)b' = (-1) \times ab'$$

$$(-a')b = (-1) \times a'b$$

由推论 4.1.9（整数的消去律）可知，只需证明 $ab' = a'b$，由假设可知该等式成立；

4.2.3

证明：

我们记 $x = a//b, y = c//d, z = e//f$，其中 a, c, e 是整数，b, d, f 是不为零的整数。

（1）$x + y = y + x$

$$\begin{aligned} x + y &= (a//b) + (c//d) \\ &= (ad + bc)//(bd) \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} y + x &= (c//d) + (a//b) \\ &= (cb + da)//(db) \end{aligned}$$

由定义 4.2.1（有理数的相等定义）可知要证明 $x + y = y + x$，只需证明 $(ad + bc)(db) = (cb + da)(bd)$，利用整数的代数定律可知，等式成立。

（2）$x + 0 = 0 + x = x$

$$\begin{aligned} x + 0 &= (a//b) + (0//1) \\ &= (a1 + b0)//(b) \\ &= a//b \\ &= x \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} 0 + x &= (0//1) + (a//b) \\ &= (0b + 1a)//(b) \\ &= a//b \\ &= x \end{aligned}$$

（3）$x + (-x) = (-x) + (x) = 0$

由（1）可知 $x + (-x) = (-x) + (x)$

$$
\begin{aligned}
x + (-x) &= (a//b) + [(-a)//b] \\
&= [ab + (-a)b]//bb \\
&= [ab + (-1) \times ab]//bb \\
&= [ab(1 + (-1))]//bb \\
&= [ab(0)]//bb \\
&= 0//bb \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（4）$xy = yx$

$$
\begin{aligned}
xy &= (a//b) * (c//d) \\
&= (ac)//(bd)
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
yx &= (c//d) * (a//b) \\
&= (ca)//(db)
\end{aligned}
$$

现只需证明 $acdb = bdca$，由整数的代数定律可知，等式成立。

（5）$(xy)z = x(yz)$

$$
\begin{aligned}
(xy)z &= [(a//b) * (c//d)] * (e//f) \\
&= (ac//bd) * (e//f) \\
&= ace//bdf
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
x(yz) &= a//b * [(c//d) * (e//f)] \\
&= a//b * (ce//df) \\
&= ace//bdf
\end{aligned}
$$

（6）$x1 = 1x = x$

由（4）可知 $x1 = 1x$

$$
\begin{aligned}
x1 &= (a//b) * (1//1) \\
&= (a1//b) \\
&= a//b \\
&= x
\end{aligned}
$$

（7）$x(y+z) = xy + xz$

$$
\begin{aligned}
x(y+z) &= (a//b)[c//d + e//f] \\
&= (a//b)[(cf + de)//df] \\
&= [a(cf + de)]//bdf \\
&= (acf + ade)//bdf
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
xy + xz &= (a//b) * (c//d) + (a//b) * (e//f) \\
&= (ac//bd) + (ae//bf) \\
&= (acbf + bdae)//bdbf
\end{aligned}
$$

由有理数相等的定义可知,我们此时只需证明 $(acf+ade)bdbf = bdf(acbf+$

$bdae$)。

$$\begin{aligned}(acf+ade)bdbf &= acfbdbf+adebdbf\\ &= abbcdff+abbddef\\ bdf(acbf+bdae) &= bdfacbf+bdfbdae\\ &= abbcdff+abbddef\end{aligned}$$

所以 $(acf+ade)bdbf = bdf(acbf+bdae)$。

（8）$(y+z)x = yx+zx$

由（4）可知

$$\begin{aligned}(y+z)x &= x(y+z)\\ xy &= yx\\ xz &= zx\end{aligned}$$

综上，可知 $(y+z)x = x(y+z) = xy+xz = yx+zx$，命题得证；

4.2.4

3. 由有理数的定义可知，有理数是由整数构造而成，通过整数的三歧性，可以推导出有理数的三歧性。

设 x 为任意有理数，由有理数的定义可知，存在 $x = a/b$，其中 a, b 是整数。

首先证明（a）(b)（c）中至少有一个为真。我们有如下三种情况：a、b 同号，a、b 异号，a 为 0。

如果 a, b 同号，也就是说，要么 a, b 都是正整数，要么 a, b 都是负整数。如果 a, b 都是正整数，由定义 4.2.6 可知 x 是正的；如果 a, b 都是负整

数，不妨设 $a = -a', b = -b'$，其中 a', b' 是正整数，此时，

$$\begin{aligned} x &= a/b \\ &= (-a')/(-b') \\ &= a'/b' \end{aligned}$$

所以 x 是正的。

如果 a, b 是异号，要么 a 是正整数 b 负整数，或反之。如果 a 是正整数 b 负整数，不妨设 $b = -b'$，其中 b' 是正整数，此时，

$$\begin{aligned} x &= a/b \\ &= a/(-b') \\ &= -(a/b') \end{aligned}$$

所以 x 是负的；同理可证 a 是负整数 b 正整数时，x 是负的。

如果 a 为 0，则 $x = a/b = 0/1 = 0$。

所以（a）(b)（c）中至少有一个为真