4.1 习题

2024 年 4 月 25 日

4.1.1

证明.

① 自反性

设 $a \rule{1em}{0.6em} b$ 是任意整数，现证明 $a \rule{1em}{0.6em} b = a \rule{1em}{0.6em} b$。由于 $a+b=a+b$，所以 $a \rule{1em}{0.6em} b = a \rule{1em}{0.6em} b$

② 对称性

设 $a \rule{1em}{0.6em} b = c \rule{1em}{0.6em} d$，现证明 $c \rule{1em}{0.6em} d = a \rule{1em}{0.6em} b$。由于 $a \rule{1em}{0.6em} b = c \rule{1em}{0.6em} d$，所以 $a+d=c+b$，由自然数相等的对称性可知 $c+b=a+d$，所以 $c \rule{1em}{0.6em} d = a \rule{1em}{0.6em} b$。

4.1.2

证明.

$-(a \rule{1em}{0.6em} b) = b \rule{1em}{0.6em} a, -(a' \rule{1em}{0.6em} b') = b' \rule{1em}{0.6em} a'$，又 $(a \rule{1em}{0.6em} b) = (a' \rule{1em}{0.6em} b')$ 则 $a+b' = a'+b$，由于加法是可以交换的（命题 *2.2.4*）所以 $b'+a=b+a'$，由此可得 $-(a' \rule{1em}{0.6em} b') = -(a \rule{1em}{0.6em} b)$，又由整数相等的对称性可得 $-(a \rule{1em}{0.6em} b) = -(a' \rule{1em}{0.6em} b')$。

4.1.3

证明.

因为 a 是整数，不妨设 $a = x$ [redacted] y，其中 x, y 是自然数，则

$$
\begin{aligned}
&(-1) \times a \\
&= (0 \text{ [redacted] } 1) \times (x \text{ [redacted] } y) \\
&= (0 \times x + 1 \times y) \text{ [redacted] } (0 \times y + 1 \times x) \\
&= (0 + y) \text{ [redacted] } (0 + x) \\
&= y \text{ [redacted] } x \\
&= -a
\end{aligned}
$$

4.1.4

注意：此时书中已经说明了 [redacted] 与 $-$ 的等价性，从此处开始证明中将不使用 [redacted]

记 $x = a - b, y = c - d, z = e - f$ 其中 a、b、c、d、e、f 是自然数

① $x + y = y + x$

证明.

$$
\begin{aligned}
&x + y \\
&= (a - b) + (c - d) \\
&= (a + c) - (b + d) \\
&y + x \\
&= (c - d) + (a - b) \\
&= (c + a) - (d + b)
\end{aligned}
$$

由于加法是可交换（命题 *2.2.4*）可知 $a + c = c + a, b + d = d + b$，又由自然数相等的替换公理可得 $(a + c) + (d + b) = (c + a) + (b + d)$，由此可知 $x + y = y + x$

② $(x + y) + z = x + (y + z)$

证明.

$$\begin{aligned}
&(x+y)+z\\
&=[(a-b)+(c-d)]+(e-f)\\
&=[(a+c)-(b+d)]+(e-f)\\
&=(a+c+e)-(b+d+f)\\
&x+(y+z)\\
&=(a-b)+[(c-d)+(e-f)]\\
&=(a-b)+[(c+e)-(d+f)]\\
&=(a+c+e)-(b+d+f)
\end{aligned}$$

于是 $(x+y)+z=x+(y+z)$

③ $x+0=0+x=x$

证明.
可以把 0 看做整数 $0-0$，由①可知 $x+0=0+x$，

$$\begin{aligned}
&0+x\\
&=(0-0)+(a-b)\\
&=(0+a)-(0+b)\\
&=a-b\\
&=x
\end{aligned}$$

④ $x+(-x)=(-x)+x=0$

证明.
由①可知 $x+(-x)=(-x)+x$，可以把 0 看做整数 $0-0$，现在证明整数

$x+(-x)=0-0$

$$
\begin{aligned}
&x+(-x)\\
&=(a-b)+(b-a)\\
&=(a+b)-(b+a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)+0&=(b+a)+0\\
a+b&=b+a
\end{aligned}
$$

于是 $x+(-x)=(-x)+x=0$

⑤ $xy=yx$

证明.

$$
\begin{aligned}
&xy\\
&=(a-b)(c-d)\\
&=(ac+bd)-(ad+bc)\\
&yx\\
&=(c-d)(a-b)\\
&=(ca+db)-(cb+da)
\end{aligned}
$$

由于加法是可以交换的，乘法也是可以交换的，所以

$$
\begin{aligned}
&=(ca+db)-(cb+da)\\
&=(ac+bd)-(ad+bc)
\end{aligned}
$$

于是 $xy=yx$

⑦ $x1=1x=x$

证明.

由⑤ 可知 $x1=1x$，又

$$
\begin{aligned}
&x1\\
&=(a-b)\times(1-0)\\
&=(a\times 1+b\times 0)-(a\times 0+b\times 1)\\
&=(a+0)-(0+b)\\
&=a-b\\
&=x
\end{aligned}
$$

⑧ $x(y+z)=xy+xz$

证明.

$$
\begin{aligned}
&x(y+z)\\
&=(a-b)[(c-d)+(e-f)]\\
&=(a-b)[(c+e)-(d+f)]\\
&=[a(c+e)+b(d+f)]-[a(d+f)+b(c+e)]\\
&=(ac+ae+bd+bf)-(ad+af+bc+be)\\
&xy+xz\\
&=(a-b)(c-d)+(a-b)(e-f)\\
&=[(ac+bd)-(ad+bc)]+[(ae+bf)-(af+be)]\\
&=[(ac+bd)+(ae+bf)]-[(ad+bc)+(af+be)]\\
&=(ac+ae+bd+bf)-(ad+bc+af+be)
\end{aligned}
$$

于是 $x(y+z)=xy+xz$

⑨ $(y+z)x=yx+zx$

证明.

由⑤可知 $(y+z)x=x(y+z)$，又由⑧可知 $x(y+z)=xy+xz$，再次应用⑤可得 $xy+xz=yx+zx$，于是等式成立

4.1.5

证明.

由引理 *4.1.5*（整数的三歧性）分多种情况讨论。

（*1*）如果 a,b 都是正自然数，则由 *2.3.3* 可知 ab 是正自然数，则 $ab \neq= 0$ 与题设矛盾；

（*2*）如果 a,b 都是正自然数的负数，假设分别为 $-m,-n$，m、n 都是正自然数。

$$
\begin{aligned}
&ab \\
&= (-m)\times(-n) \\
&= (0-m)\times(0-n) \\
&= (0\times 0 + mn) - (0\times 0 + m\times 0) \\
&= mn
\end{aligned}
$$

由于 m,n 都是正自然数，所以 $ab = mn \neq 0$，与题设矛盾；

（*3*）如果 $a = b = 0$，$ab = 0$，满足题设。

（*4*）如果 $a = 0, b = x - y$，x、y 为任意自然数；

$$
\begin{aligned}
&ab \\
&= (0-0)\times(x-y) \\
&= (0\times x) - (0\times y) \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以 $ab = 0$，满足题设；

（5）如果 $a = x - y, b = 0$，x、y 为任意自然数；

$$
\begin{aligned}
& ab \\
& = (x - y) \times (0 - 0) \\
& = (x \times 0) - (y \times 0) \\
& = 0 - 0 \\
& = 0
\end{aligned}
$$

于是 $ab = 0$，满足题设；

综上，命题得证。

4.1.6

证明.

（*1*）方法一

由整数加法的替换性与命题 *4.1.6* 可知：

$$
\begin{aligned}
ac - bc &= 0 \\
(a - b)c &= 0
\end{aligned}
$$

由命题 *4.1.8* 可知 $a - b = 0$，接下来要证 $a = b$，以上等式才能成立。

$$
\begin{aligned}
a - b &= 0 \\
a - b + b &= 0 + b \\
a + (-b) + b &= 0 + b \\
a + [(-b) + b] &= b \\
a + 0 &= b \\
a &= b
\end{aligned}
$$

说明. 上面的证明中用到了一个命题：a,b 是整数且 $a=b$，则 $a+c=b+c$，c 是整数。

该命题对自然数是成立的，但对于整数书中没有该命题，这里需要证明下。

记 $a=x-y, b=p-q, c=w-z$，x、y、p、q、w、z 是自然数。由 $a=b$ 可得：

$$\begin{gathered} a=b \\ x-y=p-q \\ x+q=p+y \end{gathered}$$

又

$$\begin{aligned} & a+c \\ & =(x-y)+(w-z) \\ & =(x+w)-(y+z) \\ & b+c \\ & =(p-q)+(w-z) \\ & =(p+w)-(q+z) \end{aligned}$$

又由

$$\begin{gathered} (x+w)+(q+z) \\ =x+q+w+z \\ (p+w)+(y+z) \\ =p+y+w+z \end{gathered}$$

结合 $x+q=p+y$ 于是 $a+c=b+c$

（2）方法二

由引理 *4.1.5*（整数的三歧性）分多种情况讨论。

（*1*）a、b、c 都是正自然数，则

$$ac = bc$$

由推论 *2.3.7* 可知 $a = b$

其余的情况证明类似。(略)

4.1.7

（a）$a > b$ 当且仅当 $a - b$ 是一个正的自然数。

证明.

① 充分性

假设 $a > b$，由引理 *4.1.5*（整数的三歧性）对 $a - b$ 分多种情况讨论。

（*1*）如果 $a - b = 0$，则 $a = b$，与题设矛盾；

（*2*）$a - b$ 是正自然数 n 的负数-n，即

$$a - b = -n$$
$$a - b + b = -n + b$$
$$a + 0 = -n + b$$
$$a = -n + b$$
$$a + n = -n + b + n$$
$$a + n = b + -n + n$$
$$a + n = b$$
$$b > a$$

与题设矛盾；

综上，$a - b$ 只能是正自然数

② 必要性

假设 $a-b$ 是一个正的自然数 n，那么

$$
\begin{aligned}
a-b&=n\\
a-b+b&=n+b\\
a+0&=n+b\\
a&=n+b
\end{aligned}
$$

于是 $a\geq b$，又由于 n 是正自然数，那么 $a\neq b$（其实这里需要引入一个额外的命题，下方有说明），所以 $a>b$

说明. 整数 a,b，如果 $a\geq b$，c 是正自然数，那么 $a+c>b$

证明.
不妨设 $a=x-y,b=p-q$ 因为 $a\geq b$，那么存在一个自然数 n 使得 $a=b+n$，所以 $a+c=b+n+c=b+(n+c)$，于是 $a+c\geq b$，

若 $a+c=b$，则

$$
\begin{aligned}
a+c&=b\\
b+n+c&=b\\
b+n+c+(-b)&=b+(-b)\\
n+c&=0
\end{aligned}
$$

由推论 *2.2.9* 可知 $c=0$，这与 c 是正自然数矛盾，所以 $a+c\neq b$，所以 $a+c>b$，命题得证。

综上，命题得证。

（b）（加法保持序不变）如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$

证明.

因为 $a>b$，由（a）可知 $a-b=n$，n 是正自然数；

$$
\begin{aligned}
&(a+c)-(b+c)\\
&=(a+c)+[-(b+c)]\\
&=(a+c)+[(-c)+(-b)]\\
&=a+c+(-c)+(-b)\\
&=a+0+(-b)\\
&=a-b
\end{aligned}
$$

由此可知 $(a+c)-(b+c)=a-b$ 是正自然数，所以 $a+c>b+c$。

说明. 以上的证明中 $-(b+c)=(-b)+(-c)$，不是显然的，需要证明以下命题。

a,b 是整数，则 $-(a+b)=(-a)+(-b)$。

证明.

由于 a,b 是整数，所以存在 $a=x-y,b=p-q$，x,y,p,q 是自然数。

$$
\begin{aligned}
&-(a+b)\\
&=-[(x-y)+(p-q)]\\
&=-[(x+p)-(y+q)]\\
&=(y+p)-(x+p)\\
&(-a)+(-b)\\
&=[-(x-y)]+[-(p-q)]\\
&=(y-x)+(q-p)\\
&=(y+q)-(x+p)
\end{aligned}
$$

于是 $-(a+b)=(-a)+(-b)$，命题得证。

（c）（正的乘法保持序不变）如果 $a>b$ 并且 c 是正的，那么 $ac>bc$。
证明：

因为 $a > b$ 所以存在正自然数 x 使得 $a = b + x$，此时

$$\begin{aligned} ac &= (b + x) \times c \\ &= b \times c + x \times c \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} ac - bc &= b \times c + x \times c - b \times c \\ &= x \times c \end{aligned}$$

由于 x, c 都是正的自然数，所以 $ac - bc = x \times c > 0$，通过（a）可知 $ac > bc$

（d）（负运算反序）如果 $a > b$，那么 $-a < -b$。

证明:

不妨设 $b = p - q$，p、q 是自然数。由题设 $a > b$ 可知存在正自然数 c，使得 $a = b + c$，

$$\begin{aligned} -b - (-a) &= -b - (b + c) \\ &= q - p - [(p - q) + c] \\ &= q - p - (p + c - q) \\ &= q - p - [q - (p + c)] \\ &= q - p - q + p + c \\ &= c \end{aligned}$$

（note: 上面把 p，q，c 既看做自然数也看做整数，这样自然数与整数的代数定律都可以使用）由于 $c > 0$，所以 $-a < -b$

（e）(序是可以传递的) 如果 $a > b$ 且 $b > c$ ，那么 $a > c$。

证明：

不妨设

$$a = x - y \tag{1}$$

$$b = p - q \tag{2}$$

$$c = w - z \tag{3}$$

由 $a > b, b > c$ 可知存在正自然数 c_0, c_1 使得：

$$\begin{aligned} a &= (p-q) + c_0 \\ &= [(w-z) + c_1] + c_0 \\ &= (w-z) + (c_0 + c_1) \end{aligned}$$

所以 $a > c$

（f）（序的三歧性）命题 $a > b$、$a < b$ 和 $a = b$ 中恰好有一个为真。a, b 是自然数，由整数的定义也可以把 a, b 看做整数。由整数的加法运算定义可知 $a - b = a + (-b)$ 也是整数，又由引理 4.1.5（整数的三歧性）可知序的三歧性。

4.1.8

证明：

归纳法原理覆盖的是自然数，或能把讨论的对象映射到自然数上。要证明命题 4.1.8 只要举一个反例即可。自然数 n>=0 是满足归纳法原理的。但推广到整数 n 时，n>=0 就不成立了，比如 n=-1，此时 n<0。