

15.5 习题

张志聪

2025 年 4 月 13 日

15.5.1

• (a)

(1) 绝对收敛。

任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| \\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

由推论 7.5.3 (比值判别法) 可知, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛。

(2)

由命题 7.2.9(绝对收敛判别法) 可知, 绝对收敛的级数, 也是条件收敛的。

(3) 收敛半径是 ∞

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n!} \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \right| = 0$$

于是可得, 收敛半径 $R = \infty$ 。

(4) \exp 是 $(-\infty, \infty)$ 上的实解析函数。

由习题 15.2.8(f) 可知直接得到。

- (b)

由定理 15.1.6(d) 可知, \exp 在 \mathbb{R} 上可微。又因为

$$\begin{aligned} (\exp(x))' &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

设 $n' = n - 1$, 于是

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{x^{n'}}{n'!} \\ &= \exp(x) \end{aligned}$$

- (c)

由定理 15.1.6(c) 可知, \exp 在 \mathbb{R} 上连续。又由 (b) 可知, $\exp(x)$ 是 $\exp(x)$ 的原函数。

于是利用定理 11.9.4 (微积分第二基本定理) 可得

$$\int_{[a,b]} \exp(x) dx = \exp(b) - \exp(a)$$

- (d)

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

利用二项式公式 (习题 7.1.4) 可知直接得到

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j} \end{aligned}$$

约分掉 $n!$ 可得

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{x^j y^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

由于 \exp 函数在 \mathbb{R} 上绝对收敛的, 所以可以使用定理 8.2.2 (富比尼定理)

$$\exp(x+y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{x^j y^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

令 $m = n - j$, 于是可得,

$$\exp(x+y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^j y^m}{j!m!}$$

分离成两个级数:

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \\ &= \exp(x) \exp(y) \end{aligned}$$

• (e)

(1) $\exp(0) = 1$

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

(2) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ 。

因为

$$\begin{aligned} \exp(0) &= 1 = \exp(x-x) = \exp(x) \exp(-x) \\ &\implies \\ \exp(-x) &= \frac{1}{\exp(x)} \end{aligned}$$

(3) $\exp(x) > 0$ 。

由于 (2) 易得, 任意 x , 都有 $\exp(x) \neq 0$ 。

于是我们有,

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \exp\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}x\right)^2 \\ &> 0\end{aligned}$$

• (f)

由 (b)(e) 和命题 10.3.3 可以得到该结论。

15.5.2

(1) 先按照书中提示, 先证明对于所有的 $k = 1, 2, 3, \dots$, 都有 $(n+k)! > 2^k n!$ 。

对 k 进行归纳。

$k = 1$ 时, $(n+k)! = (n+1)! = (n+1)n!$, 因为 $n \geq 3$, 所以 $n+1 > 2^1 = 2$, 所以 $(n+k)! > 2^k n!$ 成立。

归纳假设 $k = j$ 时, $(n+j)! > 2^j n!$ 成立。

$k = j+1$ 时,

$$(n+j+1)! = (n+j)!(n+j+1)$$

由归纳假设和 $n+j+1 > 2$ 可得,

$$(n+j)!(n+j+1) > 2^j n! \times 2 = 2^{j+1} n!$$

即

$$(n+j+1)! > 2^{j+1} n!$$

归纳完成。

(2) 证明 $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots < \frac{1}{n!}$ 。

由 (1) 可知,

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

由引理 7.3.3 可知,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k n!} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

于是可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= 2 - \sum_{k=0}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

综上所述可得

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots < \frac{1}{n!}$$

(3) 任意的 $n \geq 3$, $n!e$ 都不是整数。

$$n! \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = n! \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} + n! \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!}$$

因为 $m \leq n$, 都有 $\frac{n!}{m!}$ 是正整数。所以

$$n! \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!}$$

是正整数。

又由 (2) 可知,

$$0 < n! \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} < 1$$

综上所述, 命题成立。

(4) 推导出 e 是无理数。

反证法, 假设 e 不是无理数, 又因为 $e > 0$, 所以存在正整数 a, b , 使得 $e = \frac{a}{b}$ 。

于是，我们有，

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= e \\ \implies \\ a &= be \\ \implies \\ a(b-1)! &= b!e\end{aligned}$$

因为 $a(b-1)!$ 是正整数，所以 $b!e$ 也是正整数，这与 (3) 矛盾。

注意：这里有个细节，就是 $b \geq 3$ 不一定成立的困惑，这个无需考虑，只需做扩分操作即可。

15.5.3

- (a) x 是自然数。对 x 进行归纳。

(1) $x = 0$ 时，由定理 15.5.2(e) 可知， $\exp(0) = 1$ ，又 $e^0 = 1$ ，所以命题成立。

(2) 归纳假设， $x = k$ 时， $\exp(k) = e^k$ 成立。

(3) $x = k + 1$ 时，结合归纳假设和定理 15.5.2(d)，得

$$\exp(k+1) = \exp(k) \exp(1) = e^k e = e^{k+1}$$

归纳完成。

- (b) x 是整数。

由 (a) 可知，我们只需讨论 x 是负整数的情况。

设 $-x < 0$ ，于是 $x > 0$ ，

$$\begin{aligned}\exp(-x) &= \frac{1}{\exp(x)} \\ &= \frac{1}{e^x} \\ &= e^{-x}\end{aligned}$$

综上，命题成立。

- (c) x 是有理数。

x 可以表示成 $\frac{a}{b}$, 其中 a, b 都是整数, 且 $b > 0$ 。

$$\exp(x)^b = \exp\left(\frac{a}{b}b\right) = \exp(a) = e^a$$

$$\implies$$

$$\exp(x) = e^{\frac{a}{b}} = e^x$$

综上, 命题成立。

- (d) x 是实数。

对任意实数 x , 存在序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 使得 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

由定义 6.7.2 可知, $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n}$ 。

又因为 $e^{a_n} = \exp(a_n)$, 对所有的 n 均成立, 又因为 \exp 是连续的, 利用命题 9.4.7 可知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(a_n) = \exp(x)$$

综上可得,

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(a_n) \\ &= \exp(x) \end{aligned}$$

15.5.4

- (a) f 是无限可微的。

$$- \quad x < 0$$

$$f^{(k)}(x) = 0^{(k)} = 0。$$

$$- \quad x > 0$$

导数通项式: $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x) \exp(\frac{-1}{x})}{x^{2k}}$, 其中 $P_k(x)$ 是一个关于 x 的多项式。

可以通过归纳法证明, 证明略。

– $x = 0$

对 k 进行归纳。

(1) $k = 1$ 时, 左极限为 0, 我们主要讨论右极限。右极限:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{\exp(\frac{-1}{x})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{\frac{1}{\exp(\frac{1}{x})}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{1}{\exp(\frac{1}{x})x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{\frac{1}{x}}{\exp(\frac{1}{x})}\end{aligned}$$

定义函数 $\phi: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $\phi(x) = \frac{1}{x}$ 。

于是我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \phi(x) = +\infty$$

于是可得,

$$\begin{aligned}&\lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{\frac{1}{x}}{\exp(\frac{1}{x})} \\ &= \lim_{\phi(x) \rightarrow +\infty; x \in (0, +\infty)} \frac{\phi(x)}{\exp(\phi(x))} \\ &= 0\end{aligned}$$

(注意: 第一个等式使用了一个小命题, 在 10-5-comment.tex 的”3 定理”中有说明。第二个等式使用了习题 15.5.8)。

(2) 归纳假设 $k \leq n$ 时, 命题成立。

(3) $k = n + 1$ 时,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{x - 0} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{\frac{P_n(x) \exp(-\frac{1}{x})}{x^{2n}}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{P_n(x) \exp(-\frac{1}{x})}{x^{2n+1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} P_n(x) \frac{\frac{1}{x^{2n+1}}}{\exp(\frac{1}{x})}
\end{aligned}$$

因为 $P_n(x)$ 是连续的, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} P_n(x) = P_n(0)$, 再次利

用习题 15.5.8 可知, $\lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{\frac{1}{x^{2n+1}}}{\exp(\frac{1}{x})} = 0$ 。

综上,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} P_n(x) \frac{\frac{1}{x^{2n+1}}}{\exp(\frac{1}{x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} P_n(x) \lim_{x \rightarrow 0; x \in (0, +\infty)} \frac{\frac{1}{x^{2n+1}}}{\exp(\frac{1}{x})} \\
&= P_n(0) \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

即 $f^{(n+1)}(x) = 0$ 。

归纳完成。

– (b) f 在 0 处不是实解析的。

反证法, 假设 f 在 0 处是实解析的。即存在收敛半径大于或等于 $r > 0$ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在 $(-r, r)$ 上收敛于 f 。

利用泰勒公式 (推论 15.2.10), 我们有泰勒公式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-0)^n, x \in (-r, r)$$

因为任意 $n \geq 0$, $f^{(n)}(0) = 0$, 所以

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0, x \in (-r, r)$$

而任意 $x \in (-r, r)$, 利用定理 15.5.2(e) 可得

$$f(x) = \exp(-1/x) > 0$$

存在矛盾。

15.5.5

- (a)

对任意 $x \in (0, +\infty)$, 存在 $y \in \mathbb{R}$ 使得 $\exp(y) = x$, 利用定理 10.4.2 可知,

$$\begin{aligned}\ln'(x) &= \frac{1}{\exp'(y)} \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

因为 $\ln(x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的原函数, 于是利用微积分基本定理可得,

$$\int_{[a,b]} \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$$

- (b)

因为 $\exp(\ln(x)) = x, \exp(\ln(y)) = y$, 于是

$$\begin{aligned}\ln(xy) &= \ln(\exp(\ln(x)) \exp(\ln(y))) \\ &= \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) \\ &= \ln(x) + \ln(y)\end{aligned}$$

- (c)

(1) 因为 $\exp(0) = 1$, 于是

$$\ln(1) = \ln(\exp(0)) = 0$$

(2) 设 $\exp(y) = x$, 于是

$$-\ln(x) = \ln(\exp(y)) = -y$$

又因为

$$\begin{aligned} -y &= \ln(\exp(-y)) = \ln\left(\frac{1}{\exp(y)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

• (d)

设 $\exp(z) = x$, 于是

$$y \ln(x) = yz$$

又因为

$$\begin{aligned} \ln(x^y) &= \ln(\exp(z)^y) \\ &= \ln(\exp(yz)) \\ &= yz \end{aligned}$$

• (e)

(1)

利用引理 7.3.3 可得, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(-1, 1)$ 上逐点收敛于 $\frac{1}{1-x}$ 。

由定理 15.1.6(c) 可知, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 一致收敛于某个函数 f 。由习题 14.2.2(a),

和逐点收敛函数的唯一性可知, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 一致收敛于 $\frac{1}{1-x}$ 。

于是由定理 15.1.6(e) 可知,

$$\begin{aligned} \int_{[0,x]} \frac{1}{1-y} dy &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1} - (0-0)^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\int_{[0,x]} \frac{1}{1-y} dy &= -\ln(1-y)|_0^x \\ &= -\ln(1-x)\end{aligned}$$

综上所述可得,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

(2)

令 $y = 1 - x, x \in (-1, 1)$, 于是 $y \in (0, 2)$ 。

于是利用 (1), 我们有

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \ln(1-x) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-y)^n}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (y-1)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (y-1)^n}{n}\end{aligned}$$

15.5.6

任意实数 $x_0 \in (0, +\infty)$ 都存在自然数 N 使得 $N-1 < x_0 < N+1$ (可以利用命题 4.4.1 和命题 5.4.12, 完成证明)。

接下来证明, \ln 在 x_0 处是解析的, 并且存在幂级数展开式。

证明思路: 与习题 15.5.5(e) (2) 类似, 都是通过变换, 满足已有定理的定义域。

令 $y = \frac{x}{x_0}, x \in (0, 2x_0)$, 于是 $y \in (0, 2)$ 。

利用定理 15.5.6(e) 可得

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{x}{x_0} - 1\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx_0^n} (x - x_0)^n\end{aligned}$$

又因为,

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \ln(xx_0^{-1}) = \ln(x) - \ln(x_0)$$

综上可得,

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx_0^n} (x - x_0)^n \\ &= \ln(x_0)(x - x_0)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx_0^n} (x - x_0)^n\end{aligned}$$

命题成立。

15.5.7

$$\begin{aligned}(f(x)e^{-x})' &= f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x}(-1) \\ &= e^{-x}(f'(x) - f(x)) \\ &= 0\end{aligned}$$

由此可得 $f(x)e^{-x}$ 是常数, 设为 C 。又因为 $f(x)$, e^{-x} 都是正实数, 所以 $C > 0$ 。

于是

$$\begin{aligned}f(x)e^{-x} &= C \\ f(x) &= Ce^x\end{aligned}$$

15.5.8

直接使用洛必达定理的推广，本书中没有讲到这个推广。我在 10-5-comment.tex 中的“2.4”中添加了 this 推广。

因为 $x \rightarrow +\infty$, e^x 及 x^m 都趋于无穷大，所以，利用洛必达定理可得，

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{mx^{m-1}}$$

多次使用洛必达定理，可以得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{mx^{m-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{m!} = +\infty$$

15.5.9

$P(x)$ 是多项式，所以我们可以找到一个正整数 $k \geq 0$ 和实数 a_0, a_1, \dots, a_k 使得

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$$

对每一个 $i > 0$ ，由习题 15.5.8 可知，

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{cx}}{(cx)^i} = +\infty$$

于是，存在 $N_i > 0$ ，使得只要 $x > N_i$ ，就有

$$\frac{e^{cx}}{(cx)^i} > (k+1) \frac{1}{c^i} |a_i|$$

$$\implies$$

$$e^{cx} > (k+1)|a_i|x^i$$

又因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{cx} = +\infty$ ，所以存在 N' ，使得 $x > N'$ ，就有

$$e^{cx} > (k+1)|a_0|$$

综上，取 $N = \max(N', N_1, \dots, N_k)$ ，使得 $x > N$ ，就有

$$\begin{aligned} (k+1)e^{cx} &> (k+1)|a_0| + |a_1|x + |a_2|x^2 + \dots + |a_k|x^k \\ &\geq (k+1)|P(x)| \end{aligned}$$

于是

$$e^{cx} > |P(x)|$$

15.5.10

(1) 利用 \exp, \ln 的连续性证明。

可以仿照推论 13.2.3 的证明。

我们有,

$$\exp(y \ln(x)) = e^{y \ln(x)} = (e^{\ln(x)})^y = x^y$$

先证明 $y \ln(x)$ 是连续的。

对任意 $(x_0, y_0) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$, 设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ 中收敛于 (x_0, y_0) 的点, 其中 $x^{(n)} = (x_n, y_n)$, 利用命题 12.1.18(d) 可知, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0 , $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 y_0 。

于是利用定理 6.1.19 (极限定律) 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \ln(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x_n) \\ &= y_0 \ln(x_0) \end{aligned}$$

所以, $y \ln(x)$ 是连续的。

由于 \exp 函数是连续的, 利用推论 13.1.7 可知, $\exp(y \ln(x))$ 是连续的。

(2) 挑战一下

todo 还没思路。