9.8 习题

张志聪

2024 年 12 月 6 日

9.8.1

以单调递增为例，其他情况类似。

设闭区间为 $[a,b]$，f 为 $[a,b]$ 上的单调递增函数。

此时 $f(b)$ 是最大值，$f(a)$ 为最小值，

因为任意 $x_0 \in [a,b]$ 都有 $x_0 \leq b$，按照定义 9.8.1 可知，$f(x_0) \leq f(b)$，于是由定义 9.6.5 可知，此时的 $f(b)$ 就是最大值。

类似地，可证 $f(a)$ 是最小值。

9.8.2

函数 $f:[1,3] \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} x, x \in [1,2] \\ x+1, x \in (2,3] \end{cases}$$

此时 $f(1) = 1, f(3) = 4$，$1 \leq 2.5 \leq 4$，但不存在 $c \in [1,3]$ 使得 $f(c) = 2.5$。

9.8.3

因为 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 是即连续又一对一的函数，所以 $f(a) \neq f(b)$。

于是

- $f(a) < f(b)$

  显然，如果 f 是严格单调的，只能是严格递增的。反证法，假设不是严格递增的，即存在 $x_0, x_1 \in [a, b]$ 且 $x_0 < x_1$ 使得 $f(x_0) > f(x_1)$。

  - 如果 $f(x_0) < f(b)$

    于是 $\{y : f(a) < y < f(x_0)\text{且}f(x_1) < y < f(b)\}$ 是非空集合，从中任意一个值 y_0，由介值定理，存在 $c_0 \in [a, x_0]$ 使得 $f(c_0) = y_0$，且存在 $c_1 \in [x_1, b]$ 使得 $f(c_1) = y_0$。

    此时 $f(c_0) = y_0 = f(c_1)$，这与题设 f 是即连续又一对一的函数矛盾。

  - 如果 $f(x_0) > f(b)$ 于是 $\{y : f(a) < y < f(x_0)\text{且}f(b) < y < f(x_0)\}$ 是非空集合，从中任意一个值 y_0，由介值定理，存在 $c_0 \in [a, x_0]$ 使得 $f(c_0) = y_0$，且存在 $c_1 \in [x_0, b]$ 使得 $f(c_1) = y_0$。

    此时 $f(c_0) = y_0 = f(c_1)$，这与题设 f 是即连续又一对一的函数矛盾。

  于是有矛盾可知，f 是严格递增的。

- $f(a) > f(b)$

  显然，如果 f 是严格单调的，只能是严格递减的。证明方法和上同理。

综上，f 是严格单调的。

9.8.4

分别证明 f^{-1} 连续性和严格单调递增性。

- 连续性

  任意 $y_0 \in [f(a), f(b)]$，由于 f 在 $[a, b]$ 上连续又严格递增，那么，$f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ 由介值定理可知存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = y_0$。

  对于任意 $\epsilon > 0$，

  设 $f([a, b] \cap [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]) = [y', y'']$，因为 f 是连续又严格递增，那么任意 $y' \leq y \leq y''$，只能在 $[a, b] \cap [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ 找到唯一的 x 使得 $y = f(x)$ （介值定理保证是存在的，严格递增保证是唯一的）。

于是取 $\delta = min(y_0 - y', y'' - y_0)$，使得

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)|$$
$$= |x - x_0| \leq \epsilon$$

对所有满足 $|y - y_0| < \delta$ 的 $y \in [f(a), f(b)]$ 均成立（因为满足条件的 x 只会在区间 $[a, b] \cap [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$）。

- 严格单调递增性

  任意 $y_0, y_1 \in [f(a), f(b), y_0 < y_1]$，由于 f 在 $[a, b]$ 上连续又严格递增，那么，$f(a) \leq y_0 < y_1 \leq f(b)$ 由介值定理可知存在 $x_0, x_1 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$。

  首先说明 x_0, x_1 的唯一性，然后说明 $x_0 < x_1$。

  - 唯一性

    假设有多个 x 使得其函数值相同，这与 f 严格递增矛盾。

  - $x_0 < x_1$

    如果 $x_1 < x_0$，那么 $f(x_1) > f(x_0)$（因为 $y_0 < y_1$），这与 f 严格递增矛盾。

  综上，$f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_1)$。所以 f^{-1} 严格递增。

9.8.5

不想证，哈哈哈