10.1 习题

张志聪

2024 年 12 月 12 日

10.1.1

（1）f 在 x_0 处可微分，由定义 10.1.1 可知，极限

$$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

是存在的，不妨设极限是 L。由定义 9.3.6 可知，对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L|\le\epsilon$$

对任意 $x\in\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\cap X\setminus\{x_0\}\big)$ 均成立。

任意 $y\in\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\cap Y\setminus\{x_0\}\big)$，因为 $Y\subset X$，所以 $y\in\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\cap X\setminus\{x_0\}\big)$，所以

$$|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}-L|\le\epsilon$$

由定义 9.3.6 可知，

$$\lim_{y\to x_0;y\in Y\setminus\{x_0\}}\frac{f|_Y(y)-f|_Y(x_0)}{y-x_0}$$

的极限存在，所以 $f|_Y$ 在 x_0 处可微。

（2）与 10.1.2 不矛盾的原因：

点 3 不是 $[1,2]\cup\{3\}$ 的极限点，不满足习题 10.1.1 习题的前置条件。

10.1.2

- $(a) \implies (b)$

  f 在 X 中的 x_0 处是可微的，且导数为 L，由定义 10.1.1 可知，极限

  $$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$$

  于是，由定义 9.3.6 可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

  $$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - L| \leq \epsilon$$

  对 $|x-x_0| \leq \delta, x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。

  对上式进行算术运算，

  $$\begin{aligned} |\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - L| &\leq \epsilon \\ |\frac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{x-x_0}| &\leq \epsilon \\ |f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)| &\leq \epsilon|x-x_0| \\ |f(x)-\big(f(x_0)+L(x-x_0)\big)| &\leq \epsilon|x-x_0| \end{aligned}$$

  对 $|x-x_0| \leq \delta, x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。当 $x = x_0$ 时，公式也成立。

- $(b) \implies (a)$

  直接进行算术运算，略

10.1.3

- 方法 1(利用极限定律，命题 9.3.14)

  不妨设 x_0 处的导数为 L，于是

  $$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$$

  即函数 f 在 x_0 处沿着 $X \setminus \{x_0\}$ 收敛于 L。

  我们易证

  $$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}} x - x_0 = 0$$

即函数 g 在 x_0 处沿着 $X \setminus \{x_0\}$ 收敛于 0。

于是

$$\begin{aligned} fg &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \\ &= f(x)-f(x_0) \end{aligned}$$

按照极限定律（命题 9.3.14）可得

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} fg \\ &= \lim_{x\to x_0; x\in X\setminus\{x_0\}} f(x)-f(x_0) \\ &= L \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$ 对所有满足 $|x-x_0| < \delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。特别地 $x = x_0$ 时 $f(x)-f(x_0) = 0 < \delta$ 也成立。

所以由命题 9.4.7(d) 可知，f 在 x_0 处连续。

- 方法 2（利用命题 10.1.7）

  f 在 x_0 处可微，由命题 10.1.7(b) 可知，对任意的 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$，当 $x \in X$ 且 $|x-x_0| \leq \delta$ 时，那么就有

  $$|f(x) - \big(f(x_0) + L(x-x_0)\big)| \leq \epsilon|x-x_0|$$

  进过算术运算，

  $$\begin{aligned} |f(x) - \big(f(x_0) + L(x-x_0)\big)| &\leq \epsilon|x-x_0| \\ |f(x)-f(x_0)| &\leq \epsilon|x-x_0| + |L||x-x_0| \\ |f(x)-f(x_0)| &\leq (\epsilon+|L|)|x-x_0| \end{aligned}$$

  取 $\delta = \frac{\epsilon}{\epsilon+|L|}$，此时 $|x-x_0| \leq \frac{\epsilon}{\epsilon+|L|} = \delta$，使得

  $$|f(x)-f(x_0)| \leq \epsilon$$

  由命题 9.4.7(d) 可知，f 在 x_0 处连续。

10.1.4

- (a)

  对任意 $\epsilon > 0$，对任意 $\delta > 0$，都存在

  $$\begin{aligned}&\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\\&= \frac{c - c}{x - x_0}\\&= 0\end{aligned}$$

  对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。于是由命题 9.4.7(c) 可得

  $$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

  即 $f'(x_0) = 0$

- (b)

  对任意 $\epsilon > 0$，对任意 $\delta > 0$，都存在

  $$\begin{aligned}&\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\\&= \frac{x - x_0}{x - x_0}\\&= 1\end{aligned}$$

  对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。于是由命题 9.4.7(c) 可得

  $$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

  即 $f'(x_0) = 1$

- (c)

  设 $f'(x_0) = L, g'(x_0) = M$

  f 在 x_0 处可微，由定义 10.1.1 可知，极限

  $$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

由定义 9.3.6 可知，对任意 $\epsilon > 0, \frac{1}{2}\epsilon > 0$，存在 $\delta_f > 0$，使得

$$|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta_f$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。

同理可得，存在 $\delta_g > 0$，使得

$$|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - M| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta_g$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。

令 $\delta = min(\delta_f, \delta_g)$，于是，

$$\begin{aligned}
&|\frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} - (L + M)| \\
&= |\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - M| \\
&\leq |\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L| + |\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - M| \\
&= \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

对所有满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 均成立。所以 $(f + g)'(x_0) = L + M$。

于是 $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) = L + M$。

- (d)

  设 $f'(x_0) = L, g'(x_0) = M$

  f 在 x_0 处可微，由定义 10.1.1 可知，极限

$$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

  同理可得，

$$\lim_{x \to x_0; x \in X \setminus \{x_0\}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = M$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{f(x)\big(g(x)-g(x_0)\big)+\big(f(x)-f(x_0)\big)g(x_0)}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}
\end{aligned}
$$

又 f 在 x_0 处可微，由命题 10.1.0 可知 f 在 x_0 处连续

$$\lim_{x\to x_0;x\in X}f(x)=f(x_0)$$

于是通过命题 9.4.7(c) 可知（$x=x_0$ 是特例），

$$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}f(x)=f(x_0)$$

于是利用极限定律（命题 9.3.14）可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
&=f(x_0)M+g(x_0)L
\end{aligned}
$$

所以 $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$。

- (e)

  设函数 $h:X\to\mathbb{R}$ 为 $h(x)=c$，于是 $(cf)(x)=h(x)f(x)$，函数相等一定有相同的导数（注 10.1.4），于是利用 (d) 可得

$$
\begin{aligned}
&(cf)'(x_0)\\
&=(hf)'(x_0)\\
&=h'(x_0)f(x_0)+h(x_0)f'(x_0)\\
&=0\times f(x_0)+c\times f'(x_0)\\
&=cf'(x_0)
\end{aligned}
$$

- (f)

设函数 $h : X \to \mathbb{R}$ 为 $h(x) = -g(x)$，于是 $(f-h)(x) = (f+g)(x)$，函数相等一定有相同的导数（注 10.1.4），于是利用 (d) 可得

$$\begin{aligned}&(f-g)'(x_0)\\&=(f+h)'(x_0)\\&=f'(x_0)+h'(x_0)\end{aligned}$$

由 (e) 可知，$h'(x_0) = (-g)'(x_0) = -g'(x_0)$，把 (e) 中的 c 看做 -1，综上可得

$$\begin{aligned}&(f-g)'(x_0)\\&=f'(x_0)-g'(x_0)\end{aligned}$$

- (g)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\end{aligned}$$

由于 g 在 x_0 处可微，所以

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\\&=f'(x_0)\end{aligned}$$

由于 g 在 x_0 处可微，由命题 10.1.0 可知 g 在 x_0 处连续，且 $g(x)$ 在 X 上不为零，由命题 9.3.14（函数的极限定理）可得

$$\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{g(x_0)}$$

再次利用命题 9.3.14（函数的极限定理）可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0;x\in X\setminus\{x_0\}}\frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\\
&=\frac{1}{g(x_0)}\frac{1}{g(x_0)}\big(-g'(x_0)\big)\\
&=-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}
\end{aligned}$$

- (h)

  因为 $\big(\frac{f}{g}\big)(x)=f(x)\frac{1}{g(x)}$，于是利用 (d)(g) 可知，

$$\begin{aligned}
\big(\frac{f}{g}\big)'(x_0)&=\big(f\frac{1}{g}\big)'(x_0)\\
&=f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\big(\frac{1}{g}\big)'(x_0)\\
&=f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\big(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\big)\\
&=\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}-\frac{f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\\
&=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}
\end{aligned}$$