# 5.6 习题

2024 年 12 月 4 日

## 5.6.1

证明：

**（a）**

仿照命题 5.5.12 的证明过程。

令 $E = \{z \in R : z \geq 0且z^n \leq x\}$，由定义 5.6.4 可知 $y = x^{1/n} := sup(E)$。

利用反证法，我们要证明 $y^n < x$ 和 $y^n > x$ 都会导致矛盾。

首先假设 $y^n < x$，假设 $0 < \epsilon < 1$ 是一个较小的正数。由于 $\epsilon^n < \epsilon$。

如果 $0 < y \leq 1$，那么，

$$(y+\epsilon)^n = \epsilon^n + k_0 y\epsilon^{n-1} + k_1 y^2 \epsilon^{n-2} + ... + y^n \tag{1}$$

$$< \epsilon + y^n + max(k_0, k_1, ...,)y\epsilon \tag{2}$$

$$< y^n + \epsilon[1 + max(k_0, k_1, ...,)y] \tag{3}$$

设 $\delta = x - y^n$，取 $\epsilon < \delta/[1+max(k_0, k_1, ...,)y]$，就可以保证 $(y+\epsilon)^n < x$，所以 $(y+\epsilon) \in E$，从而与 $y$ 是 $E$ 的上确界矛盾。

如果 $y > 1$，那么，

$$(y+\epsilon)^n = \epsilon^n + k_0 y\epsilon^{n-1} + k_1 y^2 \epsilon^{n-2} + ... + y^n \tag{4}$$

$$< \epsilon + y^n + max(k_0, k_1, ...,)y^{n-1}\epsilon \tag{5}$$

$$< y^n + \epsilon[1 + max(k_0, k_1, ...,)y^{n-1}] \tag{6}$$

设 $\delta = x - y^n$，取 $\epsilon < \delta/[1+max(k_0, k_1, ...,)y^{n-1}]$，就可以保证 $(y+\epsilon)^n < x$，所以 $(y+\epsilon) \in E$，从而与 $y$ 是 $E$ 的上确界矛盾。

现在假设 $y^n > x$，假设 $0 < \epsilon < 1$ 是一个较小的正数。

如果 $0 < y \le 1$，那么，

$$(y-\epsilon)^n > y^n - \epsilon^n - max(|k_0|, |k_1|, ..., )y\epsilon \tag{7}$$
$$> y^n - \epsilon[1 - max(|k_0|, |k_1|, ..., )y] \tag{8}$$

设 $\delta = y^n - x$，取 $\epsilon < \delta/[1 - max(|k_0|, |k_1|, ..., )y]$，就可以保证 $(y-\epsilon)^n > x$，所以 $(y-\epsilon)$ 也是上界，这与 $y$ 是 $E$ 的最小上界矛盾。

如果 $y > 1$，那么，

$$(y-\epsilon)^n > y^n - \epsilon^n - max(|k_0|, |k_1|, ..., )y\epsilon \tag{9}$$
$$> y^n - \epsilon[1 - max(|k_0|, |k_1|, ..., )y^{n-1}] \tag{10}$$

设 $\delta = y^n - x$，取 $\epsilon < \delta/[1 - max(|k_0|, |k_1|, ..., )y^{n-1}]$，就可以保证 $(y-\epsilon)^n > x$，所以 $(y-\epsilon)$ 也是上界，这与 $y$ 是 $E$ 的最小上界矛盾。

根据这两个矛盾，我们得到 $y^n = x$，命题得证。

证明过程中 $k_n$ 具体的值是什么不重要，这里是定性分析。

**（b）**

该命题说明了 $y$ 的唯一性，即：只有 $y = x^{1/n}$，才能使得 $y^n = x$。

假设存在 $y'$ 使得 $(y')^n = x$，那么 $(y')^n = y^n$，对 $n$ 进行归纳，可知 $y' = y$，存在矛盾，所以 $y = y'$，即 $y = x^{1/n}$ 是唯一的。

**（c）**

定义 5.6.4 就保证了任何 $E = \{y \in R : y \ge 0且y^n \le x\}$ 的上界 $M \ge 0$，因为上界要大于 $E$ 中的任意元素。所以，$E$ 的最小上界 $sup(E) \ge 0$，所以 $x^{1/n}$ 是非负实数。

**（d）**

必要性：因为 $x^{1/n} > y^{1/n}$，且由命题 5.6.3（c）可知，

$$(x^{1/n})^n > (y^{1/n})^n$$
$$\Rightarrow x > y$$

充分性：反证法，假设 $x > y$ 时，$x^{1/n} \le y^{1/n}$。而通过 5.6.3（c）可知，

$$(x^{1/n})^n \le (y^{1/n})^n$$
$$\Rightarrow x \le y$$

这与 $x > y$ 矛盾。所以假设不成立，命题得证。

**(e)**（1）$x > 1$

首先证明 $x > 1$ 时，$x^{1/n} > 1$。由（d）可知，$x > 1$ 于是 $x^{1/n} > 1^{1/n}$，又因为 $1^n = 1$，由（b）可知 $1 = 1^{1/n}$，于是，

$$x^{1/n} > 1^{1/n} = 1$$

现在证明 $x > 1$ 时，$x^n$ 是严格递增的。只需证明对任意自然数 $k, x^k < x^{k+1}$。由于，

$$x^{k+1} - x^k = x^k(x-1) > 0$$

所以 $x^n$ 是严格递增的。

不妨设 $k_0 < k_1$，由（a）可知，

$$(x^{1/k_0})^{k_0} = x \tag{11}$$

$$(x^{1/k_1})^{k_1} = x \tag{12}$$

由于 $x > 1, x^{1/k_1} > 1$，于是 $(x^{1/k_1})^n$ 是严格递增的，且 $k_0 < k_1$，所以 $(x^{1/k_1})^{k_0} < (x^{1/k_1})^{k_1} = x$，由此可知，

$$x = (x^{1/k_0})^{k_0} > (x^{1/k_1})^{k_0} \tag{13}$$

由 5.6.3（c）可知，$x^{1/k_0} > x^{1/k_1}$，所以 $x^{1/k}$ 是关于 $k$ 的减函数得证。

（2）$x < 1$ 证明略

（3）$x = 1$ 证明略

**(f)**

按照消去律，只需证明，等式两端的 $n$ 次幂是相等的即可。

由（a）可知

$$[(xy)^{1/n}]^n = xy$$

由命题 5.6.3（a）可知，

$$\begin{aligned}(x^{1/n}y^{1/n})^n &= (x^{1/n})^n(y^{1/n})^n \\ &= xy\end{aligned}$$

**(g)**

按照消去律，只需证明，等式两端的 $mn$ 次幂是相等的即可。

由（a）可知

$$[(x)^{1/mn}]^m n = x$$

有 5.6.3 （a）可知，

$$\begin{aligned}
[(x^{1/n})^{1/m}]^{mn} &= \{[(x^{1/n})^{1/m}]^m\}^n \\
&= (x^{1/n})^n \\
&= x
\end{aligned}$$

## 5.6.2

证明：

记 $q = a/b, r = c/d$，其中 $a, c$ 是整数且 $b, d$ 是正整数。

**（a）**

$x^q = (x^{1/b})^a$，由定义 5.6.4 可知 $x^{1/b} \geq 0$，现在只需证明 $x^{1/b} \neq 0$，假设 $x^{1/b} = 0$，那么，

$$\begin{aligned}
x^{1/b} &= 0 \\
(x^{1/b})^b &= 0^b \\
x &= 0
\end{aligned}$$

这与 $x > 0$ 矛盾，所以 $x^{1/b} > 0$。

$(x^{1/b})^a$ 的正实数性，通过对 $a$ 进行讨论来完成证明。

（1）$a \leq 0$ 时，可以对 $a$ 进行归纳。

$a = 1$ 时，$(x^{1/b})^0 = 1 > 0$；

归纳假设 $a = k$ 时，$(x^{1/b})^k > 0$。

$a = k + 1$ 时，

$$(x^{1/b})^{k+1} = (x^{1/b})^k (x^{1/b})$$

由命题 5.4.4 可知 $(x^{1/b})^k (x^{1/b}) > 0$；

至此，归纳完成。

（2）$a<0$ 时，由于 $-a>0$，所以 $(x^{1/b})^a=1/[(x^{1/b})^{-a}]$，由于 $[(x^{1/b})^{-a}]>0$，所以 $1/[(x^{1/b})^{-a}]>0$，即：$(x^{1/b})^a>0$。

**（b）**

（1.1）

$$x^{q+r}=x^{(ad+bc)/bd}$$

对 $x^{(ad+bc)/bd}$ 进行 $bd$ 次幂，

$$\begin{aligned}(x^{(ad+bc)/bd})^{bd}&=(x^{1/bd})^{(ad+bc)bd}\\&=x^{ad+bc}\end{aligned}$$

（1.2）

$$\begin{aligned}x^qx^r&=x^{a/b}x^{c/d}\\&=(x^{1/b})^a(x^{1/d})^c\end{aligned}$$

对 $(x^{1/b})^a(x^{1/d})^c$ 进行 $bd$ 次幂，

$$[(x^{1/b})^a(x^{1/d})^c]^{bd}=(x^{1/b})^{abd}(x^{1/d})^{bcd}\qquad=x^{ad}x^{bc}=x^{ad+bc}$$

由消去律可知，$x^{q+r}=x^qx^r$。

相同方法可知 $(x^q)^r=x^{qr}$

**（c）**

$q=0$ 时，$x^{-0}=1,1/x^0=1/1=1$，所以 $x^{-q}=1/x^q$。

$q>0$ 时，此时 $a>0$，$x^{-q}=(x^{1/b})^{-a}$，由于 $-a<0$，由定义 5.6.2 可知，$(x^{1/b})^{-a}=1/(x^{1/b})^a=1/x^q$。

$q<0$ 时，$a<0$，$x^{-q}=(x^{1/b})^{-a}$。$1/x^q=1/(x^{1/b})^a$，由于 $a<0$，由定义 5.6.2 可知，$1/x^q=1/(x^{1/b})^a=(x^{1/b})^{-a}=x^{-q}$。

综上，命题得证。

**说明.** $1/(x^{1/b})^a=(x^{1/b})^{-a}$，利用了命题: $(x^{-1})^{-1}=x$，即：$x$ 倒数的

倒数是 $x$。

该命题不做说明了

**（d）**

$x^q=(x^{1/b})^a$，$y^q=(y^{1/b})^a$，由命题 5.6.3（c）可知，我们只需证明 $(x^{1/b})>(y^{1/b})$，因为 $x>y$，由命题 5.6.6（d）可知，$(x^{1/b})>(y^{1/b})$。

**（e）**

$$\begin{aligned}(x^q)^{bd}&=(x^{a/b})^{bd}\\&=[(x^{1/b})^a]^{bd}\\&=x^{ad}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^r)^{bd}&=(x^{c/d})^{bd}\\&=[(x^{1/d})^c]^{bd}\\&=x^{bc}\end{aligned}$$

（1）$x>1$

在习题 5.6.1（e）的证明过程已说明 $x>1,n\geq 0$ 时，$x^n$ 是严格递增。

**2.** *在 5.6.1*（*e*）中只说明了 $n\geq 0$，所以 $n<0$ 也需要证明下：**设 $x>1,n<0$，那么 $x^n$ 是一个关于 $n$ 的递增函数。**

设 $-k_1<-k_2<0$，现在要证明 $x^{-k_1}<x^{-k_2}$。

反证法，假设 $x^{-k_1}>x^{-k_2}$，则存在 $\epsilon>0$ 使得 $x^{-k_1}=x^{-k_2}+\epsilon$。由题设可知，存在 $\delta>0$ 使得 $x^{k_1}=x^{k_2}+\delta$，所以，

$$\begin{aligned}x^{k_1}x^{-k_1}&=(x^{k_2}+\delta)(x^{-k_2}+\epsilon)\\&=x^{k_2}x^{-k_2}+x^{k_2}\epsilon+\delta x^{-k_2}+\delta\epsilon\\&=1+x^{k_2}\epsilon+\delta x^{-k_2}+\delta\epsilon\\&>1\end{aligned}$$

这与 $x^{k_1}x^{-k_1}=1$ 矛盾。

反证法，假设 $x^{-k_1}=x^{-k_2}$，此时 $x^{k_1}x^{-k_1}=x^{k_2}x^{-k_2}=x^{k_2}x^{-k_1}$，这与 $x^{k_1}>x^{k_2}$，$x^{k_1}x^{-k_1}>x^{k_2}x^{-k_1}$ 矛盾。

（1.1）充分性：

如果 $x^q>x^r$，由引理 5.6.9（d）可知 $(x^q)^{bd}>(x^r)^{bd}$，于是，

$$x^{ad}>x^{bc}$$

由 $x^n$ 的严格递增性可知 $ad>bc$，所以 $q-r=(ad-bc)/bd>0$，可得 $q>r$。

（1.2）必要性：

$q>r$，则

$$\begin{aligned}
&a/b-c/d=(ad-bc)/bd>0\\
&\Rightarrow ad-bc>0\Rightarrow ad \qquad\qquad\qquad\qquad >bc
\end{aligned}$$

由于 $ad>bc$ 可知，$(x^q)^{bd}>(x^r)^{bd}$，由引理 5.6.9（d）可知，$x^q>x^r$。

（2）$x<1$ 证明类似略

## 5.6.3

先证明 $x^2=|x|^2$。

如果 $x=0$，显然成立；

如果 $x>0$，由于 $|x|=x$，所以 $|x|^2=x^2$；

如果 $x<0$，不妨设 $x=-y,|x|=y,y>0$，则

$$\begin{aligned}
x^2&=(-y)^2\\
&=(-1)^2y^2\\
&=1\times y^2\\
&=y^2
\end{aligned}$$

所以 $|x|^2=x^2=y^2$。

利用引理 5.6.9（a）

$$\begin{aligned}
(x^2)^{1/2}&=(|x|^2)^{1/2}\\
&=|x|^{2\times(1/2)}\\
&=|x|
\end{aligned}$$