

8.3 习题

张志聪

2024 年 11 月 21 日

8.3.1

对 n 进行归纳。

归纳基始, $n = 0$, 此时, X 是空集, $\#(X) = 0$, $2^0 = 1$, 这与空集的子集只有它本身是一致的。

归纳假设, $n = k$ 时, $\#(2^X) = 2^k$ 。

当 $n = k + 1$ 时, 在 X 中任取一个元素 x_0 , 此时, 设 $X' = X \setminus \{x_0\}$ 。对 2^X 的任意子集 A :

- 如果 $x_0 \notin A$, 此时 $A \subseteq 2^{X'}$, 由归纳假设可知, 这样的子集有 2^k 个。
- 如果 $x_0 \in A$, 定义 $A' := A \setminus \{x_0\}$, 显然 $A' \subseteq 2^{X'}$, 因为 A' 有 2^k 个, 所以 $A' \cup \{x_0\}$ 有 2^k 个。

综上, $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ 。

8.3.2

说明 1. 一开始, 觉得题目不对! 理由如下: 由题设, $A \subseteq C$ 且单射 $f: C \rightarrow A$ 可知, $f(C)$ 与 C 是双射, 而 $f(C) \subseteq A$, 所以只有 $C = A$ 才能满足题设, 进而 $A = B = C$ 。那么, $D_0 = B \setminus A = \emptyset$, 就没有证明的必要了。

问题出在对习题 3.6.7 的理解上了, 这里只能证明 $\#(A) = \#(B) = \#(C)$, 而无法证明 $A = B = C$, 举一个反例, 自然数 N 与偶数集合的基数相等, 也可以构建一个单射, 但不妨碍偶数集合是自然数子集这

一事实。

(1) 命题与 $D_n \cap D_{n+1} = \emptyset$ 等价。对 n 进行归纳。

归纳基始, $n = 0$ 时, $D_0 := B \setminus A, D_1 := f(D_0)$ 。反证法, 假设 $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$, 由题设可知 $D_1 \subseteq A$, 因为 $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$, 所以存在元素 $x \in D_0, D_1, A$, 这与 $D_0 := B \setminus A$ 矛盾。

归纳假设, $n = k$ 时, 命题 $D_k \cap D_{k+1} = \emptyset$ 成立。

当 $n = k + 1$ 时, $D_{k+2} := f(D_{k+1})$ 。反证法, 假设 $D_{k+2} \cap D_{k+1} \neq \emptyset$, 即存在 $d_0 \in D_{k+2}, D_{k+1}$, 又因为 $D_{k+1} = f(D_k)$, 于是, 存在 x_0, x_1 使得

$$\begin{cases} d_0 = f(x_0) \text{ 其中 } x_0 \in D_k, f(x_0) \in D_{k+1} \\ d_0 = f(x_1) \text{ 其中 } x_1 \in D_{k+1}, f(x_1) \in D_{k+2} \end{cases}$$

由归纳假设可知 $x_0 \neq x_1$, 这与 f 是单射的矛盾。

(2) A 和 B 有相同的基数, 在说明中已阐述。

- 单射; 函数 g 的定义域被定义成两个部分, 各自显然是单射的, 现在要证明两个部分的值域没有交集。反证法, 假设存在 $x_0 \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n, x_1 \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n, x_0 \neq x_1$, 使得 $g(x_0) = g(x_1)$, 即: $f^{-1}(x_0) = x_1, f(x_1) = x_0$ 。因为 $x_0 \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, 所以存在 $x' \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ 使得 $f(x') = x_0$ 。因为 $x_1 \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, 所以 $x' \neq x_1$, 于是 $f(x') = f(x_1)$, 这与 f 是单射矛盾。
- 满射; 对任意 $y \in B$, 如果 $y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, 由 f 的定义可知, $f(y) \in A, f(y) \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, 满足 g 的定义, 于是 $f^{-1}(f(y)) = y$; 如果 $y \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, 有 $g(y) = y$;