

## 3.6 习题

2024 年 3 月 13 日

### 3.6.1

证明.

①  $X$  和  $X$  有相等的基数。

构造一个从  $X$  到  $X$  的函数  $f$ , 使得  $f(x)=x$  ( $\{x \in X\}$ )。函数  $f$  是双射函数, 是显而易见的, 这里不做证明了。

② 如果  $X$  和  $Y$  有相等的基数, 那么  $Y$  和  $X$  有相等的基数。

有  $X$  和  $Y$  有相等的基数, 可知存在一个双射:  $f: X \rightarrow Y$ 。那么存在  $f$  的逆  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , 由逆的定义可知  $f^{-1}$  是双射函数。

③ 如果  $X$  和  $Y$  有相等的基数且  $Y$  和  $Z$  有相等的基数, 那么  $X$  和  $Z$  有相等的基数。

由  $X$  和  $Y$  有相等的基数, 可知存在一个双射:  $f: X \rightarrow Y$ 。由  $Y$  和  $Z$  有相等的基数, 可知存在一个双射:  $g: Y \rightarrow Z$ 。那么  $g$  和  $f$  的复合函数为  $g \circ f: X \rightarrow Z$ 。

由习题 3.3.7 可知  $g \circ f$  是双射函数。由此可知存在一个双射:  $g \circ f: X \rightarrow Z$ , 所以  $X$  和  $Z$  有相等的基数。

### 3.6.2

证明.

① 充分性: 一个集合  $X$  的基数为 0, 则  $X$  是空集。

那么存在从  $X$  到  $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$  的双射:  $f: X \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$ 。而  $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$  是  $\emptyset$ , 即  $f: X \rightarrow \emptyset$ 。如果  $X$  不是空集, 那么则存在一个  $x \in X$  使得  $f(x) \in \emptyset$ , 这显然是不成立的, 所以  $X$  是空集

② 必要性:  $X$  是空集, 则  $X$  的基数为 0。

若  $X$  是空集, 由习题 3.3.3 知  $f: \emptyset \rightarrow \emptyset$  为双射, 而  $\{i \in N: 1 \leq i \leq 0\} = \emptyset$ , 即存在双射函数  $f: \emptyset \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq 0\}$ , 由定义 3.6.5 可知集合  $X$  基数为 0.

### 3.6.3

证明.

对  $n$  进行归纳:

$n=0$  时,  $f$  是空函数, 命题空成立。

归纳假设  $n=k$  时, 命题成立。

下面我们证明该命题对于  $k++$  也为真。设集合  $N_k = \{i \in N: 1 \leq i \leq k\}$ ,  $N_{k++} = \{i \in N: 1 \leq i \leq k++\}$ 。函数  $f_{k++}: N_{k++} \rightarrow N$  是一个函数, 我们可以由  $f_{k++}$  定义出一个函数  $f_k: N_k \rightarrow N$ , 对任意  $i \in N_k$ ,  $f_k(i) = f_{k++}(i)$ 。由归纳假设可知, 存在一个自然数  $M$  使得  $f_k(i) \leq M, i \in N_k$ , 即  $f_{k++}(i) \leq M, i \in N_k$ , 此时我们可以取  $f_{k++}(k++), M$  中的较大值为  $M'$ , 由此可知该  $M'$  使得  $f_{k++}(i) \leq M', i \in N_{k++}$ 。归纳法完成。

### 3.6.4

(a) 设  $X$  是一个有限集, 设  $x$  是一个对象并且  $x$  不是  $X$  中的元素。那么  $X \cup \{x\}$  是有限的, 且  $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$

证明.

$X$  是有限集, 不妨设  $X$  的基数是自然数  $n$ 。因此存在从  $X$  到  $\{i \in N: 1 \leq i \leq n\}$  的双射函数  $f$ 。定义出一个函数  $g: X \cup \{x\} \rightarrow \{i \in N: 1 \leq i \leq n+1\}$ , 使得  $g(x) = n+1$ ,  $g(i) = f(i), i \in X$ 。  $g$  是双射函数, 由此可知  $X \cup \{x\}$  的基数是  $n+1$ , 所以  $X \cup \{x\}$  是有限的, 且  $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$

(b) 设  $X$  和  $Y$  都是有限集, 那么  $X \cup Y$  是有限的, 且  $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$ 。另外, 如果  $X$  和  $Y$  是不相交的 (即  $X \cap Y = \emptyset$ ), 那么  $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$

证明.

$X$  和  $Y$  都是有限集, 不妨设  $X$  和  $Y$  的基数分别为  $n$  和  $m$ 。

(c) 设  $X$  是一个有限集,  $Y$  是  $X$  的一个子集。那么  $Y$  是有限的, 且  $\#(Y) \leq \#(X)$ 。另外, 如果  $Y \neq X$  (即  $Y$  是  $X$  的一个真子集), 那么我们

有  $\#(Y) < \#(X)$ 。