

4.3 习题

2024 年 5 月 3 日

说明. 本节的证明过程中,用到了一些命题,在书中没有提到,这里提前列出,并证明它。

A. 正有理数 \geq 零 \geq 负有理数

证明:

不妨设 x, y 是任意有理数,并且 x 是正有理数, y 是负有理数,所以存在 a, b, c, d 正整数,使得 $x = a/b, y = (-c)/d$, 现在只需证明 $x \geq 0 \geq y$ 。

$$\begin{aligned}x - 0 &= a/b - 0 \\&= a/b - 0/1 \\&= a1 - b * 0/b \\&= a/b \\&= x\end{aligned}$$

由于 x 是正的, 所以 $x \geq 0$ 。

$$\begin{aligned}0 - y &= 0 - (-c)/d \\&= 0 - (-c)/d \\&= c/d\end{aligned}$$

有 c/d 是正有理数, 所以 $0 \geq y$ 。

综上, 命题成立。

A 推论. 正有理数 $>$ 零 $>$ 负有理数

证明: 由于正有理数不等于零, 且由命题 A, 可知正整数大于零; 由于负有理数不等于零, 且由命题 A, 可知负整数小于零。

B. 两个正有理数相加, 是正有理数

证明: 不妨设 x, y 是任意正有理数, 所以存在 a, b, c, d 正整数, 使得 $x = a/b, y = c/d$ 。

$$\begin{aligned}x + y &= a/b + c/d \\ &= (ad + bc)/bd\end{aligned}$$

由于分子是正整数 (命题 2.2.8), 分母是正整数 (命题 2.3.3), 所以 $x + y$ 是正有理数。

4.3.1

(a) (绝对值的非退化性) 我们有 $|x| \geq 0$ 。另外, $|x| = 0$ 当且仅当 x 为零。

证明:

x 是有理数, 由引理 4.2.7 (有理数的三歧性) 可知, x 有三种情况:

(1) x 是正有理数, 此时, $|x| = x$, 而正有理数 $|x| - 0 = x - 0 = x$, 由定义 4.2.8 (有理数的排序) 可知 $|x| > 0$;

(2) x 是负有理数, 此时, $|x| = -x$, $|x| - 0 = -x - 0 = -x$, 而 $-x$ 是正有理数, 由定义 4.2.8 (有理数的排序) 可知 $|x| > 0$;

(3) x 等于 0, 此时 $|x| = 0$, 由定义 4.2.8 (有理数的排序) 可知 $|x| \geq 0$;

综上, $|x| \geq 0$ 。另外, $|x| = 0$ 当且仅当 x 为零。

(b) (绝对值的三角不等式) 我们有 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 。

证明:

可以通过有理数的三歧性证明, 这里情况较多, 只证明 x 是正有理数, y 是负有理数的情况【偷个懒, 哈哈】。

设 x 是正有理数, y 是负有理数, 不妨设 $x = a/b, y = (-c)/d$, 其中

a, b, c, d 都是正整数。

$$\begin{aligned}|x| + |y| &= a/b + c/d \\ &= (ad + bc)/bd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y &= a/b + (-c)/d \\ &= (ad - bc)/bd\end{aligned}$$

若 $x + y$ 是负有理数，则：

$$\begin{aligned}|x + y| &= -(x + y) \\ &= [-(ad - bc)]/bd \\ &= (bc - ad)/bd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x| + |y| - (|x + y|) &= (ad + bc)/bd - (bc - ad)/bd \\ &= (ad + bc)/bd + (ad - bc)/bd \\ &= [(ad + bc)bd + (ad - bc)bd]/bdbd \\ &= (adbc + adbc)/bdbd\end{aligned}$$

由于分子是正整数（命题 2.2.8），分母是正整数（命题 2.3.3），可知 $(adbc + adbc)/bdbd$ 是正的，所以 $|x| + |y| > |x + y|$ 。

(c) 不等式 $-y \leq x \leq y$ 成立, 当且仅当 $y \geq |x|$ 。特别地, $-|x| \leq x \leq |x|$ 。

证明：

充分性：假设前提 $-y \leq x \leq y$ 成立，该前提隐含 y 不是负有理数（见说明）。由有理数的三歧性， x 的取值有 3 种情况：（1） x 等于 0，此时 $|x| = 0$ ，而 y 是正有理数，所以 $y \geq 0$ 。

（2） x 等于正有理数，此时 $|x| = x$ ，由前提可知 $y \geq x$ 。

（3） x 等于负有理数，此时 $|x| = -x$ ，不妨设 a, b, c, d 是正有理数，

$x = (-a)/b, y = c/d$, 由于 $-y \leq x$, 所有 $-y - x$ 是负有理数, 即:

$$\begin{aligned} -y - x &= (-c)/d - (-a)/b \\ &= (-c)b + a/b \\ &= a/b - c/d \\ &= (ad - bc)/bd \end{aligned}$$

由上且 $-y - x$ 是负有理数, 可知 $(ad - bc) = -(bc - ad)$ 是负整数, 所以 $bc - ad$ 是正整数。

$$\begin{aligned} y - (-x) &= c/d - \{-[(-a)/b]\} \\ &= c/d - a/b \\ &= (bc - ad)/bd \end{aligned}$$

由 $bc - ad$ 是正整数和 bd 是正整数, 可知 $y - (-x)$ 是正有理数, 所以 $y \geq -x$ 。

综合 (1) (2) (3) 可知 $y \geq |x|$ 。

必要性: 假设 $y \geq |x|$, 由 (a) 可知 $|x| \geq 0$, 又序是可传递的 (命题 4.2.9), 所以 $y \geq 0$ 。由有理数的三歧性, x 的取值有 3 种情况: (1) x 等于 0, 此时 $|x| = 0$, 由前提 $y \geq |x|$ 可知 $y \geq 0$, 由此可知 y 是零或正有理数, 所以 $-y$ 是零或负有理数, 进而 $-y \leq 0$ 。

(2) x 是正有理数, 此时 $|x| = x$, 由前提 $y \geq |x|$ 可知 $y \geq x$, 此时 y 是正有理数, $x - (-y) = x + y$, 两个正有理数相加是正有理数, 所以 $-y \leq x$ 。

(3) x 是负有理数, 此时 $|x| = -x$, 不妨设 $x = (-a)/b, y = c/d$, 其中 a, b, c, d 是正整数。由前提 $y \geq |x|$, 可知 $y \geq -x$, 所以:

$$\begin{aligned} y - (-x) &= c/d - \{-[(-a)/b]\} \\ &= c/d - a/b \\ &= (bc - ad)/bd \end{aligned}$$

由于 $y \geq -x$, 所以 $(bc - ad)/bd$ 是正的。

$$\begin{aligned}
y - x &= c/d - (-a)/b \\
&= c/d + a/b \\
&= (ad + bc)/bd
\end{aligned}$$

由于 a, b, c, d 都是正整数，由此可知 $(ad + bc)/bd$ 是正的，所以 $y > x$ 。

$$\begin{aligned}
x - (-y) &= x + y \\
&= (-a)/b + c/d \\
&= (bc - ad)/bd
\end{aligned}$$

由于 $(bc - ad)/bd$ 是正的，所以 $x \geq -y$ 。

综上，(1) (2) (3) 可知 $-y \leq x \leq y$ 。

特别地，把 y 替换为 $|x|$ ，并且 $|x| \geq x$ ，由必要性可知 $-|x| \leq x \leq |x|$ 。

说明. 因为 y 是负有理数，存在正整数 a, b 使得 $y = (-a)/b$ ，现在证明 $-y > y$ 。

证明：

由

$$\begin{aligned}
(-y) - y &= a/b - [(-a)/b] \\
&= a/b + a/b \\
&= (ab + ab)/bb
\end{aligned}$$

由于分子是正整数（命题 2.2.8），分母是正整数（命题 2.3.3），可知 $(ab + ab)/bb$ 是正的，所以 $-y > y$ 。