6.1 习题

2025 年 7 月 13 日

6.1.1

证明框架如下：由于 n, m 都是自然数，且 $m > n$，所以存在正自然数 k 使得 $k = n + k$，对 k 进行归纳。

6.1.2

证明：

与定义 6.1.5 说的是一个意思，证明略

6.1.3

证明：

充分性：

如果 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛与 c，那么对任意的 $\epsilon > 0$，该序列都是最终 $\epsilon-$ 接近 c 的，所以存在 $N \geq m$ 使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。由题设可知 $m' > m$，于是存在 $N' := max(m', N), N' \geq m'$，使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N'$ 均成立，由于 ϵ 是任意的，由习题 6.1.2 可知，$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 收敛与 c。

必要性：

$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 收敛与 c，那么对任意的 $\epsilon > 0$，该序列都是最终 $\epsilon-$ 接近 c 的。所以存在 $N \geq m'$ 使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。由于 $m' > m$，所以 $N \geq m$，该性质对序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 也成立，由于 ϵ 是任意的，由习题 6.1.2 可知，$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 收敛与 c。

6.1.4

证明：

$(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c，于是对任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $N \geq m$ 使得 $|a_n - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立，由于 $k \geq 0$ 是一个非负整数，所以 $n + k \geq N$，于是 $|a_{n+k} - c| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立，由习题 6.1.2 可知，$(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 收敛与 c。

反之类似

6.1.5

证明：

要证明序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列，则对于任意 $\epsilon > 0$，我们需要证明序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近的。于是设 $\epsilon > 0$ 是一个任意的实数，那么 $\epsilon/2 > 0$。因为 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛的实数序列，不妨设收敛于实数 L，可知 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近与 L 的，于是存在一个 $N \geq m$ 使得 $d(a_n, L) \leq \epsilon/2$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。任意 $j, k \geq N$，有 $d(a_j, L) \leq \epsilon/2$，$d(a_k, L) \leq \epsilon/2$，于是根据三角不等式可得，$d(a_j, a_k) \leq \epsilon$，因此 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近的。由于 ϵ 是任意选取的，因此 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列。

6.1.6

证明：

证明为什么 $a_n > L + \epsilon/2$ 或 $a_n < L - \epsilon/2$，其余的按书中的提示证明就可以了。

序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 不是最终 $\epsilon-$ 接近与 L 的，即对任意的 $N \geq m$ 都存在 $|a_n - L| > \epsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立。

序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列，所以存在 N_0 使得 $|a_j - a_k| \leq \epsilon/2$ 对所有的 $j, k \geq N_0$ 均成立。

固定 $a_n = j_k$，所以，

$$|a_j - a_n| \leq \epsilon/2$$
$$\Rightarrow a_n - \epsilon/2 \leq a_j \leq a_n + \epsilon/2$$

又因为，$|a_n - L| > \epsilon$ 所以 $a_n > \epsilon + L$ 或 $a_n < L - \epsilon$。

如果 $a_n > \epsilon + L$，那么，

$$\begin{aligned} a_n - \epsilon/2 &\leq a_j \\ L + \epsilon - \epsilon/2 &< a_j \\ L + \epsilon/2 &< a_j \end{aligned}$$

如果 $a_n < L - \epsilon$，那么，

$$\begin{aligned} a_j &\leq a_n + \epsilon/2 \\ a_j &< L - \epsilon + \epsilon/2 \\ a_j &< L - \epsilon/2 \end{aligned}$$

6.1.7

证明：

证明方法与命题 6.1.4 的类似。

首先假设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义 5.1.12 意义下的有界序列，那么存在有理数 M，该序列以 M 为界，由于有理数 M 也是实数，所以 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义 6.1.16 意义下的有界序列。

现在假设是定义 6.1.16 下的有界序列，那么存在实数 M，该序列以 M 为界，根据命题 5.4.12 可知，存在一个比 M 大的有理数 M'，由于 M' 是有理数，且 $M < M'$，所有该序列也以 M' 为界，所以 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义 5.1.12 意义下的有界序列。

6.1.8

（a）

我们必须证明 $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $x + y$。换言之，对于任意的 $\epsilon > 0$，我们需要证明序列 $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近 $x + y$ 的。

因为 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x 且 $\epsilon/2 > 0$，则序列是最终 $\epsilon/2-$ 接近 x，即存在 $N_a \geq m$ 使得 $|a_n - x| \leq \epsilon/2$ 对所有的 $n \geq N_a$ 均成立。

同理对序列 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 存在 $N_b \geq m$ 使得 $|b_n - y| \leq \epsilon/2$ 对所有的 $n \geq N_b$ 均成立。

取 $N := max(N_a, N_b)$，于是对所有的 $n \geq N$ 都有，

$$\begin{aligned}&|a_n + b_n - (x+y)|\\&= |(a_n - x) + (b_n - y)|\\&\leq |a_n - x| + |b_n - y| = \epsilon\end{aligned}$$

因此 $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近 $x+y$ 的。由于 ϵ 是任意的，所以 $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $x+y$

（b）

对任意 $\epsilon > 0$，因为 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x，即存在 $N_a \geq m$ 使得 $|a_n - x| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N_a$ 均成立。

因为 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 y，即存在 $N_b \geq m$ 使得 $|b_n - y| \leq \epsilon$ 对所有的 $n \geq N_b$ 均成立。

取 $N := max(N_a, N_b)$，

由命题 4.3.7（h）对实数也成立，那么对任意 $n \geq N$ 都有，

$$d(a_n b_n, xy) \leq \epsilon|y| + \epsilon|x| + \epsilon^2$$

因为 $|x|, |y|$ 是定值，ϵ 是任意的，所以 $(a_n b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 xy。

（c）

（c）是（b）的特例。由实数的定义可知，存在一个有理数序列使得 $LIM_{n\to\infty} c_n = c$，由命题 6.1.15 可知 $c = \lim_{n\to\infty} c_n$，即 $(c_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 c，由命题（b）可知，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(ca_n) &= (\lim_{n\to\infty} c)(\lim_{n\to\infty} a_n)\\&= cx\end{aligned}$$

（d）

由（c）可知，$(-b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛于 $-y$ 的。再利用（a）可证明该命题。

（e）

因为 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 y，那么对任意 $\delta > 0$，存在 $N_b \geq m$ 使得 $|b_n - y| \leq \delta$，对任意的 $n \geq N_b$ 均成立。

我们必须要证明序列 $(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 y^{-1}。换言之，对于任意的 $\epsilon > 0$，我们需要证明序列 $(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近于 y^{-1} 的。于是设 $\epsilon > 0$ 是任

意的实数，

$$\begin{aligned}|b_n^{-1} - y^{-1}| &= \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{y}\right| \\ &= \left|\frac{y - b_n}{yb_n}\right|\end{aligned}$$

此时，分子分母都是可变的，无法定量分析，需要固定分母的范围，这也是书中提示要证明辅助命题 **” 如果一个序列的所有元素都不为零，并且该序列收敛于一个非零极限，那么这个序列是远离 0 的。”** 原因。

1. 辅助命题证明：

设序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $L \neq 0$，那么设 $\epsilon = \frac{1}{2}|L| > 0$，存在 $N \geq m, n \geq N$ 使得

$$\begin{aligned}|a_n - L| &\leq \epsilon \\ |a_n - L| &\leq \frac{1}{2}|L| \\ \Rightarrow L - \frac{1}{2}|L| &\leq a_n \leq L + \frac{1}{2}|L|\end{aligned}$$

如果 $L > 0$，那么，$0 < \frac{1}{2}|L| \leq a_n$，由于序列的所有元素都不为零，即：$a_n > 0$ 对 $m \leq n < N$ 均成立，取 $c := min(\frac{1}{2}|L|, (a_n)_{n=m}^{N-1})$【$min$ 生效的前提是 $(a_n)_{n=m}^{N-1}$ 是有限集合】，综上可知 $c > 0$，且任意 $a_n \geq c$ 对任意 $n \geq m$ 均成立，所以序列是远离 0 的。如果 $L < 0$，同理可证。

综上，命题得证。

由辅助命题可知，序列 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是远离 0 的，那么存在一个实数 $c > 0$ 使得 $|b_n| \geq c$ 对所有的 $n \geq m$ 均成立。所以，

$$\begin{aligned}&\left|\frac{y - b_n}{yb_n}\right| \\ &\leq |y - b_n|/c|y| \\ &\leq \delta/c|y|\end{aligned}$$

因为 $\delta > 0$ 是任意实数，可以通过调整 δ 的取值，使得，

$$\left|\frac{y-b_n}{yb_n}\right|$$
$$\le \epsilon$$

即 $|b_n^{-1} - y^{-1}| \le \epsilon$，所以序列是最终 $\epsilon-$ 接近于 y^{-1} 的，因为 ϵ 是任意的，所以序列收敛于 y^{-1}。

（f）

序列 $(a_n/b_n)_{n=m}^{\infty}$ 可以看做 $(a_n \times b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$，由（e）可知 $(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 y^{-1}。由（a）可知，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n^{-1})\\
&= (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n^{-1})\\
&= x \times y^{-1}\\
&= \frac{x}{y}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}
\end{aligned}$$

（g）

我们必须证明 $(max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $max(x, y)$。换言之，对于任意的 $\epsilon > 0$，我们需要证明序列 $(max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近 $max(x, y)$ 的。

任意实数 $\delta > 0$,因为 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x,即存在 $N_a \ge m$ 使得 $|a_n - x| \le \delta$ 对所有的 $n \ge N_a$ 均成立。

因为 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 y，即存在 $N_b \ge m$ 使得 $|b_n - y| \le \delta$ 对所有的 $n \ge N_b$ 均成立。

取 $N := max(N_a, N_b)$，于是对所有的 $n \ge N$ 都有，

$$\begin{aligned}
&|a_n - x| \le \delta\\
&\Rightarrow x - \delta \le a_n \le x + \delta\\
&|b_n - y| \le \delta\\
&\Rightarrow y - \delta \le b_n \le y + \delta
\end{aligned}$$

如果 $y > x$，我们可以取 $0 < \delta < (y-x)/2$，此时 $b_n > a_n$ 对任意 $n \geq N$ 均成立。也就是说，当 $n \geq N$ 后 $max(a_n, b_n) = b_n$，由习题 6.1.3 可知序列 $(max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于同一个值 y。

同理可证，$y \leq x$ 时，序列 $(max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x。

综上，命题得证。

（h）

证明与（g）类似。

6.1.9

暂时还证明不了，要看完 10.5 节后才可以解答

6.1.10

首先假设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 对于任意的实数 $\epsilon > 0$ 它们都是最终 $\epsilon-$ 接近的。特别地，对于任意的有理数 $\epsilon > 0$，它们也都是最终 $\epsilon-$ 接近的。

现在假设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是定义 5.2.6 意义下的等价柯西序列，那么对于任意的有理数 $\epsilon > 0$，它们都是最终 $\epsilon-$ 接近的。如果 $\epsilon > 0$ 是实数，那么根据命题 5.4.12 可知，存在一个比 ϵ 小的有理数 $\epsilon' > 0$。因为 ϵ' 是有理数，所以 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon'-$ 接近的；又因为 $\epsilon' < \epsilon$，所以 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 是最终 $\epsilon-$ 接近的。