18.5 习题

张志聪

2025 年 5 月 27 日

18.5.1

- $\Rightarrow$

  如果 f 是可测的，那么对任意开集 $V \subseteq \mathbb{R}^m$，$f^{-1}(V)$ 都是可测的，而开盒子 B 本身就是开集，所以 $f^{-1}(B)$ 是可测的。

- $\Leftarrow$

  对任意开集 $V \subseteq \mathbb{R}^m$，由引理 18.5.10 可知，V 可写成可数个或有限个开盒子的并集，即

  $$V = \bigcup_{B \in \Sigma} B$$

  Σ 是一个可数集或者有限集。我们有

  $$f^{-1}(V) = \bigcup_{B \in \Sigma} f^{-1}(B)$$

  因为 $f^{-1}(B)$ 是可测的，利用 (iv)（$\sigma-$ 代数性质可知），$\bigcup_{B \in \Sigma} f^{-1}(B)$ 是可测的，即 $f^{-1}(V)$ 是可测的。

18.5.2

对任意开集 $V \subseteq \mathbb{R}^m$，由引理 18.5.10 可知，V 可写成可数个或有限个开盒子的并集，即

$$V = \bigcup_{B \in \Sigma} B$$

Σ 是一个可数集或者有限集。对任意开盒子 $B \in \Sigma$ 可以表示成

$$B = \prod_{i=1}^{m} (a_i, b_i)$$

对任意 $1 \leq j \leq m$，令 $b_j = (a_j, b_j)$，由题设可知，$f_j^{-1}(b_j)$ 是可测的。

接下来证明：

$$f^{-1}(B) = \bigcap_{j=1}^{m} f_j^{-1}(b_j)$$

因为任意 $x_0 \in f^{-1}(B)$，那么 $f(x_0) \in B$，所以对任意 $1 \leq j \leq m$ 都有 $f_j(x_0) \in b_j$，否则与 $f(x_0) \in B$ 矛盾，于是可得 $x_0 \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} f_j^{-1}(b_j)$，进而 $f^{-1}(B) \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{m} f_j^{-1}(b_j)$。

任意 $x_0 \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} f_j^{-1}(b_j)$，那么对任意 $1 \leq j \leq m$ 都有 $f_j(x_0) \in b_j$，于是可得 $(f_1(x_0), \cdots, f_m(x_0)) \in B$，所以 $x_0 \in f^{-1}(B)$，进而 $\bigcap\limits_{j=1}^{m} f_j^{-1}(b_j) \subseteq f^{-1}(B)$。

综上可得 $f^{-1}(B) = \bigcap\limits_{j=1}^{m} f_j^{-1}(b_j)$。

因为任意 $1 \leq j \leq m$，$f_j^{-1}(b_j)$ 都是可测的，利用引理 18.4.4(d)（布尔代数性质）可知 $\bigcap\limits_{j=1}^{m} f_j^{-1}(b_j)$ 是可测的，即 $f^{-1}(B)$ 是可测的。

我们有

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{B \in \Sigma} f^{-1}(B)$$

由开盒子 B 的任意性和 σ 代数性质可知 $\bigcup\limits_{B \in \Sigma} f^{-1}(B)$ 是可测的，即 $f^{-1}(V)$ 是可测的。

综上可得，f 是可测函数。

18.5.3

对任意开集 $V \subseteq \mathbb{R}^p$，由引理 18.5.2（连续函数是可测的）可知，$g^{-1}(V)$ 是可测的。

因为 $g^{-1}(V) \subseteq W$，且由题设可知 f 是可测的，所以 $f^{-1}(g^{-1}(V))$ 是可测的。

接下来我们需要证明：

$$f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$$

任意 $x_0 \in f^{-1}(g^{-1}(V))$，那么 $f(x_0) \in g^{-1}(V)$，进而 $g(f(x_0)) \in V$，即 $g \circ f(x_0) \in V$，所以 $x_0 \in (g \circ f)^{-1}(V)$，从而可得 $f^{-1}(g^{-1}(V)) \subseteq (g \circ f)^{-1}(V)$。

任意 $x_0 \in (g \circ f)^{-1}(V)$，那么 $g \circ f(x_0) \in V$，即 $g(f(x_0)) \in V$，于是可得 $f(x_0) \in g^{-1}(V)$，进而 $x_0 \in f^{-1}(g^{-1}(V))$，从而可得 $(g \circ f)^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(V))$。

综上可得 $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$。

所以 $(g \circ f)^{-1}(V)$ 也是可测的。

18.5.4

- $\Rightarrow$

  因为 $(a, \infty) \subseteq \mathbb{R}$，于是由 f 是可测的可得，$f^{-1}((a, \infty))$ 是可测的。

- $\Leftarrow$

  先证明如果对于所有的 a，$f^{-1}((a, \infty))$ 都是可测的，那么对于所有的 a，$f^{-1}([a, \infty))$ 也是可测的。

  我们有

  $$[a, \infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, \infty)$$

  f^{-1} 保持集合运算（函数的逆像与集合的基本运算（交并补）有着良好的兼容性），即我们有：

  $$\begin{aligned} f^{-1}([a, \infty)) &= f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, \infty)\right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((a - \frac{1}{n}, \infty)) \end{aligned}$$

  由于 $f^{-1}((a - \frac{1}{n}, \infty))$ 都是可测的，由 $\sigma-$ 代数性质可得

  $$f^{-1}([a, \infty)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((a - \frac{1}{n}, \infty))$$

是可测的。

任意开集 $V \subseteq \mathbb{R}$，由引理 18.4.10 可知，V 可写成可数个或有限个开盒子的并集，即

$$V = \bigcup_{B \in \Sigma} B$$

Σ 是一个可数集或者有限集。

对任意开盒子 $B \in \Sigma$，B 是一维空间中的开盒子，于是可表示成 (a, b) 其中 a, b 都是实数。我们有

$$B = (a, b) = (a, \infty) \setminus [b, \infty)$$

由题设可知 $f^{-1}((a, \infty))$ 是可测的，且 $f^{-1}([b, \infty))$ 都是可测的，于是我们有

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}((a, \infty) \setminus [b, \infty)) \\ &= f^{-1}((a, \infty)) \setminus f^{-1}([b, \infty)) \end{aligned}$$

利用推论 18.4.7 可知，$f^{-1}(B)$ 是可测的。

18.5.5