# 16.4 习题

张志聪

2025 年 4 月 30 日

## 16.4.1

反证法，假设 $f$ 不是恒等于零的。

$f$ 是紧支撑的，不妨设其支撑在区间 $[a,b]$ 上，于是，对所有的 $x \in [a,b]$ 都有 $f(x) \neq 0$。

因为 $f$ 不是恒等于零的，所以存在 $x_0 \in [a,b]$，使得 $f(x_0) \neq 0$。又存在整数 $N$，使得 $N + x_0 > b$，因为 $x_0 + N \notin [a,b]$，所以 $f(x_0 + N) = 0$。

又因为 $f$ 是 $\mathbb{Z}$ 周期函数，所以 $f(x_0 + N) = f(x_0) \neq 0$。

存在矛盾。

## 16.4.2

先证明 $f$ 是一致连续的，因为 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续的，所以 $f$ 在 $([0,1],d)$ 这个紧致度量空间上是连续的，于是由定理 13.3.5 可知，$f$ 是一致连续的。这可以周期性地推广到整个 $\mathbb{R}$ 上。（这里无法直接使用定理 9.9.16，因为这里的值域是复数）。

同理可得，$g,h$ 是一致连续的。

- (a) 封闭性
  - (1) 连续性

    因为 $f$ 是有界的，所以存在一个 $M > 0$，使得对于所有的 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $|f(x)| \leq M$。

    设 $\epsilon > 0$ 是任意的，因为 $g$ 是一致连续的，所以存在一个 $\delta > 0$，使得只要 $|x-y| \leq \delta$，就有 $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon$。

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}, |x-x_0|<\delta$，

$$
\begin{aligned}
&|f*g(x)-f*g(x_0)| \\
&=\left|\int_{[0,1]} f(y)g(x-y)dy-\int_{[0,1]} f(y)g(x_0-y)dy\right| \\
&=\left|\int_{[0,1]} f(y)(g(x-y)-g(x_0-y))dy\right| \\
&\leq \int_{[0,1]} |f(y)(g(x-y)-g(x_0-y))|dy \\
&\leq \int_{[0,1]} M|(g(x-y)-g(x_0-y))|dy \\
&\leq M\int_{[0,1]} \epsilon dy \\
&= M\epsilon
\end{aligned}
$$

于是有 $|f*g(x)-f*g(x_0)| \leq M\epsilon$。由于 $M$ 是定制并且 $\epsilon$ 是任意的，因此我我们可以得出 $f*g$ 在 $x_0$ 处连续的。

由 $x_0$ 的任意性，$f*g$ 连续。

– (2)$\mathbb{Z}$ 周期

设 $k$ 是整数，因为 $f,g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，我们有

$$
\begin{aligned}
f*g(x+k) &= \int_{[0,1]} f(y)g(x+k-y)dy \\
&= \int_{[0,1]} f(y)g(x-y)dy \\
&= f*g(x)
\end{aligned}
$$

所以 $f*g$ 是 $\mathbb{Z}$ 周期的。

- (b) 交换性

$$
f*g(x)=\int_{[0,1]} f(y)g(x-y)dy
$$

令 $u=x-y$，则 $y=x-u$。当 $y$ 从 $0\to 1$ 时，$u$ 从 $x\to x-1$。但由于 $f,g$ 都是周期为 1 的函数，积分可以调整到任意长度为 1 的区间，

因此我们将积分限改为 $0 \to 1$：

$$
\begin{aligned}
g * f(x) &= \int_{[0,1]} g(y) f(x-y) dy \\
&= \int_{[x,x-1]} g(x-u) f(u) (-du) \\
&= \int_{[x-1,x]} g(x-u) f(u) du \\
&= \int_{[0,1]} f(u) g(x-u) du \\
&= \int_{[0,1]} f(y) g(x-y) dy
\end{aligned}
$$

所以，$f * g = g * f$。

- (c) 双线性性质