

## 12.1 习题

张志聪

2025 年 1 月 12 日

### 12.1.1

令  $a_n = d(x_n, x) = |x_n - x|$ , 于是  $(a_n)_{n=m}^\infty$  是一个实数序列。  
 $(x_n)_{n=m}^\infty$  收敛与  $x$

$\Leftrightarrow$

对任意  $\epsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n \geq N$  时,  $|x_n - x| \leq \epsilon$

$\Leftrightarrow$

对任意  $\epsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 当  $n \geq N$  时,  $a_n \leq \epsilon$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

### 12.1.2

需要证明这里的度量  $d(x, y) := |x - y|$  满足定义 12.1.2。

命题 4.3.3(a), 满足了定义 12.1.2 中的公理 (a),(b) (因为任意  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x - y$  都是实数);

命题 4.3.3(f), 满足了定义 12.1.2 中的公理 (c);

命题 4.3.3(g), 满足定义 12.1.2 中的公理 (d)。

### 12.1.3

- (a)

把离散度量  $d_{disc}$  做一点修改: 当  $x = y$  时,  $d_{disc}(x, y) := 2$ 。

- (b)

把离散度量  $d_{disc}$  做一点修改：当  $x \neq y$  时， $d_{disc}(x, y) := 0$ 。

- (c)

定义  $X := \mathbb{R} - \{0\}$  并且度量  $d$  如下：

$$d(x, x) := 0$$

$$d(x, y) := |x| \text{ if } x \neq y$$

- (d)

定义  $X := \{a, b, c\}$  并且度量  $d$  如下：

$$d(x, x) := 0 \text{ if } x \in X$$

$$d(a, b) = d(b, a) = 1, d(b, c) = d(c, b) = 1$$

$$d(a, c) = d(c, a) = 3$$

## 12.1.4

任意  $x, y \in Y; x, y \in X$ ，所以  $d|_{Y \times Y}(x, y) = d(x, y)$ ，因为  $d$  满足所有的公理，那么  $d|_{Y \times Y}$  也满足所有的公理。

## 12.1.5

- (1) 恒等式

证明框架：对  $n$  进行归纳，证明略

- (2) 推导出柯西-施瓦茨不等式

证明框架：对恒等式开方，且  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$  可证。

- (3) 证明三角不等式

## 12.1.6

- 公理 (a)

当  $x = y$  时, 对任意第  $i$  个坐标分量都有  $(x_i - y_i)^2 = 0$ , 所以

$$\begin{aligned} d_{l^2}(x, y) &= \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n 0 \right)^{1/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 公理 (b)

当  $x \neq y$  时, 存在第  $i$  个坐标分量使得  $(x_i - y_i)^2 > 0$ , 所以  $d_{l^2}(x, y) > 0$ 。

- 公理 (c)

任意的  $x, y \in X$ , 它们的任意第  $i$  个坐标分量都有  $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$ , 所以  $d_{l^2}(x, y) = d_{l^2}(y, x)$ 。

- 公理 (d)

定义  $x_i - y_i = a_i, y_i - z_i = b_i$  于是

$$\begin{aligned} d_{l^2}(x, z) &= \left( \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 \right)^{1/2} \\ &= d_{l^2}(x, y) + d_{l^2}(y, z) \end{aligned}$$

综上所述可得

$$d_{l^2}(x, z) \leq d_{l^2}(x, y) + d_{l^2}(y, z)$$

## 12.1.7

- 公理 (a)

当  $x = y$  时, 对任意第  $i$  个坐标分量都有  $|x_i - y_i| = 0$ , 所以

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 = 0$$

- 公理 (b)

当  $x \neq y$  时, 存在第  $i$  个坐标分量使得  $|x_i - y_i| > 0$ , 其他坐标分量  $j$  都有  $|x_j - y_j| \geq 0$ , 所以  $d_{l^1}(x, y) > 0$ 。

- 公理 (c)

对任意第  $i$  个坐标分量都有  $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ , 所以

$$d_{l^1}(x, y) = d_{l^1}(y, x)$$

- 公理 (d)

对任意第  $i$  个坐标分量, 由命题 4.3.3(g) 可知,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

所以,

$$d_{l^1}(x, z) \leq d_{l^1}(x, y) + d_{l^1}(y, z)$$

## 12.1.8

(1) 第一个不等式

$$d_{l^2}(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

$$d_{l^1}(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$$

两边同时取平方

$$\begin{aligned} (d_{l^2}(x, y))^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \\ (d_{l^1}(x, y))^2 &= (|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|) (|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \leq n, i \neq j} |x_i - y_i| |x_j - y_j| \end{aligned}$$

由上式可得

$$\begin{aligned}(d_{l^2}(x, y))^2 &\leq (d_{l^1}(x, y))^2 \\ \implies \\ d_{l^2}(x, y) &\leq d_{l^1}(x, y)\end{aligned}$$

(2) 第二个不等式

$$d_{l^1}(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

利用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}d_{l^1}(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \left| \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n 1 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{n} d_{l^2}(x, y)\end{aligned}$$

## 12.1.9

- 公理 (a)

当  $x = y$  时, 对任意第  $i$  个坐标分量都有  $|x_i - y_i| = 0$ , 所以

$$\sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} = 0$$

- 公理 (b)

当  $x \neq y$  时, 存在第  $i$  个坐标分量使得  $|x_i - y_i| > 0$ , 所以

$$\sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} > 0$$

- 公理 (c)

对任意第  $i$  个坐标分量都有  $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ , 所以

$$d_{l^\infty}(x, y) = d_{l^\infty}(y, x)$$

- 公理 (d)

对任意第  $i$  个坐标分量, 由命题 4.3.3(g) 可知,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

所以,

$$d_{l^\infty}(x, z) \leq d_{l^\infty}(x, y) + d_{l^\infty}(y, z)$$

### 12.1.10

设  $\sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} = r$ 。

(1) 第一个不等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} d_{l^2}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{i=1}^n r^2 \right)^{1/2} \\ &= r \\ &= d_{l^\infty}(x, y) \end{aligned}$$

(2) 第二个不等式

存在一个  $i$  使得  $|x_i - y_i| = r$ 。反证法, 对任意  $i$  都有

$$|x_i - y_i| < r$$

有定义可知, 度量都是有限维的, 即  $n$  不会是  $+\infty$ , 取  $m = \max |x_i - y_i|, 1 \leq i \leq n$  (引理 5.1.14), 此时  $m < r$  且  $m$  是上界, 这与  $r$  是最小上界矛盾 (定义 5.5.5)。

所以

$$d_{l^2}(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \geq (r^2)^{1/2} = r = d_{l^\infty}(x, y)$$

### 12.1.11

略

## 12.1.12

为了利用式 (12.1)、(12.2)，我们的证明步骤如下（需要保证是环状的）

$$(d) \implies (c) \implies (b) \implies (a)$$

$$(a) \implies (d)$$

- $(b) \implies (a)$

(b) 成立，即  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{l^1}(x^{(k)}, x) = 0$ ，即对任意  $\epsilon > 0$ ，存在一个  $N \geq m$  使得  $d_{l^1}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$  对所有的  $k \geq N$  均成立。

由式 12.1 可知

$$d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq d_{l^1}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$$

对所有的  $k \geq N$  均成立。于是 (a) 成立。

- $(c) \implies (b)$

任意  $\epsilon > 0$  于是  $\epsilon' = \frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon > 0$ （注意这里的  $n$  是固定值），因为 (c) 成立，所以存在一个  $N \geq m$  使得  $d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon'$  对所有的  $k \geq N$  均成立。

由式 12.2 可知

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}}d_{l^2}(x^{(k)}, x) &\leq d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon' = \frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon \\ \implies \\ d_{l^2}(x^{(k)}, x) &\leq \epsilon \end{aligned}$$

- $(d) \implies (c)$

(d) 成立，那么对任意  $1 \leq i \leq n, \epsilon > 0$  存在一个  $N \geq m$  使得  $|x_i^{(k)} - x_i| \leq \epsilon$  对所有的  $k \geq N$  均成立。

由  $l^\infty$  度量的定义可知  $d_{l^\infty}(x^{(k)}, x) = \sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \epsilon$  对所有的  $k \geq N$  均成立。于是 (c) 成立。

- $(a) \implies (d)$

(a) 成立，那么对任意  $\epsilon > 0 > 0$  存在一个  $N \geq m$  使得  $d_{l^2}(x^{(k)}, x) \leq \epsilon$  对所有的  $k \geq N$  均成立。即（注意：以下的  $x_i^{(k)}$  要看做实数，不能看

做“点”)

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i)^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i)^2 \leq \epsilon^2$$

那么, 对每一个  $1 \leq i \leq n$  都有

$$(x_i^{(k)} - x_i)^2 \leq \epsilon^2$$

$$\implies$$

$$|x_i^{(k)} - x_i| \leq \epsilon$$

对所有的  $k \geq N$  均成立。

所以 (d) 成立。

### 12.1.13

反证法, 假设  $d_{disc}$  收敛于  $x$ , 但  $N$  不存在。那么, 任意  $N \geq m$  都至少存在一个  $n \geq N$  使得

$$x^{(n)} \neq x$$

由离散度量  $d_{disc}$  的定义可知, 此时  $d_{disc}(x, x^{(n)}) = 1$ 。由于  $N$  的任意性可知, 定义 12.1.14 (度量空间中序列的收敛) 中的定义无法满足, 与假设  $d_{disc}$  收敛于  $x$  矛盾。

### 12.1.14

为了推出矛盾, 我们假设  $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$  依度量  $d$  同时收敛于  $x, x'$ , 设  $\epsilon = d(x, x')/3$ 。注意, 因为  $x \neq x'$ , 所以  $\epsilon$  是正的。由  $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$  依度量  $d$  收敛于  $x$  可知, 存在一个  $N \geq m$  使得  $d(x^{(n)}, x) \leq \epsilon$  对所有的  $n \geq N$  均成立。类似地, 存在一个  $M \geq m$  使得  $d(x^{(n)}, x') \leq \epsilon$  对所有的  $n \geq M$  均成立。特别地, 如果令  $n := \max(N, M)$ , 那么有  $d(x^{(n)}, x) \leq \epsilon$  和  $d(x^{(n)}, x') \leq \epsilon$ , 于



是根据三角不等式 (定义 12.1.2 公理 (d)) 可得,  $d(x, x') \leq 2\epsilon = 2d(x, x')/3$ 。所以  $d(x, x') \leq 2d(x, x')/3$ , 这和  $d(x, x') > 0$  矛盾。所以度量空间中的序列不能同时收敛于两个不同的点。

## 12.1.15

(1)  $d_{l^1}$  是  $X$  上的度量。

- 公理 (a)

如果序列  $(a_n)_{n=0}^\infty$  与  $(b_n)_{n=0}^\infty$  是相等的, 那么对任意  $n \in \mathbb{N}$  都有  $a_n = b_n$ , 所有

$$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| = 0$$

- 公理 (b)

序列  $(a_n)_{n=0}^\infty$  与  $(b_n)_{n=0}^\infty$  不相等, 对任意的  $n \in \mathbb{N}$  都有  $|a_n - b_n| \geq 0$ , 且两个序列不相等, 所以至少存在一个  $n \in \mathbb{N}$  使得  $|a_n - b_n| > 0$ , 所以

$$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| > 0$$

- 公理 (c)

序列  $(a_n)_{n=0}^\infty$  与  $(b_n)_{n=0}^\infty$ , 对任意的  $n \in \mathbb{N}$  都有  $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$ , 所以

$$d_{l^1}((a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty) = d_{l^1}((b_n)_{n=0}^\infty, (a_n)_{n=0}^\infty)$$

- 公理 (d)

序列  $(a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty$  与  $(c_n)_{n=0}^\infty$ , 对任意的  $n \in \mathbb{N}$  都有

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$$

于是

$$\begin{aligned}
d_{l^1}((a_n)_{n=0}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty) &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - c_n| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n - c_n| \\
&= d_{l^1}((a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty) + d_{l^1}((b_n)_{n=0}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty)
\end{aligned}$$

(2)  $d_{l^\infty}$  是  $X$  上的度量。

- 公理 (a)

如果序列  $(a_n)_{n=0}^\infty$  与  $(b_n)_{n=0}^\infty$  是相等的, 那么对任意  $n \in \mathbb{N}$  都有  $a_n = b_n$ , 于是  $|a_n - b_n| = 0$ , 所有

$$d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| = 0$$

- 公理 (b)

序列  $(a_n)_{n=0}^\infty$  与  $(b_n)_{n=0}^\infty$  不相等, 对任意的  $n \in \mathbb{N}$  都有  $|a_n - b_n| \geq 0$ , 且两个序列不相等, 所以至少存在一个  $n \in \mathbb{N}$  使得  $|a_n - b_n| > 0$ , 所以

$$d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| > 0$$

- 公理 (c)

序列  $(a_n)_{n=0}^\infty$  与  $(b_n)_{n=0}^\infty$ , 对任意的  $n \in \mathbb{N}$  都有  $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$ , 所以

$$d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty) = d_{l^\infty}((b_n)_{n=0}^\infty, (a_n)_{n=0}^\infty)$$

- 公理 (d)

序列  $(a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty$  与  $(c_n)_{n=0}^\infty$ , 对任意的  $n \in \mathbb{N}$  都有

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$$

于是（有用到引理 6.4.13（比较原理））

$$\begin{aligned} d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - c_n| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \end{aligned}$$

接下来，我们需要证明

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n - c_n|$$

不妨设  $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$ ,  $p := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$ ,  $q := \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n - c_n|$   
反证法，假设  $M \neq p + q$ ，那么  $M > p + q$  或者  $M < p + q$ ，我们以  $M > p + q$  为例，于是存在  $m, M > m > p + q$ ，由最小上界的性质可知（命题 6.3.6），存在  $n \in \mathbb{N}$  使得

$$|a_n - b_n| + |b_n - c_n| > m > p + q$$

于是  $|a_n - b_n| > p$  或  $|b_n - c_n| > q$ ，这与  $p, q$  是最小上确界矛盾。

所以

$$\begin{aligned} d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty) &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n - c_n| \\ &= d_{l^\infty}((a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty) + d_{l^\infty}((b_n)_{n=0}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty) \end{aligned}$$

（3）存在一个由  $X$  中元素构成的序列  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ （即序列的序列），它依度量  $d_{l^\infty}$  收敛但不依度量  $d_{l^1}$  收敛。

这里可以手动构造一个

$$\begin{aligned} (a_n)_{n=0}^\infty, a_n &= 1/k \\ x^{(k)} &= (a_n)_{n=0}^\infty \end{aligned}$$

于是  $x^{(k)}$  收敛于  $1/k$ ，序列  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$  依度量  $d_{l^\infty}$  收敛于  $(a_n)_{n=0}^\infty, a_n = 0$ ，但不依度量  $d_{l^1}$  收敛，这里简单说明下原因，因为两个点  $x^{(p)}, x^{(q)}$ ，每个坐标分量  $i$  都有

$$|x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| = |1/p - 1/q| = \frac{1}{pq}$$

而每个点的坐标分量个数是  $\infty$ ，所以  $d_{l^1}(x^{(p)}, x^{(q)}) = \infty$

(4) 任何一个依度量  $d_{l^1}$  收敛的序列都依度量  $d_{l^\infty}$  收敛。

不妨设序列依度量  $d_{l^1}$  收敛于  $(a_n)_{n=0}^\infty$ ，那么对于任意  $\epsilon > 0$  存在一个  $N$ ，使得

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i - x_i| \leq \epsilon$$

对  $n \geq N$  均成立。

于是可得

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i - x_i| \leq \epsilon$$

所以，序列依度量  $d_{l^\infty}$  收敛于  $(a_n)_{n=0}^\infty$ 。

### 12.1.16

由  $(x_n)_{n=1}^\infty$  收敛于点  $x \in X$ ，对于任意  $\epsilon > 0, \frac{1}{2}\epsilon > 0$ ，存在一个  $N \geq 1$  使得

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的  $n \geq N$  均成立。

类似地，存在  $M \geq 1$  使得

$$d(y_n, y) \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的  $n \geq M$  均成立。

取  $m = \max(N, M)$  使得

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \\ &\implies \end{aligned}$$

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n) \leq \epsilon$$

对所有的  $n \geq m$  均成立。

由  $\epsilon$  的任意性和  $d(x, y)$  是常量可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$