9.8 习题

张志聪

2025 年 1 月 5 日

9.8.1

以单调递增为例，其他情况类似。

设闭区间为 $[a,b]$，f 为 $[a,b]$ 上的单调递增函数。

此时 $f(b)$ 是最大值，$f(a)$ 为最小值，

因为任意 $x_0 \in [a,b]$ 都有 $x_0 \le b$，按照定义 9.8.1 可知，$f(x_0) \le f(b)$，于是由定义 9.6.5 可知，此时的 $f(b)$ 就是最大值。

类似地，可证 $f(a)$ 是最小值。

9.8.2

函数 $f:[1,3] \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} x, x \in [1,2] \\ x+1, x \in (2,3] \end{cases}$$

此时 $f(1) = 1, f(3) = 4$，$1 \le 2.5 \le 4$，但不存在 $c \in [1,3]$ 使得 $f(c) = 2.5$。

9.8.3

因为 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 是即连续又一对一的函数，所以 $f(a) \ne f(b)$。

于是

- $f(a) < f(b)$

  显然，如果 f 是严格单调的，只能是严格递增的。反证法，假设不是严格递增的，即存在 $x_0, x_1 \in [a, b]$ 且 $x_0 < x_1$ 使得 $f(x_0) > f(x_1)$。

  - 如果 $f(x_0) < f(b)$

    于是 $\{y : f(a) < y < f(x_0)且f(x_1) < y < f(b)\}$ 是非空集合，从中任意一个值 y_0，由介值定理，存在 $c_0 \in [a, x_0]$ 使得 $f(c_0) = y_0$，且存在 $c_1 \in [x_1, b]$ 使得 $f(c_1) = y_0$。

    此时 $f(c_0) = y_0 = f(c_1)$，这与题设 f 是即连续又一对一的函数矛盾。

  - 如果 $f(x_0) > f(b)$ 于是 $\{y : f(a) < y < f(x_0)且f(b) < y < f(x_0)\}$ 是非空集合，从中任意一个值 y_0，由介值定理，存在 $c_0 \in [a, x_0]$ 使得 $f(c_0) = y_0$，且存在 $c_1 \in [x_0, b]$ 使得 $f(c_1) = y_0$。

    此时 $f(c_0) = y_0 = f(c_1)$，这与题设 f 是即连续又一对一的函数矛盾。

  于是有矛盾可知，f 是严格递增的。

- $f(a) > f(b)$

  显然，如果 f 是严格单调的，只能是严格递减的。证明方法和上同理。

综上，f 是严格单调的。

9.8.4

分别证明 f^{-1} 连续性和严格单调递增性。

- 连续性

  任意 $y_0 \in [f(a), f(b)]$，由于 f 在 $[a, b]$ 上连续又严格递增，那么，$f(a) \le y_0 \le f(b)$ 由介值定理可知存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = y_0$。

  对于任意 $\epsilon > 0$，

  设 $f([a, b] \cap [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]) = [y', y'']$，因为 f 是连续又严格递增，那么任意 $y' \le y \le y''$，只能在 $[a, b] \cap [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ 找到唯一的 x 使得 $y = f(x)$ （介值定理保证是存在的，严格递增保证是唯一的）。

于是取 $\delta = min(y_0 - y', y'' - y_0)$，使得

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)|$$
$$= |x - x_0| \le \epsilon$$

对所有满足 $|y - y_0| < \delta$ 的 $y \in [f(a), f(b)]$ 均成立（因为满足条件的 x 只会在区间 $[a,b] \cap [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$）。

- 严格单调递增性

  任意 $y_0, y_1 \in [f(a), f(b), y_0 < y_1]$，由于 f 在 $[a,b]$ 上连续又严格递增，那么，$f(a) \le y_0 < y_1 \le f(b)$ 由介值定理可知存在 $x_0, x_1 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$。

  首先说明 x_0, x_1 的唯一性，然后说明 $x_0 < x_1$。

  - 唯一性

    假设有多个 x 使得其函数值相同，这与 f 严格递增矛盾。

  - $x_0 < x_1$

    如果 $x_1 < x_0$，那么 $f(x_1) > f(x_0)$（因为 $y_0 < y_1$），这与 f 严格递增矛盾。

  综上，$f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_1)$。所以 f^{-1} 严格递增。

9.8.5

（a）

$x, y \in \mathbb{R}$ 且 $y > x$，令集合 $J := \{r \in Q : r < x\}, K := \{r \in Q : r < y\}$，于是 $J \subseteq K$。

我们有

$$f(x) = \sum_{r \in J} g(r)$$
$$f(y) = \sum_{r \in K} g(r)$$

由命题 5.4.14 可知，存在有理数 q 使得 $x < q < y$，于是 $J \subset K$。
由命题 7.1.11(e) 可得

$$f(x) + \sum_{r \in K \setminus J} g(r) = f(y)$$

又因为任意 $r \in Q$ 都有 $g(r) > 0$，于是

$$\sum_{r \in K \setminus J} g(r) > 0$$

所以

$$f(x) < f(y)$$

（b）

与（a）同理，对任意 $x > r$ 可得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(r) + \sum_{k \in Q: r \le k < x} g(k) \\ &\ge f(r) + g(r) \end{aligned}$$

根据 r 是有理数可知，存在某个自然数 n 使得 $r = q(n)$，于是代入上述不等式

$$f(x) \ge f(r) + 2^{-n}$$

由 x 的任意性可知，无法找到满足连续性的定义（定义 9.4.1）的 x，所以 f 在 r 处是间断的。

（c）

说明 1. 书中定义的 f_n 很巧妙，而且需要把 n 看做常量，x 为自变量，否则 f_n 会成为多元函数，到此时为止，书中还未提及多元函数。

对于 $f_n(x)$ 至多由 n 个有理数 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ 使得 $g(r_i) \ge 2^{-n}$，取

$$\delta = min|r_i - x| > 0, 1 \le i \le n$$

于是对任意 $|x - y| \le \delta$，如果 $y \in (x - \delta, x + \delta)$，那么 $f_n(y) = f_n(x)$（此时他们的有理数个数是相同的），所以 f_n 在 x 处是连续的。

我们有

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \sum_{r \in Q; r < x, g(r) < 2^{-n}} \\ &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \\ &= 2^{-n} \end{aligned}$$

最后一个等式是通过等比数列求和 $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2 - 2^{-n}$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$（几何级数）算出。

对任意 $\epsilon > 0$，选出一个 n 使得 $2^{-n} < \epsilon/2$，并重复之前的步骤获取 x 对应的 δ，于是任意 $y \in (x-\delta, x+\delta)$，$f_n(y) = f_n(x)$，而且

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(x)| \\
&= |f(y) - f_n(y)| + |f_n(x) - f(x)| \\
&\leq 2^{-n} + 2^{-n} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

命题得证。