12.4 习题

张志聪

2025 年 1 月 29 日

12.4.1

$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 是 (X,d) 中收敛于极限 x_0 的序列，由收敛的定义（定义 12.1.14）可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $N \geq m$ 使得

$$d(x^{(n)}, x_0) \leq \epsilon$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

如果 $(x^{n_j})_{j=1}^{\infty}$ 是 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 的子序列，令 $N' = N - m$，由定义 12.4.1 可知

$$n_{N'} \geq N$$

于是

$$d(x^{(n_j)}, x_0) \leq \epsilon$$

对所有的 $j \geq N'$ 均成立，所以子序列收敛于 x_0。

12.4.2

- $\Rightarrow$

  先构造出子序列，注意要满足子序列定义，然后证明该子序列收敛于 L。

  （1）以递归的方式定义：

  $j = 1$ 时，定义 $x^{n_1} = x^{(m)}$。

归纳假设，n_j 时，项 $x^{(n_j)}$ 是存在的。

$j+1$ 时，由 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 L，所以取 $\epsilon = 1/(j+1) > 0$，存在 $n \geq n_j$ 使得 $d(x^{(n)}, L) \leq \epsilon$，满足该条件的 $x^{(n)}$ 是一个非空集合，任取一个作为 $x^{(n_{j+1})}$。

（2）序列的收敛性

对任意 $\epsilon > 0$，存在 $1/j \leq \epsilon$（存在的原因是 $1/j$ 收敛于 0）。通过序列 $(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$ 的构造方式可知，取 $N = j$，$n \geq N$ 使得 $d(x^{(n_n)}, L) \leq \epsilon$，序列收敛得证。

- $\Leftarrow$

  任意 $N \geq m$ 和 $\epsilon > 0$，由子序列 $(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$ 收敛于 L，那么存在 $N' \geq 1, j \geq max(N', N) \geq N$ 使得

  $$d(x^{(n_j)}, L) \leq \epsilon$$

  由子序列定义（定义 12.4.1）可知，$n_j \geq j \geq N$，于是由之前的说明可知，存在一个 $n = n_j \geq N$，使得

  $$d(x^{(n)}, L) \leq \epsilon$$

  命题得证。

12.4.3

任意 $\epsilon > 0, \frac{1}{2}\epsilon > 0$，$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x_0，那么存在 $N \geq m$ 使得

$$d(x^{(n)}, x_0) < \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

所以，对 $j, k \geq N$ 有

$$d(x^{(j)}, x_0) < \frac{1}{2}\epsilon$$
$$d(x^{(k)}, x_0) < \frac{1}{2}\epsilon$$

由三角不等式可知，

$$d(x^{(j)}, x^{(k)}) < \epsilon$$

对所有的 $j,k \geq N$ 均成立。

综上可知，$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列。

12.4.4

对任意的 $\epsilon > 0$，由于原序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列，所以存在一个 $N' \geq m$ 使得

$$d(x^{(j)}, x^{(k)}) < \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $j,k \geq N'$ 均成立。

由命题 12.4.5 可知，x_0 也是原序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 的一个极限点，令 $N = N'$，都存在一个 $n' \geq N$ 使得

$$d(x^{(n')}, x_0) < \frac{1}{2}\epsilon$$

对任意 $n \geq N$ 我们有，

$$\begin{aligned} d(x^{(n)}, x_0) &\leq d(x^{(n)}, x^{(n')}) + d(x^{(n')}, x_0) \\ &< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

（注意，这里的 n, n' 满足 $n, n' \geq N'$ 要求）于是，原序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x_0。

12.4.5

（1）

令 $E := \{x^{(n)} : n \geq m\}$。

任意半径 $r > 0$，$B(L,r) := \{x \in X : d(L,x) < r\}$，

因为 L 是序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 的一个极限点，那么对任意的 $N \geq m$，存在一个 $n \geq N$ 使得

$$d(L, x^{(n)}) < r$$

所以，$x^{(n)} \in B(L,r)$，于是 $x^{(n)} \in B(L,r) \cap E$，所以 $B(L,r) \cap E \neq \varnothing$。

综上，由 r 的任意性可得，L 是集合 $\{x^{(n)} : n \geq m\}$ 的附着点。

（2）逆命题成立么？

不成立，比如 $x^{(m)}$ 就是集合 $\{x^{(n)} : n \geq m\}$ 的附着点，但是 $x^{(m)}$ 却不一定是集合 $\{x^{(n)} : n \geq m\}$ 的极限点。

12.4.6

假设柯西序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 L, L' 且 $L \neq L'$。

序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 L，那么对 $\epsilon = \frac{1}{3}d(L-L') > 0$，存在 $N \geq m$ 使得

$$d(x^{(n)}, L) < \epsilon$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

类似地，存在 $N' \geq m$ 使得

$$d(x^{(n)}, L') < \epsilon$$

对所有的 $n \geq N'$ 均成立。

取 $M = max(N, N')$，于是对所有的 $n \geq M$ 都有

$$\begin{cases} d(x^{(n)}, L) < \epsilon \\ d(x^{(n)}, L') < \epsilon \end{cases}$$

但上式不可能同时成立，如果成立会导致以下矛盾：

$$d(L, L') \leq d(x^{(n)}, L) + d(x^{(n)}, L') < 2\epsilon = \frac{2}{3}d(L, L')$$

12.4.7

- (a)

$$(Y, d|_{Y\times Y})\text{是完备的}$$
$$\Longrightarrow$$
$$\text{柯西序列} \Leftrightarrow \text{收敛序列}$$

反证法，假设 Y 不是闭集，那么，由命题 12.2.15(d) 可知，存在一个 Y 中的收敛序列的极限值不属于 Y，由引理 12.4.7 可知收敛序列是柯西序列，即存在一个 Y 中的柯西序列不在 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 中收敛，这与定义 12.4.10 矛盾。

- (b)

  设 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 是 Y 中任意柯西序列，由于 Y 是 X 的子集，而 (X, d) 又是完备度量空间，所以序列收敛，不妨设收敛于 $x_0, x_0 \in X$。又因为 Y 是 X 的一个闭子集，由命题 12.2.15(d) 可得 $x_0 \in Y$。

  综上，由序列 $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$ 的任意性可得，Y 中的柯西序列在 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 中都是收敛的。

  所以，子空间 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 也是完备的。

12.4.8

- (a)

  - 自反性

    $d(x, x) = 0$ 保证了自反性的正确性，证明略

  - 对称性

    $d(x, y) = d(y, x)$ 保证了对称性的正确性，证明略

  - 传递性

    $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 保证了传递性的正确性，证明略

- (b)

  （1）

  对任意 $\epsilon > 0, \frac{1}{2}\epsilon > 0$，因为序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列，所以存在 $N \geq 1$ 使得

  $$d(x_j, x_k) < \frac{1}{2}\epsilon$$

  对所有的 $j, k \geq N$ 均成立。

  类似地，存在 $N' \geq 1$ 使得

  $$d(y_j, y_k) < \frac{1}{2}\epsilon$$

对所有的 $j,k \geq N'$ 均成立。

取 $M = max(N, N')$，于是对所有的 $j,k \geq M$ 都有

$$\begin{aligned}|d(x_i,y_i) - d(x_j,y_j)| &\leq |d(x_i,y_i) - d(y_i,x_j)| + |d(y_i,x_j) - d(x_j,y_j)| \\ &\leq d(x_i,x_j) + d(y_i,y_j) \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

对所有的 $i,j \geq M$ 均成立。

由此可得 $(d(x_n,y_n)_{n=1}^{\infty})$ 是柯西序列，由于对任意 $n, d(x_n,y_n) \in \mathbb{R}$，而 $(\mathbb{R}, d)$ 是完备度量空间，所以 $(d(x_n,y_n)_{n=1}^{\infty})$ 在 $(\mathbb{R}, d)$ 中收敛，即 $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ 存在。

以上证明使用了命题：

说明 1. $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$

证明：

因为绝对值的三角不等式（命题 *4.3.3(b)*），以下命题成立

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

令 $x = a-c, y = c-b$，代入上式可证。

说明 2. $d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$

证明：

因为三角不等式（定义 *12.1.2*），以下命题成立

$$\begin{aligned}&d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \\ &\implies \\ &d(x,y) - d(z,y) \leq d(x,z) \\ &\implies \\ &d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)\end{aligned}$$

（2）

因为 $LIM_{n\to\infty}x_n$ 和 $LIM_{n\to\infty}x'_n$ 是两个相等的形式极限，即满足

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$$

那么，对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 1$ 使得

$$d(x_n, x'_n) \leq \epsilon$$

我们需要证明序列 $(d(x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ 和 $(d(x'_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ 是等价序列（满足定义 5.2.6）。

因为

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y_n)| \leq d(x_n, x'_n) \leq \epsilon$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

综上，两个序列是等价序列。

- (c)

  我们需要证明 $\overline{X}$ 中的任意柯西序列是收敛序列。由 (b) 可知 $\overline{X}$ 中的元素（或点）都是柯西序列的形式极限，于是不妨设任意 $\overline{X}$ 中的任意柯西序列为 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，其中 $a_k = LIM_{n\to\infty}x_n^{(k)}$ 是 X 中的柯西序列 $(x_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ 的形式极限。

  对于任意柯西序列 $(x_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$，对 $\frac{1}{k} > 0$，存在 $N_k \geq 1$ 使得

  $$d(x_i^{(k)}, x_j^{(k)}) < \frac{1}{k} \tag{1}$$

  对所有的 $i, j \geq N_k$ 均成立，元素集合 $E_k := \{x_n^{(k)} : n \geq N_k\}$ 是一个非空集合。利用选择公理，能够找到一个序列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 使得 $b_n \in E_n$ 对所有的 $n \geq 1$ 均成立。

  首先证明 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列。因为 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列，那么，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N_a \geq 1$ 使得

  $$d_{\overline{X}}(a_i, a_j) < \frac{\epsilon}{3}$$

  对所有的 $i, j \geq N_a$ 均成立。

  即 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n^{(i)}, x_n^{(j)}) < \frac{\epsilon}{3}$ 对任意 $i, j \geq N_a$ 均成立。由极限的定义可知，存在 N' 使得

  $$d(x_n^{(i)}, x_n^{(j)}) < \frac{\epsilon}{3}$$

对任意 $n \geq N', i, j \geq N_a$ 均成立。

于是可取 $N = max(N_a, N_i, N_j, N')$，我们有

$$\begin{aligned} d(b_i, b_j) &\leq d(b_i, x_N^{(i)}) + d(x_N^{(i)}, x_N^{(j)}) + d(x_N^{(j)}, b_j) \\ &< 1/i + \frac{\epsilon}{3} + 1/j \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

（注意这里的 i, j 只要足够大，就能满足条件），对任意 $i, j \geq N_a$ 均成立，所以 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列。

接下来证明 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛，对任意 $\epsilon > 0$，存在 N 使得

$$d(b_i, b_j) < \frac{\epsilon}{2}$$

对所有的 $i, j \geq N$ 均成立。

由 b_k 的构造方式可知，存在 $k \geq N$ 使得

$$d(x_n^{(k)}, b_k) < \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}$$

对所有的 $n \geq N_k$ 均成立。

我们有

$$d(x_n^{(k)}, b_n) \leq d(x_n^{(k)}, b_k) + d(b_k, b_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

对所有的 $n > N_k, k \geq N$ 均成立。

设 $L = LIM_{n\to\infty} b_n$，即 $d_{\overline{X}}(a_k, L) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^{(k)}, b_n) < \epsilon$ 对所有的 $k \geq N$ 均成立，可得 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 L。

- (d)

$$\begin{aligned} x, y \in X; x = y \\ \Leftrightarrow \\ d(x, y) = 0 \\ \Leftrightarrow \\ \lim_{n\to\infty} d(x, y) = 0 \\ \Leftrightarrow \\ LIM_{n\to\infty} x = LIM_{n\to\infty} y \end{aligned}$$

所以元素 $x \in X$ 与 $\overline{X}$ 中 x 所对应的形式极限 $LIM_{n\to\infty}x$ 等同起来是合理的。

对任意 $x, y \in X$，我们有

$$\begin{aligned}
d_{\overline{X}}(x,y) &= d_{\overline{X}}(LIM_{n\to\infty}x, LIM_{n\to\infty}y) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x,y) \\
&= d(x,y)
\end{aligned}$$

从而 (X,d) 可以看作 $\overline{X}, d_{\overline{X}}$ 的子空间。

- (e)
  - 任意 $x \in \overline{X}$ 都是 X 的附着点。

    有题设可知 $x = LIM_{n\to\infty}x_n$，所以 x 可以表示成 X 中的柯西序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$。对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 1$ 使得

    $$d(x_n, x_N) < \frac{\epsilon}{2}$$

    对所有的 $n \geq N$ 存成立。

    因为 $x_N \in X$，所以

    $$\begin{aligned}
    d_{\overline{X}}(x, x_N) &= d_{\overline{X}}(LIM_{n\to\infty}x_n, LIM_{n\to\infty}x_N) \\
    &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N) \\
    &\leq \frac{\epsilon}{2} \\
    &< \epsilon
    \end{aligned}$$

    即对任意 ϵ 半径，都存在 x_N 使得 $d_{\overline{X}}(x, x_N) < \epsilon$，所以 x 是附着点。
  - X 的任意附着点 $x, x \in \overline{X}$

    证明框架：由附着点定义和选择公理可以得到一个 X 中的任意柯西序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$，该序列收敛于 $x = \lim_{n\to\infty} x_n$，利用了 (f) 可知，$x \in \overline{X}$。
- (f)

由 (c) 可知柯西序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的，不妨设 $L = \lim_{n\to\infty} x_n$，因为 $L \in \overline{X}$，所以存在柯西序列 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ 使得 $L = LIM_{n\to\infty} y_n$。接下来我们要证明 $LIM_{n\to\infty} y_n = LIM_{n\to\infty} x_n = L$。

因为 $L = \lim_{n\to\infty} x_n$，那么，对任意 $\epsilon > 0$，存在 K 使得

$$d_{\overline{X}}(LIM_{n\to\infty} y_n, x_k) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_k) < \frac{\epsilon}{2}$$

对所有的 $k \geq K$ 均成立。

由于 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列，所以存在 $N \geq K$ 使得

$$d(x_n, x_N) < \frac{\epsilon}{2}$$

对所有的 $n \geq N$ 均成立。

因为 $\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_k) < \frac{\epsilon}{2}$ 所以存在 $N' \geq N$ 使得

$$d(y_n, x_{N'}) < \frac{\epsilon}{2}$$

对所有 $n \geq N'$ 均成立。

于是我们有

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_{N'}) + d(x_{N'}, y_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

对所有的 $n \geq N'$ 均成立。

所以

$$d_{\overline{X}}(LIM_{n\to\infty} x_n, LIM_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L = LIM_{n\to\infty} y_n = LIM_{n\to\infty} x_n$$