

17.7 习题

张志聪

2025 年 5 月 16 日

17.7.1

(1)

$x \neq 0$ 时

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x + x^2 \sin(1/x^4))' \\&= 1 + 2x \sin(1/x^4) + x^2 \cos(1/x^4)(-4/x^5) \\&= 1 + 2x \sin(1/x^4) + (-4/x^3) \cos(1/x^4)\end{aligned}$$

$x = 0$ 时

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin(1/x^4)}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x \sin(1/x^4)\end{aligned}$$

因为 $-1 \leq \sin(1/x^4) \leq 1$, 于是

$$-x \leq x \sin(1/x^4) \leq x$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x^4) = 0$$

综上所述可得

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x \sin(1/x^4) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x^4) \\&= 1 + 0 = 1\end{aligned}$$

(2)

序列 $((2\pi k)^{-1})_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 0。令 $x = (2\pi k)^{-1}$ ，我们有

$$\cos(1/x^4) = \cos(2\pi k) = 1$$

$$\sin(1/x^4) = \sin(2\pi k) = 0$$

于是

$$f'((2\pi k)^{-1/4}) = 1 - \frac{4}{(2\pi k)^{-1/4}} = 1 - \frac{(2\pi k)^{1/4}}{4}$$

所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'((2\pi k)^{-1/4}) = -\infty$$

综上所述， x 以序列 $((2\pi k)^{-1})_{k=1}^{\infty}$ 的方式趋近 0，总有 $f'(x) < 0$ 。

17.7.2

因为 T 是可逆的线性变换，那么， T 既是单射也是满射。于是，对任意 $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 都存在唯一的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $T(x_0) = y_0$ ，即 $T^{-1}(y_0) = x_0$ 。

接下来，证明 T^{-1} 满足定义 17.1.6（线性变换）的两个公理。

- (a)（可加性）对任意 $y, y' \in \mathbb{R}^n$ ，都有 $T^{-1}(y + y') = T^{-1}(y) + T^{-1}(y')$ 。

存在 $x, x' \in \mathbb{R}^n$ 使得 $T(x) = y$ 和 $T(x') = y'$ ，于是

$$T^{-1}(y) + T^{-1}(y') = T^{-1}(T(x)) + T^{-1}(T(x')) = x + x'$$

又因为

$$T(x) + T(x') = T(x + x')$$

综上

$$\begin{aligned} T^{-1}(y + y') &= T^{-1}(T(x) + T(x')) \\ &= T^{-1}(T(x + x')) \\ &= x + x' \end{aligned}$$

所以， $T^{-1}(y + y') = T^{-1}(y) + T^{-1}(y')$ 。

- (b) (齐次性) 对任意 $y \in \mathbb{R}^n$ 和任意的 $c \in \mathbb{R}$, 都有 $T^{-1}(cy) = cT^{-1}(y)$ 。

存在 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $T(x) = y$, 于是

$$cT^{-1}(y) = cx$$

我们有

$$T(cx) = cT(x) = cy$$

于是

$$\begin{aligned} T^{-1}(cy) &= T^{-1}(cT(x)) \\ &= T^{-1}(T(cx)) \\ &= cx \end{aligned}$$

所以, $T^{-1}(cy) = cT^{-1}(y)$ 。

17.7.3

对任意 $y_0 \in f(V)$, 存在 $x_0 \in V$ 使得 $y_0 = f(x_0)$ 。由题设可知 $f'(x_0)$ 是一个可逆的线性变换, 于是由反函数定理可知, V 中存在一个包含 x_0 的开集 V_{x_0} , 并且在 \mathbb{R}^n 中存在一个包含 $f(x_0)$ 的开集 U_{x_0} , 使得 f 是从 V_{x_0} 到 U_{x_0} 的双射。

因为 U_{x_0} 是开集, 且 $f(x_0) \in U_{x_0}$, 那么存在 $r > 0$, 使得 $B(f(x_0), r) \subseteq U_{x_0}$, 即 $B(y_0, r) \subseteq U_{x_0}$ 。

因为 $V_{x_0} \subseteq V$, 所以 $U_{x_0} \subseteq f(V)$ 。

综上所述, $B(y_0, r) \subseteq f(V)$, 由命题 12.2.15(a) 可知 $f(V)$ 是开集。