18.2 习题

张志聪

2025 年 5 月 21 日

18.2.1

- (v) （空集）

  因为 $\varnothing \subseteq \varnothing$，于是我们可以这样定义开盒子

  $$B = \prod_{i=1}^{1}$$

  其中 $(a_1, b_1) = (0, 0)$，所以 B 是空集，

  $$m^*(\varnothing) \leq vol(B) = 0$$

  又因为按照定义，外测量是非负的，于是

  $$m^*(\varnothing) = 0$$

- (vi)（正性）

  到目前为止，可测集是否能够被开盒覆盖是不确定的，但这里应该指的是可以被开盒覆盖的可测集。

  设 Ω 被任意有限个或者可数个盒子 $(B_j)_{j\in J}$ 覆盖。由盒子体积的定义可知，对任意 $j \in J$，都有

  $$vol(B_j) \geq 0$$

  所以

  $$\sum_{j\in J} vol(B_j) \geq 0$$
  $$m^*(\Omega) \geq 0$$

  而 $m^*(\Omega) \leq +\infty$ 是显然的。

- (vii) （单调性）

  如果 $m^*(B)=+\infty$，命题显然是正确的。

  如果 $m^*(B)<+\infty$，即 $m^*(B)$ 是某个实数。由定义 18.2.4 可知，$m^*(B)$ 是下确界，于是对任意 $\epsilon>0$，存在 $(B_j)_{j\in J}$ 覆盖 B，使得

  $$\sum_{j\in J} vol(B_j)\leq m^*(B)+\epsilon$$

  （因为如果不存在，那么 $m^*(B)+\epsilon$ 就成为了下确界，存在矛盾）

  因为 $A\subseteq B$，所以 $(B_j)_{j\in J}$ 也覆盖 A，所以

  $$m^*(A)\leq \sum_{j\in J} vol(B_j)\leq m^*(B)+\epsilon$$

  由 ϵ 的任意可知，$m^*(A)\leq m^*(B)$。

- (viii)（有限次可加性）

  可以直接通过 (x)(v) 推导，设 J 的基数为 n，我们可以定义一个双射 $f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\}\to(A_j)_{j\in J}$。并令

  $$A_k=\begin{cases} f(k),\ k\leq n \\ \varnothing,\ k>n \end{cases}$$

  于是 $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ 是可数无限集合，由 (x) 可得，

  $$m^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k)\leq\sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(A_k)$$

  又因为（可以利用反证法证明）

  $$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k=\bigcup_{j\in J} A_j$$

  于是

  $$m^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k)=m^*(\bigcup_{j\in J} A_j)$$

  而且

  $$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(A_k)&=\sum_{k=1}^{n} m^*(A_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty} m^*(A_k)\\&=\sum_{j\in J} m^*(A_j)\end{aligned}$$

综上，

$$m^*(\bigcup_{j\in J} A_j) \leq \sum_{j\in J} m^*(A_j)$$

- (x)（可数次可加性）

  $\sum\limits_{j\in J} m^*(A_j) = +\infty$，命题显然是正确的。

  接下来，证明 $\sum\limits_{j\in J} m^*(A_j) < +\infty$ 的情况。

  对任意 ϵ，对任意 A_j，存在开盒覆盖，即存在一簇盒子 $(B_k^{(j)})_{k\in K}$，使得

  $$A_j \subseteq \bigcup_{k\in K} B_k^{(j)}$$

  且

  $$m^*(A_j) \leq \sum_{k\in K} vol(B_k^{(j)}) \leq m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$$

  于是，整个并集 $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$ 可以被 $\bigcup\limits_{j\in J}\left(\bigcup\limits_{k\in K} B_k^{(j)}\right)$ 表示。

  我们有

  $$m^*(\bigcup_{j\in J} A_j) \leq \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} vol(B_k^{(j)}) \leq \sum_{j\in J}(m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j\in J} m^*(A_j) + \epsilon$$

  由 ϵ 的任意性可知，

  $$m^*(\bigcup_{j\in J} A_j) \leq \sum_{j\in J} m^*(A_j)$$

说明 1. 其实以上的证明使用了“可数无限次加”，而是本书中，陶哲轩通过极限来严格定义无限级数的和。这样做的目的应该是避免逻辑问题：
“无限次加法”在数学基础中缺乏严格定义（如：交换律和结合律在无限情况下是否需要额外条件?）。
而极限理论已经是一套严谨框架了。

- (xiii)

  对任意 $\epsilon > 0$，存在一簇开盒子 $(B_j)_{j\in J}$ 覆盖了 Ω，使得

  $$\sum_{j\in J} vol(B_j) \leq m^*(\Omega) + \epsilon$$

  任意 $x_0 \in \Omega$，存在 $j \in J$ 使得

  $$x_0 \in B_j$$

  于是

  $$(x + x_0) \in (x + B_j)$$

  于是可得 $(x+\Omega) \subseteq \bigcup_{j\in J}(x+B_j)$。又由 vol 的平移不变性（公理 (xiii)），

  $$vol(x + B_j) = vol(B_j)$$

  综上可得，

  $$m^*(x+\Omega) \leq \sum_{j\in J} vol(x+B_j) = \sum_{j\in J} vol(B_j) \leq m^*(\Omega) + \epsilon$$

  由 ϵ 的任意性可知，$m^*(x+\Omega) \leq m^*(\Omega)$。

  类似地，可得

  $$m^*(\Omega) \leq m^*(x+\Omega) + \epsilon$$

  由 ϵ 的任意性可知，$m^*(\Omega) \leq m^*(x+\Omega)$。

  综上，

  $$m^*(\Omega) = m^*(x+\Omega)$$

18.2.2

对任意 $\epsilon > 0$，存在一簇盒子 $(A_j)_{j\in J}$ 覆盖了 A 且有

$$\sum_{j\in J} vol(A_j) \leq m_n^*(A) + \epsilon$$

同理可得，存在一簇盒子 $(B_k)_{k\in K}$ 覆盖了 B 且有

$$\sum_{k\in K} vol(B_k) \le m_m^*(B)+\epsilon$$

接下来，我们证明 $A\times B$ 被 $(A_j)_{j\in J}\times(B_k)_{k\in K}$ 覆盖。

$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$，对任意 $x_0=(a_0,b_0),x_0\in A\times B$，其中 $a_0\in A,b_0\in B$，所以存在 $j_0\in J,k_0\in K$ 使得

$$a_0\in A_{j_0}$$
$$b_0\in B_{k_0}$$

所以

$$x_0\in A_{j_0}\times B_{k_0}$$

即 $x_0\in(A_j)_{j\in J}\times(B_k)_{k\in K}$，由 x_0 的任意性可知，$A\times B\subseteq(A_j)_{j\in J}\times(B_k)_{k\in K}$。

于是我们有

$$\begin{aligned}
m_{n+m}^*(A\times B) &\le \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} vol(A_j\times B_k)\\
&=\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} vol(A_j)vol(B_k)\\
&=\sum_{j\in J} vol(A_j)\sum_{k\in K} vol(B_k)\\
&\le (m_n^*(A)+\epsilon)+(m_m^*(B)+\epsilon)\\
&=m_n^*(A)m_m^*(B)+\epsilon(m_n^*(A)+m_m^*(B)+\epsilon)
\end{aligned}$$

（注意 $\sum\limits_{j\in J}\sum\limits_{k\in K} vol(A_j)vol(B_k)=\sum\limits_{j\in J} vol(A_j)\sum\limits_{k\in K} vol(B_k)$ 需要额外证明下，本节注释部分有证明。）因为 $m_n^*(A),m_m^*(B)$ 是定值且 ϵ 是任意的，所以

$$m_{n+m}^*(A\times B)\le m_n^*(A)m_m^*(B)$$

18.2.3

- (a) $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\cdots$，于是有 $m(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j)=\lim\limits_{j\to\infty} m(A_j)$。

  证明：$m(A_j)$ 是单调递增的，所以要么 $\lim\limits_{j\to\infty} m(A_j)=+\infty$，要么 $\lim\limits_{j\to\infty} m(A_j)=L$（其中 $L\in\mathbb{R}$）。接下里分情况讨论：

（1）如果 $\lim\limits_{j\to\infty} m(A_j)=+\infty$，即序列 $(m(A_j))_{j=1}^{\infty}$ 没有上界，即对任意 $M>0$，都存在 N，使得只要 $j\geq N$，就有

$$m(A_j)>M$$

因为对任意 n 都有

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A_n$$

于是当 $n\geq N$ 时，也有

$$m(\bigcup_{j=1}^{n} A_j)>M$$

由 M 的任意性和 $m(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j)$ 的单调递增性可知，$m(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j)$ 发散，即 $m(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j)=+\infty$。

（2）如果 $\lim\limits_{j\to\infty} m(A_j)=L$，即序列 $(m(A_j))_{j=1}^{\infty}$ 有上界且 L 是最小上界（单调递增序列的性质），于是对任意 $n\in\mathbb{N}^+$ 都有

$$m(A_n)\leq L$$

于是可得

$$m(\bigcup_{j=1}^{n} A_j)=m(A_n)\leq L$$

$m(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j)$ 的单调递增性且有上界可知，$m(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j)$ 收敛。

反证法，假设 $m(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j)=L'<L$，那么，$L'$ 是 $m(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j)$ 的上界，对任意 $n\in\mathbb{N}^+$ 都有

$$m(\bigcup_{j=1}^{n} A_j)\leq L'$$

因为 $m(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j)=m(A_n)$，于是可得，对任意 $n\in\mathbb{N}^+$ 都有

$$m(A_n)\leq L'<L$$

于是 L 不是 $(m(A_j))_{j=1}^{\infty}$ 的最小上界，存在矛盾。

综合（1）（2）可得

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j\to\infty} m(A_j)$$

- (b)

  因为对于每一个正整数 j 都有 $A_j \supseteq A_{j+1}$，于是可得 $(m(A_j))_{j=1}^{\infty}$ 是单调递减的，又因为对任意可测集 Ω 都有 $m(\Omega) \geq 0$，且有 $m(A_1) < +\infty$。综上可得，$(m(A_j))_{j=1}^{\infty}$ 是单调递减且有下界，所以 $(m(A_j))_{j=1}^{\infty}$ 极限存在，且等于下确界 $l \in \mathbb{R}$：

  $$\lim_{j\to\infty} m(A_j) = l$$

  因为 l 是下确界，那么对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 都有

  $$m(A_n) \geq l$$

  由题设可知

  $$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = A_n$$

  于是，我们有

  $$m(\bigcap_{j=1}^{n} A_j) = m(A_n) \geq l$$

  所以,$(m(\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j))_{n=1}^{\infty}$ 也是单调递减且有下界 l,进而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} m(\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j) \geq l$。

  接下来证明 $\lim\limits_{n\to\infty} m(\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j) = l$。

  反证法，假设 $\lim\limits_{n\to\infty} m(\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j) = l' > l$，即 l' 是 $(m(\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j))_{j=1}^{\infty}$ 下确界，那么，由下确界的性质，对 $\epsilon = \frac{l-l'}{2} > 0$，存在 $n \in \mathbb{N}^+$ 使得

  $$\begin{aligned} m(\bigcap_{j=1}^{n} A_j) = m(A_n) &< l' + \frac{l-l'}{2} \\ &< l \end{aligned}$$

这与 l 是 $(m(A_j))_{j=1}^{\infty}$ 的下确界矛盾。

综上，

$$m(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j\to\infty} m(A_j)$$

18.2.4

令 $A = \{(0,1/q)^n + (1/q)(k_1,\cdots,k_n) : k_1,\cdots,k_n \in \{0,1,\cdots,q-1\}\}$，于是 A 中有 q^n 个不相交的集合，且集合都是通过平移 $(0,1/q)^n$ 得到的。又因为 $A \subseteq [0,1]^n$，由勒贝格测度的性质 (ix)(xii)(xiii) 可知，

$$m(A) = q^n m((0,1/q)^n) \le m([0,1]^n) = 1$$
$$\Longrightarrow$$
$$m((0,1/q)^n) \le q^{-n}$$

令 $B = \{[0,1/q]^n + (1/q)(k_1,\cdots,k_n) : k_1,\cdots,k_n \in \{0,1,\cdots,q-1\}\}$，于是 B 中 q^n 个相交的集合（在边界的地方重合），且集合都是通过平移 $[0,1/q]^n$ 得到的。又因为 $\bigcup_{b\in B} b = [0,1]^n$，于是 $[0,1]^n \subseteq \bigcup_{b\in B} b$。由勒贝格测度的性质 (viii)(xii)(xiii) 可知，

$$m(\bigcup_{b\in B} b) = m([0,1]^n) = 1 \le q^n m([0,1/q]^n)$$
$$\Longrightarrow$$
$$m([0,1/q]^n) \ge q^{-n}$$

因为

$$[0,1/q]^n \setminus (0,1/q)^n = \{0,1/q\}$$

令 p 是任意正整数，于是 $\{0\} \subseteq (-1/2p) + (0,1/p)^n, \{1/q\} \subseteq 1/q + (-1/2p) + (0,1/p)$。由之前的讨论可知

$$m(\{0\}) + m(\{1/q\}) \le 2m((0,1/p)^n) \le 2p^{-n}$$

因为

$$\lim_{p\to\infty} 2p^{-n} = 0$$

于是，对任意 $\epsilon > 0$，存在 N 使得只要 $p \geq N$，就有

$$2p^{-n} \leq \epsilon$$

综上可得，

$$m([0,1/q]^n \setminus (0,1/q)^n) \leq \epsilon$$

于是

$$m([0,1/q]^n) \leq m((0,1/q)^n) + \epsilon$$
$$\Longrightarrow$$
$$m([0,1/q]^n) \leq m((0,1/q)^n) \leq q^{-n}$$

结合 $m([0,1/q]^n) \geq q^{-n}$ 可知，

$$m([0,1/q]^n) = q^{-n}$$

进而

$$m((0,1/q)^n) = q^{-n}$$

18.2.5⊛

设任意闭盒子 $B := \prod_{j=1}^{n}(a_j, b_j)$。

如果 $a_j = b_j$，则 B 是空集，于是 $m(B) = 0$，又因为 $vol(B) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j) = \prod_{j=1}^{n} 0 = 0$，于是 $m(B) = vol(B)$。

如果 $a_j \neq b_j$，先假设 a_j, b_j 都是有理数，于是 $b_j - a_j$ 也是有理数，于是可表示 $b_j - a_j = \frac{p_j}{q_j}$，其中 p_j, q_j 都是正整数。我们有

$$vol(B) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j) = \prod_{j=1}^{n}\frac{p_j}{q_j}$$
$$B = (a_1, \cdots, a_n) + \prod_{j=1}^{n}(0, b_j - a_j) = (a_1, \cdots, a_n) + \prod_{j=1}^{n}(0, \frac{p_j}{q_j})$$

由 (xiii)（平移不变性）可知，我们只需证明 $vol(B) = m(\prod_{j=1}^{n}(0, \frac{p_j}{q_j}))$。

为了方便描述，令 $B' := \prod\limits_{j=1}^{n}(0,\frac{p_j}{q_j})$。

取 $q = q_1 \times q_2 \cdots q_n$，于是每个 $\frac{p_j}{q_j}$ 可以写作 $\frac{p'_j}{q}$（只需保证 $\frac{p_j}{q_j} = \frac{p'_j}{q}$）。所以

$$
\begin{aligned}
B' &= \prod_{j=1}^{n}(0,\frac{p_j}{q_j}) \\
&= \prod_{j=1}^{n}(0,\frac{p'_j}{q}) \\
&\supseteq \{(0,1/q)^n + (1/q)(k_1,\cdots,k_n) : k_j \in \{0,1,\cdots,p'_j\}; 1 \le j \le n\}
\end{aligned}
$$

可得 $\{(0,1/q)^n + (1/q)(k_1,\cdots,k_n) : k_j \in \{0,1,\cdots,p'_j\}; 1 \le j \le n\}$ 中元素个数为

$$
\begin{aligned}
p'_1 \times p'_2 \times \cdots \times p'_n &= \frac{p_1 q}{q_1} \times \frac{p_2 q}{q_2} \times \cdots \times \frac{p_n q}{q_n} \\
&= (p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n) q^{n-1}
\end{aligned}
$$

因为元素都是 $(0,1/q)^n$ 通过平移得到，所以有

$$
\begin{aligned}
m(B') &\le (p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n) q^{n-1} m((0,1/q)^n) \\
&\le (p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n) q^{n-1} q^{-n} \\
&= \frac{p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n}{q} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{p_j}{q_j} \\
&= vol(B)
\end{aligned}
$$

又因为对任意 $\epsilon > 0$，都有 $m(B' \setminus \{(0,1/q)^n + (1/q)(k_1,\cdots,k_n) : k_j \in \{0,1,\cdots,p'_j\}; 1 \le j \le n\}) \le \epsilon$，（习题 18.2.4 中有类似证明，这里省略）可得

$$m(B') = vol(B)$$

即

$$m(B) = vol(B)$$

如果 a_j, b_j 是实数，这里把下标 a_j, b_j 改为上标 a^j, b^j，以方便接下来序列的表示。对每一个分量 $1 \leq j \leq n$，由实数的构造方式，我们可以构造一个单调递减收敛于 a^j 的序列 $(a^j_m)_{m=1}^{\infty}$，一个单调递增收敛于 b^j 序列 $(b^j_m)_{m=1}^{\infty}$，并保证对任意 m 都有 $a_m < b_m$。

令 $A_k := \prod\limits_{j=1}^{n}(a^j_k, b^j_k)$，于是 $A_k \subseteq A_{k+1}$，且我们有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \prod_{j=1}^{n}(a^j, b^j)$$
$$\lim_{k\to\infty} A_k = \prod_{j=1}^{n}(a^j, b^j)$$

（可以通过任意 $x \in$ **左侧** 都有 $x \in$ **右侧** 来证明）

所以

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = m(\prod_{j=1}^{n}(a^j, b^j)) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} m(A_k) &= \lim_{k\to\infty} m(\prod_{j=1}^{n}(a^j_k, b^j_k)) \\ &= \lim_{k\to\infty} vol(\prod_{j=1}^{n}(a^j_k, b^j_k)) \\ &= \lim_{k\to\infty} vol(A_k) \\ &= vol(\prod_{j=1}^{n}(a^j, b^j)) \end{aligned} \tag{2}$$

利用 18.2.3(a) 可知

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} m(A_k)$$

于是

$$m(\prod_{j=1}^{n}(a^j, b^j)) = vol(\prod_{j=1}^{n}(a^j, b^j))$$

即

$$m(B) = vol(B)$$

18.2.6

反证法，假设 $\mathbb{R}$ 是可数的，于是由例 18.2.9 可知

$$m^*(\mathbb{R}) \leq \sum_{r\in\mathbb{R}} m^*(\{r\}) = \sum_{r\in\mathbb{R}} = 0$$

因为 $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$，由命题 18.2.6 可知，

$$m^*([0,1]) = 1 \leq m^*(\mathbb{R})$$

存在矛盾。