

14.8 习题

张志聪

2025 年 3 月 29 日

14.8.1

令 $u := \max(a, c), v := \min(b, d)$ 。

所以 $u \geq a$, 有以下情况:

$u > a, u = c$, 任意 $x \in [a, u), x \notin [c, d], f(x) = 0$, 所以 $\int_{[a, u)} f = 0$ 。

$u = a$, 则 $\int_{[a, u)} f = 0$ 。

又 $v \leq b$, 有以下情况:

$v < b, v = d$, 任意 $x \in (v, b], x \notin [c, d], f(x) = 0$, 所以 $\int_{(v, b]} f = 0$ 。

$v = b$, 则 $\int_{(v, b]} f = 0$ 。

综上,

$$\int_{[a, b]} f = \int_{[a, u)} f + \int_{[u, v]} f + \int_{(v, b]} f = \int_{[u, v]} f$$

同理可得

$$\int_{[c, d]} f = \int_{[c, u)} f + \int_{[u, v]} f + \int_{(v, d]} f = \int_{[u, v]} f$$

所以 $\int_{[a, b]} f = \int_{[c, d]} f$

14.8.2

• (a)

$n = 0$ 时, $(1 - y)^0 = 1, 1 - 0y = 1$, 命题成立。

$n \geq 1$ 时, 令 $f := (1 - y)^n$, 对 y 进行求导,

$$f' = n(1 - y)^{n-1}(-1)$$

又 $f(0) = 1$, 对任意 $y \in [0, 1]$, 由推论 10.2.9 (中值定理) 可得, 存在 $x \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} \\ n(1-x)^{n-1}(-1) &= \frac{(1-y)^n - 1}{y} \\ 1 - n(1-x)^{n-1}y &= (1-y)^n \end{aligned}$$

因为 $x \in (0, 1)$, 所以 $(1-x)^{n-1} \leq 1$, 所以

$$1 - n(1-x)^{n-1}y \geq 1 - ny$$

综上可得

$$(1-y)^n = 1 - n(1-x)^{n-1}y \geq 1 - ny$$

• (b)

$n = 0$ 时, $\frac{1}{\sqrt{0}}$ 是没有意义的, 不做讨论。

$n \geq 1$ 时, $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$, 于是, 我们有

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n dx + \int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 (1-x^2)^n dx$$

当 $x \in [-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}]$, 即 $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ 时, 由 (a) 可知 $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2 \geq 0$;

当 $x \in [-1, -\frac{1}{\sqrt{n}}]$ 或 $x \in [\frac{1}{\sqrt{n}}, 1]$ 即 $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ 时, $1-x^2 \geq 0$ 。

于是可得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx &\geq \int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n dx \geq \int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 1-nx^2 dx \\ &= \left(x - \frac{nx^3}{3}\right)\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{n}}} - \left(x - \frac{nx^3}{3}\right)\Big|_{x=-\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{n}} + \frac{2}{3\sqrt{n}} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{n}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

• (c)

令函数 f ，当 $x \in [-1, 1]$ 时， $f(x) := c(1 - x^2)^N$ ，当 $x \notin [-1, 1]$ 时， $f(x) = 0$ ；于是定义 14.8.6(a) 已经满足。

现在我们要满足 14.8.6(b)，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-1}^1 c(1 - x^2)^N = c \int_{-1}^1 (1 - x^2)^N$$

所以令 $c := \frac{1}{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^N}$ ，那么，14.8.6(b) 也已满足。

现在我们要满足 14.8.6(c)，因为

$$|f(x)| = |c(1 - x^2)^N|$$

由 (b) 可知， $0 \leq c \leq \sqrt{N}$ 。

于是

$$|f(x)| = |c(1 - x^2)^N| \leq \sqrt{N}(1 - x^2)^N \leq \sqrt{N}(1 - \delta^2)^N$$

我们需要使得以下成立：

$$\sqrt{N}(1 - \delta^2)^N \leq \epsilon$$

问题最终是变成：确定满足以上不等式的 N 是否存在。

令 $y := 1 - \delta^2$ ，根据 14.8.6(c) 的前置条件可知， $0 < y < 1$ 。接下来，我们只需证明 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N}y^N = 0$ ，即可完成证明。

使用推论 7.5.3（比值判别法）

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{\sqrt{N+1}y^{N+1}}{\sqrt{N}y^N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup y \sqrt{1 + \frac{1}{N}}$$

因为 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{N}} = 1$ ，且 $0 < y < 1$ ，可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{\sqrt{N+1}y^{N+1}}{\sqrt{N}y^N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup y \sqrt{1 + \frac{1}{N}} < 1$$

于是可得，级数 $\sum_{N=1}^{\infty} \sqrt{N}y^N$ 是绝对收敛的，因此其通项 $\sqrt{N}y^N$ 收敛。

14.8.3

按照书中提示的思路进行证明。

因为 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的紧支撑函数, 那么, 存在一个区间 $[a, b]$, 对所有的 $x \notin [a, b]$ 都有 $f(x) = 0, f(a) = f(b) = 0$ 。因为 $[a, b]$ 是 \mathbb{R} 的子集, 且是闭区间, 由定理 9.1.24 (直线上的海涅-博雷尔定理) (b) 可知, $[a, b]$ 是紧致的 (符合定义 12.5.1 (紧致性))。

利用命题 13.3.2 可知 $f|_{[a, b]}$ 是有界的。又 $x \notin [a, b], f(x) = 0$ 可知, f 是有界的。

利用定理 13.3.5 可知 $f|_{[a, b]}$ 是一致连续的, 又 $x \notin [a, b], f(x) = 0, f(a) = f(b) = 0$ 可知, f 是一致连续的。

14.8.4

• (a)

– $f * g$ 有支撑区间。

f, g 都是连续的紧支撑函数, 不妨设 f 支撑在 $[a, b]$ 上, g 支撑在 $[c, d]$ 上, 于是函数 $g(x - y)$ 支撑在 $[x - d, x - c]$ (把 y 看做自变量, x 是常量, $c \leq x - y \leq d$, 所以 $x - d \leq y \leq x - c$)。

如果 $[a, b] \cap [x - d, x - c] = \emptyset$, 此时, $b < x - d$ 或 $a > x - c$, 即 $x > b + d$ 或 $x < a + c$, 则无论 y 如何取值, 总有 $f(y)g(x - y) = 0$, 因为 $y \notin [a, b] \cap [x - d, x - c] = \emptyset$ 。于是可得, $[a + c, b + d]$ 是 $f * g$ 的支撑区间。

– $f * g$ 是连续函数。

由习题 14.8.3 可知, 存在 $M > 0$ 使得任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $|f(x)| \leq M$; 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $x, x' \in \mathbb{R}, |x - x'| < \delta$, 就有

$$|g(x) - g(x')| < \epsilon$$

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 只要 $|x - x_0| < \delta$, 我们有

$$\begin{aligned}
f * g(x) - f * g(x_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x_0-y)dy \\
&= \int_{[a,b] \cap [x-d, x-c]} f(y)g(x-y)dy - \int_{[a,b] \cap [x_0-d, x_0-c]} f(y)g(x_0-y)dy \\
&= \int_{[a,b]} f(y)g(x-y)dy - \int_{[a,b]} f(y)g(x_0-y)dy \\
&= \int_{[a,b]} f(y)(g(x-y) - g(x_0-y))dy \\
&\leq M \int_{[a,b]} (g(x-y) - g(x_0-y))dy \\
&\leq M|b-a|\epsilon
\end{aligned}$$

所以 $f * g$ 在 x_0 处连续, 由 x_0 的任意性值, $f * g$ 连续。

- (b)

利用命题 11.10.6 (变量替换公式 II), 解决自变量不同的问题, 但用的是它的推论, 即 ϕ 是单减的, 注意证明过程中符号的变化。

定义 $\phi(y) := x - y$ 函数 $\phi: [c, d] \cap [x - b, x - a] \rightarrow [a, b] \cap [x - d, x - c]$, 以区间的方式表示 $\phi: [\max(c, x - b), \min(d, x - a)] \rightarrow [\min(b, x - c), \max(a, x - d)]$ 。

$$\begin{aligned}
f * g(x) &= \int_{[a,b] \cap [x-d, x-c]} f(y)g(x-y)dy \\
&= \int_{[\max(a, x-d), \min(b, x-c)]} f(y)g(x-y) \\
&= - \int_{[\max(c, x-b), \min(d, x-a)]} f(\phi(y))g(x-\phi(y))d_\phi \\
&= - \int_{[\max(c, x-b), \min(d, x-a)]} f(x-y)g(y)dx_{-y} \\
&= - \int_{[\max(c, x-b), \min(d, x-a)]} -f(x-y)g(y) \\
&= \int_{[\max(c, x-b), \min(d, x-a)]} f(x-y)g(y) \\
&= \int_{[\max(c, x-b), \min(d, x-a)]} f(x-y)g(y)dy \\
&= g * f(x)
\end{aligned}$$

(注意第二个等式，使用了推论 11.10.3)

• (c)

$$\begin{aligned}
f * (g + h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(g + h)(x-y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(g(x-y) + h(x-y))dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) + \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h(x-y)dy \\
&= f * g(x) + f * h(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f * (cg)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(cg)(x-y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)cg(x-y)dy \\
&= c \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \\
&= c(f * g(x))
\end{aligned}$$

14.8.5

$y \notin [0, 1], f(y) = 0$, 这部分的积分无需考虑, 只需考虑 $y \in [0, 1]$ 这部分。 $y \in [0, 1], x \in [1, 2]$ 时, $x - y \in [0, 1]$, 此时 $g(x - y) = c$ 。

于是对任意 $x_0 \in [1, 2]$, 我们有

$$\begin{aligned} f * g(x_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x_0 - y)dy \\ &= \int_{[0,1]} f(y)cdy \end{aligned}$$

上式的结果与 x_0 的取值无关, 命题得证。

14.8.6

- (a) 因为 g 支撑在 $[-1, 1]$ 上, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} g = \int_{-1}^1 g = 1$$

又因为 $-1 \leq x \leq 1$ 都有 $g(x) \geq 0$, 所以,

$$\begin{cases} \int_{[-1,\delta)} g \geq 0 \\ \int_{(\delta,1]} g \geq 0 \end{cases}$$

我们有

$$\int_{-1}^1 g = \int_{[-1,\delta)} g + \int_{[-\delta,\delta]} g + \int_{(\delta,1]} g = 1$$

于是可得

$$\int_{[-\delta,\delta]} g \leq 1$$

又由 $\delta \leq |x| \leq 1$ 均有 $|g(x)| \leq \epsilon$, 我们有

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{[-1,\delta)} g + \int_{[-\delta,\delta]} g + \int_{(\delta,1]} g \leq \int_{[-\delta,\delta]} g + 2(1 - \delta)\epsilon \\ &\implies \\ 1 - 2(1 - \delta)\epsilon &\leq \int_{[-\delta,\delta]} g \end{aligned}$$

因为 $0 < \delta < 1$, 可得

$$1 - 2\epsilon < 1 - 2(1 - \delta)\epsilon \leq \int_{[-\delta, \delta]} g$$

• (b)

按照书中提示的思路进行证明。

– 第一个积分接近于 $f(x)$ 。

因为 $y \in [-\delta, \delta]$, 所以 $|x - y - x| = |y| \leq \delta$, 有题设可知 $|f(x - y) - f(x)| \leq \epsilon$ 即 $f(x) - \epsilon \leq f(x - y) \leq f(x) + \epsilon$ 。

结合 (a) 可知

$$\int_{[-\delta, \delta]} (f(x) - \epsilon)g(y)dy \leq \int_{[-\delta, \delta]} f(x - y)g(y)dy \leq \int_{[-\delta, \delta]} (f(x) + \epsilon)g(y)dy$$

\implies

$$(f(x) - \epsilon) \int_{[-\delta, \delta]} g(y)dy \leq \int_{[-\delta, \delta]} f(x - y)g(y)dy \leq (f(x) + \epsilon) \int_{[-\delta, \delta]} g(y)dy$$

\implies

$$(f(x) - \epsilon)(1 - 2\epsilon) \leq \int_{[-\delta, \delta]} f(x - y)g(y)dy \leq (f(x) + \epsilon)$$

于是结合 $|f(x)| \leq M$,

$$-2f(x)\epsilon - \epsilon + 2\epsilon^2 \leq \int_{[-\delta, \delta]} f(x - y)g(y)dy - f(x) \leq \epsilon$$

$$-2M\epsilon - \epsilon + 2\epsilon^2 \leq \int_{[-\delta, \delta]} f(x - y)g(y)dy - f(x) \leq \epsilon$$

– 第二个和第三个积分的取值范围

由定义 14.8.6 (恒等逼近) 的性质 (c) 和 $|f(x)| \leq M$ 可得,

$$\int_{[\delta, 1]} f(x - y)g(y)dy$$

\implies

$$-M(1 - \delta)\epsilon \leq \int_{[\delta, 1]} f(x - y)g(y)dy \leq M(1 - \delta)\epsilon$$

同理可得,

$$-M(1 - \delta)\epsilon \leq \int_{[-1, -\delta]} f(x - y)g(y)dy \leq M(1 - \delta)\epsilon$$

综上可得,

$$-2M\epsilon - \epsilon + 2\epsilon^2 - 2M(1-\delta)\epsilon \leq |f * g(x) - f(x)| \leq 2M(1-\delta)\epsilon + \epsilon$$

\implies

$$-4M\epsilon - \epsilon \leq |f * g(x) - f(x)| < 4M\epsilon + \epsilon$$

\implies

$$|f * g(x) - f(x)| \leq (1 + 4M)\epsilon$$

(注意, 以上用到了 $1 - \delta < 1$, $-\epsilon + 2\epsilon^2 > -\epsilon$)

14.8.7

因为 f 是支撑在 $[0, 1]$ 上的连续函数, 于是由习题 14.8.3 可知, f 是有界的, 并且是一致连续的。于是可得存在 $M > 0$, f 以 M 为界。任意 $\epsilon' > 0$, 因为 f 是一致连续的, 那么, 存在 $\delta' > 0$, 使得只要 $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta'$, 就有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$ 。取 $\min(1, \delta') > \delta > 0$, 那么, $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$ 。

由引理 14.8.8 可知, 存在一个 $[-1, 1]$ 上的多项式 g , 并且它是一个 (ϵ', δ) 恒等逼近。

综上, 由引理 14.8.14 可知, 对所有的 $x \in [0, 1]$ 都有,

$$|f * g(x) - f(x)| \leq (1 + 4M)\epsilon'$$

又由引理 14.8.13 可知, $f * g$ 是 $[0, 1]$ 上的多项式, $P(x) := f * g(x)$ 就是我们需要的多项式。

以上讨论对任意 ϵ' 都成立, 于是对任意的 $\epsilon > 0$, 设 $\epsilon' = \frac{1}{1+4M}\epsilon$, 那么, 对所有的 $x \in [0, 1]$ 都有,

$$|P(x) - f(x)| \leq (1 + 4M)\epsilon' = \epsilon$$

命题得证。

14.8.8