

## 16.2 习题

张志聪

2025 年 5 月 6 日

### 16.2.1

设  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ ,  $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$ ,  $h(x) = h_1(x) + ih_2(x)$ ,  $c = c_1 + ic_2$ .

- (a)

$$\begin{aligned}\langle g, f \rangle &= \int_{[0,1]} g(x) \overline{f(x)} dx \\&= \int_{[0,1]} (g_1(x) + ig_2(x)) (f_1(x) - if_2(x)) dx \\&= \int_{[0,1]} g_1(x)f_1(x) + g_2(x)f_2(x) + i(-g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x)) dx \\&= \int_{[0,1]} g_1(x)f_1(x) + g_2(x)f_2(x) dx + i \int_{[0,1]} g_2(x)f_1(x) - g_1(x)f_2(x) dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_{[0,1]} f(x) \overline{g(x)} dx \\&= \int_{[0,1]} (f_1(x) + if_2(x)) (g_1(x) - ig_2(x)) dx \\&= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + i(-f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x)) dx \\&= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) dx + i \int_{[0,1]} -f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x) dx\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\overline{\langle f, g \rangle} &= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)dx - i \int_{[0,1]} -f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x)dx \\ &= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)dx + i \int_{[0,1]} f_1(x)g_2(x) - f_2(x)g_1(x)dx\end{aligned}$$

所以,

$$\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$$

• (b)

– (1)  $\langle f, f \rangle \geq 0$ 。

$$\begin{aligned}\langle f, f \rangle &= \int_{[0,1]} f(x)\overline{f(x)}dx \\ &= \int_{[0,1]} (f_1(x) + if_2(x))(f_1(x) - if_2(x)) \\ &= \int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x) + f_2(x)f_2(x) + i(-f_1(x)f_2(x) + f_2(x)f_1(x))dx \\ &= \int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x) + f_2(x)f_2(x)dx\end{aligned}$$

因为

$$f_1(x)f_1(x) + f_2(x)f_2(x) \geq 0$$

由定理 11.4.1(e) 可知,

$$\int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x) + f_2(x)f_2(x)dx \geq \int_{[0,1]} 0dx = 0$$

即

$$\langle f, f \rangle \geq 0$$

–  $\langle f, f \rangle = 0$  当且仅当  $f = 0$ 。

$\Leftarrow$  是易证的, 略。

$\Rightarrow$

反证法, 假设  $f$  不是零函数, 那么存在某个  $x_0 \in [0, 1], f(x_0) \neq 0$ , 又因为  $f$  是连续的, 那么, 对  $\epsilon = \frac{1}{2}|f(x_0)|$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得只要,  $|x - x_0| < \delta$ , 就有

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq \epsilon \\ |f(x_0)| - \epsilon &\leq |f(x)| \leq |f(x_0)| + \epsilon \end{aligned}$$

(以上是复数的性质, 与实数是一致的, 具体证明在 15-6-comment.tex 文件中) 所以,

$$\int_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} |f(x)|^2 dx > 0$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x) + f_2(x)f_2(x)dx \\ &= \int_{[0,1]} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{[0, x_0-\delta]} |f(x)|^2 dx + \int_{(x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x)|^2 dx + \int_{[x_0+\delta, 1]} |f(x)|^2 dx \\ &> 0 \end{aligned}$$

存在矛盾。

- (c)

证明略

- (d)

证明略

## 16.2.2

证明  $(C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{C}), d_{L^2})$  是一个度量空间, 按照定义 12.1.2, 我们需要证明满足下面四个公理:

- (a) 对任意的  $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ , 我们有  $d_{L^2}(f, f) = 0$ 。

$$\begin{aligned}
d_{L^2}(f, f) &= \|f - f\|_2 \\
&= \left( \int_{[0,1]} |f(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \left( \int_{[0,1]} 0 dx \right)^{1/2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

- (b) (正性) 对任意两个不同的  $f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ , 我们有  $d_{L^2}(f, g) > 0$ 。

$$\begin{aligned}
d_{L^2}(f, g) &= \|f - g\|_2 \\
&= \left( \int_{[0,1]} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \left( \int_{[0,1]} (f(x) - g(x)) \overline{f(x) - g(x)} dx \right)^{1/2} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

最后一个不等式, 使用了引理 16.2.5(b)。

- (c) (对称性) 对任意的  $f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ , 我们有  $d_{L^2}(f, g) = d_{L^2}(g, f)$ 。

$$\begin{aligned}
d_{L^2}(f, g) &= \|f - g\|_2 \\
&= \left( \int_{[0,1]} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{L^2}(g, f) &= \|g - f\|_2 \\
&= \left( \int_{[0,1]} |g(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

由于, 对任意  $x \in [0, 1]$ , 都有

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |(-1)(g(x) - f(x))| \\ &= |-1||g(x) - f(x)| \\ &= |g(x) - f(x)| \end{aligned}$$

所以,

$$\left( \int_{[0,1]} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left( \int_{[0,1]} |g(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

综上,  $d_{L^2}(f, g) = d_{L^2}(g, f)$ 。

- (d) (三角不等式) 对任意的  $f, g, h \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ , 我们有  $d_{L^2}(f, h) \leq d_{L^2}(f, g) + d_{L^2}(g, h)$ 。

这里有个开方, 不好处理, 需要使用一个小命题:

**说明 1. 命题:** 实数  $a, b, c \geq 0$ , 如果  $a^2 + b^2 \geq c^2$ , 那么  $a + b \geq c$ 。

**证明:**

反证法, 假设  $a + b < c$ , 那么

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &< c^2 \\ a^2 + b^2 + 2ab &< c^2 \end{aligned}$$

因为,  $2ab \geq 0$ , 所以,

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq a^2 + b^2$$

$a^2 + b^2 + 2ab < c^2$  与  $a^2 + b^2 \geq c^2$  矛盾。

$$\begin{aligned} (d_{L^2}(f, g))^2 + (d_{L^2}(g, h))^2 &= \int_{[0,1]} |f(x) - g(x)|^2 dx + \int_{[0,1]} |g(x) - h(x)|^2 dx \\ &= \int_{[0,1]} |f(x) - g(x)|^2 + |g(x) - h(x)|^2 dx \end{aligned}$$

又因为

$$(d_{L^2}(f, h))^2 = \int_{[0,1]} |f(x) - h(x)|^2 dx$$

由引理 15.6.11 的三角不等式可知, 对任意  $x \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &= |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \end{aligned}$$

综上所述,

$$|f(x) - h(x)|^2 \leq |f(x) - g(x)|^2 + |g(x) - h(x)|^2$$

于是由定理 11.4.1(e) 可知,

$$\int_{[0,1]} |f(x) - h(x)|^2 dx \leq \int_{[0,1]} |f(x) - g(x)|^2 + |g(x) - h(x)|^2 dx$$

即,

$$(d_{L^2}(f, h))^2 \leq (d_{L^2}(f, g))^2 + (d_{L^2}(g, h))^2$$

由刚才的小命题可得,

$$d_{L^2}(f, h) \leq d_{L^2}(f, g) + d_{L^2}(g, h)$$

## 16.2.3

(1)

由定义可知,  $\|f\|_2, \|f\|_{L^\infty}$  都是正值, 于是可以通过  $(\|f\|_2)^2 \leq (\|f\|_{L^\infty})^2$  来证明。

对任意  $x \in [0, 1]$ , 我们有

$$|f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty}$$

于是可得,

$$(\|f\|_2)^2 = \int_{[0,1]} |f(x)|^2 dx \leq \int_{[0,1]} \left( \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \right)^2 dx$$

又因为  $\sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$  是常量, 所以

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \left( \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \right)^2 dx &= (1 - 0) \times \left( \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \right)^2 \\ &= \left( \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \right)^2 \\ &= (\|f\|_{L^\infty})^2 \end{aligned}$$

综上可得,

$$\begin{aligned} (\|f\|_2)^2 &\leq (\|f\|_{L^\infty})^2 \\ &\implies \\ \|f\|_2 &\leq \|f\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

(2)

todo

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_{[0,1]} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{[0,1]} c + dg(x) dx \\ &= c + d \int_{[0,1]} g(x) dx \end{aligned}$$

我们希望

$$\begin{cases} \|f\|_2^2 = c + d \int_{[0,1]} g(x) dx = A^2 \\ \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \sqrt{c + dg(x)} = B \end{cases}$$

#### 16.2.4

- (a) 非退化性。

由引理 16.2.5(b) 可得,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \geq 0$$

- (b) 柯西-施瓦茨不等式。

如果  $\|g\|_2 = 0$ , 由  $\|g\|_2 = \sqrt{\langle g, g \rangle}$  和引理 16.2.5(b),  $g = 0$ , 于是  $|\langle f, g \rangle| = 0$ , 所以

$$|\langle f, g \rangle| = \|f\|_2 \|g\|_2 = 0$$

如果  $\|g\|_2 > 0$ , 我们有

$$\begin{aligned}
& \langle f\|g\|_2^2 - \langle f, g \rangle g, f\|g\|_2^2 - \langle f, g \rangle g \rangle \\
&= \langle f\|g\|_2^2, f\|g\|_2^2 - \langle f, g \rangle g \rangle - \langle \langle f, g \rangle g, f\|g\|_2^2 - \langle f, g \rangle g \rangle \\
&= \langle f\|g\|_2^2, f\|g\|_2^2 \rangle - \langle f\|g\|_2^2, \langle f, g \rangle g \rangle - (\langle \langle f, g \rangle g, f\|g\|_2^2 \rangle - \langle \langle f, g \rangle g, \langle f, g \rangle g \rangle) \\
&= \langle f\|g\|_2^2, f\|g\|_2^2 \rangle - \langle f\|g\|_2^2, \langle f, g \rangle g \rangle - \langle \langle f, g \rangle g, f\|g\|_2^2 \rangle + \langle \langle f, g \rangle g, \langle f, g \rangle g \rangle \\
&= \|g\|_2^4 \langle f, f \rangle - \|g\|_2^2 \langle f, \langle f, g \rangle g \rangle - \|g\|_2^2 \langle \langle f, g \rangle g, f \rangle + \langle \langle f, g \rangle g, \langle f, g \rangle g \rangle \\
&= \|g\|_2^4 \langle f, f \rangle - \|g\|_2^2 \overline{\langle f, g \rangle} \langle f, g \rangle - \|g\|_2^2 \langle f, g \rangle \langle g, f \rangle + \langle f, g \rangle \overline{\langle f, g \rangle} \langle g, g \rangle \\
&= \|g\|_2^4 \langle f, f \rangle - \|g\|_2^2 \overline{\langle f, g \rangle} \langle f, g \rangle - \|g\|_2^2 \langle f, g \rangle \langle g, f \rangle + \langle f, g \rangle \langle g, f \rangle \|g\|_2^2 \\
&= \|g\|_2^4 \langle f, f \rangle - \|g\|_2^2 \overline{\langle f, g \rangle} \langle f, g \rangle \\
&= \|g\|_2^4 \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2 |\langle f, g \rangle|^2
\end{aligned}$$

(注意,在拆分的时候,  $\langle *, * \rangle, \|g\|_2, -1$  都是复数,可以使用引理 16.2.5(c)(d); 最后一个等式利用了复数共轭相乘的性质, 引理 15.6.11 中有说明)

因为

$$\begin{aligned}
& \langle f\|g\|_2^2 - \langle f, g \rangle g, f\|g\|_2^2 - \langle f, g \rangle g \rangle \geq 0 \\
& \|g\|_2^4 \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2 |\langle f, g \rangle|^2 \geq 0 \\
& \|g\|_2^2 \|f\|_2^2 - |\langle f, g \rangle|^2 \geq 0 \\
& \|g\|_2^2 \|f\|_2^2 \geq |\langle f, g \rangle|^2 \\
& \|g\|_2 \|f\|_2 \geq |\langle f, g \rangle|
\end{aligned}$$

- (c) 三角不等式

我们有,

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_2^2 &= \langle f + g, f + g \rangle \\
&= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\
&\leq \|f\|_2^2 + \|f\|_2 \|g\|_2 + \|g\|_2 \|f\|_2 + \|g\|_2^2 \\
&= (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2
\end{aligned}$$

于是

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$



- (d) 毕达哥拉斯定理

因为  $\langle f, g \rangle = 0$ , 于是  $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle} = 0$ 。

我们有,

$$\begin{aligned}\|f + g\|_2^2 &= \langle f + g, f + g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|_2^2 + 0 + 0 + \|g\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\end{aligned}$$

- (e) 齐次性

$$\begin{aligned}\|cf\|_2^2 &= \langle cf, cf \rangle \\ &= c^2 \langle f, f \rangle \\ &= c^2 \|f\|_2^2\end{aligned}$$

于是可得,

$$\|cf\|_2 = |c| \|f\|_2$$

## 16.2.5

先定义不连续的  $\mathbb{Z}$  周期方波函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [n, n + \frac{1}{2}), \\ 0 & \text{if } x \in [n + \frac{1}{2}, n + 1) \end{cases}$$

构造连续的  $\mathbb{Z}$  周期函数序列  $(f_n)_{n=1}^\infty$ 。

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}), \\ 1 - n(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}) & \text{if } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}), \\ 0 & \text{if } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1) \end{cases}$$

(注意, 以上只定义了  $[0, 1)$ ) 于是要做一下补充:  $x \in \mathbb{R}, f_n(x+1) = f_n(x)$ 。

以上定义的  $f_n(x)$  关键在于  $[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n})$  上, 函数线性从 1 到 0。

### 16.2.6

- (a)

对任意  $\sqrt{\epsilon} > 0$ , 因为  $f_n$  一致收敛于  $f$ , 于是存在  $N \geq 1$ , 使得只要  $n \geq N$  和  $x \in \mathbb{R}$ , 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\epsilon}$$

于是, 当  $n \geq N$  时

$$\int_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{[0,1]} \epsilon dx = \epsilon$$

由  $\epsilon$  的任意性可知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

- (b)

todo

- (c)

- (d)