5.6 习题

2024 年 6 月 11 日

5.6.1

证明：

（a）

仿照命题 5.5.12 的证明过程。

令 $E = \{z \in R : z \geq 0且z^n \leq x\}$，由定义 5.6.4 可知 $y = x^{1/n} := sup(E)$。

利用反证法，我们要证明 $y^n < x$ 和 $y^n > x$ 都会导致矛盾。

首先假设 $y^n < x$，假设 $0 < \epsilon < 1$ 是一个较小的正数。由于 $\epsilon^n < \epsilon$。

如果 $0 < y \leq 1$，那么，

$$(y + \epsilon)^n = \epsilon^n + k_0 y \epsilon^{n-1} + k_1 y^2 \epsilon^{n-2} + ... + y^n \tag{1}$$
$$< \epsilon + y^n + max(k_0, k_1, ...,) y \epsilon \tag{2}$$
$$< y^n + \epsilon[1 + max(k_0, k_1, ...,) y] \tag{3}$$

设 $\delta = x - y^n$，取 $\epsilon < \delta/[1 + max(k_0, k_1, ...,)y]$，就可以保证 $(y + \epsilon)^n < x$，所以 $(y + \epsilon) \in E$，从而与 y 是 E 的上确界矛盾。

如果 $y > 1$，那么，

$$(y + \epsilon)^n = \epsilon^n + k_0 y \epsilon^{n-1} + k_1 y^2 \epsilon^{n-2} + ... + y^n \tag{4}$$
$$< \epsilon + y^n + max(k_0, k_1, ...,) y^{n-1} \epsilon \tag{5}$$
$$< y^n + \epsilon[1 + max(k_0, k_1, ...,) y^{n-1}] \tag{6}$$

设 $\delta = x - y^n$，取 $\epsilon < \delta/[1 + max(k_0, k_1, ...,)y^{n-1}]$，就可以保证 $(y + \epsilon)^n < x$，所以 $(y + \epsilon) \in E$，从而与 y 是 E 的上确界矛盾。

现在假设 $y^n > x$，假设 $0 < \epsilon < 1$ 是一个较小的正数。

如果 $0 < y \leq 1$，那么，

$$(y-\epsilon)^n > y^n - \epsilon^n - max(|k_0|, |k_1|, ...,)y\epsilon \tag{7}$$

$$> y^n - \epsilon[1 - max(|k_0|, |k_1|, ...,)y] \tag{8}$$

设 $\delta = y^n - x$，取 $\epsilon < \delta/[1 - max(|k_0|, |k_1|, ...,)y]$，就可以保证 $(y-\epsilon)^n > x$，所以 $(y-\epsilon)$ 也是上界，这与 y 是 E 的最小上界矛盾。

如果 $y > 1$，那么，

$$(y-\epsilon)^n > y^n - \epsilon^n - max(|k_0|, |k_1|, ...,)y\epsilon \tag{9}$$

$$> y^n - \epsilon[1 - max(|k_0|, |k_1|, ...,)y^{n-1}] \tag{10}$$

设 $\delta = y^n - x$，取 $\epsilon < \delta/[1 - max(|k_0|, |k_1|, ...,)y^{n-1}]$，就可以保证 $(y-\epsilon)^n > x$，所以 $(y-\epsilon)$ 也是上界，这与 y 是 E 的最小上界矛盾。

根据这两个矛盾，我们得到 $y^n = x$，命题得证。

证明过程中 k_n 具体的值是什么不重要，这里是定性分析。

（b）

该命题说明了 y 的唯一性，即：只有 $y = x^{1/n}$，才能使得 $y^n = x$。

假设存在 y' 使得 $(y')^n = x$，那么 $(y')^n = y^n$，对 n 进行归纳，可知 $y' = y$，存在矛盾，所以 $y = y'$，即 $y = x^{1/n}$ 是唯一的。

（c）

定义 5.6.4 就保证了任何 $E = \{y \in R : y \geq 0 且 y^n \leq x\}$ 的上界 $M \geq 0$，因为上界要大于 E 中的任意元素。所以，E 的最小上界 $sup(E) \geq 0$，所以 $x^{1/n}$ 是非负实数。

（d）

必要性：因为 $x^{1/n} > y^{1/n}$，且由命题 5.6.3（c）可知，

$$(x^{1/n})^n > (y^{1/n})^n$$

$$\Rightarrow x > y$$

充分性：反证法，假设 $x > y$ 时，$x^{1/n} \leq y^{1/n}$。而通过 5.6.3（c）可知，

$$(x^{1/n})^n \leq (y^{1/n})^n$$

$$\Rightarrow x \leq y$$

这与 $x>y$ 矛盾。所以假设不成立，命题得证。

(e)（1）$x>1$

首先证明 $x>1$ 时，$x^{1/n}>1$。由（d）可知，$x>1$ 于是 $x^{1/n}>1^{1/n}$，又因为 $1^n=1$，由（b）可知 $1=1^{1/n}$，于是，

$$x^{1/n}>1^{1/n}=1$$

现在证明 $x>1$ 时，x^n 是严格递增的。只需证明对任意自然数 $k, x^k<x^{k+1}$。由于，

$$x^{k+1}-x^k=x^k(x-1)>0$$

所以 x^n 是严格递增的。

不妨设 $k_0<k_1$，由（a）可知，

$$(x^{1/k_0})^{k_0}=x \tag{11}$$
$$(x^{1/k_1})^{k_1}=x \tag{12}$$

由于 $x>1, x^{1/k_1}>1$，于是 $(x^{1/k_1})^n$ 是严格递增的，且 $k_0<k_1$，所以 $(x^{1/k_1})^{k_0}<(x^{1/k_1})^{k_1}=x$，由此可知，

$$(x^{1/k_0})^{k_0}>(x^{1/k_1})^{k_0} \tag{13}$$

由 5.6.3（c）可知，$x^{1/k_0}>x^{1/k_1}$，所以 $x^{1/k}$ 是关于 k 的减函数得证。

（2）$x<1$ 证明略

（3）$x=1$ 证明略

(f)

按照消去律，只需证明，等式两端的 n 次幂是相等的即可。

由（a）可知

$$[(xy)^{1/n}]^n=xy$$

由命题 5.6.3（a）可知，

$$\begin{aligned}(x^{1/n}y^{1/n})^n&=(x^{1/n})^n(y^{1/n})^n\\&=xy\end{aligned}$$

(g)

按照消去律，只需证明，等式两端的 mn 次幂是相等的即可。

由（a）可知

$$[(x)^{1/mn}]^m n = x$$

有 5.6.3 （a）可知，

$$\begin{aligned}[(x^{1/n})^{1/m}]^{mn} &= \{[(x^{1/n})^{1/m}]^m\}^n \\ &= (x^{1/n})^n \\ &= x\end{aligned}$$

5.6.2

证明：

记 $q = a/b, r = c/d$，其中 a, c 是整数且 b, d 是正整数。

(a)

$x^q = (x^{1/b})^a$，由定义 5.6.4 可知 $x^{1/b} \geq 0$，现在只需证明 $x^{1/b} \neq 0$，假设 $x^{1/b} = 0$，那么，

$$\begin{aligned}x^{1/b} &= 0 \\ (x^{1/b})^b &= 0^b \\ x &= 0\end{aligned}$$

这与 $x > 0$ 矛盾，所以 $x^{1/b} > 0$。

$(x^{1/b})^a$ 的正实数性，通过对 a 进行讨论来完成证明。

（1）$a \leq 0$ 时，可以对 a 进行归纳。

$a = 1$ 时，$(x^{1/b})^0 = 1 > 0$；

归纳假设 $a = k$ 时，$(x^{1/b})^k > 0$。

$a = k + 1$ 时，

$$(x^{1/b})^{k+1} = (x^{1/b})^k (x^{1/b})$$

由命题 5.4.4 可知 $(x^{1/b})^k (x^{1/b}) > 0$；

至此，归纳完成。

（2）$a<0$ 时，由于 $-a>0$，所以 $(x^{1/b})^a = 1/[(x^{1/b})^{-a}]$，由于 $[(x^{1/b})^{-a}] > 0$，所以 $1/[(x^{1/b})^{-a}] > 0$，即：$(x^{1/b})^a > 0$。

（b）

（1.1）

$$x^{q+r} = x^{(ad+bc)/bd}$$

对 $x^{(ad+bc)/bd}$ 进行 bd 次幂，

$$\begin{aligned}(x^{(ad+bc)/bd})^{bd} &= (x^{1/bd})^{(ad+bc)bd} \\ &= x^{ad+bc}\end{aligned}$$

（1.2）

$$\begin{aligned}x^q x^r &= x^{a/b} x^{c/d} \\ &= (x^{1/b})^a (x^{1/d})^c\end{aligned}$$

对 $(x^{1/b})^a(x^{1/d})^c$ 进行 bd 次幂，

$$[(x^{1/b})^a(x^{1/d})^c]^{bd} = (x^{1/b})^{abd}(x^{1/d})^{bcd} \qquad = x^{ad}x^{bc} = x^{ad+bc}$$

由消去律可知，$x^{q+r} = x^q x^r$。

相同方法可知 $(x^q)^r = x^{qr}$

（c）

$q=0$ 时，$x^{-0} = 1, 1/x^0 = 1/1 = 1$，所以 $x^{-q} = 1/x^q$。

$q>0$ 时，此时 $a>0$，$x^{-q} = (x^{1/b})^{-a}$，由于 $-a<0$，由定义 5.6.2 可知，$(x^{1/b})^{-a} = 1/(x^{1/b})^a = 1/x^q$。

$q<0$ 时，$a<0$，$x^{-q} = (x^{1/b})^{-a}$。$1/x^q = 1/(x^{1/b})^a$，由于 $a<0$，由定义 5.6.2 可知，$1/x^q = 1/(x^{1/b})^a = (x^{1/b})^{-a} = x^{-q}$。

综上，命题得证。

说明. $1/(x^{1/b})^a = (x^{1/b})^{-a}$，利用了命题: $(x^{-1})^{-1} = x$，即：x 倒数的

倒数是 x。

该命题不做说明了

（d）

$x^q = (x^{1/b})^a$，$y^q = (y^{1/b})^a$，由命题 5.6.3 （c）可知，我们只需证明 $(x^{1/b}) > (y^{1/b})$，因为 $x > y$，由命题 5.6.6 （d）可知，$(x^{1/b}) > (y^{1/b})$。

（e）

$$\begin{aligned}(x^q)^{bd} &= (x^{a/b})^{bd} \\ &= [(x^{1/b})^a]^{bd} \\ &= x^{ad}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^r)^{bd} &= (x^{c/d})^{bd} \\ &= [(x^{1/d})^c]^{bd} \\ &= x^{bc}\end{aligned}$$

（1）$x > 1$

在习题 5.6.1（e）的证明过程已说明 $x > 1, n \geq 0$ 时，x^n 是严格递增。

2. 在 *5.6.1*（*e*）中只说明了 $n \geq 0$，所以 $n < 0$ 也需要证明下：**设 $x > 1, n < 0$，那么 x^n 是一个关于 n 的递增函数。**

设 $-k_1 < -k_2 < 0$，现在要证明 $x^{-k_1} < x^{-k_2}$。

反证法，假设 $x^{-k_1} > x^{-k_2}$，则存在 $\epsilon > 0$ 使得 $x^{-k_1} = x^{-k_2} + \epsilon$。由题设可知，存在 $\delta > 0$ 使得 $x^{k_1} = x^{k_2} + \delta$，所以，

$$\begin{aligned}x^{k_1}x^{-k_1} &= (x^{k_2} + \delta)(x^{-k_2} + \epsilon) \\ &= x^{k_2}x^{-k_2} + x^{k_2}\epsilon + \delta x^{-k_2} + \delta\epsilon \\ &= 1 + x^{k_2}\epsilon + \delta x^{-k_2} + \delta\epsilon \\ &> 1\end{aligned}$$

这与 $x^{k_1}x^{-k_1} = 1$ 矛盾。

反证法，假设 $x^{-k_1} = x^{-k_2}$，此时 $x^{k_1}x^{-k_1} = x^{k_2}x^{-k_2} = x^{k_2}x^{-k_1}$，这与 $x^{k_1} > x^{k_2}$，$x^{k_1}x^{-k_1} > x^{k_2}x^{-k_1}$ 矛盾。

（1.1）充分性：

如果 $x^q > x^r$，由引理 5.6.9（d）可知 $(x^q)^{bd} > (x^r)^{bd}$，于是，

$$x^{ad} > x^{bc}$$

由 x^n 的严格递增性可知 $ad > bc$，所以 $q - r = (ad - bc)/bd > 0$，可得 $q > r$。

（1.2）必要性：

$q > r$，则

$$\begin{aligned} & a/b - c/d = (ad - bc)/bd > 0 \\ & \Rightarrow ad - bc > 0 \Rightarrow ad > bc \end{aligned}$$

由于 $ad > bc$ 可知，$(x^q)^{bd} > (x^r)^{bd}$，由引理 5.6.9（d）可知，$x^q > x^r$。

（2）$x < 1$ 证明类似略

5.6.3

先证明 $x^2 = |x|^2$。

如果 $x = 0$，显然成立；

如果 $x > 0$，由于 $|x| = x$，所以 $|x|^2 = x^2$；

如果 $x < 0$，不妨设 $x = -y, |x| = y, y > 0$，则

$$\begin{aligned} x^2 &= (-y)^2 \\ &= (-1)^2 y^2 \\ &= 1 \times y^2 \\ &= y^2 \end{aligned}$$

所以 $|x|^2 = x^2 = y^2$。

利用引理 5.6.9（a）

$$\begin{aligned} (x^2)^{1/2} &= (|x|^2)^{1/2} \\ &= |x|^{2\times(1/2)} \\ &= |x| \end{aligned}$$