

## 4.3 习题

2024 年 5 月 4 日

**说明.** 本节的证明过程中,用到了一些命题,在书中没有提到,这里提前列出,并证明它。

**A. 正有理数  $\geq$  零  $\geq$  负有理数**

证明:

不妨设  $x, y$  是任意有理数,并且  $x$  是正有理数,  $y$  是负有理数,所以存在  $a, b, c, d$  正整数,使得  $x = a/b, y = (-c)/d$ , 现在只需证明  $x \geq 0 \geq y$ 。

$$\begin{aligned}x - 0 &= a/b - 0 \\&= a/b - 0/1 \\&= a1 - b * 0/b \\&= a/b \\&= x\end{aligned}$$

由于  $x$  是正的, 所以  $x \geq 0$ 。

$$\begin{aligned}0 - y &= 0 - (-c)/d \\&= 0 - (-c)/d \\&= c/d\end{aligned}$$

有  $c/d$  是正有理数，所以  $0 \geq y$ 。

综上，命题成立。

**A 推论 1. 正有理数  $>$  零  $>$  负有理数**

证明：由于正有理数不等于零，且由命题 A，可知正整数大于零；由于负有理数不等于零，且由命题 A，可知负整数小于零。

**A 推论 2. 有理数  $x > 0$ ，那么  $x$  是正有理数；有理数  $x < 0$ ，那么  $x$  是负有理数。**

证明：

由于  $x > 0$ ，所以  $x - 0$  是正有理数，不妨设该正有理数是  $k$ ，即：

$$x - 0 = k$$

$$x = k$$

由于  $k$  是正有理数，所以  $x$  也是正有理数；

同理  $x < 0$  时， $x$  是负有理数。

**B. 两个正有理数相加，是正有理数**

证明：不妨设  $x, y$  是任意正有理数，所以存在  $a, b, c, d$  正整数，使得  $x = a/b, y = c/d$ 。

$$\begin{aligned} x + y &= a/b + c/d \\ &= (ad + bc)/bd \end{aligned}$$

由于分子是正整数（命题 2.2.8），分母是正整数（命题 2.3.3），所以  $x + y$  是正有理数。

### 4.3.1

**(a)（绝对值的非退化性）** 我们有  $|x| \geq 0$ 。另外， $|x| = 0$  当且仅当  $x$  为零。

证明：

$x$  是有理数，由引理 4.2.7（有理数的三歧性）可知， $x$  有三种情况：

(1)  $x$  是正有理数，此时， $|x| = x$ ，而正有理数  $|x| - 0 = x - 0 = x$ ，由

定义 4.2.8 (有理数的排序) 可知  $|x| > 0$ ;

(2)  $x$  是负有理数, 此时,  $|x| = -x$ ,  $|x| - 0 = -x - 0 = -x$ , 而  $-x$  是正有理数, 由定义 4.2.8 (有理数的排序) 可知  $|x| > 0$ ;

(3)  $x$  等于 0, 此时  $|x| = 0$ , 由定义 4.2.8 (有理数的排序) 可知  $|x| \geq 0$ ;

综上,  $|x| \geq 0$ 。另外,  $|x| = 0$  当且仅当  $x$  为零。

**(b) (绝对值的三角不等式) 我们有  $|x + y| \leq |x| + |y|$ 。**

证明:

可以通过有理数的三歧性证明, 这里情况较多, 只证明  $x$  是正有理数,  $y$  是负有理数的情况【偷个懒, 哈哈】。

设  $x$  是正有理数,  $y$  是负有理数, 不妨设  $x = a/b, y = (-c)/d$ , 其中  $a, b, c, d$  都是正整数。

$$\begin{aligned}|x| + |y| &= a/b + c/d \\ &= (ad + bc)/bd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y &= a/b + (-c)/d \\ &= (ad - bc)/bd\end{aligned}$$

若  $x + y$  是负有理数, 则:

$$\begin{aligned}|x + y| &= -(x + y) \\ &= [-(ad - bc)]/bd \\ &= (bc - ad)/bd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x| + |y| - (|x + y|) &= (ad + bc)/bd - (bc - ad)/bd \\ &= (ad + bc)/bd + (ad - bc)/bd \\ &= [(ad + bc)bd + (ad - bc)bd]/bdbd \\ &= (adbc + adbc)/bdbd\end{aligned}$$

由于分子是正整数（命题 2.2.8），分母是正整数（命题 2.3.3），可知  $(adb + adb)/bdb$  是正的，所以  $|x| + |y| > |x + y|$ 。

**(c) 不等式  $-y \leq x \leq y$  成立, 当且仅当  $y \geq |x|$ 。特别地,  $-|x| \leq x \leq |x|$ 。**

证明:

充分性: 假设前提  $-y \leq x \leq y$  成立, 该前提隐含  $y$  不是负有理数 (见说明)。由有理数的三歧性,  $x$  的取值有 3 种情况: (1)  $x$  等于 0, 此时  $|x| = 0$ , 而  $y$  是正有理数, 所以  $y \geq 0$ 。

(2)  $x$  等于正有理数, 此时  $|x| = x$ , 由前提可知  $y \geq x$ 。

(3)  $x$  等于负有理数, 此时  $|x| = -x$ , 不妨设  $a, b, c, d$  是正有理数,  $x = (-a)/b, y = c/d$ , 由于  $-y \leq x$ , 所有  $-y - x$  是负有理数, 即:

$$\begin{aligned} -y - x &= (-c)/d - (-a)/b \\ &= (-c)b + a/b \\ &= a/b - c/d \\ &= (ad - bc)/bd \end{aligned}$$

由上且  $-y - x$  是负有理数, 可知  $(ad - bc) = -(bc - ad)$  是负整数, 所以  $bc - ad$  是正整数。

$$\begin{aligned} y - (-x) &= c/d - \{ -[(-a)/b] \} \\ &= c/d - a/b \\ &= (bc - ad)/bd \end{aligned}$$

由  $bc - ad$  是正整数和  $bd$  是正整数, 可知  $y - (-x)$  是正有理数, 所以  $y \geq -x$ 。

综合 (1) (2) (3) 可知  $y \geq |x|$ 。

必要性: 假设  $y \geq |x|$ , 由 (a) 可知  $|x| \geq 0$ , 又序是可传递的 (命题 4.2.9), 所以  $y \geq 0$ 。由有理数的三歧性,  $x$  的取值有 3 种情况: (1)  $x$  等于 0, 此时  $|x| = 0$ , 由前提  $y \geq |x|$  可知  $y \geq 0$ , 由此可知  $y$  是零或正有理数, 所以  $-y$  是零或负有理数, 进而  $-y \leq 0$ 。

(2)  $x$  是正有理数, 此时  $|x| = x$ , 由前提  $y \geq |x|$  可知  $y \geq x$ , 此时  $y$  是正有理数,  $x - (-y) = x + y$ , 两个正有理数相加是正有理数, 所以  $-y \leq x$ 。

(3)  $x$  是负有理数, 此时  $|x| = -x$ , 不妨设  $x = (-a)/b, y = c/d$ , 其中  $a, b, c, d$  是正整数。由前提  $y \geq |x|$ , 可知  $y \geq -x$ , 所以:

$$\begin{aligned} y - (-x) &= c/d - \{ -[(-a)/b] \} \\ &= c/d - a/b \\ &= (bc - ad)/bd \end{aligned}$$

由于  $y \geq -x$ , 所以  $(bc - ad)/bd$  是正的。

$$\begin{aligned} y - x &= c/d - (-a)/b \\ &= c/d + a/b \\ &= (ad + bc)/bd \end{aligned}$$

由于  $a, b, c, d$  都是正整数, 由此可知  $(ad + bc)/bd$  是正的, 所以  $y > x$ 。

$$\begin{aligned} x - (-y) &= x + y \\ &= (-a)/b + c/d \\ &= (bc - ad)/bd \end{aligned}$$

由于  $(bc - ad)/bd$  是正的, 所以  $x \geq -y$ 。

综上, (1) (2) (3) 可知  $-y \leq x \leq y$ 。

特别地, 把  $y$  替换为  $|x|$ , 并且  $|x| \geq x$ , 由必要性可知  $-|x| \leq x \leq |x|$ 。

**说明.** 因为  $y$  是负有理数, 存在正整数  $a, b$  使得  $y = (-a)/b$ , 现在证明  $-y > y$ 。

证明:

由

$$\begin{aligned}(-y) - y &= a/b - [(-a)/b] \\&= a/b + a/b \\&= (ab + ab)/bb\end{aligned}$$

由于分子是正整数（命题 2.2.8），分母是正整数（命题 2.3.3），可知  $(ab + ab)/bb$  是正的，所以  $-y > y$ 。

**(d) (绝对值的可乘性)**  $|xy| = |x||y|$ 。特别地， $|-x| = |x|$

证明：

由有理数的三歧性，证明过程可以按三种情况说明：

(1)  $x, y$  有一个是 0 或都是 0，此时， $|xy| = 0, |x||y| = 0$ ，所以  $|xy| = |x||y|$ 。

(2)  $x, y$  同号。如果  $x, y$  都是正有理数，存在正整数  $a, b, c, d$  使得  $x = a/b, y = c/d$ ，此时：

$$\begin{aligned}|xy| &= |(a/b) * (c/d)| \\&= |(ac)/(bd)| \\&= ac/bd\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}|x||y| &= |a/b||c/d| \\&= (a/b) * (c/d) \\&= ac/bd\end{aligned}$$

所以  $|xy| = |x||y|$

如果  $x, y$  都是负有理数，证明类似。

(3)  $x, y$  是异号。如果  $x$  是正有理数， $y$  是负有理数，存在正整数  $a, b, c, d$

使得  $x = a/b, y = (-c)/d$ ,

$$\begin{aligned}|xy| &= |(a/b) * [(-c)/d]| \\ &= |(-ac)/(bd)| \\ &= ad/bd\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}|x||y| &= |a/b| |(-c)/d| \\ &= (a/b) * (c/d) \\ &= ac/bd\end{aligned}$$

所以  $|xy| = |x||y|$ 。如果  $x$  是负整数,  $y$  是正有理数, 证明过程类似。

综上, (1) (2) (3) 可知  $|xy| = |x||y|$ 。

特别地,  $-x = (-1)x$ , 所以

$$\begin{aligned}|-x| &= |(-1)||x| \\ &= 1|x| \\ &= |x|\end{aligned}$$

命题 4.2.4

。

(e) (距离的非退化性)  $d(x, y) \geq 0$ 。另外,  $d(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ 。

证明:

$d(x, y) = |x - y|$ , 由于  $x - y$  结果是有理数, 由 (a) 可知  $|x - y| \geq 0$ , 并且  $|x - y| = 0$  当且仅当  $x - y$  等于零当且仅当  $x = y$

(f) (距离的对称性)  $d(x, y) = d(y, x)$ 。

证明:

不妨设  $z = x - y$ , 由于  $d(x, y) = |z|, d(y, x) = |-z|$ , 由 (d) 可知  $|-z| = |z|$ , 所以  $d(x, y) = d(y, x)$

(g) (距离的三角不等式)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 。

证明:

$d(x, z) = |x - z|, d(x, y) = |x - y|, d(y, z) = |y - z|$ , 由于  $x - z = (x - y) + (y - z)$ , 由命题 (b) 可知  $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ , 所以  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 。

### 4.3.2

(a) 如果  $x = y$ , 那么对任意的  $\varepsilon > 0$ ,  $x$  都是  $\varepsilon$ - 接近于  $y$  的。反过来, 如果对于任意的  $\varepsilon > 0$ ,  $x$  都是  $\varepsilon$ - 接近于  $y$  的, 那么  $x = y$ 。

证明:

如果  $x = y$ , 则:

$$x - y = y - y$$

$$\text{有理数加法是定义明确的 } x - y = 0$$

由此可知  $d(x, y) = 0$ , 所以任意  $\varepsilon > 0$  总有  $\varepsilon > d(x, y)$ 。

反过来, 用反证法证明。不妨设  $z = x - y$ , 由有理数的三歧性可知,  $z$  的取值有 3 种情况:

(1)  $z$  是正有理数, 此时  $d(x, y) = |x - y| = |z| = z$ , 此时取  $\varepsilon = (1/2) * z$ , 那么  $d(x, y) > \varepsilon$ , 与前提矛盾, 所以  $z$  不能是正有理数。

(2)  $z$  是负有理数, 此时  $d(x, y) = |x - y| = |z| = -z$ , 此时也取  $\varepsilon = (1/2) * z$ , 那么  $d(x, y) > \varepsilon$ , 与前提矛盾, 所以  $z$  不能是负有理数。

由 (1) (2) 可知  $z$  只能是零, 所以  $z = x - y = 0 \Rightarrow x = y$ 。