4.3 习题

2024 年 5 月 5 日

说明. 本节的证明过程中，用到了一些命题，在书中没有提到，这里提前列出，并证明它。

A. 正有理数 $\geq$ 零 $\geq$ 负有理数

证明：

不妨设 x, y 是任意有理数，并且 x 是正有理数，y 是负有理数，所以存在 a, b, c, d 正整数，使得 $x = a/b, y = (-c)/d$，现在只需证明 $x \geq 0 \geq y$。

$$\begin{aligned} x - 0 &= a/b - 0 \\ &= a/b - 0/1 \\ &= a1 - b * 0/b \\ &= a/b \\ &= x \end{aligned}$$

由于 x 是正的，所以 $x \geq 0$。

$$\begin{aligned} 0 - y &= 0 - (-c)/d \\ &= 0 - (-c)/d \\ &= c/d \end{aligned}$$

有 c/d 是正有理数，所以 $0 \geq y$。

综上，命题成立。

A 推论 1. 正有理数 $>$ 零 $>$ 负有理数

证明：由于正有理数不等于零，且由命题 A，可知正整数大于零；由于负有理数不等于零，且由命题 A，可知负整数小于零。

A 推论 2. 有理数 $x > 0$，那么 x 是正有理数；有理数 $x < 0$，那么 x 是负有理数。

证明：

由于 $x > 0$，所以 $x - 0$ 是正有理数，不妨设该正有理数是 k，即：

$$\begin{aligned} x - 0 &= k \\ x &= k \end{aligned}$$

由于 k 是正有理数，所以 x 也是正有理数；

同理 $x < 0$ 时，x 是负有理数。

B. 两个正有理数相加，是正有理数

证明：不妨设 x, y 是任意正有理数，所以存在 a, b, c, d 正整数，使得 $x = a/b, y = c/d$。

$$\begin{aligned} x + y &= a/b + c/d \\ &= (ad + bc)/bd \end{aligned}$$

由于分子是正整数（命题 2.2.8），分母是正整数（命题 2.3.3），所以 $x + y$ 是正有理数。

C. 两个正有理数的乘积，是正有理数

证明：不妨设 x, y 是任意正有理数，所以存在 a, b, c, d 正整数，使得 $x = a/b, y = c/d$。

$$\begin{aligned} x * y &= a/b * c/d \\ &= (ac)/(bd) \end{aligned}$$

由于分子、分母都是正整数（命题 2.3.3），所以 $x*y$ 是正有理数。

D. 两个有理数的乘积是 0，当且仅当其中一个为零

证明：

充分性：

不妨设 x,y 是任意有理数，有有理数的定义可知，存在整数 a,b,c,d 其中 $b\neq 0, d\neq 0$，使得 $x=a/b, y=c/d$。又因为，

$$\begin{aligned} x*y &= a/b*c/d \\ &= ac/bd \end{aligned}$$

由命题 4.1.8（整数没有零因子）可知 $bd\neq 0$，又 $x*y=0$，所以 $ac=0$，那么 $a=0$ 或 $b=0$，也就是说 x 或 y 为零。

必要性：略

4.3.1

（a）（绝对值的非退化性）我们有 $|x|\geq 0$。另外，$|x|=0$ 当且仅当 x 为零。

证明：

x 是有理数，由引理 4.2.7（有理数的三歧性）可知，x 有三种情况：

（1）x 是正有理数，此时，$|x|=x$，而正有理数 $|x|-0=x-0=x$，由定义 4.2.8（有理数的排序）可知 $|x|>0$；

（2）x 是负有理数，此时，$|x|=-x$，$|x|-0=-x-0=-x$，而 $-x$ 是正有理数，由定义 4.2.8（有理数的排序）可知 $|x|>0$；

（3）x 等于 0，此时 $|x|=0$，由定义 4.2.8（有理数的排序）可知 $|x|\geq 0$；

综上，$|x|\geq 0$。另外，$|x|=0$ 当且仅当 x 为零。

（b）（绝对值的三角不等式）我们有 $|x+y|\leq|x|+|y|$。

证明：

可以通过有理数的三歧性证明，这里情况较多，只证明 x 是正有理数，y 是负有理数的情况【偷个懒，哈哈哈】。

设 x 是正有理数，y 是负有理数，不妨设 $x=a/b, y=(-c)/d$，其中

a,b,c,d 都是正整数。

$$\begin{aligned}|x|+|y| &= a/b+c/d \\ &= (ad+bc)/bd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+y &= a/b+(-c)/d \\ &= (ad-bc)/bd\end{aligned}$$

若 $x+y$ 是负有理数，则:

$$\begin{aligned}|x+y| &= -(x+y) \\ &= [-(ad-bc)]/bd \\ &= (bc-ad)/bd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x|+|y|-(|x+y|) &= (ad+bc)/bd-(bc-ad)/bd \\ &= (ad+bc)/bd+(ad-bc)/bd \\ &= [(ad+bc)bd+(ad-bc)bd]/bdbd \\ &= (adbc+adbc)/bdbd\end{aligned}$$

由于分子是正整数（命题 2.2.8），分母是正整数（命题 2.3.3），可知 $(adbc+adbc)/bdbd$ 是正的，所以 $|x|+|y|>|x+y|$。

（c）不等式 $-y\le x\le y$ 成立，当且仅当 $y\ge|x|$。特别地，$-|x|\le x\le|x|$。

证明：

充分性：假设前提 $-y\le x\le y$ 成立，该前提隐含 y 不是负有理数（见说明）。由有理数的三歧性，x 的取值有 3 种情况：（1）x 等于 0，此时 $|x|=0$，而 y 是正有理数，所以 $y\ge 0$。

（2）x 等于正有理数，此时 $|x|=x$，由前提可知 $y\ge x$。

（3）x 等于负有理数，此时 $|x|=-x$，不妨设 a,b,c,d 是正有理数，

$x = (-a)/b, y = c/d$，由于 $-y \leq x$，所有 $-y - x$ 是负有理数，即：

$$
\begin{aligned}
-y - x &= (-c)/d - (-a)/b \\
&= (-c)b + a/b \\
&= a/b - c/d \\
&= (ad - bc)/bd
\end{aligned}
$$

由上且 $-y - x$ 是负有理数，可知 $(ad - bc) = -(bc - ad)$ 是负整数，所以 $bc - ad$ 是正整数。

$$
\begin{aligned}
y - (-x) &= c/d - \{-[(-a)/b]\} \\
&= c/d - a/b \\
&= (bc - ad)/bd
\end{aligned}
$$

由 $bc-ad$ 是正整数和 bd 是正整数，可知 $y-(-x)$ 是正有理数，所以 $y \geq -x$。

综合（1）（2）（3）可知 $y \geq |x|$。

必要性：假设 $y \geq |x|$，由（a）可知 $|x| \geq 0$，又序是可传递的（命题 4.2.9），所以 $y \geq 0$。由有理数的三歧性，x 的取值有 3 种情况：（1）x 等于 0，此时 $|x| = 0$，由前提 $y \geq |x|$ 可知 $y \geq 0$，由此可知 y 是零或正有理数，所以 $-y$ 是零或负有理数，进而 $-y \leq 0$。

（2）x 是正有理数，此时 $|x| = x$，由前提 $y \geq |x|$ 可知 $y \geq x$，此时 y 是正有理数，$x - (-y) = x + y$，两个正有理数相加是正有理数，所以 $-y \leq x$。

（3）x 是负有理数，此时 $|x| = -x$，不妨设 $x = (-a)/b, y = c/d$，其中 a, b, c, d 是正整数。由前提 $y \geq |x|$，可知 $y \geq -x$，所以：

$$
\begin{aligned}
y - (-x) &= c/d - \{-[(-a)/b]\} \\
&= c/d - a/b \\
&= (bc - ad)/bd
\end{aligned}
$$

由于 $y \geq -x$，所以 $(bc - ad)/bd$ 是正的。

$$
\begin{aligned}
y - x &= c/d - (-a)/b \\
&= c/d + a/b \\
&= (ad + bc)/bd
\end{aligned}
$$

由于 a, b, c, d 都是正整数，由此可知 $(ad + bc)/bd$ 是正的，所以 $y > x$。

$$
\begin{aligned}
x - (-y) &= x + y \\
&= (-a)/b + c/d \\
&= (bc - ad)/bd
\end{aligned}
$$

由于 $(bc - ad)/bd$ 是正的，所以 $x \geq -y$。

综上，（1）（2）（3）可知 $-y \leq x \leq y$。

特别地，把 y 替换为 $|x|$，并且 $|x| \geq x$，由必要性可知 $-|x| \leq x \leq |x|$。

说明. 因为 y 是负有理数，存在正整数 a, b 使得 $y = (-a)/b$，现在证明 $-y > y$。

证明：

由

$$
\begin{aligned}
(-y) - y &= a/b - [(-a)/b] \\
&= a/b + a/b \\
&= (ab + ab)/bb
\end{aligned}
$$

由于分子是正整数（命题 2.2.8），分母是正整数（命题 2.3.3），可知 $(ab + ab)/bb$ 是正的，所以 $-y > y$。

（d）（绝对值的可乘性）$|xy| = |x||y|$。**特别地，**$|-x| = |x|$

证明：

由有理数的三歧性，证明过程可以按三种情况说明：

（1）x, y 有一个是 0 或都是 0，此时，$|xy| = 0, |x||y| = 0$，所以 $|xy| = |x||y|$。

（2）x, y 同号。如果 x, y 都是正有理数，存在正整数 a, b, c, d 使得 $x = a/b, y = c/d$，此时：

$$\begin{aligned} |xy| &= |(a/b) * (c/d)| \\ &= |(ac)/(bd)| \\ &= ac/bd \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} |x||y| &= |a/b||c/d| \\ &= (a/b) * (c/d) \\ &= ac/bd \end{aligned}$$

所以 $|xy| = |x||y|$

如果 x, y 都是负有理数，证明类似。

（3）x, y 是异号。如果 x 是正有理数，y 是负有理数，存在正整数 a, b, c, d 使得 $x = a/b, y = (-c)/d$，

$$\begin{aligned} |xy| &= |(a/b) * [(-c)/d]| \\ &= |(-ac)/(bd)| \\ &= ad/bd \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} |x||y| &= |a/b||(-c)/d| \\ &= (a/b) * (c/d) \\ &= ac/bd \end{aligned}$$

所以 $|xy| = |x||y|$。如果 x 是负整数，y 是正有理数，证明过程类似。

综上，（1）（2）（3）可知 $|xy| = |x||y|$。

特别地，$-x = (-1)x$，所以

$$\begin{aligned} |-x| &= |(-1)||x| \\ &= 1|x| \\ &= |x| && \text{命题 4.2.4} \end{aligned}$$

。

（e）（距离的非退化性）$d(x, y) \geq 0$。另外，$d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$。

证明：

$d(x,y) = |x-y|$，由于 $x-y$ 结果是有理数，由（a）可知 $|x-y| \geq 0$，并且 $|x-y| = 0$ 当且仅当 $x-y$ 等于零当且仅当 $x = y$

（f）（距离的对称性）$\mathbf{d(x,y) = d(y,x)}$。

证明：

不妨设 $z = x-y$，由于 $d(x,y) = |z|, d(y,x) = |-z|$，由（d）可知 $|-z| = |z|$，所以 $d(x,y) = d(y,x)$

（g）（距离的三角不等式）$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$。

证明：

$d(x,z) = |x-z|, d(x,y) = |x-y|, d(y,z) = |y-z|$，由于 $x-z = (x-y)+(y-z)$，由命题（b）可知 $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$，所以 $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$。

4.3.2

（a）如果 $x = y$，那么对任意的 $\varepsilon > 0$，x 都是 ε- 接近于 y 的。反过来，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，x 都是 ε- 接近于 y 的，那么 $x = y$。

证明：

如果 $x = y$，则：

$$\begin{aligned} x-y &= y-y \\ \text{有理数加法是定义明确的} x-y &= 0 \end{aligned}$$

由此可知 $d(x,y)=0$，所以任意 $\varepsilon>0$ 总有 $\varepsilon>d(x,y)$。

反过来，用反证法证明。不妨设 $z=x-y$，由有理数的三歧性可知，z 的取值有 3 种情况：

（1）z 是正有理数，此时 $d(x,y)=|x-y|=|z|=z$，此时取 $\varepsilon=(1/2)*z$，那么 $d(x,y)>\varepsilon$，与前提矛盾，所以 z 不能是正有理数。

（2）z 是负有理数，此时 $d(x,y)=|x-y|=|z|=-z$，此时也取 $\varepsilon=(1/2)*z$，那么 $d(x,y)>\varepsilon$，与前提矛盾，所以 z 不能是负有理数。

由（1）（2）可知 z 只能是零，所以 $z=x-y=0\Rightarrow x=y$。

（b）设 $\varepsilon>0$，如果 x 是 ε-接近于 y 的，那么 y 也是 ε-接近于 x 的。

证明：

由于 x 是 ε-接近于 y 的，所以 $d(x,y)\leq\varepsilon$。由命题 4.3.3（f）可知 $d(x,y)=d(y,x)$，所以 $d(y,x)\leq\varepsilon$，所以 y 也是 ε-接近于 x 的。

（c）设 $\varepsilon,\delta>0$，如果 x 是 ε- 接近于 y 的，并且 y 是 δ- 接近于 z 的，那么 x 和 z 是 $(\varepsilon+\delta)$- 接近的。

证明：

由 4.3.3（g）可知 $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$，所以 $d(x,z)\leq\varepsilon+\delta$，那么 x 和 z 是 $(\varepsilon+\delta)$- 接近的

（d）设 $\varepsilon,\delta>0$，如果 x 和 y 是 ε- 接近的，并且 z 和 w 是 δ- 接近的，那么 $x+z$ 和 $y+w$ 是 $(\varepsilon+\delta)$-接近的，并且 $x-z$ 和 $y-w$ 也是 $(\varepsilon+\delta)$-接近的。

证明：

记 $a:=y-x$，那么 $y=x+a$ 且 $|a|\leq\varepsilon$。类似地，定义 $b:=w-z$，那么 $w=z+b$ 且 $|b|\leq\delta$。

因为 $y=x+a, w=z+b$，所以 $d(x+z,y+w)=d(x+z,x+z+a+b)=|a+b|$，由 4.3.3（b）可知 $|a+b|\leq|a|+b$，即 $d(x+z,y+w)\leq\varepsilon+\delta$，那么 $x+z$ 和 $y+w$ 是 $(\varepsilon+\delta)$-接近的；

因为 $y=x+a, w=z+b$，所以 $d(x-z,y-w)=d(x-z,x-z+a-b)=|a-b|=|a+(-b)|$，由 4.3.3（b）（d）可知 $|a+(-b)|\leq|a|+|b|$，即 $d(x-z,y-w)\leq\varepsilon+\delta$，那么 $x-z$ 和 $y-w$ 也是 $(\varepsilon+\delta)$- 接近的

（e）设 $\varepsilon>0$，如果 x 和 y 是 ε- 接近的，那么对任意的 $\varepsilon'>\varepsilon$，x 和 y 也是 ε'- 接近的。

证明：

由题设可知 $d(x,y)\leq\varepsilon$，又 $\varepsilon<\varepsilon'$，由命题 4.2.9（c）（序是可传递的）

可知 $d(x,y) \le \varepsilon'$，那么 x 和 y 也是 ε'- 接近的。

（f）设 $\varepsilon > 0$，如果 y 和 z 都是 ε- 接近于 x 的，并且 w 位于 y 和 z 之间（即 $y \le w \le z$ 或 $z \le w \le y$），那么 w 也是 ε- 接近于 x 的。

证明：

情况 1：$w = x$、$w = y$ 和 $w = z$ 时，显然 w 是 ε- 接近于 x 的。

情况 2：$w \ne x, w \ne y, w \ne z$ 时，当 $y < w < x$ 时，可知：

$$d(y,x) = d(y,w) + d(w,x)$$

由于命题 4.3.3（e）可知 $d(y,w) \ge 0$，所以 $d(w,x) \le \varepsilon$，否则与题设矛盾。当 $x < w < z$、$z < w < x$ 和 $x < w < y$ 证明类似。

综上，命题成立。【感觉证明有点麻烦，没想到好的思路】

（g）设 $\varepsilon > 0$，如果 x 和 y 是 ε- 接近的，并且 z 不为零，那么 xz 和 yz 是 $\varepsilon|z|$- 接近的。

证明：

记 $a := y - x$，那么 $y = x + a$ 且 $|a| \le \varepsilon$。

因为 $y = x + a$，所以，

$$yz = (x+a)z = xz + az$$

于是，

$$|yz - xz| = |xz + az - xz| = |az| = |a||z|$$

又因为 $|a| \le \varepsilon$，所以，

$$|yz - xz| \le \varepsilon|z|$$

从而 xz 和 yz 是 $\varepsilon|z|$- 接近的。

4.3.3

（a）我们有 $x^n x^m = x^{n+m}, (x^n)^m = x^{nm}, (xy)^n = x^n y^n$。

证明：

（1）$x^n x^m = x^{n+m}$

对 m 进行归纳。当 $m=0$ 时，

$$\begin{aligned} x^n x^0 &= x^n * 1 \\ &= x^n \end{aligned}$$

又因为，

$$\begin{aligned} x^{n+m} &= x^{n+0} \\ &= x^n \end{aligned}$$

所以当 $m=0$ 是命题成立。

归纳假设 $m=k$ 时，$x^n x^k = x^{n+k}$。

现在只需证明 $m=k++$ 时，命题成立。由定义 4.3.9 可知，

$$x^n x^{k+1} = x^n(x^k \times x^1)$$

又由命题 4.2.4（有理数的代数定律）可知，

$$\begin{aligned} x^n x^{k+1} &= x^n(x^k \times x^1) \\ &= (x^n x^k) \times x^1 \\ &= x^{n+k} \times x^1 \\ &= x^{n+k++} \end{aligned}$$

综上，归纳完成。

（2）$(x^n)^m = x^{nm}$

对 m 进行归纳。当 $m=0$ ，由定义 4.3.9 可知，

$$\begin{aligned} (x^n)^m &= (x^n)^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} x^{nm} &= x^{n\times 0} \\ &= x^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

所以当 $m=0$ 是命题成立。

归纳假设 $m=k$ 时，$(x^n)^k=x^{nk}$。

现在只需证明 $m=k++$ 时，命题成立。

$$\begin{aligned}(x^n)^{k++} &= (x^n)^k \times x^n \\ &= x^{nk} \times x^n \\ &= x^{(nk)+n} && \text{【利用 } x^n x^m = x^{n+m}\text{】} \\ &= x^{n(k+1)} \\ &= x^{n(k++)}\end{aligned}$$

综上，归纳完成。

（3）$(xy)^n=x^ny^n$

对 n 进行归纳。当 $n=0$ 时，

$$\begin{aligned}(xy)^n &= (xy)^0 \\ &= 1\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}x^n y^n &= x^0 y^0 \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

所以当 $n=0$ 是命题成立。

归纳假设 $n=k$ 时 $(xy)^k=x^ky^k$。

现在只需证明 $n=k++$ 时，命题成立。由于，

$$\begin{aligned}(xy)^n &= (xy)^{k++} \\ &= (xy)^k \times xy \\ &= x^k y^k \times xy \\ &= (x^k \times x) \times (y^k \times y) \\ &= x^{k++} \times y^{k++}\end{aligned}$$

综上，归纳完成。

（b）假设 $n > 0$，那么 $x^n = 0$ 当且仅当 $x = 0$。

证明：

必要性：如果 $x^n = 0$，由命题 4.3.3（a）可知 $|x^n| = 0$，又由 4.3.3（d）可知 $|x^n| = |x|^n$。如果 $|x|$ 是正有理数，那么 $|x|^n$ 是正有理数（可以通过归纳法证明，这里省略），所以 $|x| = 0$，于是 $x = 0$。

充分性：当 $x = 0$ 时，$0^n = 0$ 是显然的（任何有理数乘零结果都是零，该命题的证明省略）。

（c）如果 $x \geq y \geq 0$，那么 $x^n \geq y^n \geq 0$。如果 $x > y \geq 0$ 并且 $n > 0$，那么 $x^n > y^n \geq 0$。

证明：

（1）如果 $x \geq y \geq 0$，那么 $x^n \geq y^n \geq 0$

对 n 进行归纳。当 $n = 0$ 时，$x^0 = 1, y^0 = 1$，此时 $x^0 \geq y^0 \geq 0$。

归纳假设 $n = k$ 时，$x^k \geq y^k \geq 0$。

现在只需证明 $n = k++$ 时，命题成立。由归纳假设 $x^k \geq y^k$ 可知，$x^k = y^k + a$ 且 $a \geq 0$。所以，

$$
\begin{aligned}
x^{k++} &= x^k \times x \\
&= (y^k + a) \times x \\
&= y^k \times x + a \times x
\end{aligned}
$$

又因为，

$$
\begin{aligned}
x^{k++} - y^{k++} &= y^k \times x + a \times x - y^k \times y \\
&= y^k \times x - y^k \times y + a \times x \\
&= y^k \times (x - y) + a \times x
\end{aligned}
$$

由此可知 $x^{k++} - y^{k++} \geq 0$，所以 $x^{k++} \geq y^{k++}$。当 $y = 0$ 时，由 D 可知 $y^n = 0$，此时 $y^n \geq 0$。当 $y > 0$ 即 y 是正有理数时，由 C 可知 y^n 是正有理数，所以 $y^n > 0$。所以，$x^{k++} \geq y^{k++} \geq 0$；

综上，归纳完成。

（2）如果 $x > y \geq 0$ 并且 $n > 0$，那么 $x^n > y^n \geq 0$

相比于（1）区别在于 x 不能是零了，而 y 还是可以取到零的。证明方式类似，还是对 n 进行归纳，只是归纳基始从 $n = 1$ 开始。

（d）我们有 $|x^n| = |x|^n$。
证明：
对 n 进行归纳。使用命题 4.3.3（d）。
当 $n=0$，$|x^0| = 1, |x|^0 = 1$，所以 $|x^0| = |x|^0$。
归纳假设 $n=k$ 时，$|x^k| = |x|^k$。
现在只需证明 $n=k++$ 时，$|x^{k++}| = |x|^{k++}$。因为：

$$
\begin{aligned}
|x^{k++}| &= |x^k||x| && \text{【命题 4.3.3（d）】} \\
&= |x|^k \times |x| \\
&= |x|^{k++} && \text{【（a）】}
\end{aligned}
$$

综上，归纳完成。

4.3.4