

5.1 习题

2024 年 5 月 18 日

1. 是 0.1 稳定的, 但不是 0.01 稳定的

证明:

$$0.1 - 0.01 = 0.09 > 0.01$$

2. 序列 $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ 对于任意的 ϵ 都不是 ϵ -稳定的。

证明:

序列 $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ 中的元素 $a_n > n$, 设任意有理数 $\epsilon > 0$, 由命题 4.4.1 可知, 存在一个自然数 $N > \epsilon$, 所以,

$$a_{N+1} - a_0 > N + 1 - 1 = N > \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知, 对于任意的 ϵ 序列都不是 ϵ -稳定的。

3. 序列 $10, 0, 0, 0, \dots$, 它是最终 ϵ -稳定的。

证明:

略

4. 无限序列 $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$ 没有界

证明:

无限序列中的元素 $|a_n| > n$, 假设存在 M 使得序列以此为界, 即对任意序列中的元素有,

$$|a_n| \leq M$$

但是由命题 4.4.1 可知, 存在自然数 $N > M$, 又因为,

$$|a_N| > N > M$$

由矛盾可知, 这样的 M 不存在。

综上, 序列是无界的。