14.8 习题

张志聪

2025 年 4 月 30 日

14.8.1

令 $u := max(a, c), v := min(b, d)$。
所以 $u \geq a$，有以下情况：
$u > a, u = c$，任意 $x \in [a, u), x \notin [c, d], f(x) = 0$，所以 $\int_{[a,u)} f = 0$。
$u = a$，则 $\int_{[a,u)} f = 0$。
又 $v \leq b$，有以下情况：
$v < b, v = d$，任意 $x \in (v, b], x \notin [c, d], f(x) = 0$，所以 $\int_{(v,b]} f = 0$。
$v = b$，则 $\int_{(v,b]} f = 0$。
综上，

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,u)} f + \int_{[u,v]} f + \int_{(v,b]} f = \int_{[u,v]} f$$

同理可得

$$\int_{[c,d]} f = \int_{[c,u)} f + \int_{[u,v]} f + \int_{(v,d]} f = \int_{[u,v]} f$$

所以 $\int_{[a,b]} f = \int_{[c,d]} f$

14.8.2

- (a)

  $n = 0$ 时，$(1-y)^0 = 1, 1 - 0y = 1$，命题成立。

  $n \geq 1$ 时，令 $f := (1-y)^n$，对 y 进行求导，

  $$f' = n(1-y)^{n-1}(-1)$$

又 $f(0)=1$，对任意 $y\in[0,1]$，由推论 10.2.9（中值定理）可得，存在 $x\in(0,1)$，使得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(y)-f(0)}{y-0} \\ n(1-x)^{n-1}(-1) &= \frac{(1-y)^n-1}{y} \\ 1-n(1-x)^{n-1}y &= (1-y)^n \end{aligned}$$

因为 $x\in(0,1)$, 所以 $(1-x)^{n-1}\le 1$，所以

$$1-n(1-x)^{n-1}y \ge 1-ny$$

综上可得

$$(1-y)^n = 1-n(1-x)^{n-1}y \ge 1-ny$$

- (b)

  $n=0$ 时，$\frac{1}{\sqrt{0}}$ 是没有意义的，不做讨论。

  $n\ge 1$ 时，$\frac{1}{\sqrt{n}}\le 1$，于是，我们有

  $$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n dx + \int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}(1-x^2)^n dx$$

  当 $x\in[-\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}}]$, 即 $|x|\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ 时，由 (a) 可知 $(1-x^2)^n\ge 1-nx^2\ge 0$；

  当 $x\in[-1,-\frac{1}{\sqrt{n}}]$ 或 $x\in[\frac{1}{\sqrt{n}},1]$ 即 $|x|\ge\frac{1}{\sqrt{n}}$ 时，$1-x^2\ge 0$。

  于是可得

  $$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx \ge \int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n dx \ge \int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 1-nx^2 dx & \\ &= (x-\frac{nx^3}{3})|_{x=\frac{1}{\sqrt{n}}} - (x-\frac{nx^3}{3})|_{x=-\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{n}}+\frac{2}{3\sqrt{n}} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{n}} \\ &\ge \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

- (c)

  令函数 f，当 $x \in [-1,1]$ 时，$f(x) := c(1-x^2)^N$，当 $x \notin [-1,1]$ 时，$f(x) = 0$；于是定义 14.8.6(a) 已经满足。

  现在我们要满足 14.8.6(b)，因为

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-1}^{1} c(1-x^2)^N = c\int_{-1}^{1} (1-x^2)^N$$

  所以令 $c := \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^N}$，那么，14.8.6(b) 也已满足。

  现在我们要满足 14.8.6(c)，因为

  $$|f(x)| = |c(1-x^2)^N|$$

  由 (b) 可知，$0 \le c \le \sqrt{N}$。

  于是

  $$|f(x)| = |c(1-x^2)^N| \le \sqrt{N}(1-x^2)^N \le \sqrt{N}(1-\delta^2)^N$$

  我们需要使得以下成立：

  $$\sqrt{N}(1-\delta^2)^N \le \epsilon$$

  问题最终是变成：确定满足以上不等式的 N 是否存在。

  令 $y := 1-\delta^2$，根据 14.8.6(c) 的前置条件可知，$0 < y < 1$。接下来，我们只需证明 $\lim\limits_{N\to\infty} \sqrt{N}y^N = 0$，即可完成证明。

  使用推论 7.5.3（比值判别法）

  $$\limsup_{N\to\infty} \frac{\sqrt{N+1}y^{N+1}}{\sqrt{N}y^N} = \limsup_{N\to\infty} y\sqrt{1+\frac{1}{N}}$$

  因为 $\lim\limits_{N\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{N}} = 1$，且 $0 < y < 1$，可得

  $$\limsup_{N\to\infty} \frac{\sqrt{N+1}y^{N+1}}{\sqrt{N}y^N} = \limsup_{N\to\infty} y\sqrt{1+\frac{1}{N}} < 1$$

  于是可得，级数 $\sum\limits_{N=1}^{\infty} \sqrt{N}y^N$ 是绝对收敛的，因此其通项 $\sqrt{N}y^N$ 收敛。

14.8.3

按照书中提示的思路进行证明。

因为 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的紧支撑函数，那么，存在一个区间 $[a,b]$，对所有的 $x\notin[a,b]$ 都有 $f(x)=0, f(a)=f(b)=0$。因为 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 的子集，且是闭区间，由定理 9.1.24（直线上的海涅-博雷尔定理）(b) 可知，$[a,b]$ 是紧致的（符合定义 12.5.1（紧致性））。

利用命题 13.3.2 可知 $f|_{[a,b]}$ 是有界的。又 $x\notin[a,b], f(x)=0$ 可知，f 是有界的。

利用定理 13.3.5 可知 $f|_{[a,b]}$ 是一致连续的，又 $x\notin[a,b], f(x)=0, f(a)=f(b)=0$ 可知，f 是一致连续的。

14.8.4

- (a)
  - $f*g$ 有支撑区间。

    f,g 都是连续的紧支撑函数，不妨设 f 支撑在 $[a,b]$ 上，g 支撑在 $[c,d]$ 上，于是函数 $g(x-y)$ 支撑在 $[x-d,x-c]$（把 y 看做自变量，x 是常量，$c\le x-y\le d$，所以 $x-d\le y\le x-c$）。

    如果 $[a,b]\cap[x-d,x-c]=\varnothing$，此时，$b<x-d$ 或 $a>x-c$，即 $x>b+d$ 或 $x<a+c$，则无论 y 如何取值，总有 $f(y)g(x-y)=0$，因为 $y\notin[a,b]\cap[x-d,x-c]=\varnothing$ 。于是可得，$[a+c,b+d]$ 是 $f*g$ 的支撑区间。
  - $f*g$ 是连续函数。

    由习题 14.8.3 可知，存在 $M>0$ 使得任意 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $|f(x)|\le M$；对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $x,x'\in\mathbb{R}, |x-x'|<\delta$，就有

    $$|g(x)-g(x')|<\epsilon$$

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$，只要 $|x-x_0| < \delta$，我们有

$$\begin{aligned}
f*g(x) - f*g(x_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x_0-y)dy \\
&= \int_{[a,b]\cap[x-d,x-c]} f(y)g(x-y)dy - \int_{[a,b]\cap[x_0-d,x_0-c]} f(y)g(x_0-y)dy \\
&= \int_{[a,b]} f(y)g(x-y)dy - \int_{[a,b]} f(y)g(x_0-y)dy \\
&= \int_{[a,b]} f(y)(g(x-y) - g(x_0-y))dy \\
&\leq M\int_{[a,b]} (g(x-y) - g(x_0-y))dy \\
&\leq M|b-a|\epsilon
\end{aligned}$$

所以 $f*g$ 在 x_0 处连续，由 x_0 的任意性值，$f*g$ 连续。

- (b)

  利用命题 11.10.6（变量替换公式 II），解决自变量不同的问题，但用的是它的推论（习题 11.10.4），即 ϕ 是单减的，注意证明过程中符号的变化。

  定义 $u := x-y, u : [c,d]\cap[x-b,x-a] \to [a,b]\cap[x-d,x-c]$，以区间的方式表示 $u : [max(c,x-b), min(d,x-a)] \to [max(a,x-d), min(b,x-c)]$。但这里要注意的是 $y = x-u$ 是单调递减的（注意积分区间的变化）。

$$\begin{aligned}
f*g(x) &= \int_{[a,b]\cap[x-d,x-c]} f(y)g(x-y)dy \\
&= \int_{[max(a,x-d),min(b,x-c)]} f(y)g(x-y) \\
&= -\int_{[min(d,x-a),max(c,x-b)]} f(x-u)g(u)d_u \\
&= \int_{[max(c,x-b),min(d,x-a)]} f(x-u)g(u)d_u \\
&= \int_{[c,d]\cap[x-b,x-a]} f(x-u)g(u)d_u \\
&= g*f(x)
\end{aligned}$$

- (c)

$$
\begin{aligned}
f*(g+h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(g+h)((x-y))dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(g(x-y)+h(x-y))dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)+f(y)h(x-y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)+\int_{-\infty}^{\infty} f(y)h(x-y)dy \\
&= f*g(x)+f*h(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f*(cg)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(cg)(x-y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)cg(x-y)dy \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \\
&= c(f*g(x))
\end{aligned}
$$

14.8.5

$y \notin [0,1], f(y)=0$，这部分的积分无需考虑，只需考虑 $y \in [0,1]$ 这部分。$y \in [0,1], x \in [1,2]$ 时，$x-y \in [0,1]$，此时 $g(x-y)-c$。

于是对任意 $x_0 \in [1,2]$，我们有

$$
\begin{aligned}
f*g(x_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x_0-y)dy \\
&= \int_{[0,1]} f(y)cdy
\end{aligned}
$$

上式的结果与 x_0 的取值无关，命题得证。

14.8.6

- (a) 因为 g 支撑在 $[-1,1]$ 上，所以

$$
\int_{-\infty}^{\infty} g = \int_{-1}^{1} g = 1
$$

又因为 $-1 \le x \le 1$ 都有 $g(x) \ge 0$，所以，

$$\begin{cases} \int_{[-1,\delta)} g \ge 0 \\ \int_{(\delta,1]} g \ge 0 \end{cases}$$

我们有

$$\int_{-1}^{1} g = \int_{[-1,\delta)} g + \int_{[-\delta,\delta]} g + \int_{(\delta,1]} g = 1$$

于是可得

$$\int_{[-\delta,\delta]} g \le 1$$

又由 $\delta \le |x| \le 1$ 均有 $|g(x)| \le \epsilon$，我们有

$$1 = \int_{[-1,\delta)} g + \int_{[-\delta,\delta]} g + \int_{(\delta,1]} g \le \int_{[-\delta,\delta]} g + 2(1-\delta)\epsilon$$

$$\Longrightarrow$$

$$1 - 2(1-\delta)\epsilon \le \int_{[-\delta,\delta]} g$$

因为 $0 < \delta < 1$，可得

$$1 - 2\epsilon < 1 - 2(1-\delta)\epsilon \le \int_{[-\delta,\delta]} g$$

- (b)

  按照书中提示的思路进行证明。

  - 第一个积分接近于 $f(x)$。

    因为 $y \in [-\delta,\delta]$，所以 $|x-y-x| = |y| \le \delta$，有题设可知 $|f(x-y) - f(x)| \le \epsilon$ 即 $f(x) - \epsilon \le f(x-y) \le f(x) + \epsilon$。

    结合 (a) 可知

    $$\int_{[-\delta,\delta]} (f(x)-\epsilon) g(y) dy \le \int_{[-\delta,\delta]} f(x-y) g(y) dy \le \int_{[-\delta,\delta]} (f(x)+\epsilon) g(y) dy$$

    $$\Longrightarrow$$

    $$(f(x)-\epsilon) \int_{[-\delta,\delta]} g(y) dy \le \int_{[-\delta,\delta]} f(x-y) g(y) dy \le (f(x)+\epsilon) \int_{[-\delta,\delta]} g(y) dy$$

    $$\Longrightarrow$$

    $$(f(x)-\epsilon)(1-2\epsilon) \le \int_{[-\delta,\delta]} f(x-y) g(y) dy \le (f(x)+\epsilon)$$

于是结合 $|f(x)| \leq M$，

$$-2f(x)\epsilon - \epsilon + 2\epsilon^2 \leq \int_{[-\delta,\delta]} f(x-y)g(y)dy - f(x) \leq \epsilon$$
$$-2M\epsilon - \epsilon + 2\epsilon^2 \leq \int_{[-\delta,\delta]} f(x-y)g(y)dy - f(x) \leq \epsilon$$

– 第二个和第三个积分的取值范围

由定义 14.8.6（恒等逼近）的性质 (c) 和 $|f(x)| \leq M$ 可得，

$$\int_{[\delta,1]} f(x-y)g(y)dy$$
$$\Longrightarrow$$
$$-M(1-\delta)\epsilon \leq \int_{[\delta,1]} f(x-y)g(y)dy \leq M(1-\delta)\epsilon$$

同理可得，

$$-M(1-\delta)\epsilon \leq \int_{[-1,-\delta]} f(x-y)g(y)dy \leq M(1-\delta)\epsilon$$

综上可得，

$$-2M\epsilon - \epsilon + 2\epsilon^2 - 2M(1-\delta)\epsilon \leq |f * g(x) - f(x)| \leq 2M(1-\delta)\epsilon + \epsilon$$
$$\Longrightarrow$$
$$-4M\epsilon - \epsilon \leq |f * g(x) - f(x)| < 4M\epsilon + \epsilon$$
$$\Longrightarrow$$
$$|f * g(x) - f(x)| \leq (1+4M)\epsilon$$

（注意，以上用到了 $1-\delta < 1, -\epsilon + 2\epsilon^2 > -\epsilon$）

14.8.7

因为 f 是支撑在 $[0,1]$ 上的连续函数，于是由习题 14.8.3 可知，f 是有界的，并且是一致连续的。于是可得存在 $M > 0$，f 以 M 为界。任意 $\epsilon' > 0$，因为 f 是一致连续的，那么，存在 $\delta' > 0$，使得只要 $x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta'$，就有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$。取 $min(1, \delta') > \delta > 0$，那么，$x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta$，就有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$。

由引理 14.8.8 可知，存在一个 $[-1,1]$ 上的多项式 g，并且它是一个 (ϵ',δ) 恒等逼近。

综上，由引理 14.8.14 可知，对所有的 $x\in[0,1]$ 都有，

$$|f*g(x)-f(x)|\le(1+4M)\epsilon'$$

又由引理 14.8.13 可知，$f*g$ 是 $[0,1]$ 上的多项式，$P(x):=f*g(x)$ 就是我们需要的多项式。

以上讨论对任意 ϵ' 都成立，于是对任意的 $\epsilon>0$，设 $\epsilon'=\frac{1}{1+4M}\epsilon$，那么，对所有的 $x\in[0,1]$ 都有，

$$|P(x)-f(x)|\le(1+4M)\epsilon'=\epsilon$$

命题得证。

14.8.8

任意多项式 P，我们可以找到一个整数 $n\ge0$ 和实数 $c_0,c_1,\dots,c_n$ 使得

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n}c_jx^j,\ \ x\in[0,1]$$

于是我们有，

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}f(x)P(x)dx&=\int_{[0,1]}f(x)\sum_{j=0}^{n}c_jx^j\\&=\sum_{j=0}^{n}c_j\int_{[0,1]}f(x)x^jdx\\&=0\end{aligned}$$

由推论 14.8.16 可知，对任意 $\epsilon>0$，存在 $P_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它是 $[0,1]$ 上的多项式，并使得 $|P_0(x)-f(x)|\le\epsilon$。于是可得 $P_0(x)=f(x)+c\epsilon$，其中 $-1\le c\le1$。于是

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}f(x)P_0(x)dx=0&=\int_{[0,1]}f(x)(f(x)+c\epsilon)dx\\&=\int_{[0,1]}f(x)f(x)dx+\int_{[0,1]}+c\epsilon f(x)dx\end{aligned}$$

因为

$$\int_{[0,1]} c\epsilon f(x)dx = c\epsilon\int_{[0,1]} f(x)x^0dx = 0$$

于是可得

$$\int_{[0,1]} f(x)f(x)dx = 0$$

反证法，假设 $f \not\equiv 0$，即存在 $x_0 \in [0,1]$ 使得 $f(x_0) \neq 0$。

因为 $f(x)$ 是一个连续函数，那么 $f(x)f(x)$ 也是连续函数，且是非负的。于是对 $\epsilon = \frac{1}{2}f(x_0)f(x_0) > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in [0,1], |x-x_0| < \delta$，就有 $|f(x)f(x) - f(x_0)f(x_0) < \epsilon$，于是可得

$$f(x)f(x) \geq f(x_0)f(x_0) - \epsilon = \frac{1}{2}f(x_0)f(x_0)$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} f(x)f(x)dx &\geq \int_{[x_0-\delta,x_0+\delta]} f(x)f(x)dx \\ &\geq 2\delta\frac{1}{2}f(x_0)f(x_0) \\ &= \delta f(x_0)f(x_0) \\ &> 0\end{aligned}$$

存在矛盾。

14.8.9

如果 $x_0 = 0$,对任意 $\epsilon > 0$,由 f 在 $[0,1]$ 上连续可知,存在 $\delta > 0$,使得只要 $x \in [0,1], 0 \leq x-x_0 < \delta$,就有 $|f(x)-f(0)| < \epsilon$。又由 $x \notin [0,1], F(x) = 0$ 可知,当 $-\delta < x-x_0 < 0$,就有 $|F(x)-F(0)| = 0 < \epsilon$。所以,只要 $|x-x_0| < \delta$,就有 $|F(x) - F(0)| < \epsilon$，于是 F 在 0 处是连续的。

同理可得，F 在 1 处是连续的。

$x_0 \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$ 时，F 在 x_0 上的连续性是易证的，这里不做说明。

综上，F 是连续的。