10.5 注释

张志聪

2025 年 4 月 11 日

1. 个人判断，陶哲轩书中的洛必达法则的表述存在问题。

主要有以下问题：

- II 中 $\lim_{x\to a;x\in(a,b]} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 是一定存在的。

  题设中 f,g 在 $[a,b]$ 上是可微的，且任意 $x \in [a,b], g'(x) \neq 0$，即 $f'(a), g'(a)$ 存在，且 $g'(a) \neq 0$，此时，按照定义 10.1.1 可得，

$$\lim_{x\to a;x\in[a,b]\setminus\{a\}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$
$$\lim_{x\to a;x\in[a,b]\setminus\{a\}} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$$

  集合 $[a,b]\setminus\{a\} = (a,b]$，按照命题 9.3.14，极限就是，

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a;x\in(a,b]} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\
&= \lim_{x\to a;x\in(a,b]} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \frac{f'(a)}{g'(a)}
\end{aligned}$$

  此时为啥还要判断存在性呢???

后来，在第 1 版的《陶哲轩实分析》勘误网页中发现，已经说明了其中问题。

网页：https://terrytao.wordpress.com/books/analysis-i/

原文如下：

2. *In Proposition 10.5.2, the hypothesis that f,g be differentiable on [a,b] may be weakened to being continuous on [a,b] and differentiable on (a,b], with g' only assumed to be non-zero on (a,b] rather than [a,b].*

翻译：在命题 *10.5.2* 中，关于 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可微的假设可以弱化为：在 $[a,b]$ 上连续且在 $(a,b]$ 上可微，且 g' 仅需在 $(a,b]$ 上非零（而非原条件要求的 $[a,b]$ 上）。

2 和我本科期间学的洛必达定理表达不一样。

- 本科期间是 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，而不是 $f(a)=0$，后者的条件更强了。

2.1 定理 1

3. 设

- （*1*）当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零。
- （*2*）在点 a 的某个去心领域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$。
- （*3*）$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

证明：

需做如下转换：

设函数 h 如下：$x=a$ 时 $h(a)=0$（这是为了保证 h 在 a 处是连续的），$x\neq a$ 时，$h(x)=f(x)$。

同理设函数 H 如下，$x=a$ 时 $H(a)=0$,$x\neq a$ 时，$H(x)=h(x)$。

由前置条件（2），我们设 a 的去心领域为 $(a-\epsilon,a+\epsilon),0<\delta<\epsilon$。

- 方法一：直接利用命题 10.5.2 进行证明。

  于是

$$\lim_{x\to a;x\in(a,\delta]}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a;x\in(a,\delta]}\frac{h'(x)}{H'(x)}$$

利用命题 10.5.2，得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a;x\in(a,\delta]}\frac{h'(x)}{H'(x)} &= \lim_{x\to a;x\in(a,\delta]}\frac{h(x)}{H(x)}\\ &= \lim_{x\to a;x\in(a,\delta]}\frac{f(x)}{F(x)}\end{aligned}$$

左极限证明类似。

综上，命题成立。

- 同济版证明（有改动）

  同济版的证明使用了“柯西中值定理”，定理的具体内容，在 10-2-comment.tex 中有说明。

  因为对任意 $x\in(a,\delta),\delta>0$，由“柯西中值定理”可知，存在 $\xi(x)\in(a,x)$（ξ 是关于 x 的函数），使得

$$\frac{h(x)-h(a)}{H(x)-H(a)}=\frac{h'(\xi(x))}{H'(\xi(x))}$$
$$\Longrightarrow$$
$$\frac{h(x)}{H(x)}=\frac{h'(\xi(x))}{H'(\xi(x))}$$

  当 $x\to a$ 时，$\xi(x)$ 也收敛于 a，由题设（3）和 h,H 的构造方式，我们有，

$$\lim_{x\to a}\frac{h'(\xi(x))}{H'(\xi(x))}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi(x))}{F'(\xi(x))}$$

  于是由极限定律可知，

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{H(x)}=\lim_{x\to a}\frac{h'(\xi(x))}{H'(\xi(x))}$$

  又因为 $x\in(0,\delta)$，我们有

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{h(x)}{H(x)}=\frac{h'(\xi(x))}{H'(\xi(x))}=\frac{f'(\xi(x))}{F'(\xi(x))}$$

  综上可得，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{H(x)}=\lim_{x\to a}\frac{h'(\xi(x))}{H'(\xi(x))}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi(x))}{F'(\xi(x))}$$

  左极限同理。

2.2 定理

4. 设

- （*1*）当 $x \to a$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于无穷大。
- （*2*）在点 a 的某个去心领域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$。
- （*3*）$\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），则

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

证明：

证明使用了“柯西中值定理”，定理的具体内容，在 10-2-comment.tex 中有说明。

因为 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于无穷大，所以无法保证在 a 处的连续性，为使用“柯西中值定理”需要特殊处理下。

任意 $x \in (a, a+\delta)$，取 $y = \frac{1}{2}(x+a)$，于是可得 $a < y < x$，

由柯西中值定理，我们有

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{F'(\xi(x))}$$

其中 $\xi(x) \in (y, x)$。

因为 $x \to a$，$\xi(x)$ 也收敛于 a，我们有

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(\xi(x))}{F'(\xi(x))} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

不妨设 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(\xi(x))}{F'(\xi(x))} = L$。

对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，使得只要 $|x-a| < \delta_1$，就有

$$|\frac{f'(\xi(x))}{F'(\xi(x))} - L| < \epsilon$$

因为 $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{F'(\xi(x))}$，所以

$$|\frac{f(x)}{F(x)} - L| < \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可得，$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = L$。

综上，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

左极限证明类似。

2.3 定理

5. 设

- （*1*）当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零。
- （*2*）存在 $r>0$，使得 $x>r, f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$。
- （*3*）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

证明：

定义 $\phi(x)=\frac{1}{x}$，于是

$$\lim_{x\to 0^+}\phi(x)=+\infty$$

于是

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(\phi(x))}{F'(\phi(x))}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

（注意：使用了下文中的 3 定理）

利用 2.1 定理可得，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\phi(x))}{F(\phi(x))}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(\phi(x))}{F'(\phi(x))}$$

反方向使用刚才的操作，我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\phi(x))}{F(\phi(x))}$$

综上，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

2.4 定理

6. 设

- （*1*）当 $x \to +\infty$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于无穷大。
- （*2*）存在 $r > 0$，使得 $x > r, f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$。
- （*3*）$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

证明：

定义 $\phi(x) = \frac{1}{x}$，于是

$$\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = +\infty$$

于是

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(\phi(x))}{F'(\phi(x))} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

（注意：使用了下文中的 3 定理）

利用 2.3 可知，

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(\phi(x))}{F(\phi(x))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(\phi(x))}{F'(\phi(x))}$$

反方向使用刚才的操作，我们有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(\phi(x))}{F(\phi(x))}$$

综上，

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

3 定理

7. 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数，并且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$，函数 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，且 $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=x_0$，于是 $\lim\limits_{x\to a} f\circ\phi(x)=L$ 成立。

证明：

任意 $\epsilon>0$。

由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ 可知，存在 $\delta_0>0$，使得只要 $|x-x_0|<\delta_0$，就有

$$|f(x)-L|<\epsilon$$

又因为 $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=x_0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $|x-a|<\delta$，就有

$$|\phi(x)-x_0|<\delta_0$$

综上，只要 $|x-a|<\delta_1$，就有

$$|f(\phi(x))-L|<\epsilon$$

即：

$$\lim_{x\to a} f\circ\phi(x)=L$$