5.4 推论

2024 年 5 月 26 日

1. 书中对命题 5.4.12（有理数对实数的界定）的表达感觉有点奇怪。

不是说命题不正确，而是命题中提到了正整数，虽然正整数是嵌入到有理数中的。如果把命题中的正整数改为正的有理数话，有理数界定了实数，而整数界定了有理数（命题 4.4.1），这样的表达更加统一。

2. 书中的命题 5.4.12（有理数对实数的界定）只说明了正实数的情况，这里证明对所有实数，命题的正确性。

> **说明.** 这里需要把命题中的 x 改为实数，不限定其是正的，把 q, N 分别改为有理数 q, p，且不限定为正的。

证明：

通过实数的三歧性分别证明。

当 x 是正的，则书中已经证明过。

当 $x = 0$，可以直接取 $q = 0, p = 0$ 此时命题成立。

当 x 是负的，此时 $-x$ 是正的，则存在 q, p 使得 $q \leq -x \leq p$，所以 $-p \leq x \leq -q$（实数也满足习题 4.2.6）。

综上，命题证明完成。

推论 5.4.13（阿基米德性质）对负的实数也有类似的性质：设 x, ϵ 是任意的负实数，那么存在一个正整数 M 使得 $M\epsilon < x$。

证明：

证明方式和书中类似。

数 x/ϵ 是正的，利用命题 5.4.12 可知，存在一个正整数 N 使得 $x/\epsilon \leq N$。

如果令 $M := N + 1$，那么 $x/\epsilon < M$。由于 $\epsilon < 0$，两端同时乘以 ϵ，就得到了要证明的结论。