6.2 习题

2024 年 6 月 29 日

6.2.1

自反性

当 $x \in R$ 时，有命题 5.3.3 可知 $x = x$，由实数排序定义 5.4.6 可知 $x \leq x$，又由广义实数的排序定义 6.2.3 可知 $x \leq x$。

当 $x = +\infty$ 时，由广义实数的排序定义 6.2.3 可知 $x \leq x$

当 $x = -\infty$ 时，由广义实数的排序定义 6.2.3 可知 $x \leq x$

三歧性

（1）如果 $x, y \in R$，由实数的三歧性可得 x, y 满足三歧性。

（2）分情况讨论 x, y 属于广义实数系附加的两个额外元素 $+\infty$ 和 $-\infty$。

这里只讨论一种情况，其他的情况类似不做赘述。

如果 $x = +\infty$，$y \in R$，由定义 6.2.3 可知 $x \geq y$，即该种情况属于三种情况之一，按照定义，不满足其他两种情况，所以满足三歧性。

传递性

（1）如果 $x, y, z \in R$，由实数的传递性可得 $x \leq z$。

（2）分情况讨论 x, y, z 属于广义实数系附加的两个额外元素 $+\infty$ 和 $-\infty$。

证明略

负运算使序改变

如果 $x, y \in R$，显然成立。

分情况讨论 x, y 属于广义实数系附加的两个额外元素 $+\infty$ 和 $-\infty$。

证明略

6.2.2

(a)

根据定义 6.2.6 和定义 6.2.3，$sup(E) \geq x$且$inf(E) \leq x, x \in E$。

(b)

反证法。假设 $sup(E) > M$。

如果 $sup(E)$ 是实数，按照定义 6.2.6 可知 E 中只能包括 $-\infty$ 和实数，而 6.2.6（c）的情形最终会归入 6.2.6（a），由定义 5.5.10 可知，$sup(E)$ 是 E 的最小上界，如果 $sup(E) > M$，那么与最小上界的定义 5.5.5 矛盾。

如果 $sup(E) = -\infty$，由定义 6.2.3 可知，$-\infty \leq M$。

如果 $sup(E) = +\infty$，由定义 6.2.3 可知，M 必须等于 $+\infty$，所以 $sup(E) \leq M$。

(c)

证明方法与 (b) 类似，略