8.5 习题

张志聪

2024 年 11 月 27 日

这一节题太多了，我只写正文中提到的习题了。

8.5.3

证明是偏序集。

- （自反性）因为对任意的正整数 x 都有 $x = x \times 1$，所以 $x|x$
- （反对称性）如果正整数 x, y 满足 $x|y$ 且 $y|x$，那么存在正整数 a, b 使得

  $$\begin{cases} y = x \times a \\ x = y \times b \end{cases}$$

  $\Rightarrow$

  $$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

  于是 $x = y$
- （传递性）如果正整数 x, y, z 满足 $x|y$ 且 $y|z$，那么存在正整数 a, b 使得

  $$\begin{cases} y = x \times a \\ z = y \times b \end{cases}$$

  $\Rightarrow$

  $$\begin{cases} z = x \times a \times b \end{cases}$$

  于是 $x|z$

证明不是全序集，举一个反例即可，正整数 $2, 3$ 是不满足 $2|3$ 或 $3|2$ 的，因为不存在正整数 a 使得 $2 = 3a$ 或 $3 = 2a$。

8.5.7

设 $\leq_X$ 是 X 上的序关系。

反证法，假设 Y 有多个最小元素。假设 $y_1, y_2 \in Y$ 且 $y_1 \neq y_2$ 都是 Y 的最小元素。由于 Y 是 X 的一个全序子集，则由定义 8.5.3 可知，$y_1 \leq_X y_2$ 或 $y_2 \leq_X y_1$。

如果 $y_1 \leq_X y_2$ 则与 y_2 是最小值相悖；如果 $y_2 \leq_X y_1$ 则与 y_1 是最小值相悖。

最大值的证明同上。

8.5.8

为了描述方便，不妨设 X 是全序集，Y 是 X 的一个非空子集，$\leq_X$ 是 X 上的序关系。

按照定义 8.5.3 可知，全序集的非空子集也是全序集。

由题设可知 Y 是有限集合，所以不妨设 $\#(Y) = n$，n 是任意自然数。

对 n 进行归纳。

归纳基始，$n = 1$，即 Y 中只有一个元素，由定义 8.5.5 可知，该元素既是最大值也是最小值。

归纳假设，$n = k$ 时命题成立。

$n = k+1$，设 $Y' = Y \setminus \{x\}$，x 可以是 Y 中的任意元素。由引理 3.6.9 可知，$\#(Y') = k$，于是利用归纳假设可得 $min(Y') = y_1$，因为 Y 是全序集，所以 x, y_1 是可以比较大小的，即：要么 $x \leq_X y_1$（此时 x 是最小值），要么 $y_1 \leq_X x$（此时 y_1 是最小值）。

最大值证明类似。

8.5.10

说明 1. “强归纳原理和弱归纳原理是等价的”。个人感觉这个命题还是挺重要的，接下来我会证明这个命题。

这里的证明，参考了《符号逻辑讲义 $_{\text{徐明}}$》命题 *681.*

- 强归纳原理 $\Rightarrow$ 弱归纳原理；即强归纳原理成立的前提下，可以推

出弱归纳原理成立。

令 $P(n)$ 是关于元素 $n \in X$ 的任意性质。假设弱归纳原理的前提成立，即假设 $P(0)$ 成立，并归纳假设对每一个 $n \in X, P(n)$ 成立则 $P(n+1)$ 成立。现在需要用强归纳原理证明弱归纳原理的结论（对所有的 n 都有 $P(n)$）。而强归纳原理的前提对所有 $m \leq n$ 的 $P(m)$ 成立，那么 $P(n+1)$ 成立，这显然已由弱归纳原理的前提保证了。强归纳原理的前提满足后，结论也就有了。

- 弱归纳原理 $\Rightarrow$ 强归纳原理

  即弱归纳原理成立的前提下，可以推出强归纳原理成立。

  令 $P(n)$ 是关于元素 $n \in X$ 的任意性质。假设强归纳原理的前提成立，即对所有 $m \leq n$ 的 $P(m)$ 成立，那么 $P(n+1)$ 成立。现在需要用弱归纳原理证明强归纳原理的结论。而弱归纳原理的前提 $P(0)$ 成立，与对每一个 $n \in X, P(n)$ 成立则 $P(n+1)$ 成立，这显然也已被强归纳原理的前提保证了，弱归纳原理的前提满足后，结论也就有了。

上面的证明是在自然数集上证明的，但该命题在良序集也是成立的。

下面说一下大致原因，不是很严谨：

1. 你可能会说书中是 $m < n$ 的 $m \in X$ 都为真，那么 $P(n)$ 也为真。而不是以上证明中的 $m \leq n$，两种方式是等价的：都是表达定义 *8.5.12* 中的最小严格上界。

2. 也有可能对 $n+1$ 表示困惑，因为良序集里不一定有加法定义，其实 $n+1$ 是自然数中表达 $m \leq n$ 严格最小上界的方式。

反证法，假设结论不成立。

即 $Y := \{n \in X : P(m)\text{为假}, m \leq n, m \in X\}$（这里我改了下表达方式，感觉书中的翻译有点不直观）不是空集。

因为 Y 是 X 的非空子集，那么也是良序集，所以存在最小值 M

- 如果 $M = 0$，这里假设 0 是 X 的最小值，因为 X 是良序集，最小值是肯定存在的。这与前提条件矛盾，因为按照前提条件 $P(0)$ 是空虚为真的。

- 如果 $M > 0$，那么，存在 $0 \leq m < M, P(m)$ 为真，由前提条件可知

$P(M)$ 为真，存在矛盾。

8.5.11

- $\Rightarrow$ 由定义 8.5.8 可知，$Y \cup Y'$ 是全序的
- $\Leftarrow$ 设 A 是 $Y \cup Y'$ 的任意一个非空子集，因为 A 中元素要么属于 Y，要么属于 Y'，所以可以设

  $$A = A_Y \cup A'_Y$$

  其中 $A_Y \subseteq Y, A'_Y \subseteq Y'$。

  因为 A 是非空子集，所以 A_Y, A'_Y 至少有一个是非空的，因为 Y, Y' 都是良序集，所以 A_Y, A'_Y 非空的情况下都是良序集，即有最小值 m, m'；如果两个都不为空，因为 $Y \cup Y'$ 是全序集，所以 A 也是全序集，于是 m, m' 可以通过比较大小得出最小值。

  既然 A 的最小值可以找到，那么，由 A 的任意性，可得 $Y \cap Y'$ 是良序集。

8.5.13

说明 2. 这个结论不是太直观，书中定义“好的”，其实是想保证子集 Y 都是按照相同顺序放入元素的。

举个直观的例子，比如 $x_0 = 0$，那么，定义不满足条件的子集 Y, Y' 如下：

$$Y := \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$
$$Y' := \{0, 1, 2, 4, ...\}$$

前者 $\{y \in Y : y < 3\} = \{0, 1, 2\}, s(\{y \in Y : y < 3\}) = 3$；后者是 $\{y \in Y' : y < 4\} = \{0, 1, 2\}, s(\{y \in Y' : y < 4\}) = 4$。

这与函数的定义矛盾,相同的自变量 $\{0, 1, 2\}$ 对应函数值 $s(\{0, 1, 2\})$ 却不一样。

按照提示进行证明。

（1）先利用命题 8.5.10（强归纳原理）证明

$$\{y \in Y : y \leq a\} = \{y \in Y' : y \leq a\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq a\}$$

对所有的 $a \in Y \cap Y'$ 均成立。

$Y \cap Y' \neq \varnothing$，因为两个集合中至少有一个元素 x_0，设 $a \in Y \cap Y'$，接下来对 a 进行强归纳。

对每一个 $n \in Y \cap Y'$，对所有满足 $m < n, m \in Y \cap Y'$ 的 m 命题均成立，现在需要证明 $a = n$ 等式也成立。

（说明：证明思路和说明中一致，只是更加严谨）

反证法，假设 $a = n$ 时不成立，即在 m, n 之间存在元素 $y_0 \notin Y \cap Y'$，那么，集合

$$W := \{y : m < y < n, y \notin Y \cap Y', y \in Y \text{or } y \in Y'\}$$

是非空集合。

因为 Y, Y' 都是良序集，所以 W 也是良序集，所以存在最小元素 $w \in W$，不妨设 $w \in Y$，另外取 w' 是 W 中 Y' 的最小值（没有，则取 n）（可以取到最小值的原因是 $W \setminus Y$ 也是良序集），此时 $s(\{y \in Y : y < w\}) = w$, $s(\{y \in Y' : y < w'\}) = w'$，但由归纳假设可知，$\{y \in Y : y \leq m\} = \{y \in Y' : y \leq m\}$，那么，

$$\{y \in Y : y < w\} = \{y \in Y' : y < w'\}$$

但函数 s 对应的函数值却不一致，这与函数定义矛盾。

（2）接下来，证明 $Y \cap Y'$ 是好的。

反证法，假设 $Y \cap Y'$ 不是好的，即存在 $k \in Y \cap Y'$，使得 $s(y \in Y \cap Y' : y < k) \neq k$。

由（1）可知 $\{y \in Y : y \leq k\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq k\}$，

$$\begin{cases} \{y \in Y : y \leq k\} \setminus \{k\} = \{y \in Y : y < k\} \\ \{y \in Y \cap Y' : y \leq k\} \setminus \{k\} = \{y \in Y \cap Y' : y < k\} \end{cases}$$

可知

$$\{y \in Y : y < k\} = \{y \in Y \cap Y' : y < k\}$$

于是，$s(\{y \in Y : y < k\}) \neq k$ 与 Y 是“好的”矛盾

（3）如果 $Y' \setminus Y$ 是非空的，$s(Y \cap Y') = min(Y' \setminus Y)$ 并且 $Y' \setminus Y$ 的每个元素都是 Y 的严格上界。

不妨设 $y_{min} = min(Y' \setminus Y)$，由严格上界的定义可知，我们需要证明，对任意 $y \in Y$ 都有 $y_{min} > y$。下面对 y 进行强归纳。

假设对所有 $y_m < y_n$ 的 $y_m \in Y$ 时命题都为真，下面需证明 y_n 时命题也为真。

- 归纳基始 $y_n = x_0$，由 Y, Y' 都是以 x_0 为最小元素的良序集可知 $y_{min} > x_0$。
- 反证法，$y_n \geq y_{min}$，因为 $y_{min} \notin Y$ 所以 $y_n \neq y_{min}$，于是 $y_n > y_{min}$。

  先证明下，y_{min} 之前 Y, Y' 的元素相同。反证法，如果不相同，会导致 $Y \cap Y'$ 出现空洞，而由（2）可知，$Y \cap Y'$ 也是好的，进而会出现与“说明”中一样的问题，这里就不在赘述了。

  于是

  $$\{y : y \in Y, y < y_{min}\} = \{y : y \in Y', y < y_{min}\}$$

  又因为 $y_{min} \notin Y$ 且 $y_n > y_{min}$ 和归纳假设对所有 $y_m < y_n$ 都有 $y_{min} > y_m$ 所以，

  $$\{y : y \in Y, y < y_{min}\} = \{y : y \in Y, y < y_n\} = \{y : y \in Y', y < y_{min}\}$$

  因为 $y_{min} \in Y', y_n \in Y$ 且是好的，所以

  $$s(\{y : y \in Y, y < y_n\}) = y_n$$
  $$s(\{y : y \in Y', y < y_{min}\}) = y_{min}$$

  因为

  $$\{y : y \in Y, y < y_n\} = \{y : y \in Y', y < y_{min}\}$$

于是

$$y_n = y_{min}$$

于是与 $y_n > y_{min}$ 存在矛盾。

8.5.14

反证法，假设 X 没有最大元素。那么 A 是 X 任意一个有上界的子集，不妨设其上界是 M，因为 X 没有最大元素，所以存在元素 $x \in X$，使得 $x > M$，由定义 8.5.12 可知，x 就是 A 的严格上界。

由引理 8.5.14 可知，可以构造一个以某个元素 $x_0 \in X$ 为最小元素，没有严格上界的良序子集 Y。因为良序集 Y 也是全序集，按照题设 Y 有上界，由之前的结论可知有严格上界，于是，存在矛盾，假设不成立。