18.2 注释

张志聪

2025 年 5 月 20 日

说明 1. 开盒子 A, B，且 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，B 是 $\mathbb{R}^m$ 的子集，我们有

$$vol(A \times B) = vol(A)vol(B)$$

证明：

$A \times B$ 是 $\mathbb{R}^{n+m}$ 的子集，且可表示为

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

设

$$A = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$$
$$B = \prod_{j=1}^{m}(c_j, d_j)$$

于是按照笛卡尔积定义，我们有

$$A \times B = \{(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) : a_i < x_i < b_i, c_j < y_j < d_j\}$$

也就是说 $A \times B$ 可以表示成开盒子的形式：

$$A \times B = \prod_{k=1}^{n+m}(e_k, f_k)$$

其中

$$(e_k, f_k) = (a_i, b_i),\ 1 \le k \le n$$
$$(e_k, f_k) = (c_{k-n}, d_{k-n}),\ n + 1 \le k \le n + m$$

所以

$$\begin{aligned} vol(A\times B) &= \prod_{k=1}^{n+m}(f_k-e_k) \\ &= \prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\prod_{j=1}^{m}(c_j,d_j) \\ &= vol(A)vol(B) \end{aligned}$$

说明 2. $\mathbb{R}^n$ 自身就被可数个单位立方体 $(0,1)^n$ 覆盖，如何覆盖？

证明：

我们用以下方式覆盖 $\mathbb{R}^n$：

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}^n}((0,1)^n+q)$$

其中，有理数 $\mathbb{Q}$ 是可数的（推论 8.1.15），又由推论 8.1.14 可知 $\mathbb{Q}^n$ 也是可数的。$(0,1)^n+q$ 表示单位立方体平移到 q 这个位置。

接下来，需要证明这个集合确实可以覆盖 $\mathbb{R}^n$。

对任意 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，由实数的构造方式可得，对任意分量 $1\le j\le n$，存在有理数 q_j，使得

$$x_j-q_j\in(0,1)$$

令 $q=(q_1,\cdots,q_n)$，则 $x\in(0,1)^n+q$。

$\{A^{(j)}:j\in J;x_n\in(a,b)\}$

说明 3. 虽然 $\mathbb{R}$ 的一维测度是 $+\infty$，但是 $\mathbb{R}^2$ 的整个 x 轴的二维外测度却是 0。

证明：

设 $\mathbb{R}^2$ 的整个 x 轴是区间 $X=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$。

对于每一个整数 z，$B_z := \prod_{i=1}^{2}[a_i,b_i]$，其中 $[a_1,b_1]=[z-1,z+1]$，$[a_2,b_2]=[0,0]$，于是

$$m^*(B_z)=2\times 0=0$$

全体的 $z \in \mathbb{Q}, B_z$ 的并集就是整个目标集合 X，所以

$$m^*(X) \le \sum_{z\in\mathbb{Q}} m^*(B_z) = 0$$

说明 4. 默认情况下，两个无限级数的乘积是否收敛，与其“乘积”的求和顺序有关，于是需要定义其顺序。但在绝对收敛的情况，情况特殊：

这里引入一个命题（参考了数学分析第五版（下册）华东师范大学版）：设有绝对收敛序列

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = A$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n| = B$$

则把级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 中每一项所有可能的乘积列出（任何方式都可以）得到级数 $\sum w_n$ 也是绝对收敛的，且其和等于 AB。

证明：

以 s_n 表示级数 $\sum |w_n|$ 的部分和，即：

$$s_n = |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|$$

其中 $w_k = u_{i_k} v_{j_k} (k = 1, 2, \cdots, n)$，记

$$m = max(i_1, j_1, \cdots, i_n, j_n),$$
$$A_m = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_m|,$$
$$B_m = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_m|$$

于是有（有限项求和）

$$s_n \le A_m B_m$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 的部分和 A_n 和 B_n 序列都是有界的。于是可得 s_n 是有界的，从而级数 $\sum w_n$ 绝对收敛。

绝对收敛的级数，具有可重排序的性质，于是把 $\sum w_n$ 以正方形顺序并加相关括号，即

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 + u_3v_1) + \cdots,$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & \cdots \\
\hline
u_1 & u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots \\
u_2 & u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots \\
u_3 & u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

把每个括号作为一项的新级数:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$$

于是部分和 P_n 有

$$P_n = A_n B_n$$

从而由之前的结论有

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} A_n B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \lim_{n\to\infty} B_n = AB$$