18.2 习题

张志聪

2025 年 5 月 19 日

18.2.1

- (v)（空集）

  因为 $\varnothing \subseteq \varnothing$，于是我们可以这样定义开盒子

  $$B = \prod_{i=1}^{1}$$

  其中 $(a_1, b_1) = (0, 0)$，所以 B 是空集，

  $$m^*(\varnothing) \leq vol(B) = 0$$

  又因为按照定义，外测量是非负的，于是

  $$m^*(\varnothing) = 0$$

- (vi)（正性）

  到目前为止，可测集是否能够被开盒覆盖是不确定的，但这里应该指的是可以被开盒覆盖的可测集。

  设 Ω 被任意有限个或者可数个盒子 $(B_j)_{j\in J}$ 覆盖。由盒子体积的定义可知，对任意 $j \in J$，都有

  $$vol(B_j) \geq 0$$

  所以

  $$\sum_{j\in J} vol(B_j) \geq 0$$

  $$m^*(\Omega) \geq 0$$

  而 $m^*(\Omega) \leq +\infty$ 是显然的。

- (vii) （单调性）

  如果 $m^*(B)=+\infty$，命题显然是正确的。

  如果 $m^*(B)<+\infty$，即 $m^*(B)$ 是某个实数。由定义 18.2.4 可知，$m^*(B)$ 是下确界，于是对任意 $\epsilon>0$，存在 $(B_j)_{j\in J}$ 覆盖 B，使得

  $$\sum_{j\in J} vol(B_j)\le m^*(B)+\epsilon$$

  （因为如果不存在，那么 $m^*(B)+\epsilon$ 就成为了下确界，存在矛盾）

  因为 $A\subseteq B$，所以 $(B_j)_{j\in J}$ 也覆盖 A，所以

  $$m^*(A)\le\sum_{j\in J} vol(B_j)\le m^*(B)+\epsilon$$

  由 ϵ 的任意可知，$m^*(A)\le m^*(B)$。

- (viii)（有限次可加性）

  可以直接通过 (x)(v) 推导，设 J 的基数为 n，我们可以定义一个双射 $f:\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}\to(A_j)_{j\in J}$。并令

  $$A_k=\begin{cases}f(k),\ k\le n\\ \varnothing,\ k>n\end{cases}$$

  于是 $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ 是可数无限集合，由 (x) 可得，

  $$m^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k)\le\sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(A_k)$$

  又因为（可以利用反证法证明）

  $$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k=\bigcup_{j\in J} A_j$$

  于是

  $$m^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k)=m^*(\bigcup_{j\in J} A_j)$$

  而且

  $$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(A_k)&=\sum_{k=1}^{n} m^*(A_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty} m^*(A_k)\\&=\sum_{j\in J} m^*(A_j)\end{aligned}$$

综上，

$$m^*(\bigcup_{j\in J} A_j) \le \sum_{j\in J} m^*(A_j)$$

- (x) （可数次可加性）

  $\sum\limits_{j\in J} m^*(A_j) = +\infty$，命题显然是正确的。

  接下来，证明 $\sum\limits_{j\in J} m^*(A_j) < +\infty$ 的情况。

  对任意 ϵ，对任意 A_j，存在开盒覆盖，即存在一簇盒子 $(B_k^{(j)})_{k\in K}$，使得

  $$A_j \subseteq \bigcup_{k\in K} B_k^{(j)}$$

  且

  $$m^*(A_j) \le \sum_{k\in K} vol(B_k^{(j)}) \le m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$$

  于是，整个并集 $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$ 可以被 $\bigcup\limits_{j\in J}\left(\bigcup\limits_{k\in K} B_k^{(j)}\right)$ 表示。

  我们有

  $$m^*(\bigcup_{j\in J} A_j) \le \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} vol(B_k^{(j)}) \le \sum_{j\in J}(m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j\in J} m^*(A_j) + \epsilon$$

  由 ϵ 的任意性可知，

  $$m^*(\bigcup_{j\in J} A_j) \le \sum_{j\in J} m^*(A_j)$$

  > **说明 1.** 其实以上的证明使用了“可数无限次加”，而是本书中，陶哲轩通过极限来严格定义无限级数的和。这样做的目的应该是避免逻辑问题：
  > “无限次加法”在数学基础中缺乏严格定义（如：交换律和结合律在无限情况下是否需要额外条件?）。
  > 而极限理论已经是一套严谨框架了。

- (xiii)