15.7 注释

张志聪

2025 年 4 月 18 日

1

说明 1. 对所有的 $x > 0$, 都有 $cot'(x) \leq -1$，那么由微积分基本定理可知，对所有的 $x > 0$ 和 $s > 0$，都有 $cot(x+s) \leq cot(x) - s$。以上命题是如何证明。

证明：

利用定理 11.9.4（微积分第二基本定理）

$$\int_{x,x+s} cot'(t)dt \leq \int_{[x,x+s]} -1dt$$
$$\implies$$
$$cot(x+s) - cot(x) \leq x + s - x$$
$$\implies$$
$$cot(x+s) \leq cot(x) - s$$

2

说明 2. 设 E 是集合 $E := \{x \in (0, +\infty) : sin(x) = 0\}$，因为 sin 在 $[c, +\infty)$ 上是连续的，所以 E 在 $[c, +\infty)$ 上是闭的。

证明：

函数 $sin : [c, +\infty) \to sin([c, +\infty))$。因为 $\{0\}$ 是 $sin([c, +\infty))$ 中的闭集，那么集合 $sin^{-1}(0) := \{x \in [c, +\infty) : sin(x) = 0\}$（这里 $E = sin^{-1}(0)$）就是 $[c, +\infty)$ 中的闭集。

3

说明 3. E 包含了它的全体附着点，从而就包含了 $inf(E)$。

证明：

因为 $inf(E)$ 就是 E 的附着点。