13.1 习题

张志聪

2025 年 2 月 9 日

13.1.1

- $(a) \implies (c)$

  因为 $f(x_0) \in V$ 且 V 是开集，那么存在 $r > 0$ 使得 $B(f(x_0), r) \subseteq V$。因为 f 在 x_0 处是连续的，那么存在 $\delta > 0$，使得只要 $d_X(x_0, x) < \delta$，就有 $d_Y(f(x), f(x_0)) < r$，于是令 $U = B(x_0, \delta)$ 即可满足要求，使得 $f(U) \subseteq B(f(x_0), r) \subseteq V$。

- $(c) \implies (b)$

  对于任意 $\epsilon > 0$，令 $V := B(f(x_0), \epsilon)$，那么 $V \subset Y$。由 (c) 可知，存在一个包含 x_0 的开集 $U \subset X$，使得 $f(U) \subseteq V$。

  因为 U 是开集，所以存在 $B(x_0, r) \subseteq U$，因为序列 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列，于是存在 $N \geq 1$ 使得

  $$d_X(x_0, x^{(n)}) < r$$

  对所有的 $n \geq N$ 均成立。那么，对所有的 $n \geq N$ 都有

  $$x^{(n)} \in B(x_0, r) \subseteq U$$

  所以 $f(x^{(n)}) \in V$，即

  $$d_Y(f(x^{(n)}), f(x_0)) < \epsilon$$

  由 ϵ 的任意性可知，序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中依度量 d_Y 收敛于 $f(x_0)$ 的序列。

- $(b) \implies (a)$