13.3 习题

张志聪

2025 年 2 月 17 日

13.3.1

设 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 是 $f(K)$ 中的任意序列，序列 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 K 中序列，且 $f(x^n)$ 是 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 中的项。因为 K 是紧致的，那么存在一个收敛的子序列 $(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$，不妨设子序列收敛于 $x_0 \in K$。

又因为 f 是连续的，所以 f 在 x_0 处连续，由定理 13.1.4(b) 可知，序列 $(f(x^{(n_j)}))_{j=1}^{\infty}$ 依度量 d_Y 收敛于 $f(x_0) \in f(K)$，又因为 $(f(x^{(n_j)}))_{j=1}^{\infty}$ 是 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 的子序列，由定义 12.5.1（紧致性）可知，$f(K)$ 是紧致的。

13.3.2

（1）f 是有界的。

由定理 13.3.1 可知，$f(X)$ 是紧致的，由推论 12.5.6 可知，f 是有界的。

（2）f 在某个点 $x_{max} \in X$ 处取到最大值，并且在某个点 $x_{min} \in X$ 处取到最小值。

我们只证明 f 在某个点 $x_{max} \in X$ 处取到最大值，最小值的证明类似。

因为 f 是有界，那么，$\mathbb{R}$ 中存在一个包含 $f(X)$ 的球 $B(y_0, r), y_0 \in \mathbb{R}, r > 0$。现在设 E 表示集合

$$E := \{f(x), x \in X\}$$

（即：E := f(X)）。根据上述内容可知，这个集合是 $B(y_0, r)$ 的子集，而且 E 还是非空集合。根据最小上界原理可知（E 是 $\mathbb{R}$ 的子集），它有一个实数上确界 $sup(E)$。

记 $m := sup(E)$，根据上确界的定义可知，对所有的 $y \in E$ 均有 $y \leq m$。而根据 E 的定义可知，这意味着 $f(x) \leq m$ 对所有的 $x \in X$ 均成立。因此，为了证明 f 在某个点达到最大值，我们只需要找到一个 $x_{max} \in X$ 使得 $f(x_{max}) = m$ 即可。

设 $n \geq 1$ 是任意一个整数，那么 $m - \frac{1}{n} < m = sup(E)$。因为 $sup(E)$ 是 E 的最小上界，那么 $m - \frac{1}{n}$ 不可能是 E 的上界，从而存在一个 $y \in E$ 使得 $m - \frac{1}{n} < y$。又由 E 的定义可知，这蕴含着存在一个 $x \in X$ 使得 $m - \frac{1}{n} < f(x)$。

现在我们按照下面的方法选取一个序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$：对于每一个 n，选取 x_n 为 $x \in X$ 中使得 $m - \frac{1}{n} < f(x_n)$ 的元素。（这里需要用到选择公理）这是 X 中的一个序列，因为 X 是紧致的，我们可以找到一个收敛于某极限 $x_{max} \in X$ 的子序列 $(x_{nj})_{j=1}^{\infty}$，其中 $n_1 < n_2 < ...$。因为 $(x_{nj})_{j=1}^{\infty}$ 收敛于 x_{max} 并且 f 在 x_{max} 处连续, 于是由定理 13.1.4(b) 可知

$$\lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = f(x_{max})$$

另外，根据该序列的构造过程可知，

$$f(x_{n_j}) > m - \frac{1}{n_j} \geq m - \frac{1}{j}$$

从而对上式两端同时取极限可得，

$$f(x_{max}) = \lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) \geq \lim_{j \to \infty} m - \frac{1}{j} = m$$

另外，$f(x) \leq m$ 对所有的 $x \in X$ 均成立，从而 $f(x_{max}) \leq m$。联合这两个不等式就得到 $f(x_{max}) = m$，结论得证。

13.3.3

（1）

设 $f : X \to Y$ 是从度量空间 (X, d_X) 到另一个度量空间 (Y, d_Y) 的映射，f 是一致连续的，现在我们证明 f 也是连续的。

对任意 $x_0 \in X$，对任意 $\epsilon > 0$，因为 f 是一致连续的，那么，存在 $\delta > 0$ 使得只要 $x, x' \in X$ 满足 $d_X(x, x') < \delta$，就有 $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$。不妨设 $x' = x_0$，那么只要满足 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有 $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$。

综上，由定义 13.1.1 可得 f 是连续的。

（2）举例，连续函数不一定是一致连续的。

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$。

对任意 $\delta>0$，存在 $n\in\mathbb{N}$，使得 $\frac{1}{n}<\delta$，此时我们有

$$|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}|<\delta$$
$$|f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})|=|n-(n+1)|=1$$

由此可知，f 不是一致连续函数。

13.3.4

对于任意的 $\epsilon>0$，因为 $g:Y\to Z$ 是一致连续函数，那么，存在 $\delta_Y>0$ 使得只要 $y,y'\in Y$ 满足 $d_Y(y,y')<\delta_Y$，就有 $d_Z(g(y),g(y'))<\epsilon$。

同理可得，存在 $\delta_X>0$ 使得只要 $x,x'\in X$ 满足 $d_X(x,x')<\delta_X$，就有 $d_Y(f(x),f(x'))<\delta_Y$。

综上可得，对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta=\delta_X$ 使得只要 $x,x'\in X$ 满足 $d_X(x,x')<\delta$，就有 $d_Z(g(f(x)),g(f(x')))<\epsilon$。

所以，$g\circ f:X\to Z$ 也是一致连续的。

13.3.5

对任意 $\epsilon>0$，因为 $f:X\to R$ 是一致连续函数，那么，存在 $\delta_f>0$ 使得只要 $x,x'\in X$ 满足 $d_X(x,x')<\delta_f$，就有 $|f(x)-f(x')|<\frac{1}{2}\epsilon$（$\mathbb{R}$ 的默认度量是 d^{l^2}）。

类似的，存在 $\delta_g>0$ 使得只要 $x,x'\in X$ 满足 $d_X(x,x')<\delta_g$，就有 $|g(x)-g(x')|<\frac{1}{2}\epsilon$。

综上，对于任意的 $\epsilon>0$，存在 $\delta=min(\delta_f,\delta_g)$，使得只要 $x,x'\in X$ 满足 $d_X(x,x')<\delta$，就有

$$\begin{aligned}d_{l^2}(f\oplus g(x),f\oplus g(x'))&=d_{l^2}((f(x),g(x)),(f(x'),g(x')))\\&=\sqrt{|f(x)-f(x')|^2+|g(x)-g(x')|^2}<\sqrt{\frac{1}{4}\epsilon^2+\frac{1}{4}\epsilon^2}<\epsilon\end{aligned}$$

所以，$f\oplus g:X\to R^2$ 也是一致连续的。

13.3.6

（1）证明：加法、减法是一致连续函数。

对任意 $\epsilon > 0$,存在 $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$,使得只要 $d_{l^2}((x,y),(x',y')) = \sqrt{|x-x'|^2+|y-y'|^2} < \delta$，就有

$$|x-x'| < \frac{1}{2}\epsilon, |y-y'| < \frac{1}{2}\epsilon$$

于是

$$|(x+y)-(x'+y')| = |(x-x')+(y-y')| < \epsilon$$
$$|(x-y)-(x'-y')| = |(x-x')-(y-y')| < \epsilon$$

这意味着，$(x,y) \mapsto x+y$ 和 $(x,y) \mapsto x-y$ 是一致连续函数。

（2）证明：乘法不是一致连续函数。任意 $n \in \mathbb{N}$，点 $(n,n),(n+\frac{1}{n},n)$ 间的距离

$$d_{l^2}((n,n),(n+\frac{1}{n},n)) = \frac{1}{n}$$

可以任意小，此时

$$|n \times n - (n+\frac{1}{n}) \times n| = 1$$

可知，$(x,y) \mapsto xy$ 不是一致连续函数。

（3）$f+g : X \to \mathbb{R}$ 和 $f-g : X \to \mathbb{R}$ 也是一致连续函数。

由习题 13.3.5 可知，$f \oplus g := (f(x),g(x))$ 的直和 $f \oplus g : X \to R^2$ 是一致连续函数，另外由（1）可知，函数 $(x,y) \mapsto x+y$ 和 $(x,y) \mapsto x-y$ 是一致连续函数，那么，由习题 13.3.4 可知，把这两个函数复合在一起，此时 $f+g = ((x,y) \mapsto x+y)(f \oplus g)$ 和 $f-g = ((x,y) \mapsto x-y)(f \oplus g)$ 是一致连续的。

（4）举例 $fg : X \to \mathbb{R}$ 不一定是一致连续的。

（5）

$max(f,g), min(f,g), cf$ 是一致连续的，f/g 不是一致连续的，比如习题 13.3.3 中的举例。