13.2 习题

张志聪

2025 年 3 月 10 日

13.2.1

方法一：使用连续的定义证明

- (a)
  - $\Rightarrow$

    对任意 $\epsilon > 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$，因为 f 在 x_0 处连续，存在 $\delta_f > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta_f$，就有

    $$d_{l^2}(f(x), f(x_0)) = |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

    类似地，存在 $\delta_g > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta_g$，就有

    $$d_{l^2}(g(x), g(x_0)) = |g(x) - g(x_0)| < \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

    综上，$\delta < min(\delta_f, \delta_g)$，使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有

    $$\begin{aligned} d_{l^2}(f \oplus g(x), f \oplus g(x_0)) &= d_{l^2}((f(x), g(x)), (f(x_0), g(x_0))) \\ &= \sqrt{|f(x) - f(x_0)|^2 + |g(x) - g(x_0)|^2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

    所以 $f \oplus g$ 在 x_0 处是连续的。
  - $\Leftarrow$

任意 $\epsilon > 0$，由于 $f \oplus g$ 在 x_0 处是连续的，所以存在 $\delta > 0$ 使得只要 $d_X(x, x_0) < \delta$，就有

$$\begin{aligned} d_{l^2}(f \oplus g(x), f \oplus g(x_0)) &= d_{l^2}((f(x), g(x)), (f(x_0), g(x_0))) \\ &= \sqrt{|f(x) - f(x_0)|^2 + |g(x) - g(x_0)|^2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \\ |g(x) - g(x_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

即

$$d_{l^2}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

$$d_{l^2}(g(x), g(x_0)) < \epsilon$$

于是可得 f, g 在 x_0 处是连续的。

- (b)

  可以由 (a) 直接推出。

方法二：使用书中的提示

- (a)
  - $\Rightarrow$

    任意 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列，因为 f, g 在 x_0 处连续，由命题 13.1.4(b) 可知，序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $f(x_0)$（书中有说在没有特殊说明的时，提到度量空间 $R^n(n \geq 1)$ 指的就是欧几里得度量）。序列 $(g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $g(x_0)$。

    由命题 12.1.18(d) 可知，$(f(x^{(n)}), g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $(f(x_0), g(x_0))$，由 13.1.4(b) 可知 $f \oplus g$ 在 x_0 处是连续的。

- $\Leftarrow$

  任意 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中依度量 d_X 收敛于 x_0 的序列，因为 $f\oplus g$ 在 x_0 处是连续的，由命题 13.1.4(b) 可知，序列 $(f\oplus g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty} = (f(x^{(n)}), g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $(f(x_0), g(x_0))$，由命题 12.1.18(d) 可知序列 $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $f(x_0)$，序列 $(g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d_{l^2} 收敛于 $g(x_0)$，所以由 13.1.4(b) 可知 f, g 在 x_0 处连续。

- (b)

  可以由 (a) 直接推出。

13.2.2

任意 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$，设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中依度量 d_{l^2} 收敛于 (x_0, y_0) 的序列，对任意 $n \in \mathbb{N}$，$x^{(n)} = (a_n, b_n)$，由命题 12.1.18 可知，序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0，序列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 y_0。由定理 6.1.19（极限定律）可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\ &= x_0 + y_0\end{aligned}$$

由定理 13.1.4(连续性保持收敛性)(b) 可知，函数 $f(x, y) = x+y$ 在点 (x_0, y_0) 处是连续的。由 (x_0, y_0) 的任意性可知 $f(x, y) = x + y$ 是连续的。

同理可证其他函数。

13.2.3

定义 $g : X \to \mathbb{R}$，任意 $x \in X$ 都有 $g(x) = 0$，于是 $g : X \to \mathbb{R}$ 是连续函数。又由于 $|f|(x) = max(f(x), -f(x)) = max(f(x), g(x) - f(x))$，因为 $f : X \to \mathbb{R}, g : X \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，由推论 13.2.3 可知 $g - f : X \to \mathbb{R}$ 是连续函数，再次利用推论 13.2.3 可知 $|f| : X \to \mathbb{R}$ 也是连续函数。

13.2.4

（1）

任意 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$，设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中依度量 d_{l^2} 收敛于 (x_0, y_0) 的序列，对任意 $n \in \mathbb{N}$，$x^{(n)} = (a_n, b_n)$。

由命题 12.1.18 可知，序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0，序列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 y_0。于是

$$\lim_{n \to \infty} (\pi_1(x^{(n)})) = \lim_{n \to \infty} a_n = x_0 = \pi_1(x_0, y_0)$$

所以 π_1 是连续的；

同理可证 π_2 是连续的。

（2）

$g_1(x, y) = f(\pi_1(x, y)) = f \circ \pi_1(x, y)$，由推论 13.1.7 可知 g_1 是连续的；

同理可证 g_2 是连续的。

13.2.5

（1）

任意 $0 \leq i \leq n$ 和 $0 \leq j \leq m$，

$$c^{ij} x^i y^j = c^{ij} \pi_1^i(x, y) \pi_2^j(x, y)$$

由推论 13.2.3(b) 可知是连续函数。再次利用推论 13.2.3(b) 可知，有限个连续函数相加的结果是连续函数。

（2）

证明参考推论 13.2.3 的证明。

因为 f, g 都是连续的，那么 $f \oplus g$ 是连续的。由（1）可知函数 P 是连续的。我们把这两个函数复合在一起，那么根据推论 13.1.7 可知，$P(f, g)(x) : X \to \mathbb{R}$ 是连续的。

13.2.6

- $\Rightarrow$

  证明方法与习题 13.2.1 的证明方法（方法二）相同，不再赘述。

- $\Leftarrow$

  成立；证明方法与习题 13.2.1 的证明方法（方法二）相同，不再赘述。

13.2.7

这道题，没有用书中的提示证明。使用的证明方法与习题 13.2.5 一致。

任意 $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I$，$c(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ 是常数，$x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \ldots, x_k^{i_k}$ 由习题 13.2.4 和推论 13.2.3(b) 可知分别都是连续的，再次利用推论 13.2.3(b) 可知 $c(i_1, i_2, \ldots, i_k)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_k^{i_k}$ 是连续函数。

因为 I 是有限子集，由推论 13.2.3(b) 可知有限个连续函数相加的结果是连续函数，即 $P(x_1, \ldots, x_k)$ 是连续函数。

13.2.8

（1）$(X \times Y, d_{X\times Y})$ 是度量空间。

证明度量是否满足四个公理

- (a)

  对任意的 $(x, y) \in X \times Y$，

  $$d_{X\times Y}((x,y),(x,y)) = d_X(x,x) + d_Y(y,y) = 0$$

  注意,因为 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 都是度量空间,所以 $d_X(x,x) = 0, d_Y(y,y) = 0$。

- (b) 正性

  对任意两个不同的 $(x,y),(x',y') \in X \times Y$，

  $$d_{X\times Y}((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y') > 0$$

  注意,因为 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 都是度量空间,所以 $d_X(x,x') > 0, d_Y(y,y') > 0$。

- (c) 对称性

  对任意两个 $(x,y),(x',y') \in X \times Y$，

  $$\begin{aligned} d_{X\times Y}((x,y),(x',y')) &= d_X(x,x') + d_Y(y,y') \\ &= d_X(x',x) + d_Y(y',y) \\ &= d_{X\times Y}((x',y'),(x,y)) \end{aligned}$$

- (d) 三角不等式

  对任意三个 $(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in X\times Y$，

$$
\begin{aligned}
&d_{X\times Y}((x,y),(x'',y''))\\
&=d_X(x,x'')+d_Y(y,y\prime\prime)\\
&\le d_X(x,x')+d_X(x',x'')+d_Y(y,y')+d_Y(y',y'')\\
&=d_{X\times Y}((x,y),(x',y'))+d_{X\times Y}((x',y'),(x'',y''))
\end{aligned}
$$

综上，$(X\times Y,d_{X\times Y})$ 是度量空间。

（2）与命题 12.1.18 类似的结论。

如果 $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ 是度量空间 $(X\times Y,d_{X\times Y})$ 中的序列，其中 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)}),x_1^{(k)}\in X,x_2^{(k)}\in Y$，$x=(x_1,x_2)$ 是 $X\times Y$ 中的点，那么下面两个命题是等价的。

（a）$(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x。

（b）序列 $(x_1^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ 在 X 中收敛于 x_1，序列 $(x_1^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x_2。

证明：

- (a) $\Rightarrow$ (b)

  如果（a）成立，那么对任意 $\epsilon>0$，存在 $N\ge 1$ 使得

$$d_{X\times Y}(x^{(k)},x)<\epsilon$$

  对任意 $k\ge N$ 均成立。

  我们有

$$d_{X\times Y}(x^{(k)},x)=d_X(x_1^{(k)},x_1)+d_Y(x_2^{(k)},x_2)$$

  于是可得

$$\begin{cases}d_X(x_1^{(k)},x_1)<\epsilon\\ d_Y(x_2^{(k)},x_2)<\epsilon\end{cases}$$

  对任意 k　N 均成立，所以（b）成立。

- (b) $\Rightarrow$ (a)

  如果（b）成立，序列 $(x_1^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ 在 X 中收敛于 x_1，那么，对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N_X\ge 1$ 使得

$$d_X(x_1^{(k)},x_1)<\frac{1}{2}\epsilon$$

对任意 $k \geq N_X$ 均成立。

类似地，存在 $N_Y \geq 1$ 使得

$$d_Y(x_2^{(k)}, x_2) < \frac{1}{2}\epsilon$$

对任意 $k \geq N_Y$ 均成立。

综上，存在 $N = max(N_X, N_Y)$ 使得

$$d_{X\times Y}(x^{(k)}, x) = d_X(x_1^{(k)}, x_1) + d_Y(x_2^{(k)}, x_2) < \epsilon$$

对任意 $k \geq N$ 均成立，所以（a）成立。

（3）与引理 13.2.1 类似的结论。

(Z, d_Z) 也是度量空间，设 $f : Z \to X$ 和 $g : Z \to Y$ 是两个函数，$f \oplus g : Z \to X \times Y$ 是它们的直和。

（a）设 $z_0 \in X$，那么 f 和 g 都在 z_0 处连续，当且仅当 $f \oplus g$ 在 z_0 处是连续的。

（b）f 和 g 都是连续的，当且仅当 $f \oplus g$ 是连续的。

证明：

- （a）
  - $\Rightarrow$

    f, g 都在 z_0 处连续，那么由定理 13.1.4(b) 可知，对任意 $(z^n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Z 中依度量 d_Z 收敛于 z_0，那么序列 $(f(z^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 和 $(g(z^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 分别依度量 d_X, d_Y 收敛于 $f(z_0), g(z_0)$。

    于是存在 N 使得

    $$\begin{cases} d_X(f(z^{(n)}), f(z_0)) < \frac{1}{2}\epsilon \\ d_Y(g(z^{(n)}), g(z_0)) < \frac{1}{2}\epsilon \end{cases}$$

    对所有的 $n \geq N$ 均成立。

    于是我们有

    $$d_{X\times Y}((f(z^{(n)}), g(z^{(n)})), (f(z_0), g(z_0))) = d_X(f(z^{(n)}), f(z_0)) + d_Y(g(z^{(n)}), g(z_0)) < \epsilon$$

    对所有的 $n \geq N$ 均成立。

    综上可得，序列 $(f \oplus g(z^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ 依度量 $d_{X\times Y}$ 收敛于 $f \oplus g(z_0)$，所以 $f \oplus g$ 在 z_0 处是连续的。

  - $\Leftarrow$

    逆命题证明过程类似，略。

- （b）

  可以通过（a）推出（b）。

13.2.9

这里我无法保证解答的正确性，因为书中对 $\lim\lim$ 这种格式未做严格的定义。

> **说明 1.** 这道题应该有错误，$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\sup f(x,y)$ 应该改成 $\lim_{x\to x_0}\lim\sup_{y\to y_0} f(x,y)$。因为前一个公式没见过，而且也是为了能够利用题目中的 $\lim\sup_{x\to x_0} f(x) := \inf_{r>0}\sup_{|x-x_0|<r} f(x)$，（注意，这里表示的是，随着 r 趋近于零时，函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的最大值的极限）不然我证明不出来。

> **说明 2.** 书中 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ 没有具体说明，这里做一个补充：表达式 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ 代表的是对双变量函数 $f(x,y)$ 进行逐次极限的操作。具体来说，这个表达式表示的是：
>
> - 首先，对于固定的 x 值，求当 y 趋近于 y_0 时的极限，即 $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$。这个过程得到的结果是一个关于 x 的函数 $g(x) := \lim_{y\to y_0} f(x,y)$
> - 然后，研究 $g(x)$，看看 $\lim_{x\to x_0} g(x)$ 是否收敛。

（1）

因为 f 在 (x_0,y_0) 处是连续的，那么，对任意 $\epsilon>0$，对存在 $\delta>0$，使得只要 $d_{l^2}((x,y),(x_0,y_0)) = \sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2} < \delta$，就有 $d_{l^2}(f(x,y),f(x_0,y_0)) = |f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \epsilon$。

固定 x 且 $x\in B(x_0,\frac{1}{2}\delta)$，那么 $F(y) := f(x,y)$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数。综上可得，当 $|y-y_0| < \frac{1}{2}\delta$ 时，

$$F(y) < f(x_0,y_0)+\epsilon$$

于是可得

$$\limsup_{y\to y_0} F(y) := \inf_{r>0} \sup_{|y-y_0|<r} F(y) \le f(x_0,y_0)+\epsilon$$

即

$$|\limsup_{y\to y_0} F(y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$$

由定义 9.3.6 可知，$\lim_{x\to x_0}\limsup_{y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$。

其他情况同理。

（2）特别地（没有找到好的表达方式，就当是一个参考吧）

固定 $x = x'$，接下来比较

$$\begin{cases} \limsup\limits_{y\to y_0} f(x',y) \\ \lim\limits_{y\to y_0} f(x',y) \end{cases}$$

任意 $r>0$，$y' \in B(y_0,r)$，

$$\sup_{|y-y_0|<r} f(x',y) \ge f(x',y')$$

于是由引理 6.4.13（比较原理）可得，

$$\limsup_{y\to y_0} f(x',y) \ge \lim_{y\to y_0} f(x',y)$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \le \lim_{x\to x_0}\limsup_{y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

同理可得

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \le \lim_{x\to x_0}\liminf_{y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

综上 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$。

类似地，$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$。

所以，

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

13.2.10

函数 $y \mapsto f(x,y)$ 其中 x 是固定值，对任意 $\epsilon > 0, y_0 \in \mathbb{R}$，因为 f 是一个连续函数，存在 $\delta > 0$ 使得只要 $\sqrt{|x-x|^2 + |y-y_0|^2} = |y-y_0| < \delta$，就有

$$f(x,y) - f(x,y_0) < \epsilon$$

综上可得，对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|y-y_0| < \delta$（与 x 无关），就有

$$f(x,y) - f(x,y_0) < \epsilon$$

所以函数 $y \mapsto f(x,y)$ 在 y_0 处是连续的，由此可以推出其在 $\mathbb{R}$ 上连续。

同理可证 $x \mapsto f(x,y)$ 也是在 $\mathbb{R}$ 上连续的。

13.2.11

（1）固定的 $x \in \mathbb{R}$，函数 $y \mapsto f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}$ 是连续的。固定的 $y \in \mathbb{R}$，函数 $x \mapsto f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}$ 是连续的。

- $x = 0$

  如果 $y = 0$ 此时 $f(x,y) = 0$；

  任意 $y \neq 0$ 都有

  $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

  由此可得当 $x = 0$ 时，$f(x,y)$ 是常数函数，所以，函数 $y \mapsto f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}$ 是连续的。

- $x \neq 0$

  任意 y 都有

  $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

  由于 $x^2 + y^2 > 0$，且分子分母都是连续函数，利用推论 13.2.3(b) 可知，函数 $y \mapsto f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}$ 是连续的。

同理可证，固定的 $y \in \mathbb{R}$，函数 $x \mapsto f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}$ 是连续的。

（2）函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上不连续。

举一个反例。对任意 $\delta > 0, x = y \neq 0$ 使得

$$d_{l^2}((x,y),(0,0)) < \delta$$

此时

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

可见，满足连续定义的 $\delta > 0$ 不存在，所以 f 在 $(0,0)$ 处不连续，那么，f 在 $\mathbb{R}^2$ 上不连续。