5.4 习题

2024 年 5 月 25 日

5.4.1

1. 实数的三歧性

证明：

按照以前的思路，先证明（a）（b）（c）至少有一个为真，其次证明（a）（b）（c）最多有一个为真。

按照实数的构造方式，对任意实数 x，该实数 x 要么是零，要么不是零，不可能同时成立。

这是因为任意实数都是通过柯西序列构造的，两个柯西序列要么等价的，要么不是，我们固定一个序列是 $(0)_{n=1}^{\infty}$，那么其他的柯西序列要么与其等价，即也等于实数 0，要么不等价，即不等于实数 0。

如果 $x \neq 0$ 那么由引理 5.3.14 可知 x 一定存在某个远离 0 的柯西序列，由此可知 x 可能是正的或负的，也可能都是；

至此（a）（b）（c）至少有一个为真成立。

现在证明（a）（b）（c）最多有一个为真。

（a）（b）（c）分别对应：

$$x = LIM_{n\to\infty}0 \tag{1}$$

$$x = LIM_{n\to\infty}a_n \qquad \text{正远离 } 0 \tag{2}$$

$$x = LIM_{n\to\infty}b_n \qquad \text{负远离 } 0 \tag{3}$$

如果（a）（b）同时成立，此时，存在 $c > 0$ 使得 $a_n \geq c$，那么对任意 $n \geq 1$ 均有

$$|a_n - 0| = |a_n| > c$$

所以两个系列不能对任意 $c > \epsilon > 0$ 都是最终 $\epsilon-$ 接近的，所以（a）（b）不能同时成立。

同理（a）（c）不能同时成立。

如果（b）（c）同时成立，此时，此时，存在 $c_0 > 0$ 使得 $a_n \geq c_0$，存在 $c_1 \geq 0$ 使得 $b_n \leq -c_1$，那么对任意 $n \geq 1$ 均有

$$\begin{aligned}
|a_n| - |b_n| &\leq |a_n - b_n| \\
|a_n| &\leq |a_n - b_n| + |b_n| \\
c_0 &\leq |a_n - b_n| + |b_n| \\
c_0 - |a_n - b_n| &\leq |b_n| \\
c_0 - |a_n - b_n| &\leq -c_1 \\
c_0 + c_1 &\leq |a_n - b_n|
\end{aligned}$$

所以两个系列不能对任意 $c_0 + c_1 > \epsilon > 0$ 都是最终 $\epsilon-$ 接近的，所以（b）（c）不能同时成立。

至此（a）（b）（c）最多有一个为真。

2. 实数 x 是负的，当且仅当 $-x$ 是正的。

证明：