5.4 习题

2024 年 5 月 29 日

5.4.1

1. 实数的三歧性

证明：

按照以前的思路，先证明（a）（b）（c）至少有一个为真，其次证明（a）（b）（c）最多有一个为真。

按照实数的构造方式，对任意实数 x，该实数 x 要么是零，要么不是零，不可能同时成立。

这是因为任意实数都是通过柯西序列构造的，两个柯西序列要么等价的，要么不是，我们固定一个序列是 $(0)_{n=1}^{\infty}$，那么其他的柯西序列要么与其等价，即也等于实数 0，要么不等价，即不等于实数 0。

如果 $x \neq 0$ 那么由引理 5.3.14 可知 x 一定存在某个远离 0 的柯西序列，由此可知 x 可能是正的或负的，也可能都是；

至此（a）（b）（c）至少有一个为真成立。

现在证明（a）（b）（c）最多有一个为真。

（a）（b）（c）分别对应：

$$x = LIM_{n\to\infty} 0 \tag{1}$$

$$x = LIM_{n\to\infty} a_n \qquad \text{正远离 } 0 \tag{2}$$

$$x = LIM_{n\to\infty} b_n \qquad \text{负远离 } 0 \tag{3}$$

如果（a）（b）同时成立，此时，存在 $c > 0$ 使得 $a_n \geq c$，那么对任意 $n \geq 1$ 均有

$$|a_n - 0| = |a_n| > c$$

所以两个系列不能对任意 $c > \epsilon > 0$ 都是最终 $\epsilon-$ 接近的，所以（a）（b）不能同时成立。

同理（a）（c）不能同时成立。

如果（b）（c）同时成立，此时，此时，存在 $c_0 > 0$ 使得 $a_n \geq c_0$，存在 $c_1 \geq 0$ 使得 $b_n \leq -c_1$，那么对任意 $n \geq 1$ 均有

$$\begin{aligned}
|a_n| - |b_n| &\leq |a_n - b_n| \\
|a_n| &\leq |a_n - b_n| + |b_n| \\
c_0 &\leq |a_n - b_n| + |b_n| \\
c_0 - |a_n - b_n| &\leq |b_n| \\
c_0 - |a_n - b_n| &\leq -c_1 \\
c_0 + c_1 &\leq |a_n - b_n|
\end{aligned}$$

所以两个系列不能对任意 $c_0+c_1 > \epsilon > 0$ 都是最终 $\epsilon-$ 接近的，所以（b）（c）不能同时成立。

至此（a）（b）（c）最多有一个为真。

2. 实数 x 是负的，当且仅当 $-x$ 是正的。

证明：

x 是负的，所以它可以写成某个负远离 0 的序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 的形式极限 $x = LIM_{n\to\infty}a_n$。由实数的负运算可知 $-LIM_{n\to\infty}a_n = LIM_{n\to\infty} - a_n$，由序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是负远离 0 可知，存在有理数 $c > 0$ 使得 $a_n \leq -c$ 对所有的 $n \geq 1$ 均成立，所以

$$\begin{aligned}
a_n &\leq -c \\
-a_n &\geq c \qquad \text{习题 4.2.6}
\end{aligned}$$

于是序列 $-(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是正远离 0 的，所以其形式极限 $-x$ 是正的。

3. 如果 x 和 y 都是正的，那么 $x+y$ 和 xy 都是正的。

证明：

不妨设 $x = LIM_{n\to\infty}a_n, y = LIM_{n\to\infty}b_n$。

因为 x, y 是正的，所以它们都是正远离 0 的，于是存在有理数 $c_0, c_1 > 0$

使得对任意 $n \geq 1$ 都有

$$|a_n| \geq c_0 \tag{4}$$
$$|b_n| \geq c_1 \tag{5}$$

又

$$\begin{aligned} x+y &= LIM_{n\to\infty} a_n + LIM_{n\to\infty} b_n \\ &= LIM_{n\to\infty} a_n + b_n \end{aligned}$$

因为

$$|a_n + b_n| = |a_n| + |b_n| \geq c_0 + c_1 > 0$$

所以 $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ 序列正远离 0，所以其极限形式 $x+y = LIM_{n\to\infty} a_n + b_n$ 是正的。

又

$$xy = LIM_{n\to\infty} a_n b_n$$

因为

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \geq c_0 c_1 > 0$$

所以 $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ 序列正远离 0，所以其极限形式 $xy = LIM_{n\to\infty} a_n b_n$ 是正的。

5.4.2

证明：

元证明：命题 4.2.4 所有的代数定律不仅对实数也是成立的，且实数的三歧性和序的定义都是与有理数一致，于是有理数通过以上性质得到的命题 4.2.9 对于实数也应该是成立的。

说明. 元证明，就是对证明本身的说明。逻辑学中有元对象与目标对象的概念，目标对象是直接讨论的对象，元对象是对目标对象进行讨论或分析的更高层次的对象。这里的元证明与元对象类似，目标对象是直

接讨论的对象即：实数。

5.4.3

证明：

通过实数的三歧性讨论。

（1）$x = 0$ 时，此时取 $N = 0$ 就可以满足命题。

（2）x 是正的。

这里通过反证法证明。假设命题不成立，即不存在自然数 N 使得 $N \leq x < N + 1$，也就是说，对任意自然数 n 都有 $x < n$ 或 $x \geq n + 1$。

接下来我们要通过上面假设的命题，推出一个与命题 5.4.12 矛盾的结果。

通过“对任意自然数 n 都有 $x < n$ 或 $x \geq n + 1$”，可以推出“不存在自然数大于 x”。

通过归纳法证明：“不存在自然数大于 x”

当 $N = 0$，因为 x 是正实数，所以 $x > 0$, 由“对任意自然数 n 都有 $x < n$ 或 $x \geq n + 1$”可知，$x < 0$ 此时不成立，因为与 $x > 0$ 矛盾，所以 $x \geq 1$；

归纳假设 $N = n$ 时，$x \geq n + 1$；

$N = n+1$ 时，$x \geq n+1$ 与 $x < n+1$ 不能同时成立，所以 $x \geq (n+1)+1$；

综上，对任意自然数 N，都有 $x \geq N + 1$，即：不存在自然数大于 x

与命题 5.4.12 矛盾，所以命题得证。

（3）x 是负的。

$-x$ 是正的，所以存在自然数 N 使得 $N \leq -x < N + 1$，所以，

$$-(N + 1) < x \leq -N$$

若 $x \neq -N$，则 $-(N + 1) \leq x < -N$；若 $x = -N$，则 $-N \leq x < -N + 1$；

所以负实数也满足命题。

现在证明 N 的唯一性。

假设存在 $N_1, N_2, N_1 \neq N_2$ 都满足命题，即：

$$N_1 \leq x < N_1 + 1$$
$$N_2 \leq x < N_2 + 1$$

如果 $N_1 < N_2$，那么 $N_1 + 1 \leq N_2$，那么，

$$N_1 \leq x < N_1 + 1 \leq N_2 \leq x < N_2 + 1$$

可得，$x < x$，存在矛盾。

同理 $N_1 > N_2$ 也存在矛盾。

所以 N 是唯一的。

综上，命题成立。

5.4.4

证明：

由命题 5.4.8 可知，x 是正实数，那么 x^{-1} 也是正的。由习题 5.4.3 可知，存在自然数 N 使得 $N \leq x^{-1} < N + 1$，所以，

$$x > 1/(N + 1) > 0$$

N 是自然数，那么 $N + 1$ 是正整数，命题得证。

5.4.5

证明：

由习题 5.4.3 可知，存在整数 N_1, N_2 使得，

$$N_1 \leq x < N_1 + 1$$
$$N_2 \leq y < N_2 + 1$$

因为 $x < y$，则 $y - x > 0$。

如果 $y - x > 1$，此时，$x + 1 < y$，同时由 $N_1 \leq x < N_1 + 1$ 可得，

$$N_1 + 1 \leq x + 1 < y$$
$$N_1 + 1 < y$$

此时，$q = N_1$。

如果 $1 \geq y - x > 0$，由推论 5.4.13 可知，存在 M 使得 $M(y - x) > 1$，那么，$My - Mx > 1$。由之前的论证可知，此时存在整数 N 使得 $Mx < N < My$，那么 $x < N/M < y$。

综上，命题得证。

5.4.6

证明：

充分性

$|x-y|<\epsilon$ 可以推出 $y-\epsilon<x<y+\epsilon$

反证法，假设 $x\le y-\epsilon$ 或 $x>y+\epsilon$，若

$$\begin{aligned} x &\le y-\epsilon \\ x-y &\le -\epsilon \\ |x-y| &\ge \epsilon \end{aligned}$$

与 $|x-y|<\epsilon$ 矛盾

若

$$\begin{aligned} x &> y+\epsilon \\ x-y &> \epsilon \\ |x-y| &> \epsilon \end{aligned}$$

与 $|x-y|<\epsilon$ 矛盾

综上，充分性得到证明。

必要性

$$\begin{aligned} y-\epsilon<x &&< y+\epsilon \\ -\epsilon<x-y &&< y+\epsilon \\ |x-y|<\epsilon && \text{分正负讨论即可，利用了命题 4.2.9，习题 4.2.6} \end{aligned}$$

必要性得到证明。

$|x-y|\le\epsilon$ 当且仅当 $y-\epsilon\le x\le y+\epsilon$ 的证明同理。

5.4.7

【解题不对，大家不要看了】

证明：

（1）$x \le y + \epsilon$ 对所有的实数 $\epsilon > 0$ 均成立 $\Rightarrow x \le y$。

反证法。假设 $x > y$，此时取 $\epsilon = (x-y)/2 > 0$，

$$\begin{aligned} x &\le y + \epsilon \\ x &\le y + (x-y)/2 \\ x &\le x/2 + y/2 \\ x/2 &\le y/2 \\ x &\le y \end{aligned}$$

此时 $x \le y$ 与 $x > y$ 矛盾，所以假设不成立，由实数序的三歧性可知，$x < y$ 或 $x = y$，即:$x \le y$。

(2)$x \le y \Rightarrow x \le y + \epsilon$ 对所有的实数 $\epsilon > 0$ 均成立。

由 $x \le y$ 可知 $y - x \ge 0$，那么对任意 $\epsilon > 0$，有

$$\begin{aligned} y - x &\ge 0 \\ y - x + \epsilon &\ge \epsilon > 0 \\ y + \epsilon &> x \end{aligned}$$

其实按照定义 5.4.6，$y + \epsilon > x$ 表达为 $y + \epsilon \ge 0$ 也是可以的，但 $=$ 的情况好像取不到，【这也是我让大家不要看这个解答的原因】。

5.4.8

假设 $LIM_{n\to\infty}a_n > x$，由命题 5.4.14 可知，存在有理数 q 使得 $x < q < LIM_{n\to\infty}a_n$，把 q 看做 $LIM_{n\to\infty}q$，由 $a_n \le x, x < q$ 可知，

$$q > a_n$$

由此可知 $q \ge LIM_{n\to\infty}a_n$，与 $q < LIM_{n\to\infty}a_n$ 存在矛盾。

同理可证另一个命题。