8.1 习题

2024 年 10 月 18 日

8.1.1

★ $\Leftarrow$

由命题 3.6.14（c）知 X 不能为有限集，所以 X 是无限集（因为集合要么是无限的，要么是有限的）。

★ $\Rightarrow$

方法 1

在无限集 X 中，一定能取出一列互不相同的元素 $a_1, a_2, ...$。事实上, 在 X 中任取一个元素, 记为 a_1，因为 X 是无限集, 集合 $X - \{a_1\}$ 显然不空, 这时再从集合 $X - \{a_1\}$ 取一个元素 a_2, 同样,$X - \{a_1, a_2\}$ 不会是空集，可以不停地做下去, 将从 X 中取出一列互不相同的元素 $a_1, a_2, ...$, 记余集为 $\hat{X} := X - \{a_1, a_2, ...\}$。在 X 中取出一个真子集

$$Y =: \hat{X} \cup \{a_2, a_3, ...\}$$

定义函数 $f : X \to Y$ 如下：

$$f(a_i) = a_{i+1}, a_i \in \{a_1, a_2, ...\}$$
$$f(x) = x, x \in \hat{X}$$

显然 f 是双射，所以 X, Y 有相同的基数。

注意 方法 1 是非严格的证明，文中的“不停地”不够准确，引理 8.5.14 中有说明

方法 2

todo

8.1.2

（1）如果 X 是有限集合，则由自然数的三歧性，经过有限次比较，就可以得到最小元素存在。

（2）X 是无限集

★ 最大下界方式

因为 X 是自然数集的非空子集，那么对任意 $x \in X, x \geq 0$，即：集合 X 有下界，由定理 5.5.9 可知集合 X 有最大下界，不妨设为 m。

现在需要证明 $m \in X$。

反证法，假设 $m \notin X$。

由假设可知任意 $x \in X, x > m$。因为 $m \geq \lfloor m \rfloor$（注 4.4.2 中 $\lfloor m \rfloor$ 表示 m 的整数部分），于是 $x > \lfloor m \rfloor$，由命题 2.2.12（e）可知 $x \geq \lfloor m \rfloor + 1$，那么，$\lfloor m \rfloor + 1$ 也是 X 的下界，而 $\lfloor m \rfloor + 1 > m$，这与 m 是 X 的最大下界矛盾。

★ 无穷递降原理方式

假设 X 没有最小元素，即：任意 $x \in X$，存在 $x' \in X, x' < x$。

现在构造出序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$。因为 X 是非空的，所以存在 $x_0 \in X$，定义 $a(0) := x_0$，递归定义 $a(n+1) := x_{n+1}(x_{n+1} < a(n))$，由之前的说明可知 x_{n+1} 是存在的。

显然这个序列与无穷递降原理矛盾。

★自然数替换成整数

“最大下界方式”的证明方式，显然对整数也是合适，所以替换成整数，良序定理对整数是成立。

★自然数替换成有理数

8.1.3

★因为 X 是无限集，所以集合 $\{x \in X : \text{对所有的 } m < n \text{ 均有 } x \neq a_m\}$ 也是无限集

设 $A =: \{x \in X : \text{对所有的 } m < n \text{ 均有 } x \neq a_m\}$，设 $B =: \{a_m : i < n\}$。

反证法，假设 A 不是无限集。又 B 是有限集，那么，由命题 3.6.14（b）可知，X 是有限集，这与 X 是无限集矛盾。

★$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个递增序列

反证法，假设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 不是递增序列。

由假设可知，存在 $k, a_k \geq a_{k+1}$。

由序列的定义可知 $a_{k+1} := min\{x \in X : \text{对所有的 } m < k+1 \text{ 均有 } x \neq a_m\}$，因为 $k < k+1$，所以 $a_k = a_{k+1}$ 是不存在的。

另外，$a_k > a_{k+1}$ 也是不可能的，因为 a_k 比 a_{k+1} 先定义，由 min 函数的定义可知，先取出的 a_k 肯定小于 a_{k+1}。

于是，与假设相悖。

★对所有的$n \neq m$均有$a_n \neq a_m$

由 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 严格递增保证。

★$a_n \in X$。

由 a_n 的定义方式保证。

★表明

由 n 的任意性保证的，因为如果存在 m 使得 $a_m = x$，则前提不成立了。

★$a_n \geq n$。

对 n 进行归纳。

归纳基始，$n = 0$，由于 a_n 是自然数，所以 $a_n \geq 0$。

归纳假设，$n = k$，$a_k \geq k$。

当 $n = k+1$ 时，因为 a_n 是一个递增序列，所以 $a_{k+1} > a_k$，即 $a_{k+1} > k$，由命题 2.2.12（e）可知 $a_{k+1} \geq k+1$。

归纳完成。

★必然有?

良序定理保证最小值的唯一性。

8.1.4

有一点需要注意，值域 $f(N)$ 可能不是 Y，但在以下的证明中，可以把 Y 视为值域 $f(N)$。

★ Y 是有限集时，命题显然成立。

★ Y 是无限集时。

通过提示可知，f 是从 A 到 $f(A)$ 的双射是显然的。

下面我们需要证明的是 $f(A)$ 与 Y 是相等的集合，那个 Y 就是可数的了。

由 $f(A)$ 的定义方式可知，$f(A)$ 中的元素，一定属于 Y。

对任意 $y \in Y$，存在自然数集合 B，任意 $b \in B$ 使得 $f(b) = y$，取 B 中的最小值 n，现在需要证明 $n \in A$。

对 n 进行强归纳。

归纳基始，$n = 0$，因为不存在自然数 $m < 0$，所以 $0 \in A$。

归纳假设，$n \leq k$ 时，$n \in A$。

$n = k + 1$ 时，反证法，假设 $k + 1 \neq A$，那么，存在 $m < k + 1$ 使得 $f(m) = f(k + 1)$，此时，$m \in B$，且 $m < k + 1$，与 n 是 B 中的最小值矛盾，于是 $k + 1 \in A$。

归纳完成。

所以，$n \in A$，即：$y \in f(A)$。

8.1.5

因为 X 是可数集，那么存在一个双射 $g : \mathbb{N} \to X$。

所以，由定义 3.3.10（复合）可以构造出函数 $f \circ g : \mathbb{N} \to Y$，由命题 8.1.8 可知 $f \circ g(\mathbb{N})$ 是至多可数的。

又因为 $f(X)$ 与 $f \circ g(\mathbb{N})$ 是相等的集合（证明略），于是 $f(X)$ 是至多可数的。

8.1.6

★ $\Rightarrow$

A 是至多可数的，如果 A 是有限集，则结论是显然的。

如果 A 是可数集，那么存在一个双射 $g : A \to \mathbb{N}$，令 $f = g$。

★ $\Leftarrow$

（1）如果 $f(A)$ 是有限集，则结论是显然的。

（2）如果 $f(A)$ 是无限集，则需要进一步证明。

因为 f 是单射，那么存在 $f(A) \subseteq \mathbb{N}$。

因为 A 不能是空集，存在元素 $a_0 \in A$。

现在定义函数 $h : \mathbb{N} \to A$ 为

$$\begin{aligned} h(n) &:= f^{-1}(n) & \{n \in \mathbb{N} : n \in f(A)\} \\ h(n) &:= a_0 & \{n \in \mathbb{N} : n \notin f(A)\} \end{aligned}$$

由命题 8.1.8 可知，A 是至多可数的的。

8.1.7

$h(\mathbb{N}) = X \cup Y$ 是显然的（证明略），由命题 8.1.8 可知 $X \cup Y$ 是至多可数的。

假设 $X \cup Y$ 是有限集，那么由命题 3.6.14（c）可知 X 是有限的，这与题设矛盾。

8.1.8

由推论 8.1.9 可知，只要找到一个函数 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$，那么，$f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ 是至多可数的。然后只需说明 $X \times Y = f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$。那么，$X \times Y$ 也是至多可数的。

因为 X 是可数集，所以存在一个双射函数 $g : \mathbb{N} \to X$；

同理，存在一个双射函数 $h : \mathbb{N} \to Y$；

现在定义函数 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ 为

$$f(n, m) := (g(n), h(m))$$

接下来，要证明 $X \times Y = f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$。

反证法，假设 $X \times Y \neq f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$，那么，至少存在一个元素 $(x, y) \in X \times Y$ 且 $(x, y) \notin f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$。因为 $x \in X, y \in Y$，所以存在 (n, m) 使得 $x = g(n), y = h(m)$，又因为 $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，而 $(g(n), h(m)) \in f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$，即：$(x, y) \in f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$，与假设矛盾。

8.1.9

todo

8.1.10

没找到!