8.2 习题

张志聪

2024 年 11 月 13 日

8.2.1

令

$$S=\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X,A\text{是有限集}\right\}$$

- $\Rightarrow$ 如果 X 是有限集，这是命题是显然的；

  如果 X 是可数集。因为 X 是可数集，那么存在双射函数 $g:\mathbb{N}\to X$，又因为级数 $\sum\limits_{x\in X}f(x)$ 绝对收敛，那么

  $$\sum_{x\in X}|f(x)|=\sum_{n=0}^{\infty}|f(g(n))|$$

  任意元素 $e\in S,e=\sum\limits_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X$，所以有一个有限集 $N'\subseteq\mathbb{N},A=g(N')$，因为 N' 是有限集，所有存在自然数 k，使得 $max(N')\leq k$，于是，

  $$e=\sum_{x\in A}|f(x)|=\sum_{n\in N'}|f(g(n))|\leq\sum_{n=0}^{k}|f(g(n))|\leq\sum_{n=0}^{\infty}|f(g(n))|$$

  所以，e 是有限的，由 e 的任意性可知，集合 S 有上界，所以，

  $$\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X,A\text{是有限集}\right\}<\infty$$

- $\Leftarrow$ 反证法，假设级数 $\sum\limits_{x\in X}f(x)$ 绝对发散。

因为

$$\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)| : A\subseteq X, A\text{是有限集}\right\} < \infty$$

设 $\sup S \le M$。因为 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 绝对发散，所以存在自然数 N 使得

$$\sum_{n=0}^{N}|f(g(n))| > M$$

令 $A = g(n\in\mathbb{N} : 0\le n\le N)$，因为 A 是有限集，且 $A\in S$，所以

$$\sum_{x\in A}|f(x)| = \sum_{n=0}^{N}|f(g(n))| \le M$$

存在矛盾。

8.2.2

这道题没有证明的必要了，提示就是一个简要的证明了。

8.2.3

说明 1. 当 X 是不可数集时，由于 $\sum\limits_{x\in X} f(x) := \sum\limits_{x\in X:f(x)\neq 0} f(x)$，所以，由引理 *8.2.5* 可知，$\{x\in X : f(x)\neq 0\}$ 是至多可数的，于是证明时只需说明至多可数的情况即可。

只讨论 X 可数集，X 是有限集，命题 *7.2.14* 已经覆盖。

因为 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$，$\sum\limits_{x\in X} g(x)$ 绝对收敛，所以存在某个双射 $h:\mathbb{N}\to X$，使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(h(n))$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g(h(n))$ 是绝对收敛点的，且

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(h(n))$$

$$\sum_{x\in X} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(h(n))$$

- （a）由定义 8.2.1 可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(f(h(n))+g(h(n))\big)$ 绝对收敛，可以说明 $\sum\limits_{x\in X}\big(f(x)+g(x)\big)$ 是绝对收敛的。

  因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(h(n))$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g(h(n))$ 绝对收敛，由命题 7.2.14（a）可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f(h(n))|+|g(h(n))|$ 收敛，设其收敛与 M，又因为

  $$|f(n)+g(n)|\le|f(n)|+|g(n)|$$

  于是由命题 7.3.1 可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f(h(n))+g(h(n))|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{x\in X}\big(f(x)+g(x)\big)$ 是绝对收敛的。

  $$\sum_{x\in X}\big(f(x)+g(x)\big)=\sum_{x\in X}f(x)+\sum_{x\in X}g(x)$$

  该公式的所有项都是绝对收敛的，也就是说其也是条件条件收敛的，由命题 7.2.14（a）保证了该公式的正确性。

- （b）$\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 绝对收敛，可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(h(n))$ 绝对收敛于某个实数 M。$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |cf(h(n))|$ 的部分和 $S_{Nc}\le|c|M$，命题 7.3.1 保证了该级数收敛。

  $$\sum_{x\in X}cf(x)=c\sum_{x\in X}f(x)$$

  由命题 7.2.14（b）可知保证。

- （c）$\Rightarrow$：X_1,X_2 一定有一个是可数集，不妨设 X_1 是可数集。反证法，假设 $\sum\limits_{x\in X_1} f(x)$ 绝对发散，不妨设 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 绝对收敛于 M。因为 X_1 是可数集，所以存在某个双射 $h_1:\mathbb{N}\to X_1$，由于 $\sum\limits_{x\in X_1} f(x)$ 绝对发散，所以存在一个整数 N 使得

  $$\sum_{n=0}^{N}|f(h_1(n))|>M$$

因为 X_1 是 X 的子集，所以有限集 $Y := \{x \in X_1, f(x) \leq N\}$ 也是 X 的子集，取 $m = max(h^{-1}(Y))$，此时，

$$\sum_{n=0}^{m} |f(h(n))| > M$$

存在矛盾。

至于等式，证明起来，不是那么简单，因为这里的集合是不一致的，接下来的证明注意对集合的处理。

∘ 如果 X_2 也是可数集，那么存在双射 $h_1 : \mathbb{N} \to X_1$，$h_2 : \mathbb{N} \to X_2$，定义 $h : \mathbb{N} \to X$ 如下：

$$\begin{cases} h(2n) = h_1(n) \\ h(2n+1) = h_2(n) \end{cases} \tag{1}$$

以上定义的 h 都是双射。因为

$$\begin{aligned} &\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \big(f(h_1(n)) + f(h_2(n))\big) \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} f(h(n)) \end{aligned}$$

于是，

$$\sum_{x \in X_1} f(x) + \sum_{x \in X_2} f(x) = \sum_{x \in X} f(x)$$

∘ 如果 X_2 是有限集，设基数是 m，定义 $Y := \{i \in \mathbb{N} : i < m\}$，存在双射 $h_1 : \mathbb{N} \setminus Y \to X_1$

说明 2. 因为 X_1 是可数集，则存在双射 $h_1 : \mathbb{N} \to X_1$，又因为

$\sum_{x\in X_1} f(x)$ 是绝对收敛的，所以

$$\begin{aligned}&\sum_{x\in X_1} f(x)\\&=\sum_{n=0}^{\infty} f(h_1(n))\\&=\sum_{n=m}^{\infty} f(h_1(n-m))\end{aligned}$$

第二个等式的成立可以通过部分和序列的相等证明，思路如下：设 $\sum_{n=0}^{\infty} f(h_1(n))$、$\sum_{n=m}^{\infty} f(h_1(n-m))$ 的部分和分别为 S_N, S'_N。由 $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ 序列的收敛性，并由命题 *7.2.5* 可知，对任意 $\epsilon > 0$，存在一个整数 $K, n \geq K+m$，使得

$$\begin{aligned}&|S_n - S'_n|\\&=|\sum_{n=p}^{p+m} f(h_1(n))| \leq \epsilon \qquad\qquad p \text{ 大于等于 } K\end{aligned}$$

这里的 $n \geq K+m$ 的原因是，$S_0 = S'_m$，所以 S_n 比 S'_n 多 m 个项，所以这 m 个项必须都是大于 K 的项，相加才会小于等于 ϵ，所有两者的部分和是最终 $-\epsilon$ 相等的，所以收敛于同一个值。

$h_2 : Y \to X_2$，定义 $h : \mathbb{N} \to X$ 如下：

$$\begin{cases} h(n) = h_1(n-m) \text{ if } n \geq m \\ h(n) = h_2(n) \text{ if } n < m \end{cases} \tag{2}$$

以上定义的 h 都是双射。因为

$$\begin{aligned}&= \sum_{n=0}^{m-1} f(h_2(n)) + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=m}^{N} f(h_1(n))\\&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f(h(n))\end{aligned}$$

于是，

$$\sum_{x\in X_1} f(x) + \sum_{x\in X_2} f(x) = \sum_{x\in X} f(x)$$