11.5 习题

张志聪

2024 年 12 月 25 日

11.5.1

因为 $f : I \to \mathbb{R}$ 既是分段连续的，由定义 11.5.4 可知，存在一个 I 的划分 P，使得对所有的 $J \in P$，$f|_J$ 都是 J 上的连续函数。又因为 f 在 I 上是有界的，由命题 11.5.3 可知，任意 $J \in P$，$f|_J$ 在 J 上是黎曼可积的。

设 P 的基数为 n，对任意 $\epsilon/n > 0$，对每一个 $J \in P$，我们能找到一个分段常数函数 $h_J : J \to \mathbb{R}$ 在 J 上从上方控制 f，并且有

$$\int_J h_J \leq \int_J f + \epsilon/n.$$

定义函数 $h : I \to \mathbb{R}$，对 $x \in J, J \in P$ 为 $h(x) = h_J(x)$。于是 h 在 I 上从上方控制 f 的分段常数函数。

从而

$$\overline{\int}_I f \leq \int_I h$$

由习题 11.4.3 可知（分段常值积分是特例）

$$\int_I h = \sum_{J \in P} \int_J h_J$$

于是

$$\begin{aligned}
\overline{\int}_I f &\leq \int_I h \\
&= \sum_{J \in P} \int_J h_J \\
&\leq \sum_{J \in P} \int_J f + \epsilon
\end{aligned}$$

同理可得

$$\underline{\int}_I f \geq \sum_{J\in P}\int_J f - \epsilon.$$

于是可得

$$0 \leq \overline{\int}_I - \underline{\int}_I \leq 2\epsilon.$$

但 ϵ 是任意的，所以 f 是黎曼可积的。