16.2 习题

张志聪

2025 年 4 月 27 日

16.2.1

设 $f(x) = f_1(x)+if_2(x), g(x) = g_1(x)+ig_2(x), h(x) = h_1(x)+ih_2(x), c = c_1 + ic_2$。

- (a)

$$\begin{aligned}
\langle g, f\rangle &= \int_{[0,1]} g(x)\overline{f(x)}dx \\
&= \int_{[0,1]} \left(g_1(x) + ig_2(x)\right)\left(f_1(x) - if_2(x)\right)dx \\
&= \int_{[0,1]} g_1(x)f_1(x) + g_2(x)f_2(x) + i(-g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x))dx \\
&= \int_{[0,1]} g_1(x)f_1(x) + g_2(x)f_2(x)dx + i\int_{[0,1]} g_2(x)f_1(x) - g_1(x)f_2(x)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_{[0,1]} f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_{[0,1]} (f_1(x) + if_2(x))(g_1(x) - ig_2(x))dx \\
&= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + i(-f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x))dx \\
&= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)dx + i\int_{[0,1]} -f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x)dx
\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}\overline{\langle f,g\rangle} &= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)dx - i\int_{[0,1]} -f_1(x)g_2(x)+f_2(x)g_1(x)dx \\ &= \int_{[0,1]} f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)dx + i\int_{[0,1]} f_1(x)g_2(x)-f_2(x)g_1(x)dx\end{aligned}$$

所以，

$$\langle g,f\rangle = \overline{\langle f,g\rangle}$$

- (b)
  - (1) $\langle f,f\rangle \geq 0$。

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle &= \int_{[0,1]} f(x)\overline{f(x)}dx \\ &= \int_{[0,1]} (f_1(x)+if_2(x))(f_1(x)-if_2(x)) \\ &= \int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x)+f_2(x)f_2(x)+i(-f_1(x)f_2(x)+f_2(x)f_1(x))dx \\ &= \int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x)+f_2(x)f_2(x)dx\end{aligned}$$

因为

$$f_1(x)f_1(x)+f_2(x)f_2(x)\geq 0$$

由定理 11.4.1(e) 可知，

$$\int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x)+f_2(x)f_2(x)dx \geq \int_{[0,1]} 0dx = 0$$

即

$$\langle f,f\rangle \geq 0$$

  - $\langle f,f\rangle = 0$ 当且仅当 $f=0$。
    $\Leftarrow$ 是易证的，略。

$\Rightarrow$

反证法，假设 f 不是零函数，那么存在某个 $x_0 \in [0,1], f(x_0) \neq 0$，又因为 f 是连续的，那么，对 $\epsilon = \frac{1}{2}|f(x_0)|$，存在 $\delta > 0$，使得只要，$|x - x_0| < \delta$，就有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$
$$|f(x_0)| - \epsilon \leq |f(x)| \leq |f(x_0)| + \epsilon$$

（以上是复数的性质,与实数是一致的,具体证明在 15-6-comment.tex 文件中）所以，

$$\int_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} |f(x)|^2 dx > 0$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}
\langle f, f \rangle &= \int_{[0,1]} f_1(x)f_1(x) + f_2(x)f_2(x)dx \\
&= \int_{[0,1]} |f(x)|^2 dx \\
&= \int_{[0,x_0-\delta]} |f(x)|^2 dx + \int_{(x_0-\delta,x_0+\delta)} |f(x)|^2 dx + \int_{[x_0+\delta,1]} |f(x)|^2 dx \\
&> 0
\end{aligned}$$

存在矛盾。

- (c)

  证明略

- (d)

  证明略

16.2.2

证明 $(C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C}), d_{L^2})$ 是一个度量空间，按照定义 12.1.2，我们需要证明满足下面四个公理：

- (a) 对任意的 $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，我们有 $d_{L^2}(f,f) = 0$。

$$\begin{aligned} d_{L^2}(f,f) &= \|f-f\|_2 \\ &= \left(\int_{[0,1]} |f(x)-f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{[0,1]} 0 dx\right)^{1/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (b)（正性）对任意两个不同的 $f,g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，我们有 $d_{L^2}(f,g) > 0$。

$$\begin{aligned} d_{L^2}(f,g) &= \|f-g\|_2 \\ &= \left(\int_{[0,1]} |f(x)-g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{[0,1]} (f(x)-g(x))\overline{f(x)-g(x)} dx\right)^{1/2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

  最后一个不等式，使用了引理 16.2.5(b)。

- (c)（对称性）对任意的 $f,g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，我们有 $d_{L^2}(f,g) = d_{L^2}(g,f)$。

$$\begin{aligned} d_{L^2}(f,g) &= \|f-g\|_2 \\ &= \left(\int_{[0,1]} |f(x)-g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{L^2}(g,f) &= \|g-f\|_2 \\ &= \left(\int_{[0,1]} |g(x)-f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \end{aligned}$$

由于，对任意 $x \in [0,1]$，都有

$$\begin{aligned}|f(x)-g(x)| &= |(-1)(g(x)-f(x))| \\ &= |-1||g(x)-f(x)| \\ &= |g(x)-f(x)|\end{aligned}$$

所以，

$$\left(\int_{[0,1]} |f(x)-g(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_{[0,1]} |g(x)-f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

综上，$d_{L^2}(f,g) = d_{L^2}(g,f)$。

- (d) （三角不等式）对任意的 $f,g,h \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，我们有 $d_{L^2}(f,h) \leq d_{L^2}(f,g) + d_{L^2}(g,h)$。

  这里有个开方，不好处理，需要使用一个小命题：

  说明 1. 命题：实数 $a,b,c \geq 0$，如果 $a^2+b^2 \geq c^2$，那么 $a+b \geq c$。

  证明：

  反证法，假设 $a+b<c$，那么

  $$\begin{aligned}(a+b)^2 &< c^2 \\ a^2+b^2+2ab &< c^2\end{aligned}$$

  因为，$2ab \geq 0$，所以，

  $$a^2+b^2+2ab \geq a^2+b^2$$

  $a^2+b^2+2ab<c^2$ 与 $a^2+b^2 \geq c^2$ 矛盾。

  $$\begin{aligned}(d_{L^2}(f,g))^2+(d_{L^2}(g,h))^2 &= \int_{[0,1]} |f(x)-g(x)|^2 dx + \int_{[0,1]} |g(x)-h(x)|^2 dx \\ &= \int_{[0,1]} |f(x)-g(x)|^2 + |g(x)-h(x)|^2 dx\end{aligned}$$

  又因为

  $$(d_{L^2}(f,h))^2 = \int_{[0,1]} |f(x)-h(x)|^2 dx$$

由引理 15.6.11 的三角不等式可知，对任意 $x \in [0,1]$，

$$\begin{aligned}|f(x)-h(x)| &= |f(x)-g(x)+g(x)-h(x)| \\ &\leq |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|\end{aligned}$$

综上可得，

$$|f(x)-h(x)|^2 \leq |f(x)-g(x)|^2+|g(x)-h(x)|^2$$

于是由定理 11.4.1(e) 可知，

$$\int_{[0,1]}|f(x)-h(x)|^2dx \leq \int_{[0,1]}|f(x)-g(x)|^2+|g(x)-h(x)|^2dx$$

即，

$$(d_{L^2}(f,h))^2 \leq (d_{L^2}(f,g))^2+(d_{L^2}(g,h))^2$$

由刚才的小命题可得，

$$d_{L^2}(f,h) \leq d_{L^2}(f,g)+d_{L^2}(g,h)$$

16.2.3

（1）

由定义可知，$\|f\|_2, \|f\|_{L^\infty}$ 都是正值，于是可以通过 $(\|f\|_2)^2 \leq (\|f\|_{L^\infty})^2$ 来证明。

对任意 $x \in [0,1]$，我们有

$$|f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| = \|f\|_{L^\infty}$$

于是可得，

$$(\|f\|_2)^2 = \int_{[0,1]}|f(x)|^2dx \leq \int_{[0,1]}(\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|)^2dx$$

又因为 $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$ 是常量，所以

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}(\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|)^2dx &= (1-0)\times(\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|)^2 \\ &= (\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|)^2 \\ &= (\|f\|_{L^\infty})^2\end{aligned}$$

综上可得，

$$\begin{aligned}(\|f\|_2)^2 &\le (\|f\|_{L^\infty})^2 \\ &\implies \\ \|f\|_2 &\le \|f\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

（2）

todo

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \int_{[0,1]} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{[0,1]} c + dg(x) dx \\ &= c + d\int_{[0,1]} g(x) dx\end{aligned}$$

我们希望

$$\begin{cases}\|f\|_2^2 = c + d\int_{[0,1]} g(x)dx = A^2 \\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \sqrt{c + dg(x)} = B\end{cases}$$

16.2.4

- (a) 非退化性。

  由引理 16.2.5(b) 可得，

  $$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} \ge 0$$

- (b) 柯西-施瓦茨不等式。

  如果 $\|g\|_2 = 0$，由 $\|g\|_2 = \sqrt{\langle g, g\rangle}$ 和引理 16.2.5(b)，$g = 0$，于是 $|\langle f, g\rangle| = 0$，所以

  $$|\langle f, g\rangle| = \|f\|_2\|g\|_2 = 0$$

如果 $\|g\|_2 > 0$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\langle f\|g\|_2^2 - \langle f,g\rangle g, f\|g\|_2^2 - \langle f,g\rangle g\rangle \\
&= \langle f\|g\|_2^2, f\|g\|_2^2 - \langle f,g\rangle g\rangle - \langle \langle f,g\rangle g, f\|g\|_2^2 - \langle f,g\rangle g\rangle \\
&= \langle f\|g\|_2^2, f\|g\|_2^2\rangle - \langle f\|g\|_2^2, \langle f,g\rangle g\rangle - (\langle\langle f,g\rangle g, f\|g\|_2^2\rangle - \langle\langle f,g\rangle g, \langle f,g\rangle g\rangle) \\
&= \langle f\|g\|_2^2, f\|g\|_2^2\rangle - \langle f\|g\|_2^2, \langle f,g\rangle g\rangle - \langle\langle f,g\rangle g, f\|g\|_2^2\rangle + \langle\langle f,g\rangle g, \langle f,g\rangle g\rangle \\
&= \|g\|_2^4\langle f,f\rangle - \|g\|_2^2\langle f, \langle f,g\rangle g\rangle - \|g\|_2^2\langle\langle f,g\rangle g, f\rangle + \langle\langle f,g\rangle g, \langle f,g\rangle g\rangle \\
&= \|g\|_2^4\langle f,f\rangle - \|g\|_2^2\overline{\langle f,g\rangle}\langle f,g\rangle - \|g\|_2^2\langle f,g\rangle\langle g,f\rangle + \langle f,g\rangle\overline{\langle f,g\rangle}\langle g,g\rangle \\
&= \|g\|_2^4\langle f,f\rangle - \|g\|_2^2\overline{\langle f,g\rangle}\langle f,g\rangle - \|g\|_2^2\langle f,g\rangle\langle g,f\rangle + \langle f,g\rangle\langle g,f\rangle\|g\|_2^2 \\
&= \|g\|_2^4\langle f,f\rangle - \|g\|_2^2\overline{\langle f,g\rangle}\langle f,g\rangle \\
&= \|g\|_2^4\|f\|_2^2 - \|g\|_2^2|\langle f,g\rangle|^2
\end{aligned}
$$

（注意，在拆分的时候，$\langle *, *\rangle, \|g\|_2, -1$ 都是复数，可以使用引理 16.2.5(c)(d)；最后一个等式利用了复数共轭相乘的性质，引理 15.6.11 中有说明）

因为

$$
\begin{aligned}
\langle f\|g\|_2^2 - \langle f,g\rangle g, f\|g\|_2^2 - \langle f,g\rangle g\rangle &\geq 0 \\
\|g\|_2^4\|f\|_2^2 - \|g\|_2^2|\langle f,g\rangle|^2 &\geq 0 \\
\|g\|_2^2\|f\|_2^2 - |\langle f,g\rangle|^2 &\geq 0 \\
\|g\|_2^2\|f\|_2^2 &\geq |\langle f,g\rangle|^2 \\
\|g\|_2\|f\|_2 &\geq |\langle f,g\rangle|
\end{aligned}
$$

- (c) 三角不等式

  我们有，

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_2^2 &= \langle f+g, f+g\rangle \\
&= \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \\
&\leq \|f\|_2^2 + \|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2\|f\|_2 + \|g\|_2^2 \\
&= (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2
\end{aligned}
$$

  于是

$$
\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2
$$

- (d) 毕达哥拉斯定理

  因为 $\langle f,g\rangle=0$，于是 $\langle g,f\rangle=\overline{\langle f,g\rangle}=0$。

  我们有，

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2&=\langle f+g,f+g\rangle\\&=\langle f,f\rangle+\langle f,g\rangle+\langle g,f\rangle+\langle g,g\rangle\\&=\|f\|_2^2+0+0+\|g\|_2^2\\&=\|f\|_2^2+\|g\|_2^2\end{aligned}$$

- (e) 齐次性

$$\begin{aligned}\|cf\|_2^2&=\langle cf,cf\rangle\\&=c^2\langle f,f\rangle\\&=c^2\|f\|_2^2\end{aligned}$$

  于是可得，

$$\|cf\|_2=|c|\|f\|_2$$

16.2.5

先定义不连续的 $\mathbb{Z}$ 周期方波函数

$$f(x)=\begin{cases}1\ if\ x\in[n,n+\frac{1}{2}),\\0\ if\ x\in[n+\frac{1}{2},n+1)\end{cases}$$

构造连续的 $\mathbb{Z}$ 周期函数序列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$。

$$f_n(x)=\begin{cases}1\ \ if\ x\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}),\\1-n(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})\ \ if\ x\in[\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}),\\0\ \ if\ x\in[\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},1)\end{cases}$$

（注意，以上只定义了 $[0,1)$）于是要做一下补充：$x\in\mathbb{R},f_n(x+1)=f_n(x)$。

以上定义的 $f_n(x)$ 关键在于 $[\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})$ 上，函数线性从 1 到 0。

16.2.6

- (a)

  对任意 $\sqrt{\epsilon} > 0$，因为 f_n 一致收敛于 f，于是存在 $N \geq 1$，使得只要 $n \geq N$ 和 $x \in \mathbb{R}$，都有

  $$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\epsilon}$$

  于是，当 $n \geq N$ 时

  $$\int_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{[0,1]} \epsilon dx = \epsilon$$

  由 ϵ 的任意性可知，

  $$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

- (b)

  todo

- (c)

  todo

- (d)

  todo