SAP projekt: Analiza specifikacija automobila

Fran Lubina, Zvonimir Stracenski, Luka Varga, Karlo Vešligaj

2026-01-23

Cilj i opis projekta

U okviru ovog projekta naglasak će biti na statističko zaključivanje vezano uz prethodne marketinške kampanje poduzeća, što je bitan korak u planiranju budućih kampanja. Tradicionalne masovne kampanje, poput reklamnih panoa, tipično imaju vrlo nisku uspješnost koja prema provedenim studijama često iznosi i ispod 1%. S druge strane, ciljani marketing često pokazuje značajno veću učinkovitost zbog usmjerenosti na kupce koji su skloniji kupnji određenih proizvoda i usluga.

U okviru ovog projekta naglasak će biti na statističko zaključivanje vezano uz specifikacije automobila, što je bitan korak u planiranju što objektivnijih odluka o modelu koji odgovara svim zahtjevima kupca. Automobilska industrija kontinuirano evoluira, s naglaskom na ekološku održivost, sigurnost i tehnološku inovaciju. Razumijevanje odnosa između tehničkih specifikacija automobila i njihovih performansi ključno je kako za kupce tako i za proizvodače. Statističkom analizom podataka o automobilima moguće je identificirati ključne faktore koji utječu na cijenu, potrošnju goriva, i ukupne performanse vozila.

Inicijalni pregled i obrada podataka

```
# Učitavanje dataseta
my_cars <- read.csv("car_specifications.csv")
```

Podatci se sastoje od specifikacija automobila za 205 različitih modela od 22 proizvodača. Skup sadrži tehničke karakteristike i tržišne varijable s ukupno 26 atributa prikupljenih iz autoindustrije. Podaci uključuju dimenzije automobila (duljina, širina, visina), meduosovinskog razmak, obujam i snagu motora, vrstu pogonskog goriva, cijenu, broj vrata, potrošnju goriva u gradu i na autocesti, tip pogona (prednji, stražnji, 4WD) i druge relevantne specifikacije:

```
dim(my_cars)
```

```
## [1] 201  26
```

```
names(my_cars)
```

```
##  [1] "make"              "aspiration"        "num.of.doors"
##  [4] "body.style"        "drive.wheels"      "engine.location"
##  [7] "wheel.base"        "length"            "width"
## [10] "height"            "curb.weight"       "engine.type"
## [13] "num.of.cylinders"  "engine.size"       "fuel.system"
```

```
## [16] "bore"              "stroke"            "compression.ratio"
## [19] "horsepower"        "peak.rpm"          "price"
## [22] "city.L.100km"      "highway.L.100km"   "fuel"
## [25] "country"           "continent"
```

Prikažimo prvih nekoliko redaka:

```
head(my_cars)
```

```
##         make aspiration num.of.doors  body.style drive.wheels engine.location
## 1 Alfa Romeo        std          two convertible          rwd           front
## 2 Alfa Romeo        std          two convertible          rwd           front
## 3 Alfa Romeo        std          two   hatchback          rwd           front
## 4       Audi        std         four       sedan          fwd           front
## 5       Audi        std         four       sedan          4wd           front
## 6       Audi        std          two       sedan          fwd           front
##   wheel.base length width height curb.weight engine.type num.of.cylinders
## 1      225.0  428.8 162.8  124.0        1156        dohc             four
## 2      225.0  428.8 162.8  124.0        1156        dohc             four
## 3      240.0  434.8 166.4  133.1        1280        ohcv              six
## 4      253.5  448.6 168.1  137.9        1060         ohc             four
## 5      252.5  448.6 168.7  137.9        1281         ohc             five
## 6      253.5  450.3 168.4  134.9        1137         ohc             five
##   engine.size fuel.system bore stroke compression.ratio horsepower peak.rpm
## 1        2130        mpfi 8.81   6.81               9.0        111     5000
## 2        2130        mpfi 8.81   6.81               9.0        111     5000
## 3        2491        mpfi 6.81   8.81               9.0        154     5000
## 4        1786        mpfi 8.10   8.64              10.0        102     5500
## 5        2229        mpfi 8.10   8.64               8.0        115     5500
## 6        2229        mpfi 8.10   8.64               8.5        110     5500
##   price city.L.100km highway.L.100km   fuel country continent
## 1 13495        11.19            8.70 petrol   Italy    Europe
## 2 16500        11.19            8.70 petrol   Italy    Europe
## 3 16500        12.37            9.04 petrol   Italy    Europe
## 4 13950         9.79            7.83 petrol Germany    Europe
## 5 17450        13.06           10.68 petrol Germany    Europe
## 6 15250        12.37            9.40 petrol Germany    Europe
```

Analiza podataka

Podatke zatim analiziramo i interpretiramo pomoću statističkih metoda vodeći se prethodno definiranim pitanjima.

Pitanje 1: Razlikuje li se snaga motora izmedu automobila s turbopunjačem i atmosferskim motorima?

Najprije izračunamo mjere centralne tendencije za snagu motora ovisno o tipu usisavanja zraka.

```
summary.result1 <- my_cars %>%
  group_by(aspiration) %>%
  summarise(
    count = n(),
    mean_horsepower = mean(horsepower, na.rm = TRUE),
    median_horsepower = median(horsepower, na.rm = TRUE),
    sd_horsepower = sd(horsepower, na.rm = TRUE),
    min_horsepower = min(horsepower, na.rm = TRUE),
    max_horsepower = max(horsepower, na.rm = TRUE),
    q25 = quantile(horsepower, 0.25, na.rm = TRUE),
    q75 = quantile(horsepower, 0.75, na.rm = TRUE)
  )

summary.result1
```

```
## # A tibble: 2 x 9
##   aspiration count mean_horsepower median_horsepower sd_horsepower
##   <chr>      <int>           <dbl>              <dbl>         <dbl>
## 1 std          165            99.0               88           37.5
## 2 turbo         36           123.                120.          31.1
## # i 4 more variables: min_horsepower <int>, max_horsepower <int>, q25 <dbl>,
## #   q75 <dbl>
```

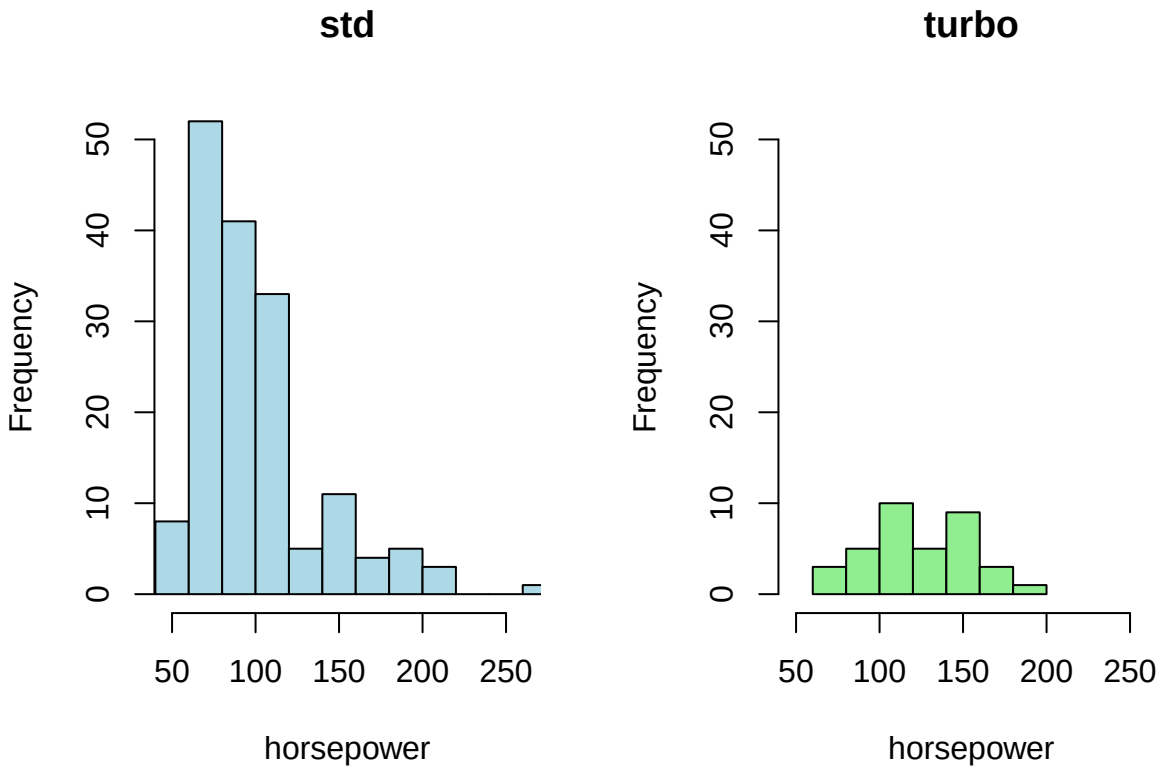
Postoje indikacije da bi motori s turbopunjačem trebali imati veću snagu od atmosferskih motora.

Ovakvo ispitivanje možemo provesti t-testom.

Kako bi mogli provesti test, moramo najprije provjeriti pretpostavke normalnosti i nezavisnosti uzorka. Obzirom da razmatramo dva uzoraka za motore koji se nalaze u različitim automobilima, možemo pretpostaviti njihovu nezavisnost. Sljedeći korak je provjeriti normalnost podataka koju provjeravamo histgoramom.

```
clean_horsepower_std <- na.omit(my_cars[my_cars$aspiration == "std", ]$horsepower)
clean_horsepower_turbo <- na.omit(my_cars[my_cars$aspiration == "turbo", ]$horsepower)

xrange <- range(c(clean_horsepower_std, clean_horsepower_turbo))

ymax <- max(
  hist(clean_horsepower_std, plot = FALSE)$counts,
  hist(clean_horsepower_turbo, plot = FALSE)$counts
)

par(mfrow = c(1, 2))

hist(clean_horsepower_std,
     main = "std",
     xlab = "horsepower",
     ylab = "Frequency",
     col = "lightblue",
```

```
     border = "black",
     xlim = xrange,
     ylim = c(0, ymax))

hist(clean_horsepower_turbo,
     main = "turbo",
     xlab = "horsepower",
     ylab = "Frequency",
     col = "lightgreen",
     border = "black",
     xlim = xrange,
     ylim = c(0, ymax))
```



Zbog prisutnosti ekstremnih vrijednosti i narušene pretpostavke o normalnosti distribucije (uočene vizualnim pregledom histograma), umjesto t-testa korišten je Mann-Whitney-Wilcoxonov test kao robusnija neparametrijska alternativa za usporedbu dviju nezavisnih skupina.

Iz gornjih histograma možemo zaključiti da podatci u dvije navedene grupe nisu normalno distribuirani.

S obzirom da podaci nisu normalno distribuirani, primijenit ćemo Mann-Whitney-Wilcoxonov test.

Mann-Whitney-Wilcoxonov test

Hipoteze:

H_0 : Ne postoji značajna razlika u snazi motora, odnosno snaga turbo motora je manja ili jednaka snazi atmosferskih motor
H_1 : Snaga motora automobila s turbopunjačem značajno je veća od snage automobila s atmosferskim motorom($Mdn_{turbo} >$

```
wilcox.test(clean_horsepower_turbo,
            clean_horsepower_std,
            alternative = "greater",
            conf.int = TRUE)
```

```
##
##  Wilcoxon rank sum test with continuity correction
##
## data:  clean_horsepower_turbo and clean_horsepower_std
## W = 4306.5, p-value = 5.652e-06
## alternative hypothesis: true location shift is greater than 0
## 95 percent confidence interval:
##  19.00006      Inf
## sample estimates:
## difference in location
##               28.99995
```

Zaključak

Mann-Whitney-Wilcoxonovim testom utvrđeno je da automobili s turbopunjačem imaju statistički značajno veću snagu motora u usporedbi s automobilima s atmosferskim motorom ($p < 0.001$). Na temelju dobivene p-vrijednosti, odbacujemo nultu hipotezu (H_0) u korist alternativne (H_1).

Pitanje 2: Postoji li statistički značajna razlika u gradskoj potrošnji automobila između različitih kontinenata proizvođača?

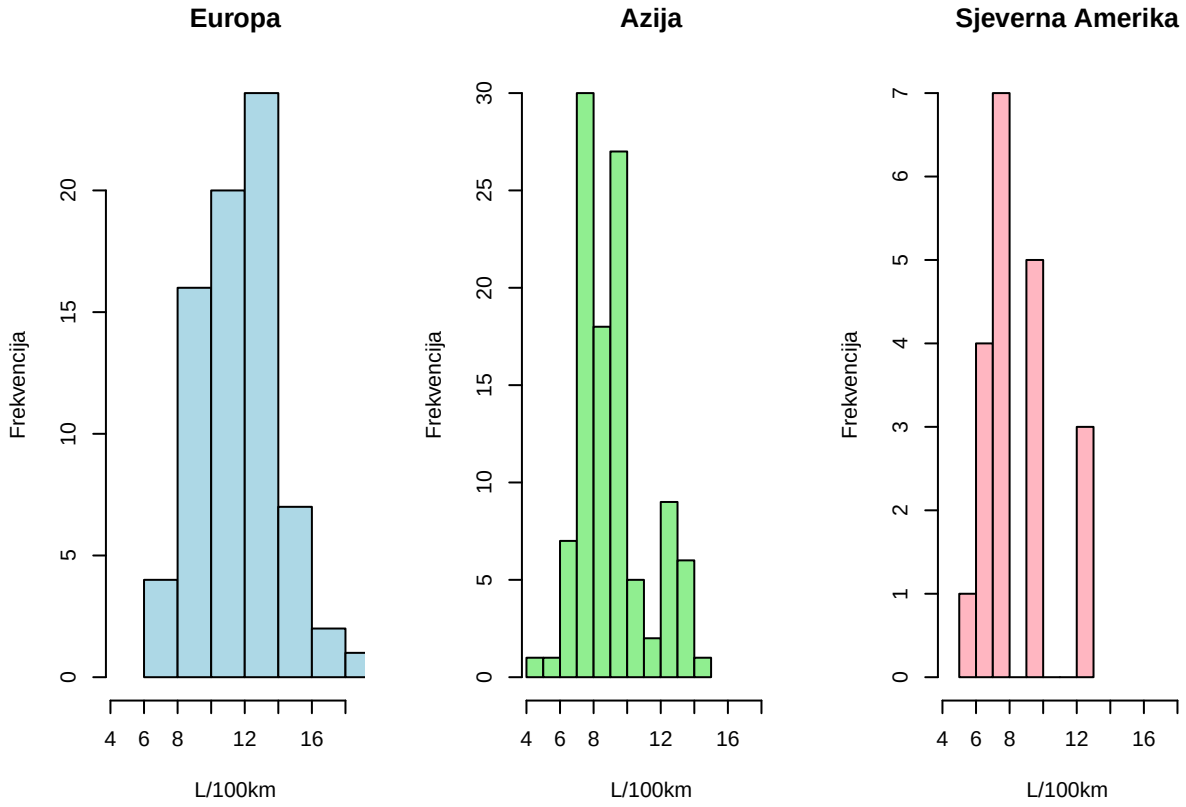
```
grouped <- group_by(my_cars, continent)

summary.result1 <- summarise(
  grouped,
  count = n(),
  mean_city = mean(city.L.100km, na.rm = TRUE),
  median_city = median(city.L.100km, na.rm = TRUE),
  sd_city = sd(city.L.100km, na.rm = TRUE),
  min_city = min(city.L.100km, na.rm = TRUE),
  max_city = max(city.L.100km, na.rm = TRUE),
  q25 = quantile(city.L.100km, 0.25, na.rm = TRUE),
  q75 = quantile(city.L.100km, 0.75, na.rm = TRUE)
)
summary.result1
```

```
## # A tibble: 3 x 9
##   continent    count mean_city median_city sd_city min_city max_city   q25   q75
##   <chr>        <int>     <dbl>       <dbl>   <dbl>    <dbl>    <dbl> <dbl> <dbl>
## 1 Asia           107      9.12        8.7     2.04     4.8      14.7  7.58  9.79
## 2 Europe          74     11.5        11.2     2.48     6.35     18.1  9.79 12.9
## 3 North Ameri~    20      8.46        7.58    2.19     5        12.4  7.27  9.79
```

Tablica prikazuje mjere centralne tendencije gradske potrošnje automobila grupiranih po kontinentu proizvođača. Može se uočiti kako se aritmetička sredina i medijan gradske potrošnje razlikuju među kontinentima.

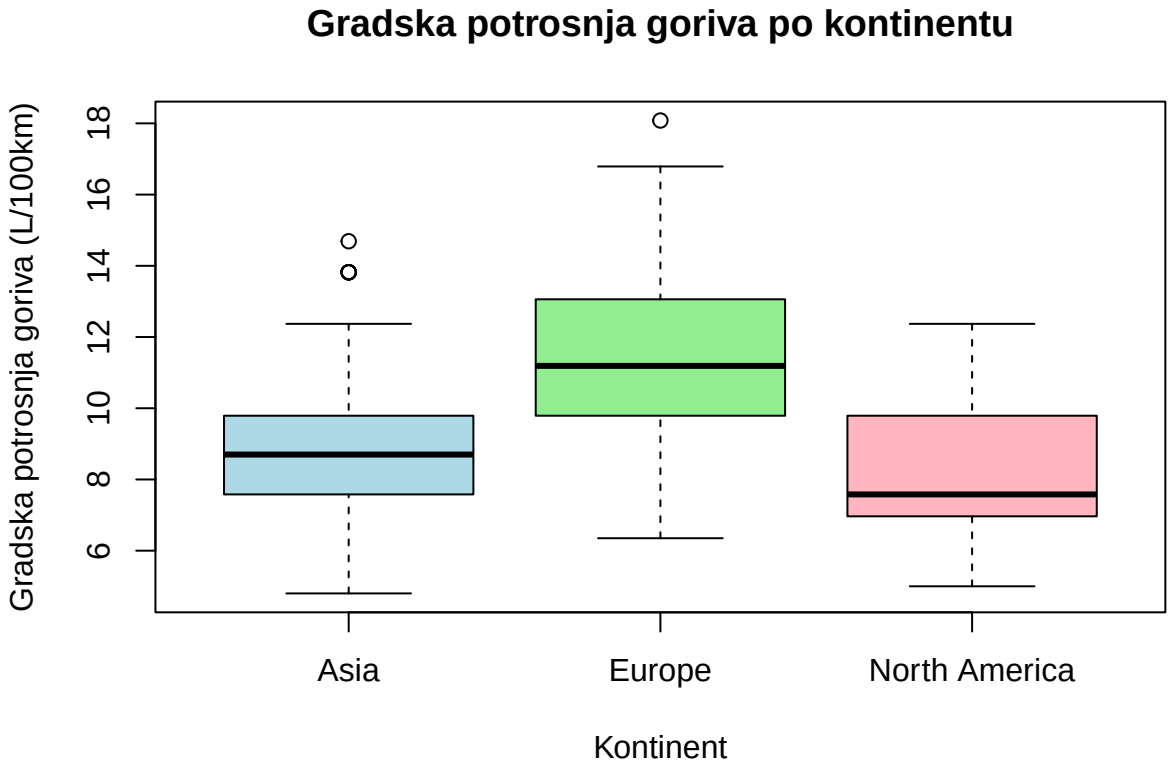
```
xrange <- range(my_cars$city.L.100km) + c(-0.5, 0.5)
ymax <- max(
  hist(my_cars[my_cars$continent == "Europe", ]$city.L.100km, plot = FALSE)$counts,
  hist(my_cars[my_cars$continent == "Asia", ]$city.L.100km, plot = FALSE)$counts,
  hist(my_cars[my_cars$continent == "North America", ]$city.L.100km, plot = FALSE)$counts
)

par(mfrow = c(1, 3))

hist(my_cars[my_cars$continent == "Europe", ]$city.L.100km,
     main = "Europa",
     xlab = "L/100km",
     ylab = "Frekvencija",
     col = "lightblue",
     border = "black",
     xlim = xrange)

hist(my_cars[my_cars$continent == "Asia", ]$city.L.100km,
     main = "Azija",
     xlab = "L/100km",
     ylab = "Frekvencija",
     col = "lightgreen",
     border = "black",
```

```
     xlim = xrange)

hist(my_cars[my_cars$continent == "North America", ]$city.L.100km,
     main = "Sjeverna Amerika",
     xlab = "L/100km",
     ylab = "Frekvencija",
     col = "lightpink",
     border = "black",
     xlim = xrange)
```



Ova tri histograma prikazuju raspodjelu automobila po gradskoj potrošnji, pri čemu svaki histogram predstavlja jedan od kontinenata. Iz prikaza je jasno vidljiva razlika u potrošnji, osobito za Europu, gdje je gradska potrošnja, prema ovom uzorku, znatno viša u odnosu na Sjevernu Ameriku i Aziju.

```r
boxplot(city.L.100km ~ continent, data = my_cars,
        main = "Gradska potrosnja goriva po kontinentu",
        xlab = "Kontinent",
        ylab = "Gradska potrosnja goriva (L/100km)",
        col = c("lightblue", "lightgreen", "lightpink"),
        family="Helvetica")
```



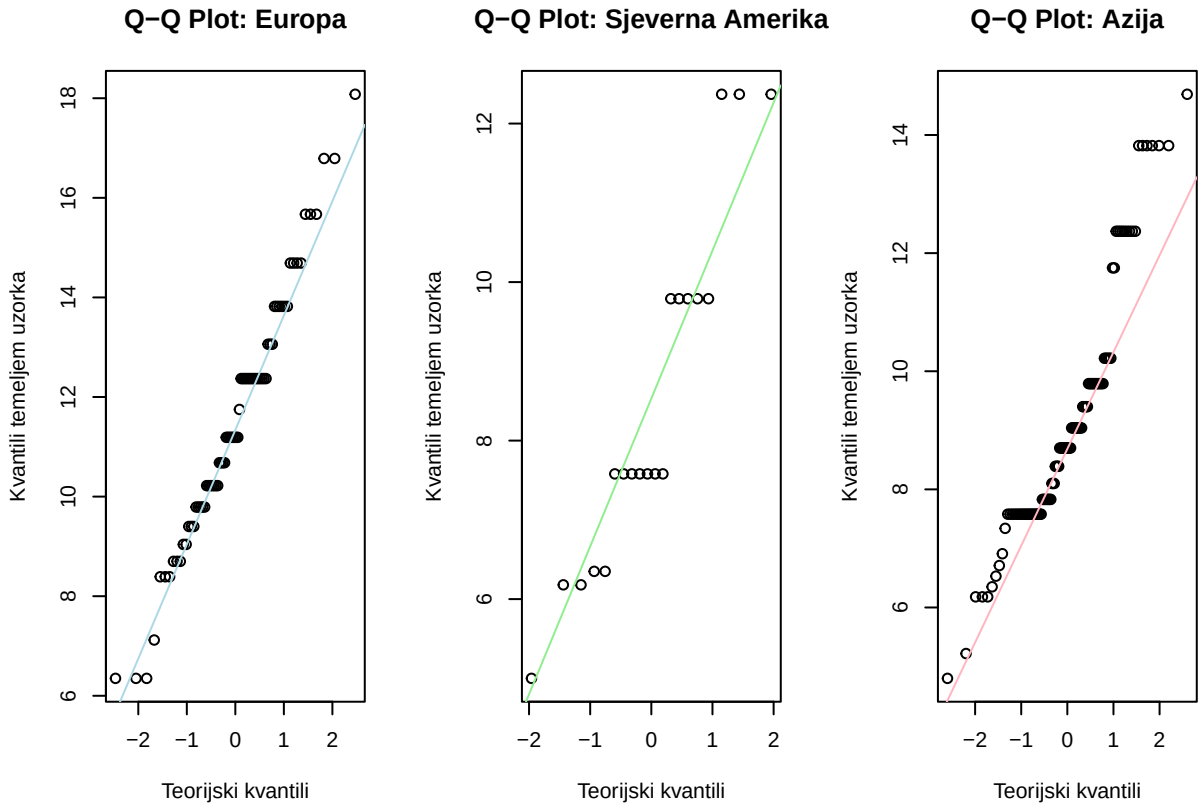
U boxplot dijagramima jasno je vidljiva značajna razlika u medijanima i ostalim kvartalima između kontinenta. Posebno je istaknuta razlika između Europe i preostalih dvaju kontinenta. Europa, prema boxplot dijagramu, ima značajno višu potrošnju. Donji kvartil Europe gotovo je veći od gornjeg kvartila preostala dva kontinenta, što znači da preko 70 % europskih automobila troši jednako ili više goriva od 25 % automobila s najvećom potrošnjom u Aziji i Sjevernoj Americi.

U uzorku automobila iz Azije i Europe postoji mali broj stršećih vrijednosti, što može utjecati na raspodjelu podataka, ali ne mijenja osnovni zaključak o razlikama među grupama.

Kako bismo izabrali kojim testom možemo testirati postoji li statistički značajna razlika u gradskoj potrošnji automobila između različitih kontinenata proizvodača potrebno je provjeriti normalnost podataka. To je učinjeno sljedećim Q-Q dijagramima.

```r
par(mfrow = c(1, 3))

# Q-Q plot za Europu
qqnorm(my_cars$city.L.100km[my_cars$continent == "Europe"],
       main = "Q-Q Plot: Europa",
       xlab = "Teorijski kvantili",
```

```
       ylab = "Kvantili temeljem uzorka")
qqline(my_cars$city.L.100km[my_cars$continent == "Europe"], col = "lightblue")

# Q-Q plot za Sjevernu Ameriku
qqnorm(my_cars$city.L.100km[my_cars$continent == "North America"],
       main = "Q-Q Plot: Sjeverna Amerika",
       xlab = "Teorijski kvantili",
       ylab = "Kvantili temeljem uzorka")
qqline(my_cars$city.L.100km[my_cars$continent == "North America"], col = "lightgreen")

# Q-Q plot za Aziju
qqnorm(my_cars$city.L.100km[my_cars$continent == "Asia"],
       main = "Q-Q Plot: Azija",
       xlab ="Teorijski kvantili",
       ylab = "Kvantili temeljem uzorka")
qqline(my_cars$city.L.100km[my_cars$continent == "Asia"], col = "lightpink")
```



Q-Q dijagrami prikazuju značajna odstupanja od normalne distribucije za proizvođače iz Sjeverne Amerike i Azije. Zbog toga moramo koristiti test koji ne pretpostavlja normalnost podataka. Zato koristimo Kruskal-Wallisov test koji je neparametarska alternativa ANOVA testu.

H0: Ne postoji razlika u distribuciji gradske potrošnje goriva između Europe, Azije i Sjeverne Amerike.
H1: Postoji razlika u distribuciji gradske potrošnje goriva između Europe, Azije i Sjeverne Amerike.

Odabrana razina značajnosti: α=0.05

```
my_cars$continent <- as.factor(my_cars$continent)
kruskal.test(city.L.100km ~ continent, data = my_cars)
```

```
##
##  Kruskal-Wallis rank sum test
##
## data:  city.L.100km by continent
## Kruskal-Wallis chi-squared = 49.079, df = 2, p-value = 2.201e-11
```

Zbog izrazito niske p-vrijednosti (< 0.05) Kruskal-Wallisovog testa zaključujemo da ova tri skupa podatka ne proistječu iz iste distribucije, tj. da postoji razlika u gradskoj potrošnji između Azije, Europe i Sjeverne Amerike.

Kako bismo dodatno usporedili pojedine parove kontinenata provodimo Mann-Whitney-Wilcoxonov test.

Zbog višestrukih parnih usporedbi, primijenjena je Bonferronijeva korekcija kako bi se kontrolirala ukupna razina značajnosti (Alpha se dijeli s brojem usporedbi). Odabrana razina značajnosti za Bonferroni korekciju: $\alpha_{\text{Bonferroni}} = \frac{0.05}{3} \approx 0.0167$

```
pairwise.wilcox.test(my_cars$city.L.100km,
                     my_cars$continent,
                     p.adjust.method = "bonferroni")
```

```
##
##  Pairwise comparisons using Wilcoxon rank sum test with continuity correction
##
## data:  my_cars$city.L.100km and my_cars$continent
##
##               Asia    Europe
## Europe        1.9e-10 -
## North America 0.37    2.7e-05
##
## P value adjustment method: bonferroni
```

Zbog visoke p-vrijednosti pri usporedbi gradske potrošnje Azije i Sjeverne Amerike ne možemo odbaciti mogućnost da te dvije potrošnje proističu iz iste distribucije. Ostale kombinacije (Azije i Europa te Europa i Sjeverna Amerika) imaju izrazito nisku p-vrijednost, pa možemo zaključiti da proizlaze iz različitih distribucija.

Prije odabira konačnog testa, isprobana su još dva pristupa: hi-kvadrat test, pri čemu su podaci podijeljeni u tri skupine po potrošnji, te ANOVA test nakon logaritamske pretvorbe podataka. Kruskal-Wallisov test pokazuje se primjerenijim od hi-kvadrat testa kod kontinuiranih podataka, jer ne zahtijeva proizvoljnu podjelu podataka. Logaritamska transformacija nije uspjela postići normalnost podataka za Aziju, što dodatno opravdava primjenu neparametarskog Kruskal-Wallisova testa.

Pitanje 3: Možemo li predvidjeti cijenu automobila na temelju dimenzija (length, width), snage motora (horsepower), obujma motora (engine-size) i gradske potrošnje goriva?

Predviđanje cijene vozila

Istražujemo može li se cijena vozila predvidjeti na temelju snage motora (horsepower), veličine motora (engine.size), gradske potrošnje goriva (city.L.100km), dužine (length) i širine (width) vozila. Višestruka linearna regresija je primjeren model koji nam može dati odgovor na ovo pitanje. Pretpostavljajući da su sve prepostavke ovog modela zadovoljene, što ćemo u nastavku i provjeriti.

Iz skupa podataka odabiremo regresore:

```
library(dplyr)
library(ggplot2)

cars_model <- my_cars %>%
  select(price, horsepower, engine.size, city.L.100km, length, width)

summary(cars_model)
```

```
##      price         horsepower     engine.size    city.L.100km
##  Min.   : 5118   Min.   : 48.0   Min.   :1000   Min.   : 4.800
##  1st Qu.: 7775   1st Qu.: 70.0   1st Qu.:1606   1st Qu.: 7.830
##  Median :10295   Median : 95.0   Median :1966   Median : 9.790
##  Mean   :13207   Mean   :103.4   Mean   :2079   Mean   : 9.944
##  3rd Qu.:16500   3rd Qu.:116.0   3rd Qu.:2311   3rd Qu.:12.370
##  Max.   :45400   Max.   :262.0   Max.   :5342   Max.   :18.080
##                  NA's   :2
##      length          width
##  Min.   :358.4   Min.   :153.2
##  1st Qu.:423.7   1st Qu.:162.8
##  Median :439.9   Median :166.4
##  Mean   :442.5   Mean   :167.4
##  3rd Qu.:466.1   3rd Qu.:169.2
##  Max.   :528.6   Max.   :182.9
##
```

Podaci imaju bitno različite skale, pa ćemo ih prvo normalizirati kako bi osigurali numeričku stabilnost regresijskih koeficijenata te zbog drugih prednosti o kojima će kasnije biti riječ.

```
spric <- scale(cars_model$price)
sesize <- scale(cars_model$engine.size)
slength <- scale(cars_model$length)
swidth <- scale(cars_model$width)
scity <- scale(cars_model$city.L.100km)
shorse <- scale(cars_model$horsepower)
```

Eksplorativna analiza

```r
library(lmtest)
library(sandwich)
```

```r
cor(cars_model, use = "complete.obs")
```

```
##                   price horsepower engine.size city.L.100km    length     width
## price        1.0000000  0.8105331   0.8738902    0.7912969 0.6940555 0.7541672
## horsepower   0.8105331  1.0000000   0.8226605    0.8894963 0.5803396 0.6153860
## engine.size  0.8738902  0.8226605   1.0000000    0.7450069 0.6851805 0.7293491
## city.L.100km 0.7912969  0.8894963   0.7450069    1.0000000 0.6577905 0.6734888
## length       0.6940555  0.5803396   0.6851805    0.6577905 1.0000000 0.8564603
## width        0.7541672  0.6153860   0.7293491    0.6734888 0.8564603 1.0000000
```

Potrebno je provjeriti da li imamo multikolinearnost između regresora. Pristurnost visoko-koreliranih regresora nepovoljno utječe na numeričku stabilnost i statističku signifikantnost regresijskih koeficijenata.

Iz korelacijske matrice vidimo umjerene korelacije između većine regresora (< 0.7). Imamo par visokokoreliranih parova (redundantnih regresora) poput snage i veličine motora, no više o njima u naknadnim cjelinama.

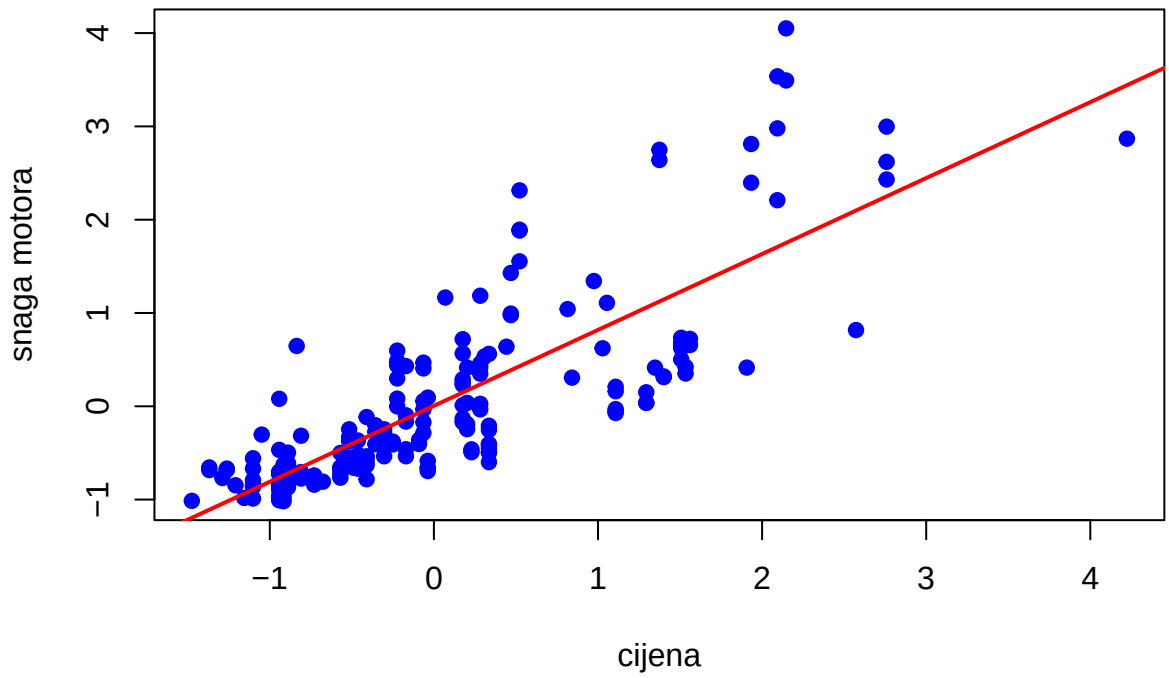
Iz korelacijske matrice također možemo ustanoviti da je većina potencijalnih regresora visoko-korelirana sa cijenom.

Preostaje nam uvjeriti se da je veza linearna te da je zadovoljena prepostavka homoskedastičnosti.

```r
model <- lm(spric ~ shorse, data=cars_model)

summary(model)
```

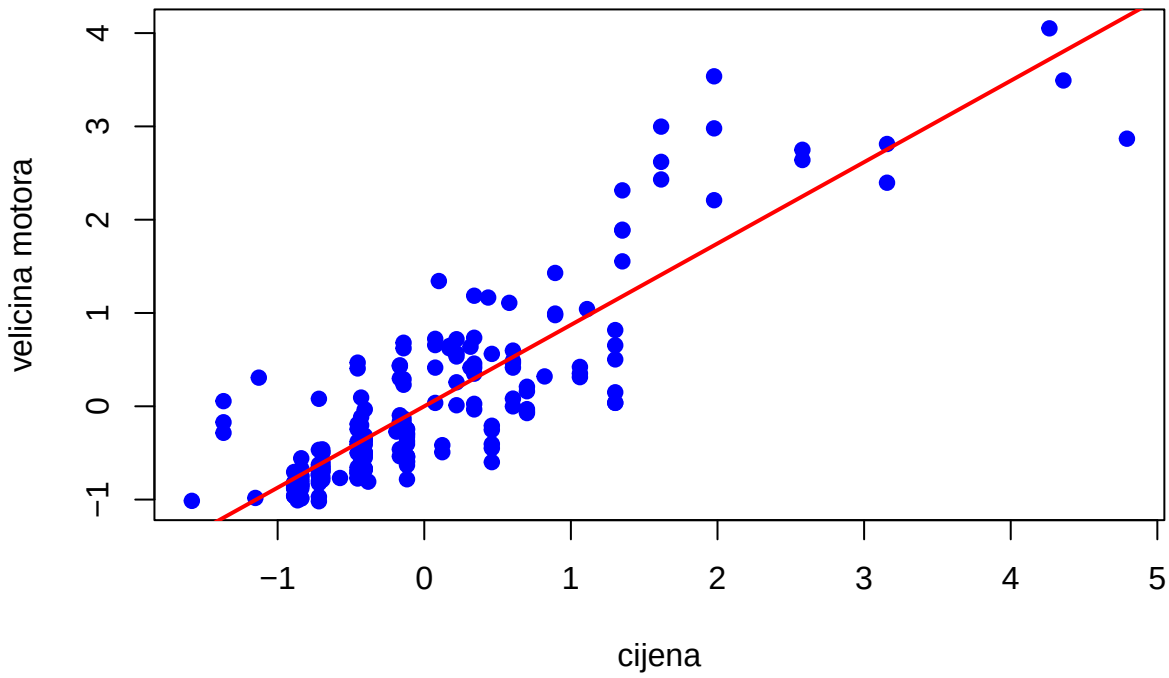
```
##
## Call:
## lm(formula = spric ~ shorse, data = cars_model)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.28099 -0.28463 -0.05927  0.22392  2.29974
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 0.004568   0.041790   0.109    0.913
## shorse      0.813760   0.041895  19.424   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.5895 on 197 degrees of freedom
##   (2 observations deleted due to missingness)
## Multiple R-squared:  0.657,  Adjusted R-squared:  0.6552
## F-statistic: 377.3 on 1 and 197 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```r
plot(shorse, spric, main = "",
     xlab = "cijena", ylab = "snaga motora", pch = 19, col = "blue")
abline(model, col = "red", lwd = 2)
```



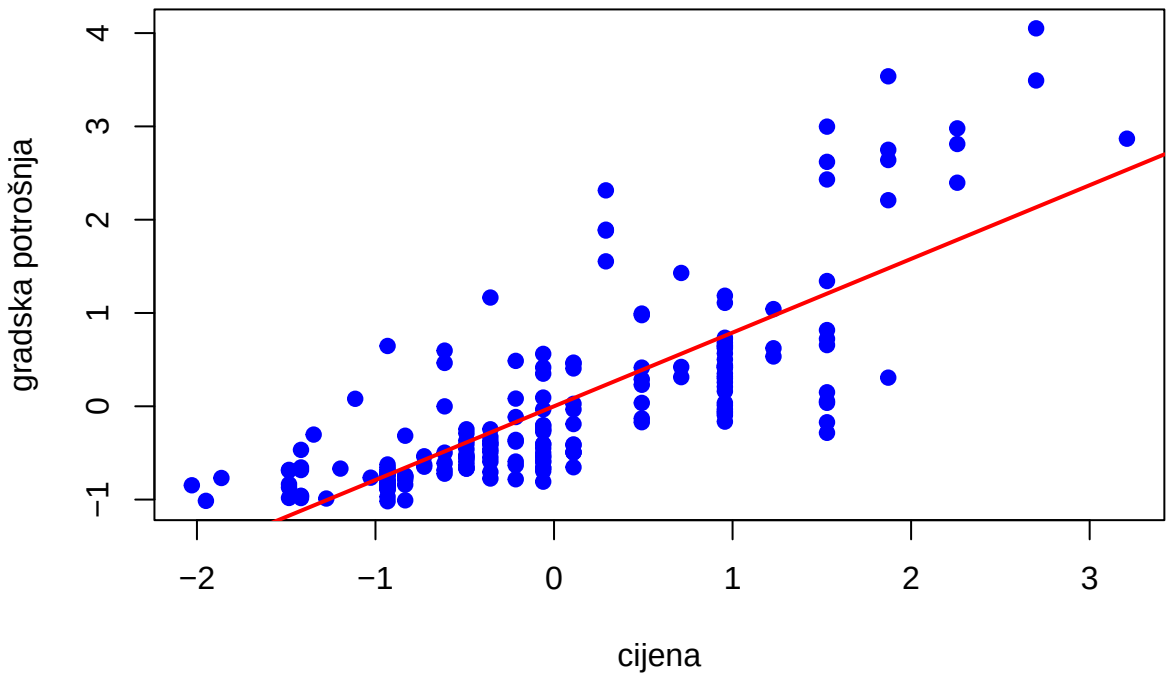
Iz grafa je vidljiva približno linearna veza, ali je primjetna heteroskedastičnost.

```
model <- lm(spric ~ sesize, data=cars_model)

plot(sesize, spric, main = "",
     xlab = "cijena", ylab = "velicina motora", pch = 19, col = "blue")
abline(model, col = "red", lwd = 2)
```



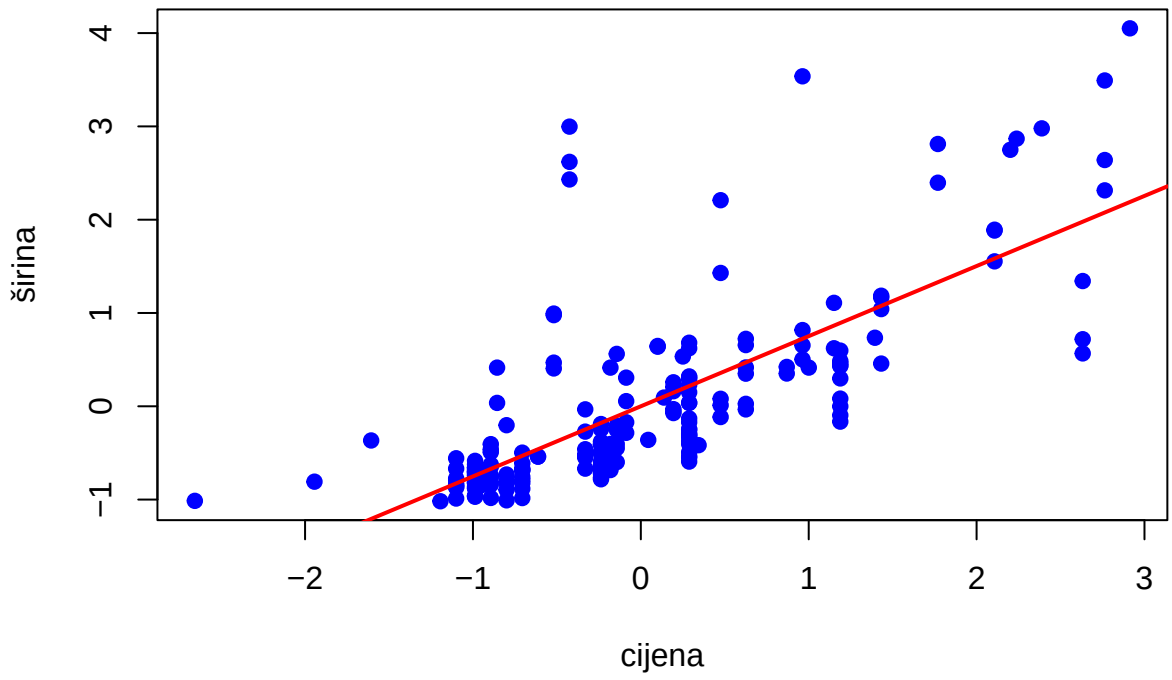
Iz grafa je vidljiva približno linearna veza, ali je primjetna heteroskedastičnost.

```
model <- lm(spric ~ scity, data=cars_model)

plot(scity, spric, main = "",
     xlab = "cijena", ylab = "gradska potrošnja", pch = 19, col = "blue")
abline(model, col = "red", lwd = 2)
```



Iz grafa je vidljiva približno linearna veza, ali je primjetna heteroskedastičnost.

```
model <- lm(spric ~ swidth, data=cars_model)

plot(swidth, spric, main = "",
     xlab = "cijena", ylab = "širina", pch = 19, col = "blue")
abline(model, col = "red", lwd = 2)
```

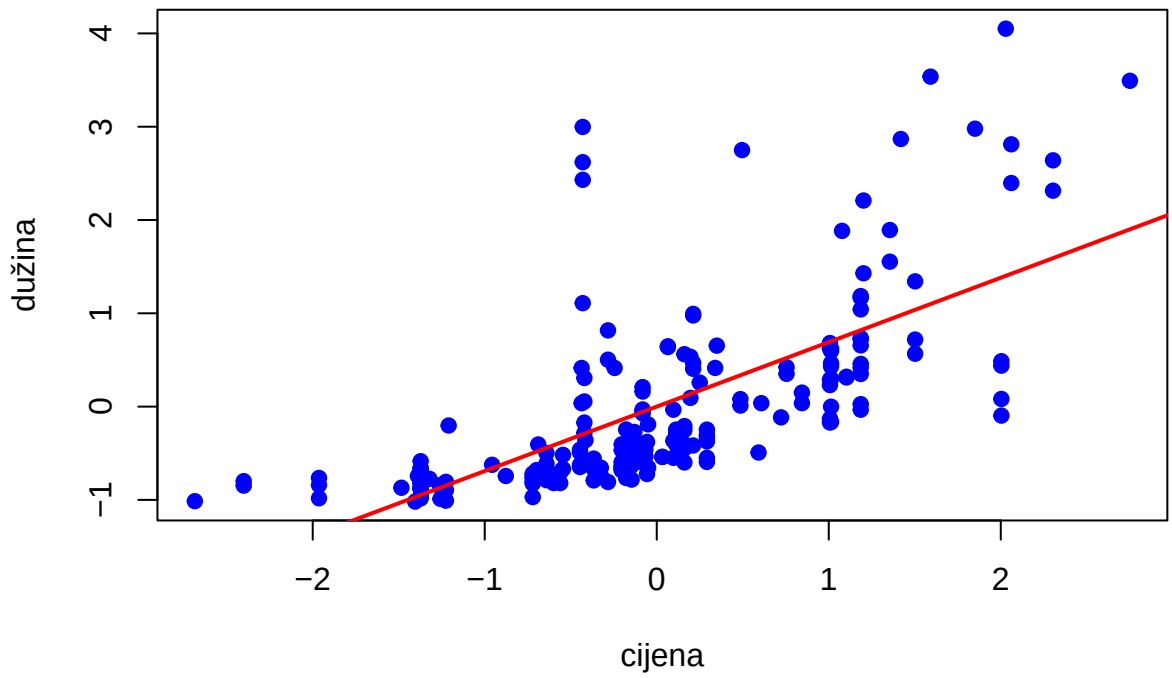


Iz grafa je vidljiva približno linearna veza, ali je primjetna heteroskedastičnost.

```
model <- lm(spric ~ slength, data=cars_model)

summary(model)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = spric ~ slength, data = cars_model)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -1.4805 -0.4333 -0.1674  0.2436  3.2946
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 2.305e-16  5.113e-02    0.00        1
## slength     6.907e-01  5.126e-02   13.47   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.7249 on 199 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.4771, Adjusted R-squared:  0.4745
## F-statistic: 181.6 on 1 and 199 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```r
plot(slength, spric, main = "",
     xlab = "cijena", ylab = "dužina", pch = 19, col = "blue")
abline(model, col = "red", lwd = 2)
```



Iz grafa je vidljiva približno linearna veza, ali je primjetna heteroskedastičnost.

```r
lpric <- log(spric)
lesize <- sesize**0.1
llength <- slength**0.1
lwidth <- swidth**0.1
lcity <- scity**0.1
lhorse <- shorse**0.1
```

Transformirali smo podatke kako bi izbjegli heteroskedastičnost.

Višestruka linearna regresija

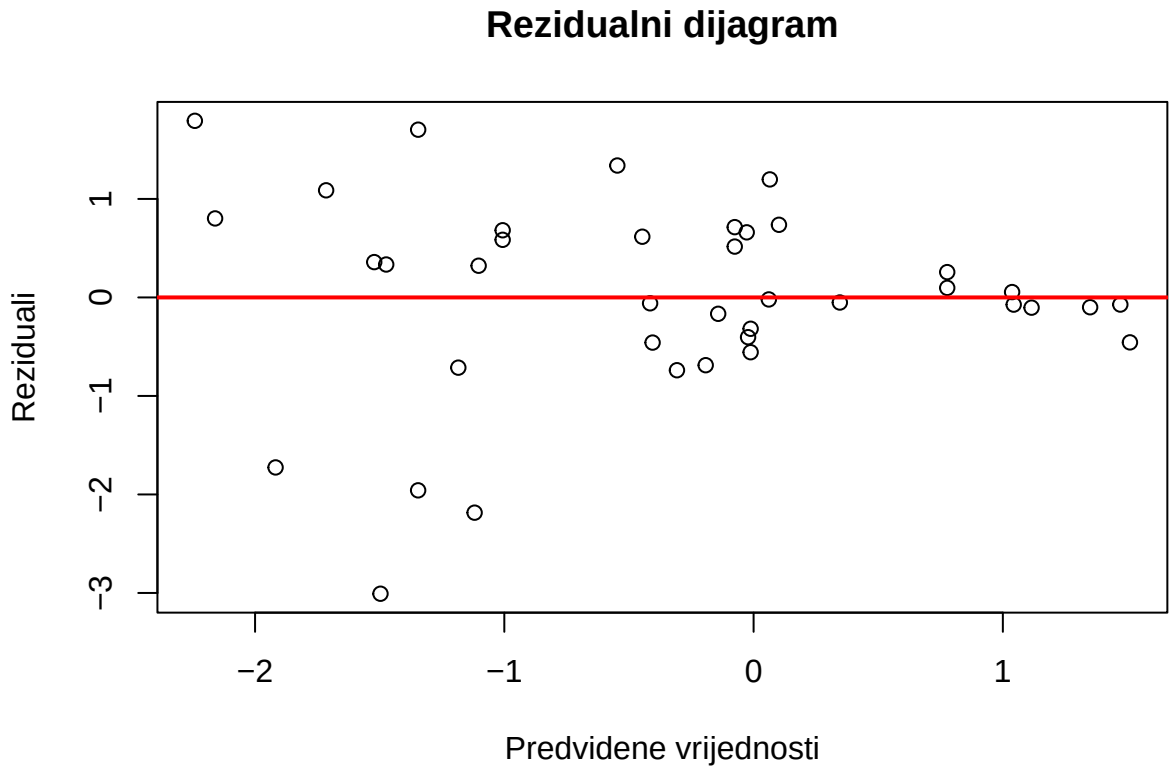
```r
model<-lm(
lpric ~ lhorse+lesize+lcity+lwidth+llength,
data=cars_model
)

summary(model)$r.squared
```

```
## [1] 0.513161
```

```
summary(model)$adj.r.squared
```

```
## [1] 0.4393975
```

```
residuales <- residuals(model)
predicted <- fitted(model)
plot(predicted, residuales,
     xlab = "Predviđene vrijednosti",
     ylab = "Reziduali",
     main = "Rezidualni dijagram")
abline(h = 0, col = "red", lwd = 2)
```



Vidimo heteroskedastičnost, primjenjuemo adekvatne testove za regresorske koeficijente.

```
coeftest(model, vcov = vcovHC(model, type = "HC1"))
```

```
##
## t test of coefficients:
##
##             Estimate Std. Error t value  Pr(>|t|)
## (Intercept) -15.5320     3.6115 -4.3007 0.0001422 ***
## lhorse        2.0639     3.5564  0.5803 0.5656302
```

```
## lesize        1.9446     1.2830  1.5156 0.1391296
## lcity         3.3776     3.0513  1.1069 0.2763212
## lwidth        9.8868     2.8283  3.4957 0.0013714 **
## llength      -2.0548     3.6119 -0.5689 0.5732697
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Visoke p-vrijednosti nekih parova regresijskih koeficijenata upućuju na redundantnost, pa ćemo ih maknuti iz modela. Domensko znanje podržava ovu odluku duzina i visina su trivijalno korelirane. Obujam i snaga motora su također korelirane. Međutim njihova veza je nelinearna i komplicirana. Naime. Dizajn i učinkovitost motora igraju značajnu ulogu.

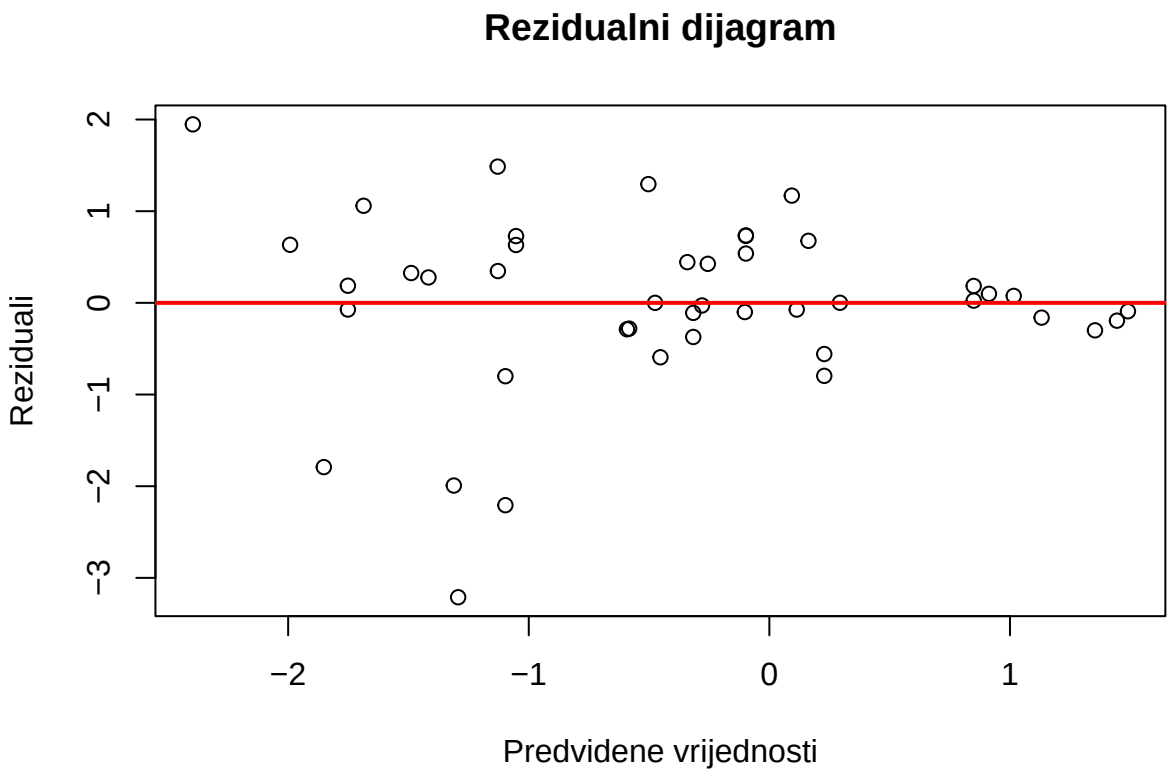
```
model<-lm(
lpric ~ lesize+lcity+lwidth,
data=cars_model
)

summary(model)$r.squared
```

```
## [1] 0.522282
```

```
summary(model)$adj.r.squared
```

```
## [1] 0.4864531
```

```
residuales <- residuals(model)
predicted <- fitted(model)
plot(predicted, residuales,
     xlab = "Predviđene vrijednosti",
     ylab = "Reziduali",
     main = "Rezidualni dijagram")
abline(h = 0, col = "red", lwd = 2)
```



Vidimo da usprokos transformacijama podaci i dalje imaju izraženu heteroskedastičnost. Koristimo robusne standarne greške.

```
coeftest(model, vcov = vcovHC(model, type = "HC1"))
```

```
##
## t test of coefficients:
##
##             Estimate Std. Error t value  Pr(>|t|)
## (Intercept) -15.8700     2.6715 -5.9405 5.731e-07 ***
## lesize        2.2766     1.3847  1.6441   0.10799
## lcity         4.4879     2.1606  2.0772   0.04425 *
## lwidth        8.7809     1.9689  4.4597 6.501e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Domensko znanje nam daje opravdanje da zadržimo veličinu motora kao objašnjavajuću varijablu usprkos visokoj p-vrijednosti njenog regresijskog koeficijenta.

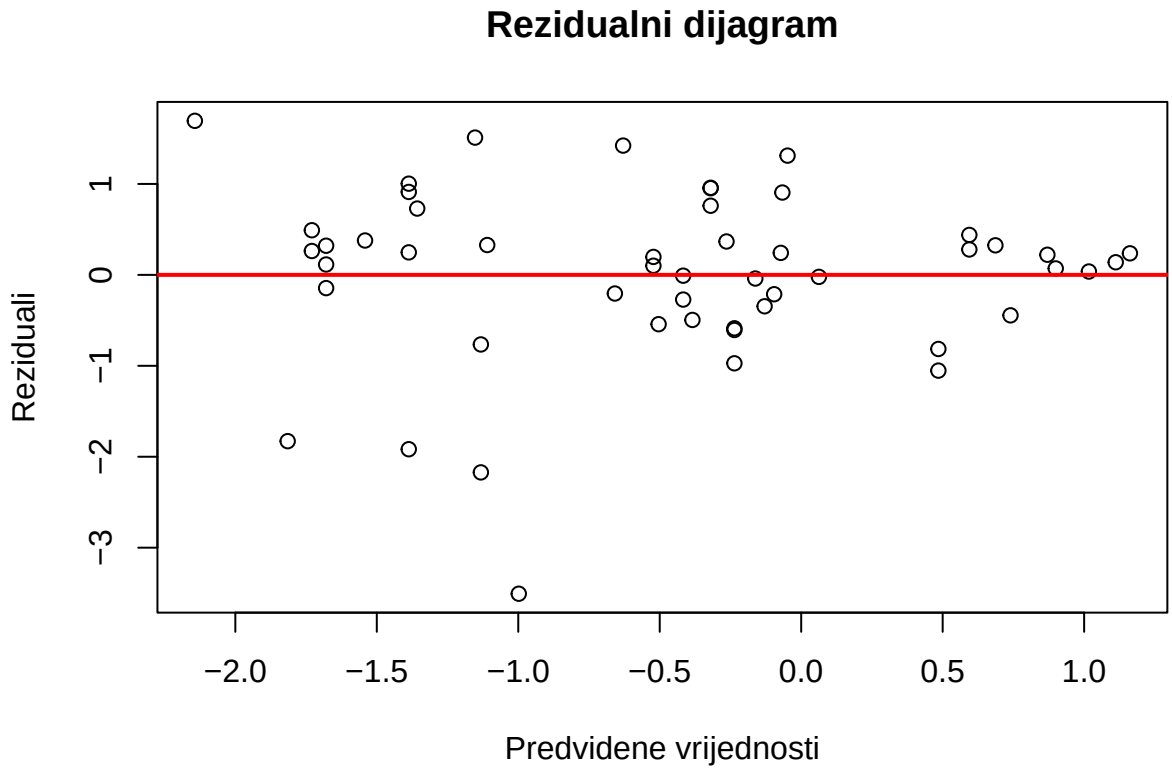
```
model<-lm(
lpric ~ lcity+lwidth,
data=cars_model
)

summary(model)$r.squared
```

```
## [1] 0.4633957
```

```
summary(model)$adj.r.squared
```

```
## [1] 0.4410372
```

```
residuales <- residuals(model)
predicted <- fitted(model)
plot(predicted, residuales,
     xlab = "Predviđene vrijednosti",
     ylab = "Reziduali",
     main = "Rezidualni dijagram")
abline(h = 0, col = "red", lwd = 2)
```



Gornji graf nas uvjerava u homoskedastičnost. Varijanca reziduala je otprilike jednaka za sve vrijednosti reziduala, sa iznimkom nekolicine outliera.

```
summary(model)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = lpric ~ lcity + lwidth, data = cars_model)
##
## Residuals:
```

```
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -3.5065 -0.3954  0.1388  0.4088  1.6942
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -14.258      2.387  -5.973 2.76e-07 ***
## lcity          5.338      2.016   2.648   0.0109 *
## lwidth         8.558      1.551   5.518 1.35e-06 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.969 on 48 degrees of freedom
##   (150 observations deleted due to missingness)
## Multiple R-squared:  0.4634, Adjusted R-squared:  0.441
## F-statistic: 20.73 on 2 and 48 DF,  p-value: 3.249e-07
```

Dobivamo statistički značajne regresijske koeficijente, ali manji koeficijent determinacije. Međutim, isključivanje statistički insignifikatnih regresora nije uvijek poželjno. U daljnjim razmatranjima, potaknuti domenskim znanjem, ćemo zanemariti redundantne regresore. Uzeti čemo u obzir relevantne, ali statistički insignifikantne - obujam motora.

Rezultati i interpretacija

Dobiveni koeficijent determinacije iznosi $R^2 \approx 0.52$, a prilagođeni $R^2 \approx 0.49$, što znači da model objašnjava oko 52% varijabilnosti cijene vozila. To ukazuje na umjerenu linearnu povezanost između cijene i korištenih regresora.

Pojedinačni regresori pokazuju sljedeće: Veličina i snaga motora te potrošnja umjereno utječu na cijenu. Dimenzije također imaju imaju slabi pozitivan utjecaj.

Snaga motora je insignifikantna zbog snažne povezanosti s veličinom motora. Visoko je korelirana sa veličinom motora, ali slabije korelirana sa cijenom nego što je to veličina motora. Vidimo da je p-vrijednosti njegovog koeficijenta velika ($p \approx 0.56$). Dužina je također nesignifikatna, vjerojatno zbog redundatnosti sa drugom dimenzijom veličine - širinom. Domensko znanje nam također govori da je razumno pretpostaviti da širina ima veći utjecaj na cijenu nego dužina. Vidimo veliku korelaciju između njih te veliku p-vrijednost regresijskog koeficijenta dužine ($p \approx 0.57$).

$R^2_{adj} \approx R^2$ potvrđuje da je model prikladan i da je odabrani skup regresora smislen. Posebice u modelu koji ne uzima u obzir redundatne regresore.

U konačnici se pokazalo da je i obujam motora insignifikatna varijabla. Statistički jedini značajan model iz prethodne cjeline predviđa linearnu vezu između gradske potrošnje i širine vozila. Model predviđa neznatno manje snažan utjecaj na cijenu: $R^2 \approx 0.46$, $R^2_{adj} \approx 0.44$, no sada model objašnjava manje od 50% varijabilnosti cijene vozila, stoga zaključujemo da je riječ o slaboj vezi između regresora i cijene, a ne značajnoj.

Zaključak

Model objašnjava umjereno visok udio varijabilnosti cijene , što ukazuje na umjerenu linearnu povezanost između cijene i određenih tehničkih karakteristika automobila.

Međutim nema dovoljno dokaza da bi na temelju uzorka opravdali tu vezu.

Dokazano postoji slaba veza između gradske potrošnje i širine automobila te cijene.

Automobili većeg obujma motora, veće veličine, napose širine te veće potrošnje goriva obično imaju veću cijenu, no postoje i drugi faktori koji značajno utječu na cijenu izvan navedenih.

Pitanje 4: Postoji li veza izmedu tipa pogona (prednji vs. stražnji) i tipa karoserije (sedan vs. hatchback)?

Cilj zadatka je utvrditi da li postoji povezanost između tipa pogona (prednji ili stražnji) i tipa karoserije (sedan ili hatchback). Koristimo χ^2 test za neovisnost. Prvo moramo učitati i obraditi naše podatke.

4.1. Unos podataka

Prvo obradimo tablicu tako da maknemo stupce koji nas ne zanimaju i ostavimo one koje trebamo (tip pogona i tip karoserije)

```
data2 = select(my_cars, c("body.style", "drive.wheels"))
```

Za svaki slučaj mićemo podatke gdje je jedna od varijablih nedefinirana.

```
data2 = na.omit(data2)
```

Zatim filtriramo naše podatke tako da ostanu samo oni tipovi pogona i karoserije koje mi koristimo (prednji i stražnji za pogon, hatchback i sedan za karoseriju).

```
#filtar za tip karoserije
data2 = filter(data2, is.element(body.style, c("hatchback", "sedan")))

#filtar za tip pogona
data2 = filter(data2, is.element(drive.wheels, c("fwd", "rwd")))
```

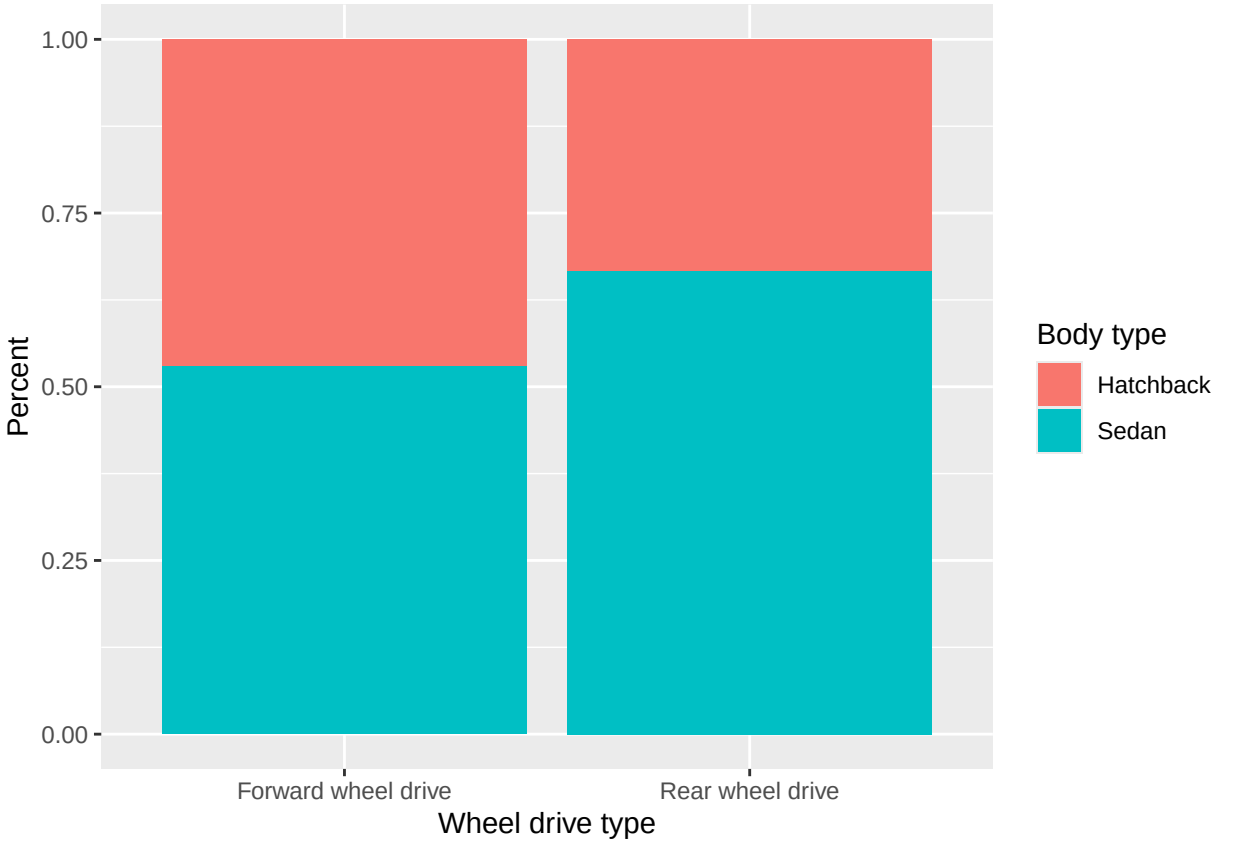
4.2. χ^2 test

Generiramo kontingencijsku tablicu da proučimo podatke i graf za vizualizaciju odnosa podataka međusobno.

```
tab = table(data2$body.style, data2$drive.wheels)
tab
```

```
##
##             fwd rwd
##   hatchback  49  18
##   sedan      55  36
```

```
#graf
library(ggplot2)
xx = c(rep("Forward wheel drive", 2), rep("Rear wheel drive", 2))
yy = rep(c("Hatchback", "Sedan"), 2)
tabpl = tab[1:4]
datapl = data.frame(tab)
ggplot(datapl, aes(fill=yy, x=xx, y=tabpl)) +
  geom_bar(position = "fill", stat = "identity") +
  xlab("Wheel drive type") +
  ylab("Percent") +
  scale_fill_discrete(name = "Body type")
```



Vidimo da je jedina prava pretpostavka za χ^2 test (svaka observacija u tablici iznad 5) ispunjena. Druga pretpostavka, isključivost kategorija, implicitno ispunjujemo prema značenju kategorija (npr. auto ne može istovremeno biti hatchback i sedan). Graf nam ukazuje da je moguće da postoji neka povezanost između tipa karoserije i pogona.

Možemo postaviti našu hipotezu:

$$H_0 : o_i = e_i,\ i = \{1, ..., k\}$$
$$H_1 : o_i \neq e_i,\ \exists i$$
$$\alpha = 0.05$$

gdje je k ukupan broj svih kategorija.

Zatim jednostavno napravimo χ^2 test.

```
result = chisq.test(tab)
result
```

```
##
##  Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction
##
## data:  tab
## X-squared = 2.2289, df = 1, p-value = 0.1355
```

Vidimo da je dobivena p-vrijednost $> \alpha$.

Zaključak

Prema rezultatu χ^2 testa, ne možemo odbaciti H_0 hipotezu, te nastavljamo pod prepostavkom da su tip pogona i tip karoserije uistinu nezavisni.

Dodatno

Također možemo vidjeti tablicu očekivanih vrijednosti i usporediti sa dobivenim.

Očekivane vrijednosti

```
##
##             fwd rwd
##   hatchback  44  23
##   sedan      60  31
```

Dobivene vrijednosti

```
##
##             fwd rwd
##   hatchback  49  18
##   sedan      55  36
```

Vidimo da su vrijednosti zapravo dosta različite (što spada sa relativno niskom p-vrijednosti), no ne dovoljno da bi kategorije bile statistički značajno povezane.