

Chương I

BỒ TÚC TOÁN

Nội dung chính : Trong chương này, chúng ta sẽ nhắc lại một cách khái quát các thuật ngữ và kiến thức toán học sẽ được dùng đến trong suốt giáo trình. Đó là các kiến thức liên quan đến đồ thị, cây, tập hợp, quan hệ và một vài phương pháp chứng minh toán học thông thường. Nếu các khái niệm này là mới đối với bạn, bạn nên xem lại một cách cẩn thận. Ngược lại, nếu chúng không là mới, bạn có thể đọc lướt nhanh qua chương này, nhưng hãy chắc chắn rằng mình đã nắm rõ về chúng.

Mục tiêu cần đạt : Sau chương này, sinh viên có thể :

- Xác định tập hợp và các phép toán cơ bản trên tập hợp
- Định nghĩa một quan hệ, lớp quan hệ và các tính chất của quan hệ.
- Xác định quan hệ tương đương và phép bao đóng.
- Chứng minh một phát biểu toán học theo phương pháp quy nạp.
- Nắm vững các khái niệm về đồ thị và cây.

Kiến thức cơ bản : Các kiến thức Toán có liên quan.

Tài liệu tham khảo :

[1] John E. Hopcroft, Jeffrey D.Ullman – *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation* – Addison – Wesley Publishing Company, Inc – 1979 (*trang 1 – trang 12*).

[2] V.J. Rayward-Smith – *A First course in Formal Language Theory (Second Editor)* – McGraw-Hill Book Company Europe – 1995 (**Chapter 1: Mathematical Prerequisites**)

[3] Các giáo trình về Toán rời rạc

I. TẬP HỢP (Sets)

Một **tập hợp** là tập các đối tượng không có sự lặp lại. Mỗi đối tượng trong tập hợp được gọi là phần tử (element) của tập hợp đó.

1.1. Ký hiệu tập hợp

Nếu số phần tử trong một tập hợp không quá lớn, hay nói cách khác – tập hợp là hữu hạn, tập hợp có thể được đặc tả bằng cách liệt kê các phần tử của nó.

Thí dụ 1.1 : D xác định tập hợp các ngày trong tuần :
 $D = \{ Mon, Tues, Wed, Thurs, Fri, Sat, Sun \}$

Các phần tử trong tập hợp viết cách nhau bởi dấu “, “ và đặt trong cặp dấu { và }. Không có sự bắt buộc về thứ tự liệt kê các phần tử trong tập hợp. Chẳng hạn, tập hợp D cũng tương đương với tập hợp sau :

$$D = \{ Mon, Wed, Fri, Thurs, Sun, Tues, Sat \}$$

Nếu phần tử x là thành phần của tập hợp A , ta viết $x \in A$ (đọc là x thuộc A), và nếu x không là phần tử của A , ta viết $x \notin A$ (đọc là x không thuộc A). Chẳng hạn : $Mon \in D$ nhưng $Kippers \notin D$.

Nếu một tập hợp chứa một số khá lớn các phần tử hay thậm chí là một số vô hạn, người ta có thể không liệt kê tất cả các phần tử mà đặc tả tập hợp theo một số tính chất đặc trưng của nó.

Thí dụ 1.2 : $D = \{ x \mid x \text{ là một ngày trong tuần} \}$
 $P = \{ y \mid y \text{ là số nguyên tố} \}$
 $X = \{ x \mid x > 2 \}$

Mọi tập hợp đều chứa các phần tử thuộc vào một không gian xác định nào đó, ký hiệu là U . Không gian tương ứng có thể được định nghĩa là một tập số nguyên, số thực, ...

Một trường hợp đặc biệt của tập hợp là tập hợp rỗng (empty set). Tập hợp này không có chứa bất kỳ phần tử nào, ký hiệu bởi \emptyset hoặc $\{ \}$.

Ta nói tập hợp A là tập hợp con (subset) của tập hợp B khi mọi phần tử của A là thành phần của B (ký hiệu $A \subseteq B$). Ngược lại, A không là tập con của B ($A \not\subseteq B$).

Thí dụ 1.3 : $\{ 1, 2, 4 \} \subseteq \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ nhưng $\{ 2, 4, 6 \} \not\subseteq \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

Có thể suy ra rằng tập hợp $A \subseteq U$ và $\emptyset \subseteq A, \forall A$

Hai tập hợp A và B được gọi là bằng nhau ($A = B$), khi $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$

Thí dụ 1.4 : $\{ 1, 2, 3, 4 \} = \{ 2, 1, 4, 3 \}$ nhưng $\{ 1, 2, 3, 4 \} \neq \{ 2, 1, 3, 5 \}$

Tập hợp tất cả các tập hợp con của tập A được gọi là tập lũy thừa (power set) của A và xác định bởi 2^A .

Thí dụ 1.5 : Giả sử $A = \{ 1, 2, 3 \}$
Thì $2^A = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\} \}$

1.2. Các phép toán trên tập hợp

Các toán tử cơ bản trên tập hợp bao gồm các toán tử một ngôi (unary) và hai ngôi (binary) như sau :

- 1) Phép phần bù (complement) : $A' = \{x \mid x \in A\}$
- 2) Phép hợp (union) : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$
- 3) Phép giao (intersection) : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$
- 4) Phép trừ (difference) : $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ nhưng } x \notin B\}$
- 5) Tích Descartes : $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ và } b \in B\}$

Thí dụ 1.6 : Cho $A = \{1, 2\}$ và $B = \{2, 3\}$

Ta có : $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A \setminus B = \{1\}$$

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Lưu ý : Nếu A và B lần lượt có số phần tử là n và m thì tập hợp $A \times B$ có $n \times m$ phần tử và tập 2^A có 2^n phần tử.

II. QUAN HỆ (Relations)

Cho hai tập hợp A và B. Một **quan hệ** hai ngôi R giữa A và B là tập hợp chứa tất cả các tập hợp con của $A \times B$ mà thành phần thứ nhất A được gọi là *miền xác định* (domain) của R, còn B gọi là *miền giá trị* (range) của R (có thể trùng với miền xác định). Chúng ta sẽ thường dùng quan hệ hai ngôi mà miền xác định và miền giá trị cùng thuộc một tập hợp S nào đó. Trong trường hợp này, ta gọi đây là một quan hệ trên S. Nếu R là một quan hệ và (a,b) là một cặp trong R thì ta viết aRb .

Thí dụ 1.7 : Cho $S = \{0, 1, 2, 3\}$

. Quan hệ "thứ tự nhỏ hơn" trên S được xác định bởi tập :

$$L = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

. Quan hệ "bằng" trên S được xác định bởi tập :

$$E = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

. Quan hệ "chẵn lẻ" trên S được xác định bởi tập :

$$P = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (0, 2), (2, 0), (1, 3), (3, 1)\}$$

Các tính chất của quan hệ

Ta gọi một quan hệ R trên tập S là:

- Phản xạ (reflexive) : nếu aRa là đúng $\forall a \in S$
- Đối xứng (symmetric) : nếu aRb thì bRa
- bắc cầu (transitive) : nếu aRb và bRc thì aRc

Thí dụ 1.8 :

. L không là quan hệ phản xạ trên S vì $(0, 0) \notin L$, nhưng E và P là 2 quan hệ mang tính phản xạ.

. L không là quan hệ đối xứng trên S vì $(0, 1) \in L$ nhưng $(1, 0) \notin L$, tuy nhiên cả E và P đều mang tính đối xứng.

. Cả L, E và P đều là các quan hệ mang tính bắc cầu, nhưng $X = \{(1, 0), (0, 3)\}$ thì không vì $(1, 3) \notin X$.

2.1. Quan hệ tương đương

Một quan hệ R trên tập S có đủ các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu được gọi là quan hệ tương đương.

Thí dụ 1.9 : E và P là các quan hệ tương đương, còn L và X không là các quan hệ tương đương trên S.

Một tính chất quan trọng của quan hệ tương đương là nếu R là quan hệ tương đương trên tập S thì R phân hoạch tập S thành các lớp tương đương (equivalence class) S_i không rỗng và rời nhau, tức là $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots$ và với mọi $i \neq j$ ta có :

$$+ S_i \cap S_j = \emptyset$$

+ Với mỗi a, b cùng thuộc S_i thì aRb là đúng.

+ Với mỗi $a \in S_i$ và $b \in S_j$ thì aRb là sai.

Lưu ý rằng số lớp tương đương có thể là vô hạn. Vậy nếu R là quan hệ tương đương trên S và $a \in S$, ta có :

$$S_i = [a] = \{b \in S \mid aRb\}$$

Thí dụ 1.10 :

. E có 4 lớp tương đương khác nhau: $[0] = \{0\}$, $[1] = \{1\}$, $[2] = \{2\}$ và $[3] = \{3\}$

. P có 2 lớp tương đương khác nhau: $[0] = [2] = \{0, 2\}$ và $[1] = [3] = \{1, 3\}$

2.2. Bao đóng của quan hệ

Giả sử P là tập hợp một số tính chất của các quan hệ, bao đóng P (P - closure) của một quan hệ R trên tập S là quan hệ nhỏ nhất có chứa tất cả các cặp của R thoả mãn các tính chất trong P.

• **Bao đóng bắc cầu R^+** của R được xác định như sau :

i) Nếu (a, b) thuộc R thì (a, b) thuộc R^+ .

ii) Nếu (a, b) thuộc R^+ và (b, c) cũng thuộc R thì (a, c) thuộc R^+ .

iii) Không còn gì thêm trong R^+ .

• **Bao đóng phản xạ và bắc cầu R^*** của R được xác định như sau :

$$R^* = R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in S\}$$

Thí dụ 1.11 : Cho quan hệ $R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ trên tập hợp $S = \{1, 2, 3\}$

Khi đó ta có :

$$R^+ = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3)\}$$

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

III. PHÉP CHỨNG MINH QUY NẠP

Phần lớn các định lý trong giáo trình sẽ được chứng minh bằng phương pháp *quy nạp toán học* :

Giả sử ta cần chứng minh một mệnh đề $P(n)$ với n là một số nguyên không âm. Nguyên lý quy nạp toán học cho $P(n)$ được chứng minh theo 2 bước như sau :

- i) $P(0)$, và
- ii) $P(n-1)$ kéo theo $P(n)$, $\forall n \geq 1$.

Bước (i) được gọi là cơ sở quy nạp, bước (ii) được gọi là bước quy nạp với $P(n-1)$ là giả thiết quy nạp.

Thí dụ 1.12 : Dùng quy nạp, chứng minh biểu thức :

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Cơ sở quy nạp : Thay $n = 0$ trong vế phải của biểu thức và nhận thấy cả 2 vế đều bằng 0 $\Rightarrow P(0)$ luôn đúng.

Bước quy nạp : Thay n bởi $n-1$ để có được giả thiết quy nạp $P(n-1)$, sau đó tìm cách để chứng minh $P(n)$, tức chứng minh $\forall n \geq 1$, ta có :

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \Rightarrow \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ta có nhận xét rằng :

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + n^2$$

Vậy nếu ta vận dụng giả thiết quy nạp thì chỉ còn phải chứng minh biểu thức :

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

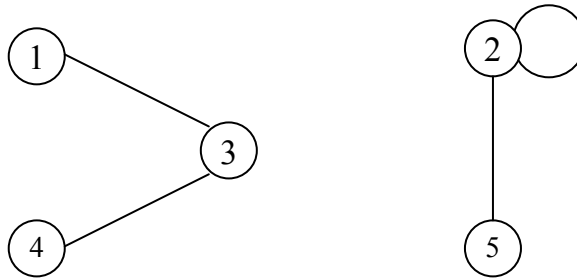
Với một vài phép biến đổi đại số đơn giản, biểu thức trên có thể được chứng minh dễ dàng. Hay $P(n)$ được chứng minh, $\forall n$.

IV. ĐỒ THỊ VÀ CÂY

4.1. Đồ thị (Graph)

Một đồ thị, ký hiệu $G = (V, E)$, bao gồm một tập hữu hạn các đỉnh V (còn gọi là nút) và một tập các cạnh E nối giữa 2 nút.

Thí dụ 1.13 : Đồ thị cho bởi : $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
và $E = \{(n, m) \mid n + m = 4 \text{ hoặc } n + m = 7\}$



Hình 1.1 - Ví dụ về đồ thị

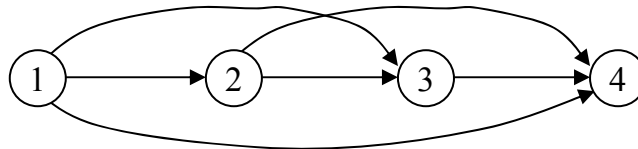
Một đường đi (path) trên một đồ thị là dãy các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_k, k \geq 1$, sao cho trong đó có một cạnh (v_i, v_{i+1}) cho mỗi $i, 1 \leq i < k$. Độ dài của đường đi là $k - 1$. Nếu $v_1 = v_k$ thì đường đi là một chu trình.

Chẳng hạn : 1, 3, 4 là một đường đi trong đồ thị trên.

Đồ thị có hướng (directed graph)

Một đồ thị có hướng cũng là dạng đồ thị được xác định bởi $G = (V, E)$, trong đó V là tập các đỉnh, còn E là tập các đỉnh có thứ tự gọi là các cung (hay các đường nối có hướng giữa 2 đỉnh). Ký hiệu một cung từ v đến w có dạng $v \rightarrow w$.

Thí dụ 1.14 : Đồ thị có hướng $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{i \rightarrow j \mid i < j\})$



Hình 1.2 - Một đồ thị có hướng

Một đường đi trên một đồ thị có hướng là dãy các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_k, k \geq 1$, sao cho với mỗi $i, 1 \leq i < k$, có một cung từ v_i đến v_{i+1} . Chẳng hạn $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ là một đường đi trên đồ thị định hướng trên (từ 1 đến 4).

4.2. Cây (trees)

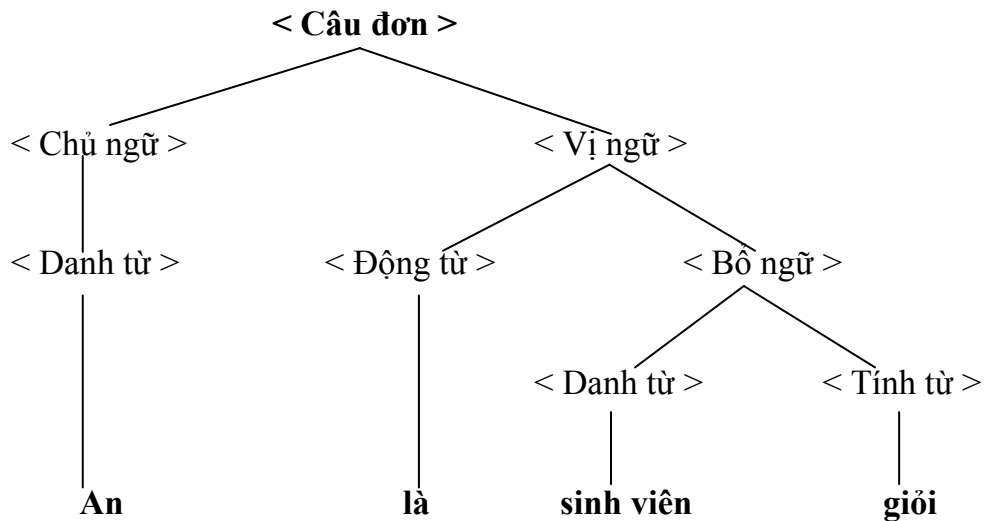
Cây (cây định hướng có thứ tự) là một đồ thị có hướng với các tính chất sau :

- i) Có một nút đỉnh gọi là nút gốc
- ii) Mỗi nút còn lại đều được dẫn ra từ một nút cha ở trên nó :
 - Các nút có dẫn ra nút con sau nó được gọi là nút trung gian hay nút trong.
 - Các nút không dẫn ra nút con gọi là nút lá.
- iii) Thứ tự duyệt trên cây là từ trái sang phải.

Trong một cây, người ta thường dùng các khái niệm nút cha và nút con để lần lượt chỉ thứ tự trước và sau của sự phát sinh nút từ nút gốc trên cây. Nếu có một đường đi từ nút v_1 đến nút v_2 thì v_1 được gọi là nút cha của v_2 và ngược lại, v_2 sẽ là nút con của nút v_1 .

Ta thường vẽ cây với nút gốc ở trên cùng và các cung chỉ xuống phía dưới, do vậy các ký hiệu mũi tên trở nên không còn cần thiết nữa. Các nút con của mỗi nút trên cây sẽ được vẽ lần lượt từ trái qua phải theo thứ tự đã xác định.

Thí dụ 1.15 : Cây minh họa cấu trúc cú pháp của một câu đơn trong ngôn ngữ tiếng Việt "An là sinh viên giỏi"



Hình 1.3 - Cây minh họa một câu đơn

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1. Nếu không gian tập hợp là tập các số nguyên dương nhỏ hơn 20. Hãy viết rõ các phần tử trong các tập hợp được xác định như sau :

- a) $\{ x \mid x + 2 < 10 \}$
- b) $\{ x \mid x \text{ là số nguyên tố} \}$
- c) $\{ x \mid x = x^2 \}$
- d) $\{ x \mid 2x = 1 \}$
- e) $\{ x \mid 3x < 20 \}$

1.2. Cho tập hợp $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Hãy viết rõ các phần tử trong các tập hợp được xác định như sau :

- f) $\{ x \mid x \in S \text{ và } x \text{ chẵn} \}$
- g) $\{ x \mid x \in S \text{ và } x \geq x^2 + 1 \}$

1.3. Cho $A = \{0, 1, 2\}$ và $B = \{0, 3, 4\}$. Hãy viết rõ các tập hợp sau :

$$A \cup B ; A \cap B ; A \setminus B ; A \times B \text{ và } 2^A$$

1.4. Cho ví dụ về quan hệ :

- a) Phản xạ và đối xứng, nhưng không bắc cầu.
- b) Phản xạ và bắc cầu, nhưng không đối xứng.
- c) Đối xứng và bắc cầu, nhưng không phản xạ.

Trong mỗi trường hợp trên, chỉ rõ tập hợp trên đó quan hệ được xác định.

1.5. Chứng minh các quan hệ sau đây là các quan hệ tương đương và cho các lớp tương đương của chúng.

a) Quan hệ R_1 trên các số nguyên định nghĩa bởi : iR_1j khi và chỉ khi $i = j$.

b) Quan hệ R_2 trên một tập thể người định nghĩa bởi : pR_2q khi và chỉ khi p, q sinh cùng ngày và cùng năm.

1.6. Cho tập hữu hạn A . Hãy tìm những quan hệ tương đương trên A có số các lớp tương đương là lớn nhất hay nhỏ nhất.

1.7. Cho hai tập hợp sau $A = \{2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Giả sử R là quan hệ :

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$$

Hãy liệt kê các cặp quan hệ thứ tự trong R.

1.8. Tìm bao đóng bắc cầu, bao đóng phản xạ và bắc cầu của quan hệ được cho như sau trên $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$:

$$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4)\}$$

1.9. Cho $S = \{0, 1, 2\}$ và $R = \{(0, 1), (1, 2)\}$. Tìm R^* và R^+ .