V - Filtres de Kalman

Romain HÉRAULT

INSA Rouen

Automne 2015

Section 1

Filtre de Kalman

Filtre de Kalman : Quand peut-on l'appliquer ?

Processus Markovien

Dynamique	Observation
$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}$	$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}$
$\mathbf{x}_k \vert \mathbf{x}_{k-1} \sim p(\mathbf{x}_k \vert \mathbf{x}_{k-1})$	$\mathbf{y}_k \vert \mathbf{x}_k \sim p(\mathbf{y}_k \vert \mathbf{x}_k)$

Espaces d'état et d'observation continus, f et g linéaire, bruits gaussiens $\Rightarrow$

Filtre de Kalman

Filtre de Kalman : Modèles et notations

Modèles du Filtre de Kalman

Dynamique	Observation
$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}$	$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{r}$
$\mathbf{x}_k \vert \mathbf{x}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_k \vert \mathbf{A}.\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q})$	$\mathbf{y}_k \vert \mathbf{x}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{y}_k \vert \mathbf{H}.\mathbf{x}_k, \mathbf{R})$

Distributions des états et des observations

- Pour les états

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{m}_k^-, \mathbf{P}_k^-) \ , \\
p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k) \ ,
\end{aligned}
$$

- Pour les observations

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k|\mathbf{H}\mathbf{m}_k^-, \mathbf{S}_k) \ .$$

Filtre de Kalman : Prédiction

Prédiction

On cherche

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{m}_k^-, \mathbf{P}_k^-) \quad ,$$

On applique le modèle de dynamique,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{m}_{k-1} \quad , \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} + \mathbf{Q} \quad . \end{aligned}$$

Filtre de Kalman : Mise à jour

Mise à jour

On cherche

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k) \quad ,$$

On corrige la prédiction par l'observation k,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{m}_k^- \quad , \\
\mathbf{S}_k &= \mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\mathsf{T} + \mathbf{R} \quad , \\
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\mathsf{T}\mathbf{S}_k^{-1} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k \quad , \\
\mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T \quad .
\end{aligned}$$

Outils pour la preuve (A)

Propriété A

Si deux variables aléatoires **w** et **z** suivent les distributions normales suivantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{P}) \\ \mathbf{z}|\mathbf{w} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{w} + \mathbf{u}, \mathbf{R})\end{aligned}$$

alors

1. la distribution jointe $\begin{pmatrix}\mathbf{w} \\ \mathbf{z}\end{pmatrix}$ est donnée par

$$\mathbf{w}, \mathbf{z} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{m} \\ \mathbf{H}\mathbf{m} + \mathbf{u}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{H}^\intercal \\ \mathbf{H}\mathbf{P} & \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^\intercal + \mathbf{R}\end{pmatrix}\right)$$

2. la distribution marginale de **z** est donnée par

$$\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{m} + \mathbf{u}, \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^\intercal + \mathbf{R})$$

Outils pour la preuve (B)

Propriété B

Si deux variables aléatoires $\mathbf{w}$ et $\mathbf{z}$ suivent une distribution jointe de la forme suivante,

$$\mathbf{w}, \mathbf{z} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{C}^\intercal & \mathbf{B}\end{pmatrix}\right)$$

alors les distributions marginales et conditionnelles de ces variables sont données par,

1. $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{A})$
2. $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{b}, \mathbf{B})$
3. $\mathbf{w}|\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{b}), \mathbf{A} - \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^\intercal)$
4. $\mathbf{z}|\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{b} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \mathbf{B} - \mathbf{C}^\intercal\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})$

Preuve de la prédiction

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1}) \\ \mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}) \end{aligned}$$

En appliquant la propriété A, on obtient,

$$\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{m}_{k-1} \\ \mathbf{A}\mathbf{m}_{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{k-1} & \mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top \\ \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1} & \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q} \end{pmatrix}\right)$$

En appliquant la propriété B.2, on obtient,

$$\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{A}\mathbf{m}_{k-1}, \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q})$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{m}_{k-1} \ , \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q} \ . \end{aligned}$$

Preuve de la mise à jour

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_k^-, \mathbf{P}_k^-) \\ \mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{1:k-1} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}) \end{aligned}$$

En appliquant la propriété A, on obtient,

$$\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{m}_k^- \\ \mathbf{H}\mathbf{m}_k^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{P}_k^- & \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\intercal \\ \mathbf{H}\mathbf{P}_k^- & \mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\intercal + \mathbf{R} \end{pmatrix}\right)$$

En appliquant la propriété B.3, on obtient,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k|\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}(\quad & \mathbf{m}_k^- + \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\intercal(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\intercal + \mathbf{R})^{-1}[\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{m}_k^-] \;, \\ & \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\intercal(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\intercal + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_k^- + \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\intercal(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\intercal + \mathbf{R})^{-1}[\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{m}_k^-] \;, \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\intercal(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\intercal + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \;. \end{aligned}$$

Voiture subissant une force constante : Modèles

Modèles

Dynamique

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}.\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}_{k-1}$$

avec $\mathbf{q}_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$

$$\mathbf{x}_k \sim p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{A}.\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q})$$

Observation

$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}$$

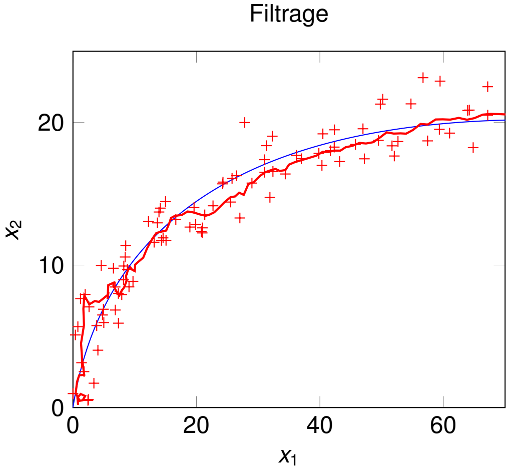
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}.\mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k$$

avec $\mathbf{r}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$

$$\mathbf{y}_k \sim p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k|\mathbf{H}.\mathbf{x}_k, \mathbf{R})$$

Voiture subissant une force constante : Filtrage



Section 2

Filtre de Kalman étendu

Série de Taylor

Soit $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{z} + \partial\mathbf{x}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{G_x}(\mathbf{z})\partial\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\partial\mathbf{x}^\mathsf{T}\, \mathbf{G}_{\mathbf{xx}}^{(i)}(\mathbf{z})\, \partial\mathbf{x}\, \mathbf{e}_i + \dots$$

où $\mathbf{G_x}(\mathbf{z})$ est la jacobienne de $\mathbf{g}$, pour $i \in [1..m]$ et $j \in [1..n]$,

$$[\mathbf{G_x}(\mathbf{z})]_{i,j} = \left.\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}} \quad ,$$

et où $\mathbf{G}_{\mathbf{xx}}^{(i)}(\mathbf{z})$ est la Hessienne de g_i, pour $i \in [1..m]$, $j \in [1..n]$ et $j' \in [1..n]$,

$$[\mathbf{G}_{\mathbf{xx}}^{(i)}(\mathbf{z})]_{j,j'} = \left.\frac{\partial^2 g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_{j'}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}} \quad ,$$

et où $\mathbf{e}_i$ est le vecteur unité de direction i.

Filtre de Kalman étendu du premier ordre (bruit additif)

$$\begin{array}{cc} \text{Dynamique} & \text{Observation} \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q} & \mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{r} \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q} & \mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r} \end{array}$$

On approche les matrices du modèle linéaire par les jacobiennes de **f** et **h**,

$$\Rightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{F}_\mathbf{x}(.) \text{ et } \mathbf{H} \simeq \mathbf{H}_\mathbf{x}(.)$$

Prédiction

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{m}_{k-1} \quad , \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad . \end{aligned}$$

Mise à jour

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{m}_k^- \quad , \\ \mathbf{S}_k &= \mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T + \mathbf{R} \quad , \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T\mathbf{S}_k^{-1} \quad , \\ \mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k \quad , \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T \quad . \end{aligned}$$

Filtre de Kalman étendu du premier ordre (bruit additif)

Dynamique	Observation
$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}$	$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{r}$
$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}$	$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}$

On approche les matrices du modèle linéaire par les jacobiennes de **f** et **h**,

$$\Rightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(.) \text{ et } \mathbf{H} \simeq \mathbf{H}_{\mathbf{x}}(.)$$

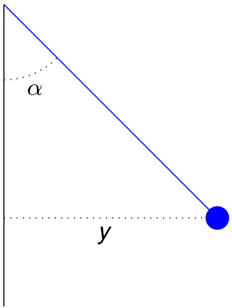
Prédiction

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_k^- &= \mathbf{f}(\mathbf{m}_{k-1}) \ , \\
\mathbf{P}_k^- &= \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m}_{k-1})^T + \mathbf{Q} \ .
\end{aligned}$$

Mise à jour

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k^-) \ , \\
\mathbf{S}_k &= \mathbf{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m}_k^-)^T + \mathbf{R} \ , \\
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m}_k^-)^T\mathbf{S}_k^{-1} \ , \\
\mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k \ , \\
\mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T \ .
\end{aligned}$$

Pendule : exemple de non-linéarité



Modèle physique

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -g\sin(\alpha) + q$$

où α est l'angle du pendule, g la force gravitationnelle et q un bruit gaussien.
On observe la position horizontale du pendule :

$$y = sin(\alpha) + r$$

où r est un bruit gaussien .

Pendule : discrétisation

Modèle de dynamique

$$\begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,k-1} + x_{2,k-1}\Delta_t \\ -g\sin(x_{1,k-1})\Delta_t + x_{2,k-1} \end{pmatrix} + \mathbf{q}_{k-1}$$

où $x_{1,k} = \alpha$, $x_{2,k} = \frac{d\alpha}{dt}$ et,

$$\mathbf{q}_{k-1} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} \frac{q\Delta_t^3}{3} & \frac{q\Delta_t^2}{2} \\ \frac{q\Delta_t^2}{2} & q\Delta_t \end{pmatrix}\right) .$$

La jacobienne du modèle de dynamique est

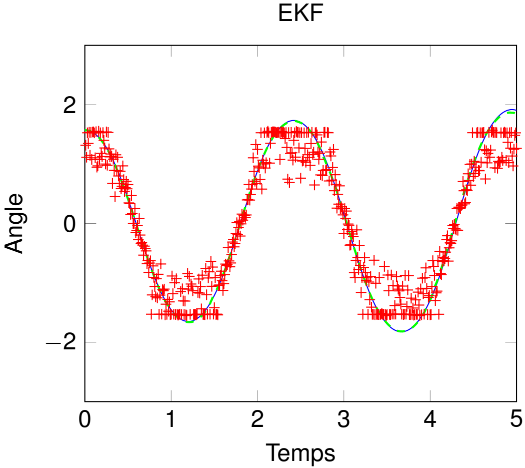
$$\begin{pmatrix} 1 & \Delta_t \\ -g\cos(x_1)\Delta_t & 1 \end{pmatrix}$$

Modèle d'observation

$$\mathbf{y}_k = \sin(x_{1,k}) + r_k$$

où $r \sim \mathcal{N}(0, R)$.
La jacobienne du modèle d'observation est $\begin{pmatrix} \cos(x_1) & 0 \end{pmatrix}$.

Pendule : EKF



Filtre de Kalman étendu du second ordre (bruit additif)

Pour le filtre du second ordre, la non-linéarité est approchée en gardant les termes du second ordre de la série de Taylor.

Prédiction

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_k^- &= \mathbf{f}(\mathbf{m}_{k-1}) + \frac{1}{2}\sum_i \mathbf{e}_i\, tr\left(\mathbf{F}_{\mathbf{xx}}^{(i)}(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{P}_{k-1}\right) \ , \\
\mathbf{P}_k^- &= \mathbf{F}_\mathbf{x}(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_\mathbf{x}(\mathbf{m}_{k-1})^\mathsf{T} + \mathbf{Q} + \frac{1}{2}\sum_{i,i'} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_{i'}^\mathsf{T}\, tr\left(\mathbf{F}_{\mathbf{xx}}^{(i)}(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{\mathbf{xx}}^{(i')}(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{P}_{k-1}\right) \ .
\end{aligned}$$

Mise à jour

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k^-) - \frac{1}{2}\sum_i \mathbf{e}_i\, tr\left(\mathbf{H}_{\mathbf{xx}}^{(i)}(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{P}_k^-\right) \ , \\
\mathbf{S}_k &= \mathbf{H}_\mathbf{x}(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_\mathbf{x}(\mathbf{m}_k^-)^\mathsf{T} + \mathbf{R} + \frac{1}{2}\sum_{i,i'} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_{i'}^\mathsf{T}\, tr\left(\mathbf{H}_{\mathbf{xx}}^{(i)}(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_{\mathbf{xx}}^{(i')}(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{P}_k^-\right) \ , \\
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_\mathbf{x}(\mathbf{m}_k^-)^\mathsf{T}\mathbf{S}_k^{-1} \ , \\
\mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k \ , \\
\mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^\mathsf{T} \ .
\end{aligned}$$

Section 3

Filtre de Kalman unscented

Transformation unscented (1)

Soit deux variables aléatoires, **v** et **z** formant une transformation additive,

$$\mathbf{v} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{P}) \qquad \mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{v}) + \mathbf{q} \ .$$

Soit la distribution jointe,

$$\mathbf{v}, \mathbf{z} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\mu}_U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{C}_U \\ \mathbf{C}_U^\intercal & \mathbf{S}_U \end{pmatrix} \right)$$

Les paramètres $\boldsymbol{\mu}_U$, $\mathbf{C}_U$ et $\mathbf{S}_U$ de la distribution jointe de cette transformation additive peuvent être obtenus par une approchée gaussienne.

Transformation unscented (2)

Tirage

On tire $2n+1$ points, dits *sigma-points*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}^{(0)} &= \mathbf{m} \ , \\
\mathcal{V}^{(i)} &= \mathbf{m} + \sqrt{n+\lambda}\left[\sqrt{\mathbf{P}}\right]_i \quad \forall i \in [1, \ldots, n] \ , \\
\mathcal{V}^{(i+n)} &= \mathbf{m} - \sqrt{n+\lambda}\left[\sqrt{\mathbf{P}}\right]_i \quad \forall i \in [1, \ldots, n] \ .
\end{aligned}
$$

Propagation

On propage les sigma-points à travers la fonction non-linéaire

$$\mathcal{Z}^{(i)} = \mathbf{g}(\mathcal{V}^{(i)})$$

Transformation unscented (3)

Estimation des paramètres

On estime les paramètres avec une pondération sur chacun des points

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_U &= \sum_{i=0}^{2n} w_i \mathcal{Z}^{(i)} \quad , \\
\mathbf{S}_U &= \sum_{i=0}^{2n} w_i (\mathcal{Z}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_U)(\mathcal{Z}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_U)^\intercal + Q \quad , \\
\mathbf{C}_U &= \sum_{i=0}^{2n} w_i (\mathcal{V}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_U)(\mathcal{Z}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_U)^\intercal \quad ,
\end{aligned}$$

avec pour pondération

$$\begin{aligned}
w_0 &\propto \frac{\lambda}{n+\lambda} \\
w_i &\propto \frac{\lambda}{2(n+\lambda)} \quad \forall i \neq 0
\end{aligned}$$

Filtrage de Kalman unscented

Pourquoi faire ?

En appliquant (deux fois) cette approche pendant un filtrage de Kalman pour des transformations non-linéaires avec bruit additif, on peut estimer les paramètres des distributions sans passer par des séries de Taylor et donc sans dérivation !

Rappel

Dynamique	Observation
$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}$	$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}$

Filtrage de Kalman unscented : Prédiction

Tirage

$$\mathcal{X}_{k-1} = \{\mathbf{m}_{k-1} \pm \sqrt{n+\lambda}\left[\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}}\right]_i\}$$

Modèle de dynamique

$$\hat{\mathcal{X}}_k^{(i)} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}^{(i)}) \quad \forall i \in [0, \ldots, n]$$

Estimation

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_k^- &= \sum_{i=0}^{2n} w_i \hat{\mathcal{X}}_k^{(i)} \ , \\
\mathbf{P}_k^- &= \sum_{i=0}^{2n} w_i (\hat{\mathcal{X}}_k^{(i)} - \mathbf{m}_k^-)(\hat{\mathcal{X}}_k^{(i)} - \mathbf{m}_k^-)^\intercal + Q \ ,
\end{aligned}$$

Filtrage de Kalman unscented : Mise à jour

Tirage

$$\mathcal{X}_k^- = \{\mathbf{m}_k^- \pm \sqrt{n+\lambda}\left[\sqrt{\mathbf{P}_k^-}\right]_i\}$$

Modèle d'observation

$$\hat{\mathcal{Y}}_k^{(i)} = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^{-(i)}) \quad \forall i \in [0, \ldots, n]$$

Estimation

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_k &= \sum_{i=0}^{2n} w_i \hat{\mathcal{Y}}_k^{(i)} \ , \\
\mathbf{S}_k &= \sum_{i=0}^{2n} w_i (\hat{\mathcal{Y}}_k^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_k)(\hat{\mathcal{Y}}_k^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_k)^\intercal + R \ , \\
\mathbf{C}_k &= \sum_{i=0}^{2n} w_i (\mathcal{X}_k^{-(i)} - \mathbf{m}_k^-)(\hat{\mathcal{Y}}_k^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_k)^\intercal \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{S}_k^{-1} \ , \\
\mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\mu}_k] \ , \\
\mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^\intercal \ .
\end{aligned}$$

Pendule : UKF