II - Signaux aléatoires

Romain HÉRAULT (Alain RAKOTOMAMONJY)

INSA Rouen

Automne 2015

Section 1

Introduction

Motivations

Caractéristiques spécifiques

- Il n'est pas toujours possible d'obtenir une description mathématique d'un signal ;
- Les signaux réels sont aléatoires ou présentent une composante aléatoire.

Exemple

- Cours de la bourse ;
- Température maximale ;
- Consommation d'électricité, dans une région donnée, un jour donné.

Déterministe vs. aléatoire

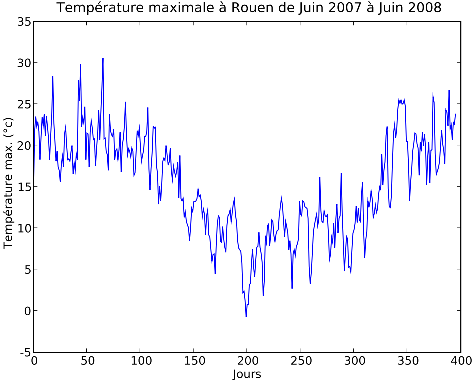
Déterministe

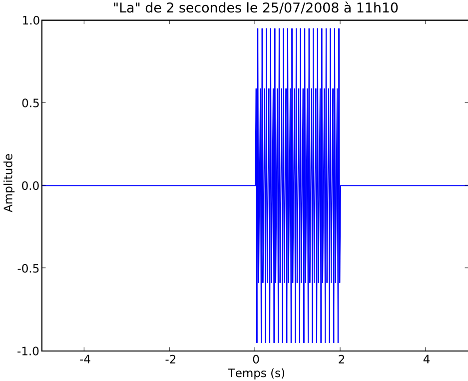
Un signal temporel est défini par une équation mathématique dont la connaissance permet de prédire la valeur du signal à tout moment.

Aléatoire

- La connaissance du signal à l'instant t ne permet pas de préjuger de la valeur à l'instant $t + \Delta t$;
- Le signal est modélisé par ses caractéristiques statistiques.

Exemple : déterministe et aléatoire



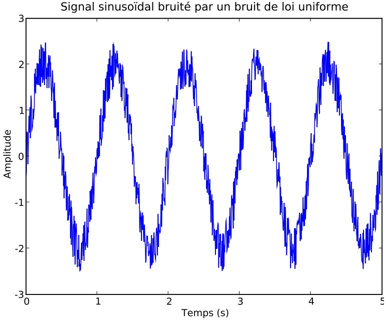


Exemples de signaux aléatoires

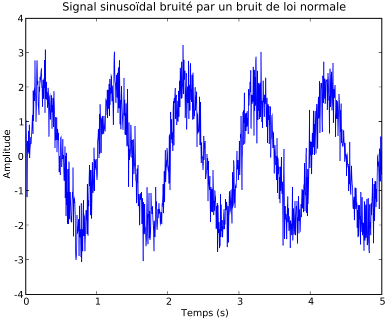
Le signal capté par un récepteur est un signal sinusoïdal bruité,

$$y(t) = 2\sin(2\pi t) + b(t) \quad ,$$

où $b(t)$ est une variable aléatoire.



$b(t)$ suit une loi uniforme



$b(t)$ suit une loi normale

Section 2

Formalisation

Définition formelle d'un signal aléatoire

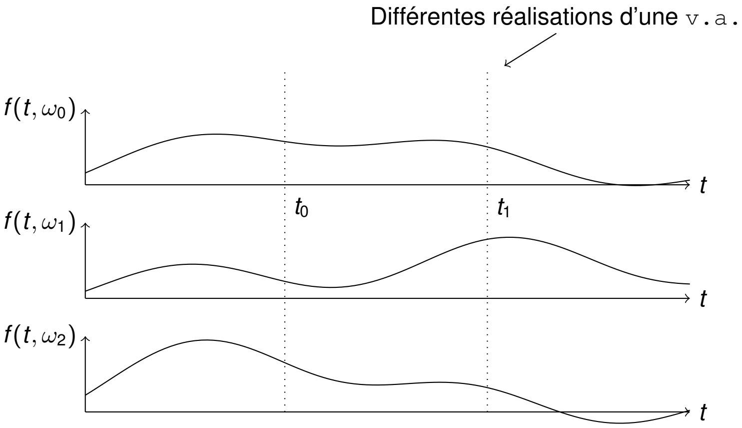
Définition

Un signal aléatoire temporel est une fonction de deux variables. L'un des variables prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'autre étant la réalisation d'une variable aléatoire :

$$f(\underbrace{t}_{temps}, \underbrace{\omega}_{\texttt{v.a.}})$$

- À t fixé, $f(t, \omega)$ est une variable aléatoire ;
- À ω fixé, $f(t, \omega)$ est un signal temporel ;
- Si t est à temps discret, on parle alors de *processus aléatoire*.

Exemple de signal aléatoire



Caractérisation

Signaux aléatoires

- Signal bidimensionnel dépendant du temps et d'une variable aléatoire.
- Comment caractériser un signal dont la valeur à chaque instant est une variable aléatoire ?

Objectifs

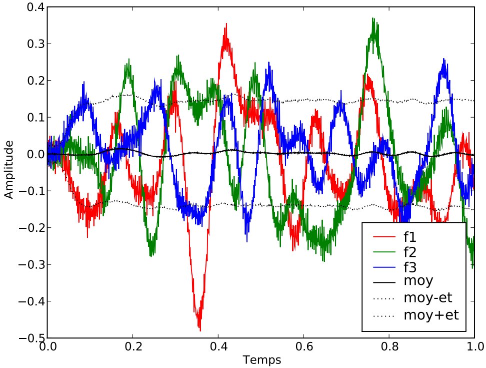
Notion de stationnarité et d'ergodicité

Caractéristiques statistiques

Hypothèse : une infinité d'expériences dans des conditions identiques

Caractéristiques

- Moyenne $m(t)$: $E[x(t)]$
- Corrélation : $R(x; t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)]$
- Covariance : $C(x; t_1, t_2) = E[(x(t_1) - m_{t_1})(x(t_2) - m_{t_2})]$



Stationnarité

Le comportement d'une v.a. n'est pas nécessairement identique à un temps t_1 et t_2 quelconque. Pour s'affranchir de cette difficulté, on définit la notion de stationnarité du signal.

Définition

- Stationnarité du premier ordre : $p_{x(t_1)}(\alpha) = p_{x(t_2)}(\alpha)$
- Stricte stationnarité : les densités de probabilités jointes de toutes les v.a. sont invariantes dans le temps,
  $p_{x(t_1+\tau)\dots x(t_n+\tau)\dots}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) = p_{x(t_1)\dots x(t_n)\dots}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$.

$\Rightarrow$ Ces caractéristiques statistiques sont indépendantes du temps.

Cette hypothèse est difficile à vérifier dans le cas pratique.

Stationnarité d'ordre 2

Dans un contexte applicatif, on se limite, généralement aux cas de stationnarité d'ordre 2.

Conditions

- Égalité des moyennes :
$$E(x(t_1)) = E(x(t_2))$$
- Invariance temporelle des corrélations :
$$E(x(t_1)x(t_2)) = E(x(t_1+\theta)x(t_2+\theta))$$
- Invariance des covariances :
$$C(x(t_1)x(t_2)) = C(x(t_1)x(t_1+\tau)) = C(x(0)x(\tau))$$

Propriétés de la covariance

Sous l'hypothèse de la stationnarité d'ordre 2, nous avons,

- Covariance ≪ mesure ≫ une dépendance linéaire entre les différentes valeurs d'un signal aléatoire.
- La fonction de covariance ne dépend plus que de l'intervalle entre les deux variables considérées.

Propriétés

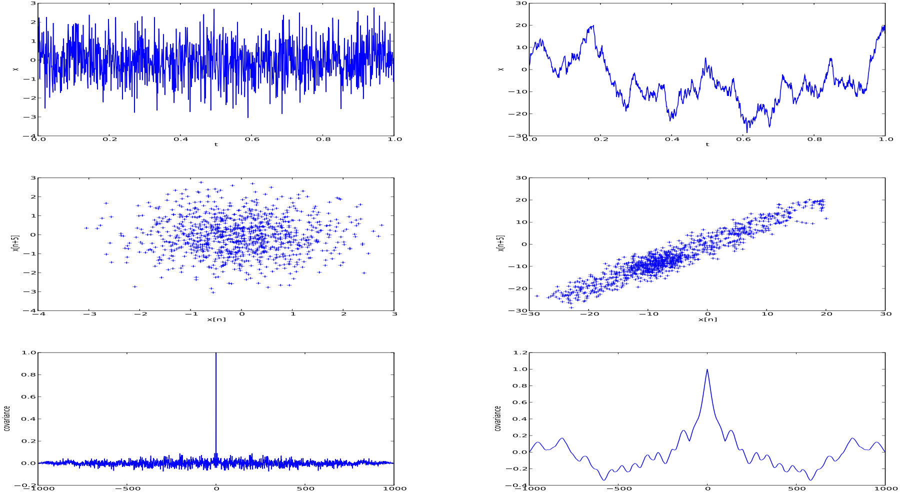
$$
\begin{aligned}
C[x(t_1)x(t_2)] &= C(\tau) \\
C(0) &= Var[x(t)] \\
C(\tau) &= C(-\tau) \\
|C(\tau)| &\leq C(0)
\end{aligned}
$$

Si $x(t)$ est indépendant de $x(t+\tau)$ alors

$$\lim_{\tau\to\infty} C(\tau) \to 0$$

Exemples

Réalisation de deux signaux aléatoires :
(le signal ; x[n],x[n+5] ; auto-covariance)



Érgodicité

Érgodicité

(avec les mains)
Tout moment (calculé sur le temps) d'une seule réalisation converge vers la même valeur pour ce moment quelque soit la résalisation.

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(x(t,\omega))dt = K_g \quad , \quad \forall \omega, t_0 \quad .$$

Ordre 1 :

- L'espérance temporelle de la réalisation ω_i est égale à l'espérance temporelle de la réalisation ω_j quelque soit i et j.

Stationnarité et Érgodicité

Dans la pratique, on ne dispose souvent que d'une réalisation d'un phénomène aléatoire. Il devient donc difficile de caractériser statistiquement le signal aléatoire.

Stationnarité et Érgodicité

L'évolution d'un signal aléatoire au cours du temps apporte la même information qu'un ensemble de réalisations.

Si un signal est stationnaire ET ergodique à tout ordre,

- d.d.p. $X(t,\omega)$ à ω fixé pour tout t est égale à d.d.p. $X(t,\omega)$ à t fixé pour tout ω.

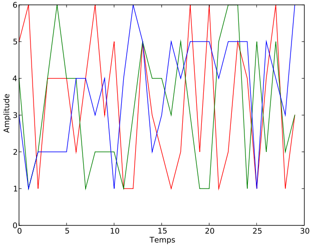
Si un signal est stationnaire ET ergodique d'ordre 2,

$$E[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)dt$$

$$E[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t+\tau)dt$$

Exemples

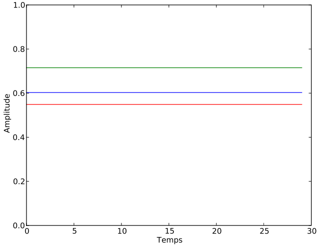
Ergodique et stationnaire



Fonction journalière du résultat d'un jet de dé toutes les minutes.
Le processus est stationnaire et ergodique.

Exemples

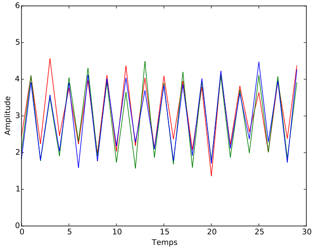
Non-ergodique et stationnaire



$$f(t, \omega_i) = \omega_i$$

où ω_i suit une loi uniforme entre 0 et 1.
Le processus est stationnaire mais non ergodique.

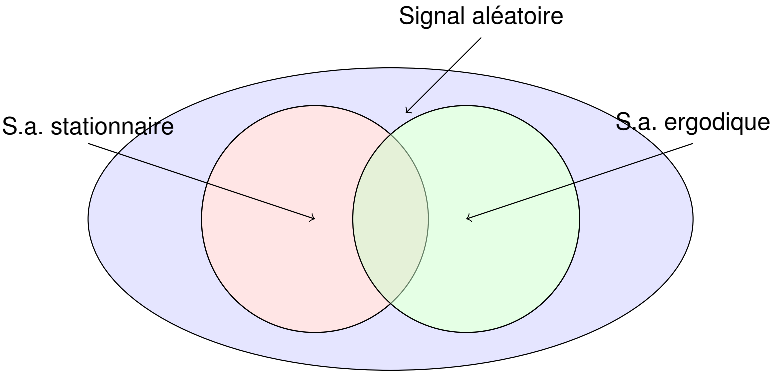
Ergodique et non-stationnaire



En discret, $f(t, \omega)$ est une alternance temporelle de 2 distributions normales ayant des paramètres différents.

Stationnarité vs Ergodicité

- Stationnarité n'implique pas ergodicité.
- Ergodicité n'implique pas stationnarité.
- L'ergodicité simplifie l'analyse de signaux aléatoires
- Ergodicité et stationnaire $\Rightarrow$ Histogramme est une estimation de la ddp



Densité Spectrale de Puissance

Un signal aléatoire ne possède pas de transformée de Fourier. Cependant, on eut lui associer une notion de densité spectrale de puissance.

Définition

La DSP $S_{XX}(f)$ est définie comme

$$S_{XX}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left[|X_T(f)|^2\right]$$

où $X_T(f)$ est la TF de la restriction de $x(t)$ sur $[-T, T]$.
$x(t)$ étant une réalisation du signal aléatoire, la TF de $x(t)$ est bien une variable aléatoire.

Densité Spectrale de Puissance

La DSP s'obtient comme l'espérance d'une variable aléatoire. Il est possible de s'affranchir de cette considération grâce au théorème suivant.

Théorème de Wiener-Khintchin

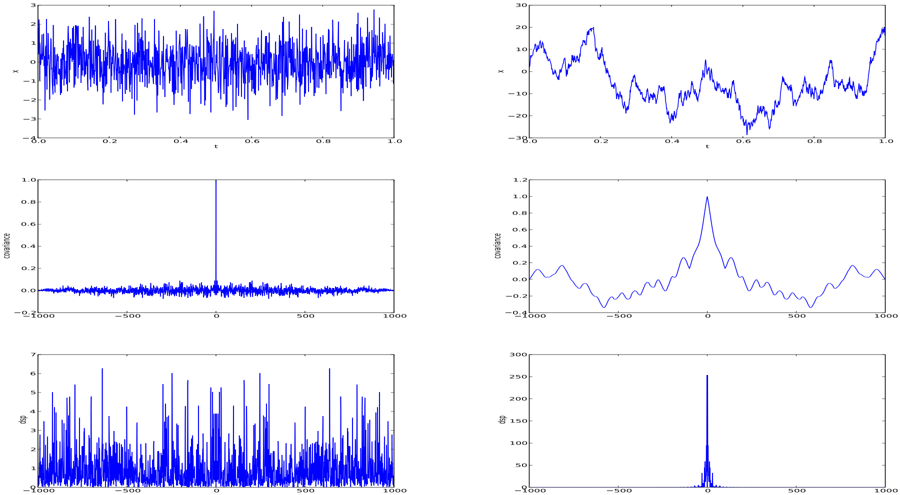
La densité spectrale de puissance $S_{XX}(f)$ d'un processus aléatoire stationnaire s'obtient comme la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation

$$S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau$$

Si le signal est en plus ergodique, la fonction d'auto-corrélation peut-être obtenue à partir d'une réalisation de la `v.a.`.

Exemples

Réalisation de deux signaux aléatoires :
(le signal ; auto-covariance ; Densité Spectrale de Puissance)



Bruit Blanc

Définition

On appelle « bruit blanc », un processus aléatoire centré, stationnaire d'ordre 2, dont la DSP est constante en fréquence.

$$S_{XX}(f) = \frac{N_0}{2} \qquad R(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

- Interprétation : toutes les valeurs à un temps t sont indépendantes.
- Application : modèle de bruit par excellence.

Section 3

Filtrage et prédiction

Filtrage de Wiener

On observe un signal aléatoires $y(t)$ composées de deux signaux aléatoires $x(t)$ (considéré comme le signal informatif) et $b(t)$ (le bruit).
L'objectif du filtre de Wiener est d'obtenir un filtre optimal permettant de retrouver $x(t)$ à partir de $y(t)$
Présupposés :

- Les fonctions $x(t)$ et $b(t)$ sont considérées comme des signaux aléatoires centrées stationnaires au second ordre.
- On considère que le cas discret $x[n]$ et $b[n]$

Le problème

Observation

$$y[n] = x[n] + b[n]$$

Le bruit est considéré comme additif.

Filtre

On cherche un filtre linéaire, causal à réponse impulsionnelle finie $h[n]$

$$h[n] = \begin{cases} h_n & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$h[n]$ est un filtre RIF d'ordre $N-1$.

Soit $\hat{s}[n]$ la sortie du filtre et une estimation de $x[n]$,

$$\hat{x}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i]y[n-i]$$

On cherche à minimiser :

$$E\left[|x[n] - \hat{x}[n]|^2\right]$$

Résolution

Erreur

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n]$$

Objectif

Minimisation de $\xi = E\left[|e[n]|^2\right]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial h_k} &= \frac{\partial}{\partial h_k} E\left[|e[n]|^2\right] \\ &= -2E\left[e[n]y[n-k]\right] \end{aligned} \quad (1)$$

À l'optimum, $\frac{\partial \xi}{\partial h_k} = 0$

$$E[x[n]y[n-k]] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i]E[y[n-i]y[n-k]]$$

Équations de Wiener-Hopf

Pour tout $k \in [0, N-1]$, on a :

$$R_{XY}[k] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i] R_{YY}[k-i]$$

On a donc le système linéaire suivant appelé Équations de Wiener-Hopf :

$$\begin{bmatrix} R_{YY}[0] & R_{YY}[1] & \dots & R_{YY}[p-1] \\ R_{YY}[1] & R_{YY}[0] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{YY}[p-1] & R_{YY}[p-2] & \dots & R_{YY}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[p-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{XY}[0] \\ R_{XY}[1] \\ \vdots \\ R_{XY}[p-1] \end{bmatrix}$$

R_{YY} et R_{XY} sont respectivement les fonctions d'autocorrélation de $y[n]$ et d'intercorrélation de $x[n]$ et $y[n]$

Forme Matricielle

$$R_Y h = r_{XY}$$

Simplification si bruit non-corrélé

Objectif

Réduction de bruit (pour la transmission vocale, les images etc...)

Hypothèses

Le bruit additif $b[n]$ est centré et non corrélé au signal.

Simplification des équations de Wiener-Hopf,

$$R_Y h = r_{XY}$$

$$R_{XY}[k] = E[x[n](x[n-k] + b[n-k])] = R_X[k]$$

$$R_{YY}[k] = E[(x[n] + b[n])(x[n-k] + b[n-k])] = R_X[k] + R_b[k]$$

Soit $(R_X + R_B)h = r_x$

Extension à la prédiction des observations

Objectif

Trouver un filtre optimal tel que $\hat{y}[n+1] = \sum_{i=0}^{p-1} h[i]y[n-i]$.

Réécriture des équations de Wiener-Hopf :

$$x[n] \sim y[n+1]$$

$$R_{XY}[k] = E[x[n]y[n-k]] = E[y[n+1]y[n-k]] = R_{YY}[k+1]$$

Forme Matricielle :

$$R_{YY}h = r_Y(1:)$$

où $r_Y(1:) = [r_Y[1] \dots r_Y[p]]^t$.

Ce sont les équations de Yule-Walker.

Section 4

Bestiaire

Forme générale : Wiener-Hopf

- Objectif :

$$\hat{x}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i]y[n-i]$$

- Présupposés :

$$y[n] = x[n] + b[n]$$

où x,y et b stationnaires du second ordre.

- Équations :

$$R_{XY}[k] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i]R_{YY}[k-i]$$

- Forme matricielle développée :

$$\begin{bmatrix} R_{YY}[0] & R_{YY}[1] & \dots & R_{YY}[p-1] \\ R_{YY}[1] & R_{YY}[0] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{YY}[p-1] & R_{YY}[p-2] & \dots & R_{YY}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[p-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{XY}[0] \\ R_{XY}[1] \\ \vdots \\ R_{XY}[p-1] \end{bmatrix}$$

- Forme matricielle résumée :

$$R_Y h = r_{XY}$$

Bruit non-corrélé : Wiener-Hopf

- Objectif :

$$\hat{x}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i]y[n-i]$$

- Présupposés :
  b n'est pas corrélé à *x*.
- Équations :

$$R_X[k] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i](R_X[k-i] + R_B[k-i])$$

- Forme matricielle développée :

$$\left(\begin{bmatrix} R_X[0] & R_X[1] & \cdots & R_X[p-1] \\ R_X[1] & R_X[0] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_X[p-1] & R_X[p-2] & \cdots & R_X[0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_B[0] & R_B[1] & \cdots & R_B[p-1] \\ R_B[1] & R_B[0] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_B[p-1] & R_B[p-2] & \cdots & R_B[0] \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[p-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_X[0] \\ R_X[1] \\ \vdots \\ R_X[p-1] \end{bmatrix}$$

- Forme matricielle résumée :

$$(R_X + R_B)h = r_x$$

Prédiction des observations : Yule-Walker

- Objectif :

$$\hat{y}[n+1] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i]y[n-i]$$

- Présupposés :

$$x[n] \sim y[n+1]$$

- Équations :

$$R_Y[k+1] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i]R_{YY}[k-i]$$

- Forme matricielle développée :

$$\begin{bmatrix} R_{YY}[0] & R_{YY}[1] & \dots & R_{YY}[p-1] \\ R_{YY}[1] & R_{YY}[0] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{YY}[p-1] & R_{YY}[p-2] & \dots & R_{YY}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[p-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_Y[1] \\ R_Y[2] \\ \vdots \\ R_Y[p] \end{bmatrix}$$

- Forme matricielle résumée :

$$R_{YY}h = r_Y[1:]$$

où $r_Y[1:] = [r_Y[1] \dots r_Y[p]]^t$.

Prédiction des observations à n_0

- Objectif :

$$\hat{y}[n+n_0] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i]y[n-i]$$

- Présupposés :

$$x[n] \sim y[n+n_0]$$

- Équations :

$$R_Y[k+n_0] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i]R_{YY}[k-i]$$

- Forme matricielle développée :

$$\begin{bmatrix} R_{YY}[0] & R_{YY}[1] & \dots & R_{YY}[p-1] \\ R_{YY}[1] & R_{YY}[0] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{YY}[p-1] & R_{YY}[p-2] & \dots & R_{YY}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[p-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_Y[n_0] \\ R_Y[n_0+1] \\ \vdots \\ R_Y[n_0+p-1] \end{bmatrix}$$

- Forme matricielle résumée :

$$R_{YY}h = r_Y[n_0:]$$

où $r_Y[n_0:] = [r_Y[n_0] \dots r_Y[n_0+p-1]]^t$.

Prédiction des observations à n_0 avec bruit blanc non corrélé

Bruit non corrélé

$$R_{YY}[k] = R_{XX}[k] + R_{BB}[k]$$

Bruit blanc

$$R_{BB}[k] = 0 \ \ \forall k \neq 0$$

- Objectif :

$$\hat{y}[n+n_0] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i]y[n-i]$$

- Forme matricielle développée :

$$\left(\begin{bmatrix} R_X[0] & R_X[1] & \dots & R_X[p-1] \\ R_X[1] & R_X[0] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_X[p-1] & R_X[p-2] & \dots & R_X[0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_B[0] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_B[0] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_B[0] \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[p-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_X[n_0] \\ R_X[n_0+1] \\ \vdots \\ R_X[n_0+p-1] \end{bmatrix}$$

- Forme matricielle résumée :

$$(R_{XX} + R_{BB})h = r_X[n_0 :]$$

où $r_X[n_0 :] = [r_X[n_0] \dots r_X[n_0+p-1]]^t$.

Section 5

Annexes

Démo Wiener-Khintchin

$$S_{XX}(f) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} E\left[|X(f)|^2\right] \quad (2)$$

$$S_{XX}(f) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} E\left[\left(\sum_{m=-M}^{M} x[m]e^{-2\pi ifm}\right) \cdot \left(\sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{2\pi ifn}\right)\right] \quad (3)$$

$$S_{XX}(f) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} E\left[\sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-M}^{M} x[m]e^{-2\pi ifm} x[n]e^{2\pi ifn}\right] \quad (4)$$

$$S_{XX}(f) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} E\left[\sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-M}^{M} x[m]x[n]e^{-2\pi if(m-n)}\right] \quad (5)$$

$$S_{XX}(f) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-M}^{M} E\left[x[m]x[n]\right] e^{-2\pi if(m-n)} \quad (6)$$

Par stationnarité

$$S_{XX}(f) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-M}^{M} R_{XX}(m-n)e^{-2\pi if(m-n)} \quad (7)$$

Démo Wiener-Khintchin

$$S_{XX}(f) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-M}^{M} R_{XX}(m-n)e^{-2\pi i f(m-n)} \tag{8}$$

$$S_{XX}(f) = \lim_{M\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} R_{XX}(m-n)e^{-2\pi i f(m-n)} \tag{9}$$

$$S_{XX}(f) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^{M} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} R_{XX}(m-n)e^{-2\pi i f(m-n)} \tag{10}$$

$$S_{XX}(f) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^{M} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k)e^{-2\pi i f(k)} \tag{11}$$

or $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k)e^{-2\pi i f(k)}$ ne dépend pas de m

$$S_{XX}(f) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k)e^{-2\pi i f(k)} \right) \cdot \left(\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^{M} 1 \right) \tag{12}$$

Démo Wiener-Khintchin

$$S_{XX}(f) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k)e^{-2\pi i f(k)}\right) . \left(\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1}\sum_{m=-M}^{M} 1\right) \quad (13)$$

$$S_{XX}(f) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k)e^{-2\pi i f(k)}\right) . \left(\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2M+1}(2M+1)\right) \quad (14)$$

$$S_{XX}(f) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k)e^{-2\pi i f(k)}\right) . \left(\lim_{M\to+\infty} 1\right) \quad (15)$$

$$S_{XX}(f) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k)e^{-2\pi i f(k)}\right) .1 \quad (16)$$

$$S_{XX}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k)e^{-2\pi i f(k)} \quad (17)$$