III - Processus markoviens

Romain Hérault

INSA Rouen

Automne 2015

On suppose que l'on dispose d'un certain nombre de mesures (ou observations) bruitées $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots\}$ d'un signal aléatoire (ou état) $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2, \ldots\}$.

- une mesure ou observation réside dans un espace réel de dimension m, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$;
- un état réside dans un espace réel de dimension n, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$;
- $\mathbf{x}_{i:j}$, représente l'ensemble des états de l'instant i à l'instant j ;
- il existe un état $\mathbf{x}_0$ avant la première observation $\mathbf{y}_1$

Nous supposons que le signal est **markovien** et nous cherchons à réaliser les tâches suivantes :

- **Prédiction :** trouver un état futur à partir d'observations passées ;
- **Filtrage :** trouver l'état présent à partir des observations passées et présente ;
- **Lissage ou Explication :** trouver les états passées des observations passées et présente ;
- **Signification statistique :** est-ce les observations que je mesure sont vraisemblable ?

Tâche à réaliser

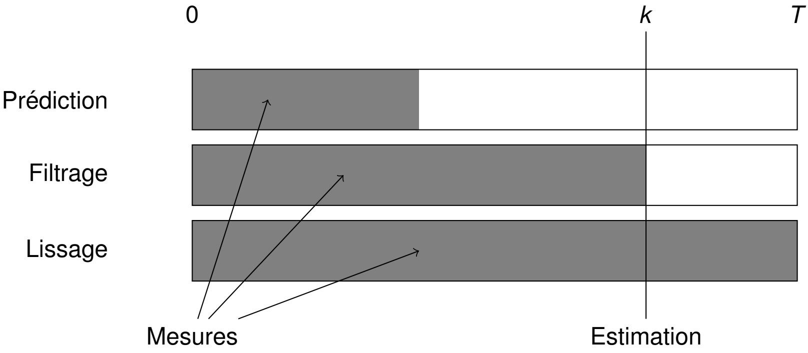
Nous cherchons donc à réaliser les tâches suivantes :

- **Prédiction :**
  Connaissant $\mathbf{y}_{1:T}$, trouver une estimation de $\mathbf{x}_{T+1}$;
- **Filtrage :**
  Connaissant $\mathbf{y}_{1:T}$, trouver une estimation de $\mathbf{x}_T$;
- **Lissage ou Explication :**
  Connaissant $\mathbf{y}_{1:T}$, trouver une estimation de $\mathbf{x}_{1:T}$;
- **Signification statistique :**
  Connaissant un modèle de notre système, calculer la vraisemblance de $\mathbf{y}_{1:T}$.

ou encore

- **Prédiction :**
  Connaissant $\mathbf{y}_{1:t}$, trouver une estimation de $\mathbf{x}_k$ avec $t < k$;
- **Filtrage :**
  Connaissant $\mathbf{y}_{1:t'}$, trouver une estimation de $\mathbf{x}_k$ avec $t' = k$;
- **Lissage ou Explication :**
  Connaissant $\mathbf{y}_{1:T}$, trouver une estimation de $\mathbf{x}_k \quad \forall k \in 1 \dots T$;
- **Signification statistique :**
  Connaissant un modèle de notre système, calculer la vraisemblance de $\mathbf{y}_{1:T}$.

Schéma tâches à réaliser



Tâche à réaliser : cadre probabiliste

Dans un cadre probabiliste cela revient à chercher :

- **Prédiction :**
$$p(\mathbf{x}_{k+c}|\mathbf{y}_{1:k}) \text{ avec } c \geq 1$$
(distribution *prédictive a posteriori*)
- **Filtrage :**
$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$$
(distribution *a posteriori*)
- **Lissage ou Explication :**
$$p(\mathbf{x}_{0:T}|\mathbf{y}_{1:T})$$
(distribution *a posteriori*)
- **Signification statistique :**
$$p(\mathbf{y}_{1:T})$$
(vraisemblance)

Ce dont nous disposons

Modèle dynamique

Le modèle dynamique décrit l'évolution temporelle des états **x**. L'état à l'instant t ne dépend que de l'état à l'instant $t-1$ (processus markovien).

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q} \text{ avec } \mathbf{q} \text{ variable aléatoire ou}$$
$$\mathbf{x}_k \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \text{ sous forme probabiliste .}$$

Modèle d'observation (ou de mesure)

Le modèle d'observation décrit le lien entre un état **x** et une observation **y**. L'observation à l'instant t ne dépend que de l'état à l'instant t.

$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r} \text{ avec } \mathbf{r} \text{ variable aléatoire ou}$$
$$\mathbf{y}_k \sim p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \text{ sous forme probabiliste.}$$

Distribution *a priori* de l'état initial

$$\mathbf{x}_0 \quad \sim \quad p(\mathbf{x}_0)$$

Exemple : Voiture subissant une force constante (1)

On considère une voiture ayant une position initiale $(x_{0,1}, x_{0,2})$ et une vitesse initiale $(\dot{x}_{0,1}, \dot{x}_{0,2})$ sur lequel on applique une force constante $(g_{k,1}, g_{k,2}) = cte \quad \forall k$, on observe une position bruitée de la voiture $(y_{k,1}, x_{k,2})$.

Loi de Newton

$$\mathbf{g}(t) = m.\ddot{\mathbf{x}}(t)$$

où m est le poids du véhicule

Problème

L'accélération ne peut pas être déterminée entre deux instants :
Comment traduire ce problème en processus markovien ?

Solution

Ne pas se contenter de la position du véhicule comme état du système mais prendre en compte aussi la vitesse et l'accélération !

Exemple : Voiture subissant une force constante (2)

Variables

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= [x_{k,1}, x_{k,2}, \dot{x}_{k,1}, \dot{x}_{k,2}, \ddot{x}_{k,1}, \ddot{x}_{k,2}]^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_k &= [y_{k,1}, y_{k,2}]^\mathsf{T} \end{aligned}$$

Initialisation : $p([x_{0,1},\quad x_{0,2},\quad \dot{x}_{0,1},\quad \dot{x}_{0,2},\quad g_{0,1}/m,\quad g_{0,2}/m]^\mathsf{T})$

Modèles

Dynamique

$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}.\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}_{k-1}$
avec $\mathbf{q}_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$

$\mathbf{x}_k \sim p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{A}.\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q})$

Observation

$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}.\mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k$
avec $\mathbf{r}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$

$\mathbf{y}_k \sim p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k|\mathbf{H}.\mathbf{x}_k, \mathbf{R})$

Ce que nous cherchons

La vraisemblance des observations

$$p(\mathbf{y}_{1:T}) = \int_{\mathbf{x}_{0:T}} p(\mathbf{y}_{1:T}|\mathbf{x}_{0:T})p(\mathbf{x}_{0:T})d_{\mathbf{x}_{0:T}}$$

Signification statistique

Distribution *a posteriori* des états

Inversion du conditionnement :

$$p(\mathbf{x}_{0:T}|\mathbf{y}_{1:T}) = \frac{p(\mathbf{x}_{0:T}, \mathbf{y}_{1:T})}{p(\mathbf{y}_{1:T})} = \frac{p(\mathbf{y}_{1:T}|\mathbf{x}_{0:T})p(\mathbf{x}_{0:T})}{p(\mathbf{y}_{1:T})}$$

Filtrage, Lissage

Distribution *prédictive a posteriori* des états

$$p(\mathbf{x}_{0:T+1}|\mathbf{y}_{1:T}) = p(\mathbf{x}_{0:T+1}|\mathbf{x}_{0:T}, \mathbf{y}_{1:T})p(\mathbf{x}_{0:T}|\mathbf{y}_{1:T})$$

Prédiction

Propriété des états

$\mathbf{x}$ suit un processus markovien alors :

- $\mathbf{x}_k$ est indépendant de tout ce qui c'est passé avant $k-1$,

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{1:k-1},\mathbf{y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) \ .$$

- $\mathbf{x}_{k-1}$ est indépendant de tout ce qui ce passera dans le futur,

$$p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{x}_{k:T},\mathbf{y}_{k:T}) = p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{x}_k) \ .$$

Indépendances conditionnelles des mesures

L'observation courante $\mathbf{y}_k$ connaissant $\mathbf{x}_k$ est conditionnellement indépendante des états et mesures passées,

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_{1:k},\mathbf{y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) \ .$$

Implication

Connaissant la distribution initiale $p(\mathbf{x}_0)$ on peut trouver la distribution d'une séquence d'état complète :

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_{0:T}) &= p(\mathbf{x}_T|\mathbf{x}_{0:T-1})p(\mathbf{x}_{0:T-1}) \\
p(\mathbf{x}_{0:T}) &= p(\mathbf{x}_T|\mathbf{x}_{T-1})p(\mathbf{x}_{0:T-1}) \\
p(\mathbf{x}_{0:T}) &= p(\mathbf{x}_T|\mathbf{x}_{T-1})p(\mathbf{x}_{T-1}|\mathbf{x}_{T-2})p(\mathbf{x}_{0:T-2})
\end{aligned}$$

$$p(\mathbf{x}_{0:T}) = p(\mathbf{x}_0)\prod_{k=1}^{T} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$$

De la même manière

$$p(\mathbf{y}_{1:T}|\mathbf{x}_{0:T}) = \prod_{k=1}^{T} p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)$$

Ce que nous cherchons (2)

La vraisemblance des observations

$$p(\mathbf{y}_{1:T}) = \int \dots \int_{\mathbf{x}_{0:T}} p(\mathbf{x}_0) \left(\prod_{k=1}^{T} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) \right) \left(\prod_{k=1}^{T} p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) \right) d_{\mathbf{x}_{0:T}}$$

Distribution *a posteriori* des états

$$p(\mathbf{x}_{0:T}|\mathbf{y}_{1:T}) = \frac{p(\mathbf{x}_0) \left(\prod_{k=1}^{T} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) \right) \left(\prod_{k=1}^{T} p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) \right)}{p(\mathbf{y}_{1:T})}$$

Complexité $\Rightarrow$ Intraitable !

Filtrage / Prédiction (1)

On va calculer les distributions *a posteriori* $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ et *prédictive a posteriori* $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k})$ par récursion.

Initialisation

On commence avec la distribution *a priori* de l'état initial $p(\mathbf{x}_0)$.

Récursion

On répète deux étapes au cours de la récursion :

- Prédiction
- Mise à jour

Filtrage / Prédiction (2)

Étape de prédiction

A partir du modèle de dynamique $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ et de la distribution *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})$, on peut calculer la distribution *prédictive a posteriori* $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})$,

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{k-1} \quad .$$

C'est l'équation de Chapman-Kolmogorov.

Étape de mise-à-jour

On prend en compte l'observation $\mathbf{y}_k$ pour trouver la distribution *a posteriori* $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ à partir du modèle d'observation $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)$ et de la distribution *prédictive a posteriori* $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})$,

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = \frac{1}{Z_k} p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) \quad ,$$

avec comme terme de normalisation

$$Z_k = \int p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_k \quad .$$

C'est une application de la règle de Bayes.

On boucle ces deux étapes.

Prédiction à plus 1 pas de temps

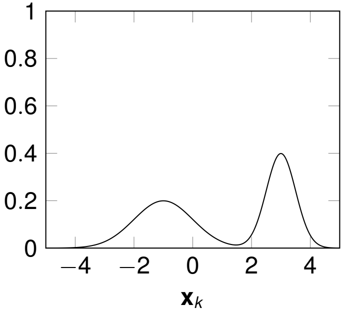
Grâce au modèle de dynamique $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ (ou $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + q$) , on peut projeter à plus d'un pas dans le temps. On applique l'équation de Chapman-Kolmogorov autant de fois que nécessaire,

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) &= \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{k-1} \quad , \\
p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k-1}) &= \int p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_k \quad , \\
p(\mathbf{x}_{k+2}|\mathbf{y}_{1:k-1}) &= \int p(\mathbf{x}_{k+2}|\mathbf{x}_{k+1})p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{k+1} \quad , \\
&\dots \quad .
\end{aligned}
$$

Illustration : Prédiction (1)

Distribution *a priori*

$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$



Modèle de dynamique

$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$

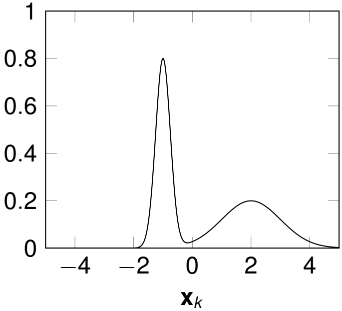
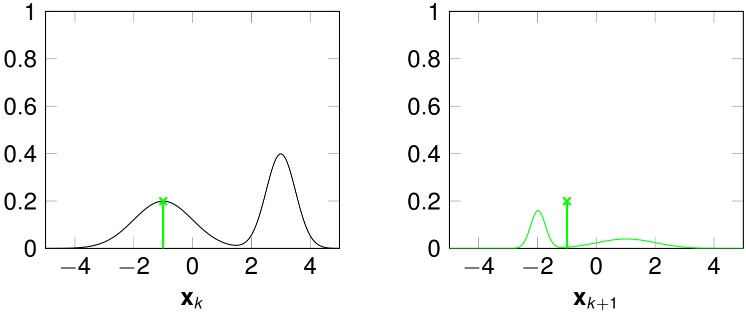
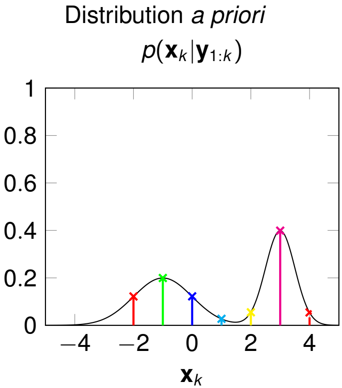


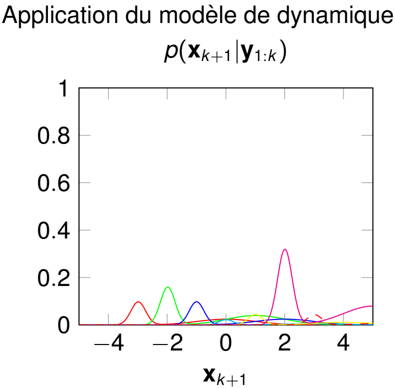
Illustration : Prédiction (2)

Distribution *a priori* $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$

Application du modèle de dynamique $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k})$




Distribution *a priori*
$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−4
−2
0
2
4
$\mathbf{x}_k$


Application du modèle de dynamique
$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k})$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−4
−2
0
2
4
$\mathbf{x}_{k+1}$

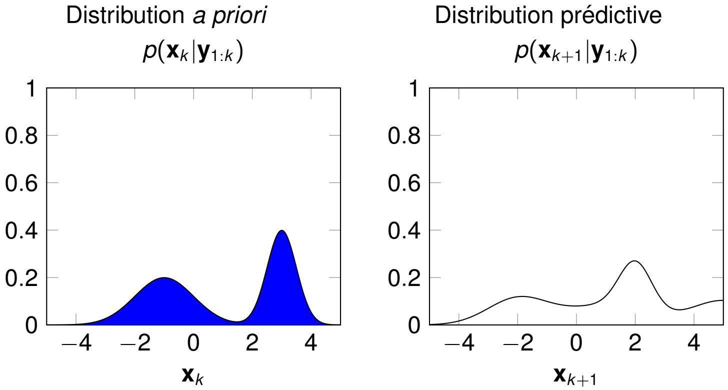

Distribution *a priori*
$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−4 −2 0 2 4
$\mathbf{x}_k$
Distribution prédictive
$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k})$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−4 −2 0 2 4
$\mathbf{x}_{k+1}$

Illustration : Prédiction (4)

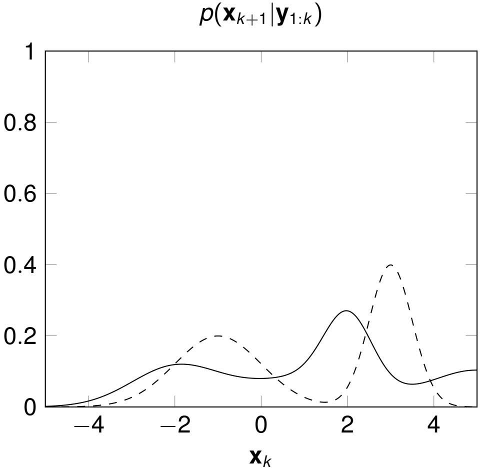
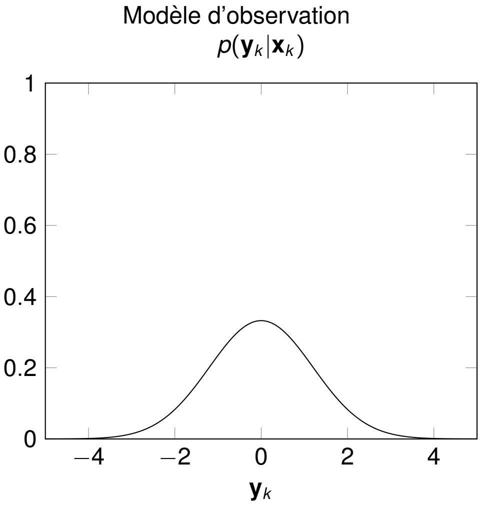
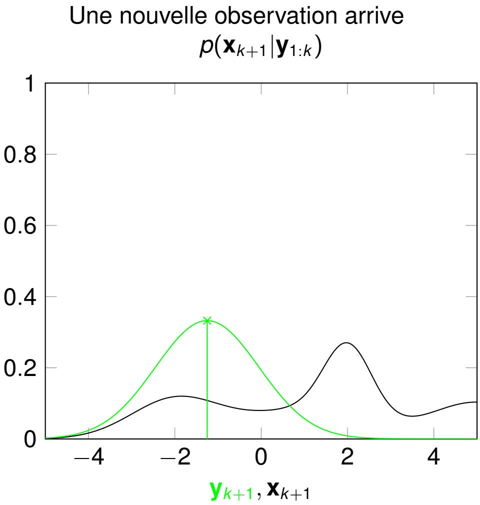
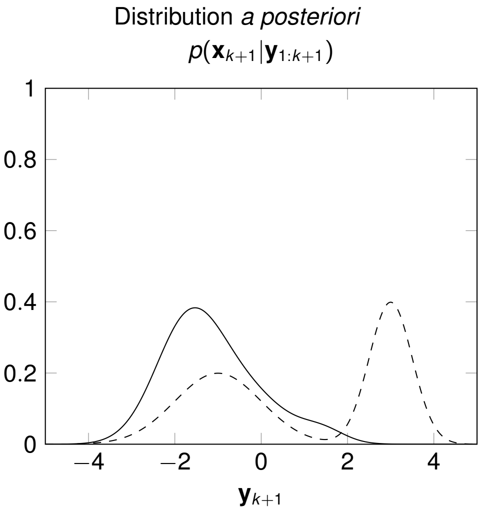


Illustration : Mise à jour (1)




Une nouvelle observation arrive
$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k})$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−4
−2
0
2
4
$\mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}$


Distribution *a posteriori*
$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k+1})$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−4
−2
0
2
4
$\mathbf{y}_{k+1}$

Lissage (1)

Attention

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:T}) \neq p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$$

Algorithme en deux passes.

Passe 1 : Forward (Filtrage)

Initialisation :

$$p(\mathbf{x}_0)$$

Pour k allant de 1 à T :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) &= \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{k-1} \quad , \\ p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) &= \frac{1}{Z_k}p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) \quad , \end{aligned}$$

avec comme terme de normalisation

$$Z_k = \int p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_k \quad .$$

Passe 2 : Backward

Initialisation :

$$p(\mathbf{x}_T|\mathbf{y}_{1:T}) \quad \leftarrow \quad \text{Dernière itération de la première passe}$$

Pour k allant de $T-1$ à 1 :

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:T}) \quad = \quad p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) \int \left[\frac{p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:T})}{p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k})} \right] d\mathbf{x}_{k+1} \quad ,$$

Implémentation

On peut simplifier, réduire la complexité des équations des filtrage/prédiciton/lissage et signification statistique suivant les propriétés ou les approximations des modèles .

Modèles

$$\begin{array}{cc} \text{Dynamique} & \text{Observation} \\ \mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q} & \mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r} \\ \mathbf{x}_k \sim p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) & \mathbf{y}_k \sim p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) \end{array}$$

- $\mathbf{x}$ discret, $\mathbf{y}$ discret $\rightarrow$ HMM ;
- $\mathbf{x}$ discret, $\mathbf{y}$ continue $\rightarrow$ GHMM,... ;
- $\mathbf{x}$ continue, $\mathbf{y}$ continue, f et g linéaire $\rightarrow$ Filtre de Kalman, lissage de Rauch-Tung-Striebel ;
- $\mathbf{x}$ continue, $\mathbf{y}$ continue, f et g non linéaire mais dérivable $\rightarrow$ Filtre de Kalman étendu, ... ;
- $\mathbf{x}$ continue, $\mathbf{y}$ continue, f et g quelconques $\rightarrow$ Filtre particulaire, ... ;

Espaces d'état et d'observation continus, f et g linéaire, bruits gaussien $\Rightarrow$

Filtre de Kalman

Modèles

$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{A}.\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}) \quad p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k|\mathbf{H}.\mathbf{x}_k, \mathbf{R})$

Notations

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{m}_k^-, \mathbf{P}_k^-) \ , \\ p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k) \ , \\ p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) &= \mathcal{N}(\mathbf{y}_k|\mathbf{H}\mathbf{m}_k^-, \mathbf{S}_k) \ . \end{aligned}$$

Résolution : Voiture subissant une force constante (2)

Prédiction

$$
\begin{aligned}
\mathbf{m}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{m}_{k-1} \ , \\
\mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} + \mathbf{Q} \ .
\end{aligned}
$$

Mise à jour

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{m}_k^- \ , \\
\mathbf{S}_k &= \mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\mathsf{T} + \mathbf{R} \ , \\
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^\mathsf{T}\mathbf{S}_k^{-1} \ , \\
\mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k \ , \\
\mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^\mathsf{T} \ .
\end{aligned}
$$

Résolution : Voiture subissant une force constante (3)

Modèles

Dynamique

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}.\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}_{k-1}$$

avec $\mathbf{q}_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$

$$\mathbf{x}_k \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k | \mathbf{A}.\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q})$$

Observation

$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}$$

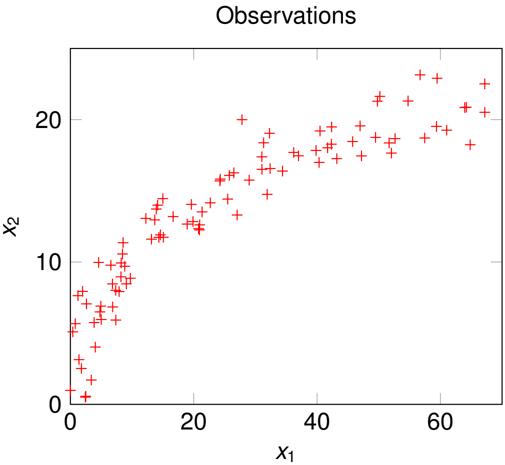
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}.\mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k$$

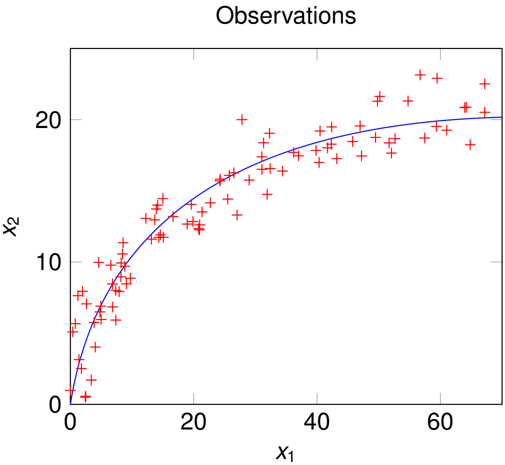
avec $\mathbf{r}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$

$$\mathbf{y}_k \sim p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k | \mathbf{H}.\mathbf{x}_k, \mathbf{R})$$

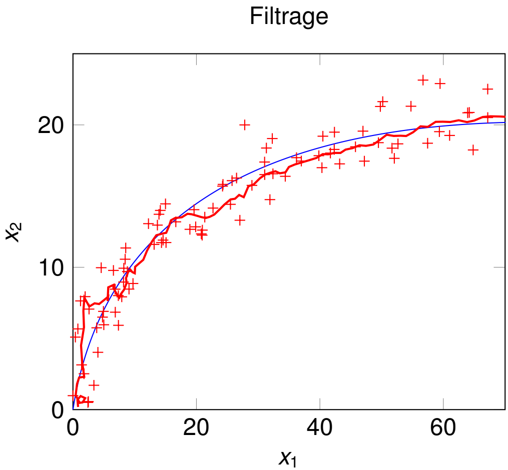
Résolution : Voiture subissant une force constante (4)

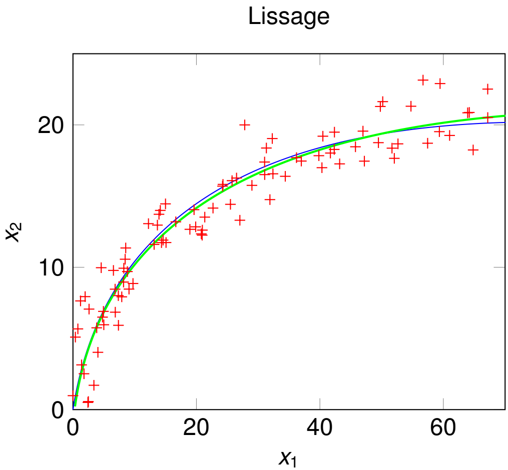


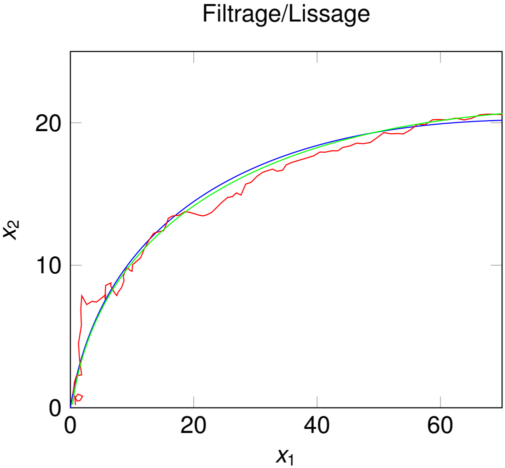
Résolution : Voiture subissant une force constante (5)



Résolution : Voiture subissant une force constante (6)




Lissage
20
10
0
0
20
40
60
x_2
x_1


Filtrage/Lissage
x_2
x_1
0
10
20
0
20
40
60