

一、（10 分）对  $f(t) = 1 * \sin(50\pi t) + 2 * \sin(100\pi t) + 0.3 * \sin(150\pi t) + \omega(n)$  进行频谱计算,其中  $\omega(n)$  是随机白噪声;并说明 FFT 算法的特点及  $\omega(n)$  的噪声强度对频谱的影响。

解:

### 1. 信号频谱计算

取采样频率为 2kHz, 采样点数为 1000, 加入均值为 0, 方差为 1 的白噪声  $\omega(n)$ , 对题目所给信号做 FFT 频谱变换, 程序如下:

```
%%%%%%%%%%%%%%FFT%%%%%%%%%%%%%%
fs=2000;Length=1000;%采样频率为 2000hz,采样点数为 1000
n=0:Length-1;t=n/fs;%数据对应的时间序列
x=1*sin(2*pi*25*t)+2*sin(2*pi*50*t)+0.3*sin(2*pi*75*t)
+randn(1,Length)
y=fft(x,Length);%信号的 Fourier 变换
mag=abs(y);%求取振幅
f=(0:Length-1)*fs/Length;%真实频率
figure(1);plot(t,x);
xlabel('时间/s');ylabel('振幅');title('原始曲线')
figure(2);plot(f(1:Length/2),mag(1:Length/2)*2/Length);
xlabel('频率/Hz');ylabel('振幅');title('FFT');grid on;
```

其中, 图 1.1 为所给信号的原始曲线图, 图 1.2 为经过 FFT 变换之后的幅度谱密度图。由经 FFT 变换的信号幅度谱密度图可以看出, 在 25Hz、50Hz 和 75Hz 处有尖峰, 对应信号中  $\sin(50\pi)$ 、 $\sin(100\pi)$ 、 $\sin(150\pi)$  三种成分, 由于白噪声的加入, 在可分辨的各个频率上, 均有幅度不大的频率成分存在。

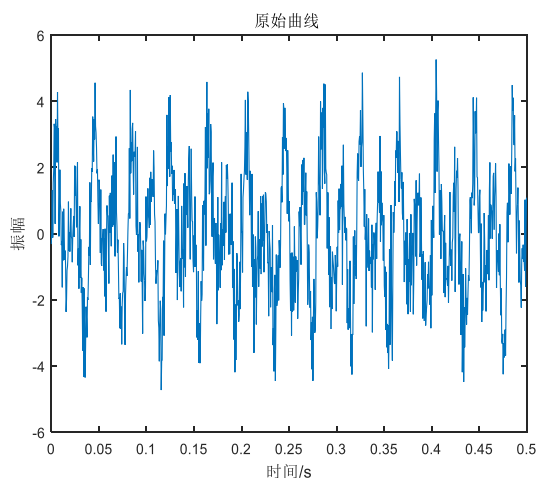


图 1.1 信号原始曲线图

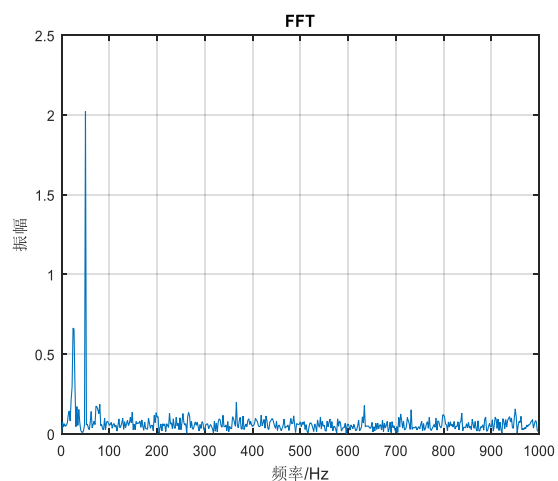


图 1.2 经 FFT 变换的信号幅度谱密度图

## 2. FFT 算法的特点

### 2.1 FFT 算法的优点

DFT 是利用计算机进行信号谱分析的理论依据，在数字信号处理中非常有用，例如，在信号的频谱分析，系统的分析，设计和实现中都会用到 DFT 的计算。快速傅里叶变换（简称 FFT）是计算 DFT 的一种快速高效的算法，与 DFT 算法相比，FFT 算法极大地减少了运算次数，提高了运算速度，使其在实际中尤其是实时处理方面得到了很大的应用。

### 2.2 FFT 算法的缺点

#### 2.2.1 频率混叠

（1）对于一个有限带宽的连续信号，若其频谱的最高频率为  $f_h$ ，根据 Shannon 采样定理，当采样频率  $f_s$  满足： $f_s \geq 2f_h$  时，可以由采样得到的离散信号复现原始连续信号。但是当采样定理不能得到满足时，就会产生频谱的交叠，即频谱混叠，从而产生失真现象，不能正确进行谱分析。即：信号采样阶段，如果采样频率取得不好，会引起频谱的周期延拓，从而带来频谱混叠现象。

（2）若题目中的信号不考虑白噪声  $\omega(n)$ ，则最高频率为 75Hz，若取采样频率为 145Hz，采样点数仍为 1000，则幅度谱密度图如图 1.3 所示。

```
%%%%%%%%%%%%%%频谱混叠%%%%%%%%%%%%%%
fs=145;%采样频率
Length=1000;%数据采样点数
n=0:Length-1;t=n/fs;%数据对应的时间序列
x=1*sin(2*pi*25*t)+2*sin(2*pi*50*t)+0.3*sin(2*pi*75*t);
y=fft(x,Length);%信号的 Fourier 变换
mag=abs(y);%求取振幅
f=(0:Length-1)*fs/Length;%真实频率
plot(f(1:Length/2),mag(1:Length/2)*2/Length);
xlabel('频率/Hz');ylabel('振幅');title('频谱混叠');grid on;
```

从图上可以看出，由于采样频率小于信号最高频率的 2 倍（ $145\text{Hz} < 75\text{Hz} \times 2$ ），幅度谱密度图未能分析出信号的真实成分，即产生失真，发生频谱混叠。因此在进行 FFT 变换时，需满足条件  $f_s \geq 2f_h$ 。信号在实际情况下往往是非带限的，均存在少量的频谱混叠现象，无法准确的从有限的采样点中分析原始信号的频谱，因此通常通过提高采样频率或采样插值构造近似信号的频谱代替原始频谱，以减

少对频谱分析造成的影响。为了防止“频谱泄露”，可采用一个合适的低通滤波器，将信号中大于  $f_h$  的谐波信号滤除掉，形成最高谐波频率为  $f_h$  的信号  $g(t)$ ，在对  $g(t)$  以采样频率  $f_s$  离散采样。

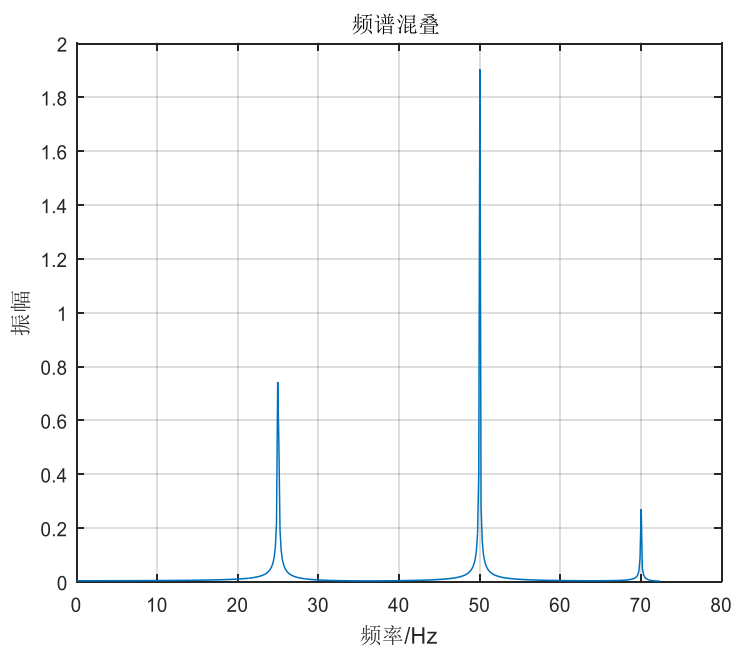


图 1.3 经 FFT 变换的无白噪声信号幅度谱密度图

### 2.2.2 频谱泄露

(1) 频谱泄露产生的原因是由于我们把无限长的信号限定为有限长，使信号在限定区以外的非零值均改变为零值。这其实相当于信号在时域乘一个窗函数，例如矩形窗，窗内的数据并不改变，其余变为零。加窗后会对频谱产生影响，造成频谱的“扩散”（拖尾、变宽），这就是所谓的“频谱泄露”。即原信号中不包含的频率成分在频谱图中也会出现，这必然对频谱分析会产生误导。即：信号分块阶段，如果截取的数据的长度不适当，会引起能量泄漏和分辨率损失。

(2) 可通过加窗来减小频谱泄露的影响。常用的窗函数包括：三角(triang)窗、汉宁(hanning)窗、汉明(hamming)窗等。

```
%%%%%%%%%%%%%频谱泄露(加窗)%%%%%%%%%%%%%
fs=2000;%采样频率
Length=1000;%数据采样点数
n=0:Length-1;t=n/fs;%数据对应的时间序列
x=1*sin(2*pi*25*t)+2*sin(2*pi*50*t)+0.3*sin(2*pi*75*t)
+randn(1,Length)
f=(0:Length-1)*fs/Length;%真实频率
wl=triang(Length);%三角窗
```

```

w2=hanning (Length) %汉宁窗
w3=hamming (Length) %汉明窗
x1=x.*w1';x2=x.*w2';x3=x.*w3';%加窗
y1=fft (x1,Length);y2=fft (x2,Length);y3=fft (x3,Length);
%信号的 FFT 变换
mag1=abs (y1);mag2=abs (y2);mag3=abs (y3);%求取振幅
subplot (2,2,1);plot (t,x);%原始信号图
xlabel ('频率/Hz');ylabel ('振幅 f(t)');title ('原始信号图')
subplot (2,2,2);plot (f(1:Length/2),mag1(1:Length/2)*2/Length);
xlabel ('频率/Hz');ylabel ('振幅 f(t)');title ('加三角窗')
subplot (2,2,3);plot (f(1:Length/2),mag2(1:Length/2)*2/Length);
xlabel ('频率/Hz');ylabel ('振幅 f(t)');title ('加汉宁窗')
subplot (2,2,4);plot (f(1:Length/2),mag3(1:Length/2)*2/Length);
xlabel ('频率/Hz');ylabel ('振幅 f(t)');title ('加汉明窗')

```

如图所示,对加窗前后幅度谱密度图进行对比(0-100Hz 范围内),加窗后的频谱“扩散”程度减小,即加窗减小了“频谱泄露”。

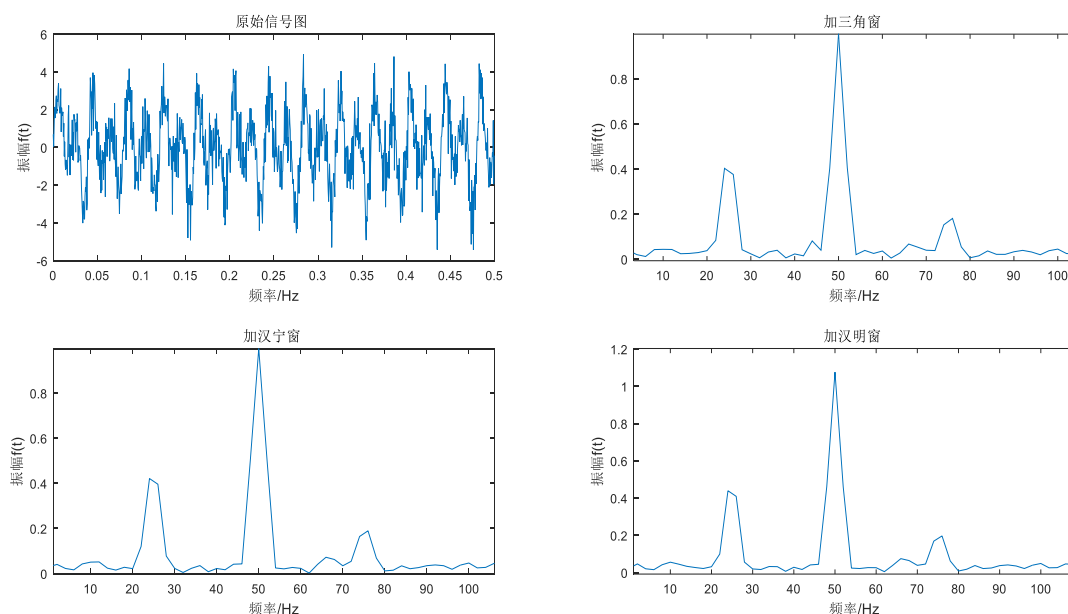


图 1.4 加窗前后信号幅度谱密度图对比

### 2.2.3 栅栏效应

(1) 对于非周期信号来说,理论上其频谱应该是连续的,而用 FFT 算法做变换得到的是数字谱,即用频谱的抽样值逼近连续谱值,其结果只能观察到有限个频谱值,每一个间隔中间的频谱都观察不到了,如同通过“栅栏”观察景物一样,只能在离散点上看到信号频谱,把这种现象称为“栅栏效应”。即:频谱采样阶段,如果谱密度比较低,会引起谱峰错误和偏移,这种现象叫“栅栏效应”。

需要合理选择频谱取样间隔,使栅栏挡住的频谱只有较小的单调变化,才能较好地反映其本来规律。

(2) 减小栅栏的直接办法就是增加信号的取样长度,即增加数据采样点数。也可以使用末尾补零或者相位补偿的方法使频谱细化。如图 2.3 为增加采样点数到 2000 时信号幅度谱密度对比图。

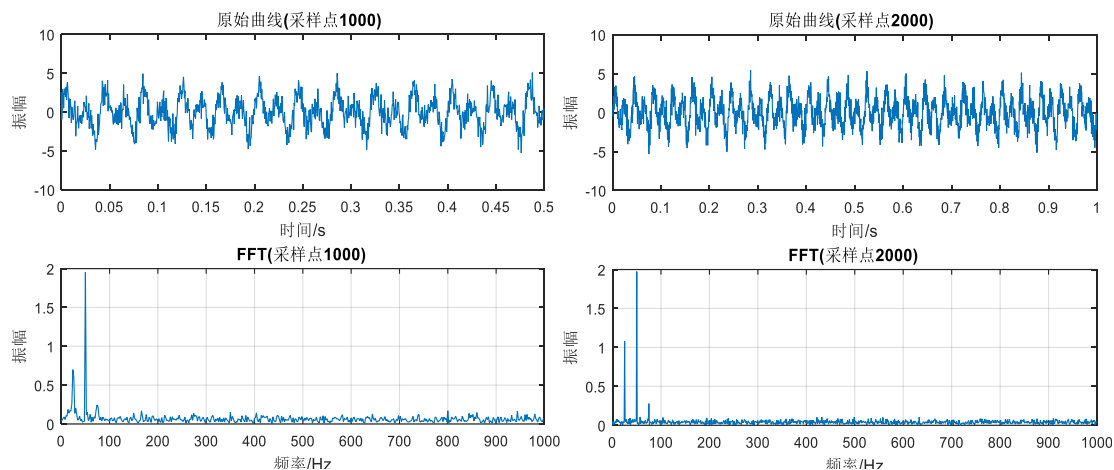


图 1.5 采样点数为 1000Hz 和 2000Hz 时信号幅度谱密度对比图

由图 2.3 可以看出,增加采样点数到 2000 后,幅度谱密度图中的信号频谱成分可以更加清晰的辨认出,且幅值之比更接近原始信号三种频率成分幅度值比,减小了栅栏效应的影响。

### 3. $\omega(n)$ 的噪声强度对频谱的影响

白噪声信号对信号的波形干扰很大,但对信号的频谱影响很小。因为白噪声是指带宽无穷大,在整个频带上均匀分布的噪声,所以从频谱上看,只是把有用信号的频谱抬高了一点而已。

## 二、(15 分) 简述经典功率谱估计与现代功率谱估计的差别,并计算下题:

设随机过程是单位方差白噪声激励如下的系统而产生的:

$$s(n) = 2.7377s(n-1) - 3.7476s(n-2) + 2.6293s(n-3) - 0.9224s(n-4) + \omega(n)$$

取序列的长度分别为 256 和 2048 数据段,并用经典和现代谱估计方法进行谱估计,分析不同参数对最终结果的影响。

解:

### 1. 经典功率谱估计与现代功率谱估计的差别

功率谱反映了随机信号各频率成份功率能量的分布情况,可以揭示信号中隐含的周期性及靠得很近的谱峰等有用信息。实际应用中的平稳随机信号通常是有限长

的，只能根据有限长信号估计原信号的真实功率谱，这就是功率谱估计。

(1) 经典功率谱估计以傅里叶变换为基础，分为直接法（即周期图法）和间接法，当样本数据很大时经典谱估计的效果是可以接受的，但是样本少时，此估计方法的效果往往不是很好，这是由于经典谱估计的天然缺陷造成的：经典功率谱估计方法利用加窗的数据或加窗的自相关函数估计值的傅里叶变换来计算。将所有在窗口外的数据都视为 0，这是不符合实际的，这便使得谱估计的质量下降；现代功率谱估计以模型为基础，利用采样数据建立模型，对数据进行外推，进而提高了谱估计的分辨率；

(2) 经典功率谱估计方法是非参数估计方法；而现代功率谱估计是参数估计方法；

(3) 经典功率谱估计方法的方差性能较差、谱分辨率低、离散性大和曲线粗糙，不可避免的受到加窗的影响；现代功率谱估计克服上述缺点，其处理结果的方差比经典谱估计方法处理的结果小，曲线明显比经典谱估计方法光滑，但是现代功率谱估计外推的数据不能完全重构数据，只能用来估计功率谱。

## 2. 谱估计结果及分析

(1) 用经典功率谱估计的周期图法估计功率谱密度，取序列的长度分别为 256 和 2048 数据段，周期图法程序如下：

```
%%%%%%%%%%%%%%周期图法%%%%%%%%%%%%%%
f=1000;
n1=256;%周期图法,256 点
e1=randn(1,n1);%均值 0, 方差 1 的白噪声
x1=filter(1,[1-2.73773.7476-2.62930.9224],e1);
[Px1,f1]=periodogram(x1,[],n1,f);
figure(1);subplot(2,1,1);plot(f1,Px1);title('周期图法(N=256)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');grid on;
f=1000;
n2=2048;%周期图法,2048 点
e2=randn(1,n2);%均值 0, 方差 1 的白噪声
x2=filter(1,[1-2.73773.7476-2.62930.9224],e2);
[Px2,f2]=periodogram(x2,[],n2,f);
subplot(2,1,2);plot(f2,Px2);
```

从图 2.1 中可看出，增加数据长度有利于提高分辨率，但会使谱线波动加剧，不够平滑。

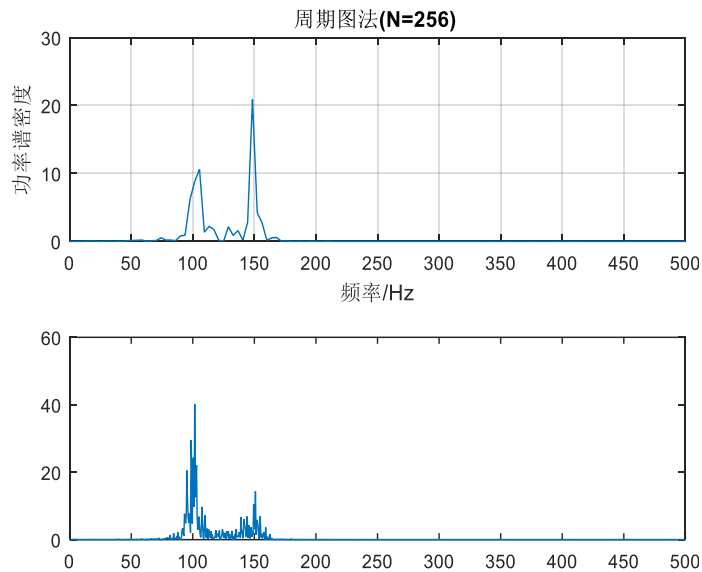


图 2.1 采用周期图法估计数据长度为 256 和 2048 时功率谱密度图

(2) 用经典功率谱估计的 Welch 法估计功率谱密度，取序列的长度分别为 256（左侧图）和 2048（右侧图）数据段时估计结果如图 2.2 所示。分别使用矩形窗、三角窗、汉宁窗和哈明窗（图由上到下）。从图中可以看出，与图 2.1 中的周期图法对比，Welch 法频率分辨率降低，但谱线变得平滑，减小了方差，主瓣变宽，减小了能量的泄露。Welch 法程序如下：

```
%%%%%%%%%%%%%%Welch 法%%%%%%%%%%%%%%
w1=boxcar(50);
[Pxw11,fw11]=pwelch(x1,w1,[],n1,f);
[Pxw21,fw21]=pwelch(x2,w1,[],n2,f);
figure(2);subplot(4,2,1);plot(fw11,Pxw11);grid on;
title('Welch 法矩形窗(N=256)');xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
subplot(4,2,2);plot(fw21,Pxw21);grid on;
title('Welch 法矩形窗(N=2048)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
w2=triang(50);
[Pxw12,fw12]=pwelch(x1,w2,[],n1,f);
[Pxw22,fw22]=pwelch(x2,w2,[],n2,f);
subplot(4,2,3);plot(fw12,Pxw12);grid on;
title('Welch 法三角窗(N=256)');xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
subplot(4,2,4);plot(fw22,Pxw22);grid on;
title('Welch 法三角窗(N=2048)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
w3=hanning(50);
[Pxw13,fw13]=pwelch(x1,w3,[],n1,f);
```

```

[Pxw23, fw23]=pwelch(x2,w3,[],n2,f);
subplot(4,2,5);plot(fw13,Pxw13);grid on;
title('Welch 法汉宁窗 (N=256)');xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
subplot(4,2,6);plot(fw23,Pxw23);grid on;
title('Welch 法汉宁窗 (N=2048)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
w4=hamming(50);
[Pxw14, fw14]=pwelch(x1,w4,[],n1,f);
[Pxw24, fw24]=pwelch(x2,w4,[],n2,f);
subplot(4,2,7);plot(fw14,Pxw14);grid on;
title('Welch 法哈明窗 (N=256)');xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
subplot(4,2,8);plot(fw24,Pxw24);grid on;
title('Welch 法哈明窗 (N=2048)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');

```

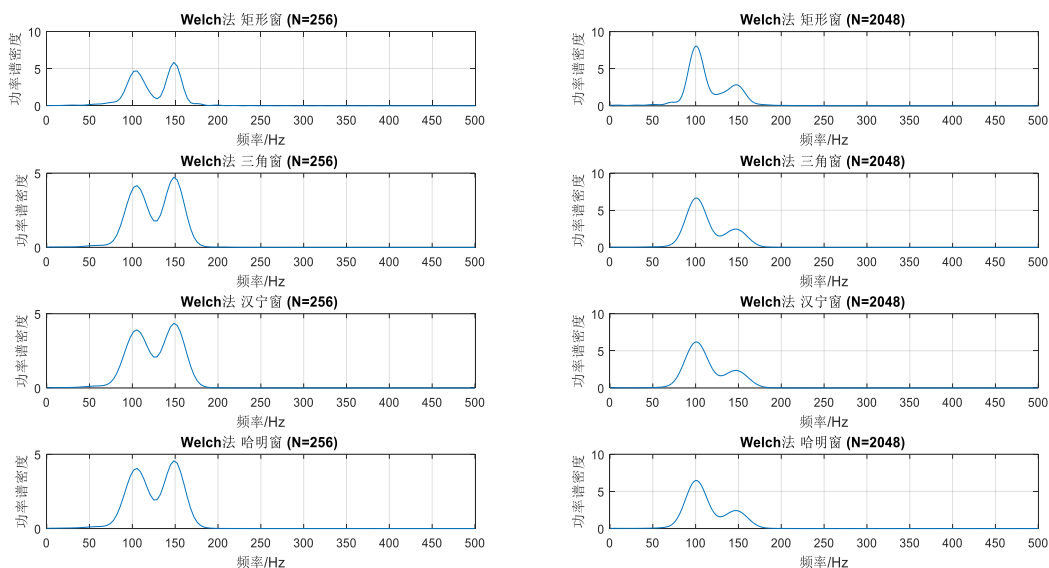


图 2.2 Welch 法估计取数据长度为 256 和 2048 时功率谱密度图

(3) 用经典功率谱估计的自相关法估计功率谱密度，取序列的长度分别为 256 和 2048 数据段时的估计结果如图 2.3 所示。从图中可以看出，与图 2.1 中周期图法比较，自相关法的平滑效果优于周期图法，方差也比周期图法更小，分辨率比 Welch 法更高。自相关法程序如下：

```

%%%%%%%%%%%%%%自相关法%%%%%%%%%%%%%%
c1=xcorr(x1,'unbiased');%自相关法,256 点
cc1=fft(c1,n1);Pxz1=abs(cc1);
k1=(0:n1/2-1)*f/n1;
figure(3);subplot(2,1,1);plot(k1,Pxz1(1:n1/2));grid on;
title('自相关法 (N=256)');xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');

```



```

cx2=xcorr(x2,'unbiased');%自相关法,2048 点
ck2=fft(cx2,n2);Pxx2=abs(ck2);
k2=(0:n2/2-1)*f/n2;
figure(3);subplot(2,1,2);plot(k2,Pxx2(1:n2/2));grid on;
title('自相关法(N=2048)');xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');

```

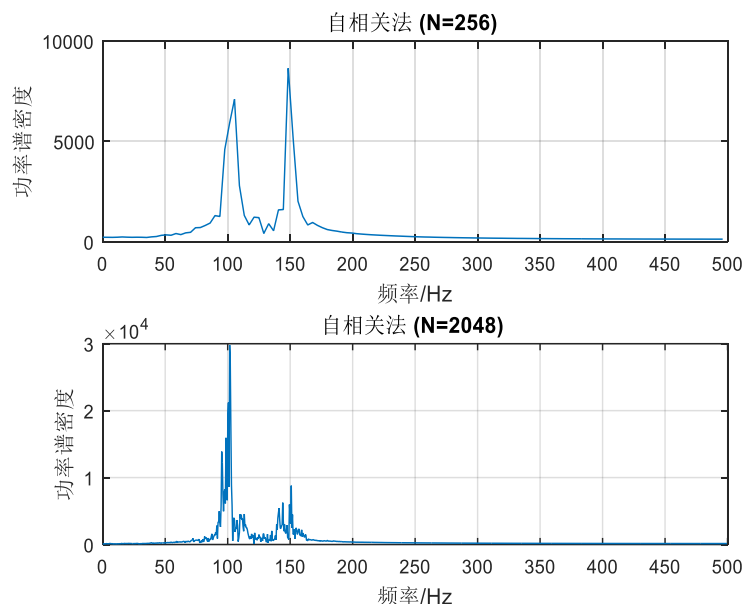


图 2.3 自相关法估计数据长度为 256 和 2048 时功率谱密度图

(4) 用现代功率谱估计法估计功率谱密度, 使用 yule-Walker 法估计 AR 模型, 取序列的长度分别为 256 (左侧图) 和 2048 (右侧图) 数据段时估计结果如图 2.4 所示。AR 模型阶数分别取 2 阶、4 阶、6 阶、8 阶 (图从上到下)。由图 2.4 可知, 阶数越高, 分辨率越高, 但阶数增加到一定程度时, 其分辨率提高不明显, 反而增加了计算量, 因此在进行功率谱估计时不能通过盲目提高阶数来提高分辨率, 可以根据 FPE、AIC 等寻优准则确定最佳的模型阶数。与经典功率谱估计法相比, 现代功率谱估计法的曲线更加平滑, 方差更小, 且适用于数据较短的情况。yule-Walker 法估计 AR 模型程序如下:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%yule-Walker 法估计 AR 模型%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[Pxy11,fy11]=pyulear(x1,2,n1,f);
[Pxy12,fy12]=pyulear(x2,2,n2,f);
figure(4);subplot(4,2,1);plot(fy11,Pxy11);grid on;
title('现代估计法 2 阶(N=256)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
subplot(4,2,2);plot(fy12,Pxy12);grid on;
title('现代估计法 2 阶(N=2048)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');

```

```

[Pxy21,fy21]=pyulear(x1,4,n1,f);
[Pxy22,fy22]=pyulear(x2,4,n2,f);
subplot(4,2,3);plot(fy21,Pxy21);grid on;
title('现代估计法 4 阶 (N=256)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
subplot(4,2,4);plot(fy22,Pxy22);grid on;
title('现代估计法 4 阶 (N=2048)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
[Pxy31,fy31]=pyulear(x1,6,n1,f);
[Pxy32,fy32]=pyulear(x2,6,n2,f);
subplot(4,2,5);plot(fy31,Pxy31);grid on;
title('现代估计法 6 阶 (N=256)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
subplot(4,2,6);plot(fy32,Pxy32);grid on;
title('现代估计法 6 阶 (N=2048)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
[Pxy41,fy41]=pyulear(x1,8,n1,f);
[Pxy42,fy42]=pyulear(x2,8,n2,f);
subplot(4,2,7);plot(fy41,Pxy41);grid on;
title('现代估计法 8 阶 (N=256)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');
subplot(4,2,8);plot(fy42,Pxy42);grid on;
title('现代估计法 8 阶 (N=2048)');
xlabel('频率/Hz');ylabel('功率谱密度');

```

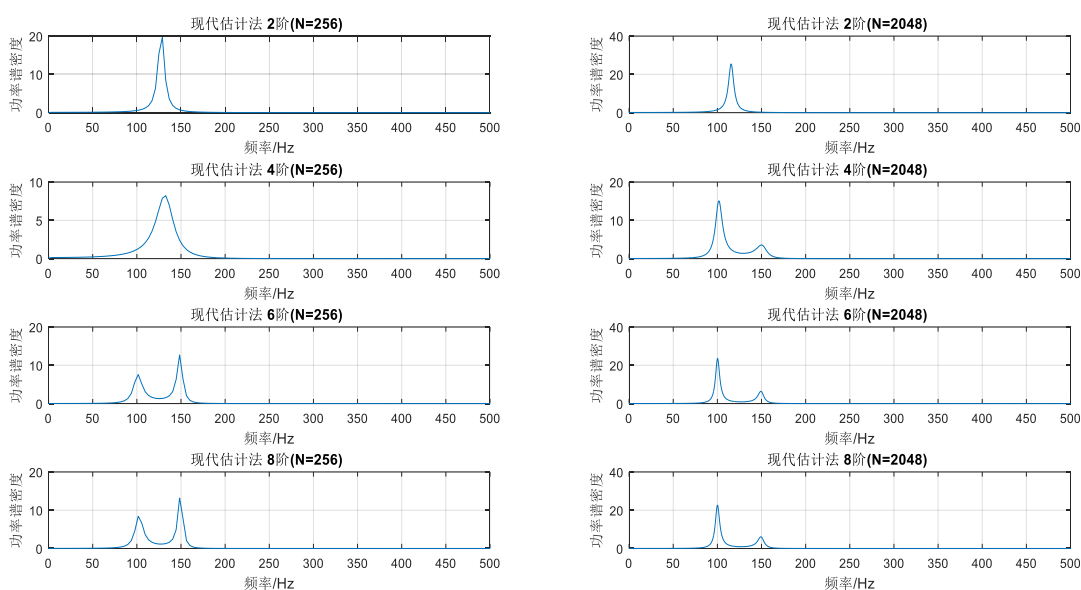


图 2.4 现代谱估计法估计数据长度为 256 和 2048 时功率谱密度图

三、（10分）设系统模型  $x(n) = s(n) + v(n)$ ，其中  $v(n)$  是均值为 0，方差为 1 的白噪声，且  $s(n)$  与  $v(n)$  不相关，设  $s(n)$  的信号模型为  $s(n+1) = 0.6s(n) + \omega(n)$ ， $\omega(n)$  是均值为 0，方差为 0.82 的白噪声，求因果维纳滤波器的传递函数。

解：

根据题目中条件：噪声  $v(n)$  是均值为 0，方差为 1 的白噪声，且与  $s(n)$  不相关， $\omega(n)$  是均值为 0，方差为 0.82 的白噪声，可知：

$$\begin{aligned} E[\omega(n)\omega(i)] &= 0.82 \times \delta_{ni} & \delta_{ni} &= \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases} \\ E[v(n)v(i)] &= 1 \times \delta_{ni} \\ E[v(n)s(i)] &= 0 \\ E[v(n)\omega(i)] &= 0 \end{aligned}$$

白噪声  $\omega(n)$  的功率谱为  $S_{\omega\omega}(z) = 0.82$

白噪声  $v(n)$  的功率谱为  $S_{vv}(z) = 1$

信号  $s(n)$  的功率谱为  $S_{ss}(z) = \frac{0.82}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$

于是：

$$S_{xx}(z) = S_{(s+v)(s+v)}(z) = S_{ss}(z) + S_{vv}(z) = \frac{0.82}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)} + 1 = \frac{2(1-0.3z^{-1})(1-0.3z)}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$$

因式分解： $S_{xx}(z) = B(z)B(z^{-1})$

把单位圆内的零极点分配给  $B(z)$ ，对应为系统的最小相位和非因果部分，单位圆外的零极点分配给  $B(z^{-1})$ ，对应为系统的最大相位和因果部分，则：

$$B(z) = \frac{\sqrt{2}(1-0.3z^{-1})}{(1-0.6z^{-1})} \quad B(z^{-1}) = \frac{\sqrt{2}(1-0.3z)}{(1-0.6z)}$$

又因为  $s(n)$  与  $v(n)$  不相关，则  $R_{sx}(n) = R_{ss}(n)$ ，所以有  $S_{sx}(z) = S_{ss}(z)$ ，从而得到

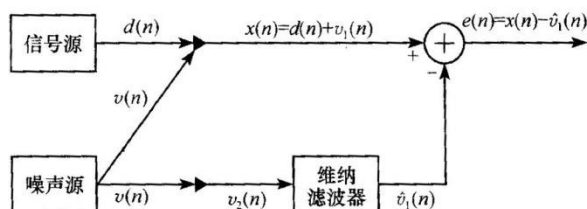
$$\frac{S_{sx}(z)}{B(z^{-1})} = \frac{S_{ss}(z)}{B(z^{-1})} = \frac{\frac{0.82}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}}{\sqrt{2} \frac{(1-0.3z)}{(1-0.6z)}} = \frac{0.82}{\sqrt{2}(1-0.6z^{-1})(1-0.3z)} = \left[ \frac{S_{sx}(z)}{B(z^{-1})} \right]_+ + \left[ \frac{S_{sx}(z)}{B(z^{-1})} \right]_-$$

$$\text{所以, } \left[ \frac{S_{xx}(z)}{B(z^{-1})} \right]_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(1-0.6z^{-1})}, \quad \left[ \frac{S_{xx}(z)}{B(z^{-1})} \right]_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{0.3z}{(1-0.3z)}$$

因此最终得到因果维纳滤波器的传递函数为

$$H(z) = \frac{1}{B(z)} \left[ \frac{S_{xx}(z)}{B(z^{-1})} \right]_+ = \frac{(1-0.6z^{-1})}{\sqrt{2}(1-0.3z^{-1})} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(1-0.6z^{-1})} = \frac{1}{2(1-0.3z^{-1})} = \frac{0.5}{(1-0.3z^{-1})}$$

**四、(10 分)**假定下图所需的信号的  $d(n)$  是一个正弦序列  $d(n) = \sin(n\omega_0 + \phi)$ ,  $\omega_0$  在  $0 \sim \pi$  之间任取一值, 噪声序列  $v_1(n)$  和  $v_2(n)$  都是 AR(1) 过程, 分别由如下的一阶差分方程产生:



$$v_1(n) = \alpha v_1(n-1) + e(n)$$

$$v_2(n) = -0.6v_2(n-1) + e(n)$$

式中  $0 < \alpha < 1$ ,  $e(n)$  是零均值, 单位方差的白噪声, 与  $d(n)$  不相关, 取不同的  $\alpha$  值, 如 0.2 和 0.8, 试采用 2 个不同阶数的 FIR 维纳滤波器对信号  $x(n) = d(n) + v_1(n)$  进行滤波。并分析其结果。

解:

#### 1. 维纳滤波器

维纳滤波器是一种以最小均方误差为最优准则的线性滤波器, 又被称为最小二乘滤波器或最小平方滤波器。

设滤波器的单位样本响应  $h(n)$ , 输入信号为  $x(n) = s(n) + v(n)$ , 其中  $v(n)$  表示噪声信号, 经滤波器的输出信号为  $y(n)$ 。若输入某一随机信号, 则  $y(n) = \sum_i h(i)x(n-i)$ 。若该滤波系统输出能尽可能逼近  $s(n)$ , 则  $y(n) = \hat{s}(n)$ , 其中  $\hat{s}(n)$  为需提取信号  $s(n)$  的估计值, 估计误差为  $e(n) = s(n) - \hat{s}(n)$ 。其均方误差为

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &= E[(s(n) - \hat{s}(n))^2] = E[(s(n) - y(n))^2] \\ &= E\left\{ \left[ s(n) - \sum_i h(i)x(n-i) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

设计维纳滤波器时按照最小均方误差准则，应满足

$$\zeta(n) = E[e^2(n)] = \min$$

求偏导得（ $\zeta(n)$ 对 $h(j)$ 的导数为0）

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta(n)}{\partial h(j)} &= 2E[e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial h(j)}] = -2E[e(n)x(n-j)] = 0 \\ \therefore E[e(n)x(n-j)] &= 0 \end{aligned}$$

该式称为正交方程，此方程表明任何时刻的估计误差与用于估计的所有数据（即滤波器的输入）正交。

$$\begin{aligned} E[s(n) - \sum_i h(i)x(n-i) \cdot x(n-j)] &= 0 \\ E[s(n)x(n-j)] &= E[h(i)x(n-i) \cdot x(n-j)] \\ R_{sx}(m) &= \sum_i h(i)R_{xx}(m-i) \quad \forall m(\text{任意}) \end{aligned}$$

称为维纳滤波器的标准方程——Wiener-Hopf 方程（维纳-霍夫方程），其中  $R_{sx}(m)$  为  $s(n)$  和  $x(n)$  的互相关矩阵， $R_{xx}(m)$  为  $x(n)$  的自相关矩阵。

上式当  $i$  取不同的值时，有三种情况：当  $0 \leq i \leq n-1$  时为 FIR 维纳滤波器，当  $-\infty < i < \infty$  时为 IIR 非因果维纳滤波器，当  $0 \leq i < \infty$  时为 IIR 因果维纳滤波器。

## 2. 维纳滤波器的设计

本题要求在  $x(n)$  中尽可能不失真提取信号  $d(n)$ ，需将  $v_2(n)$  作为维纳滤波器的输入，将  $x(n)$  减去估计噪声  $v_1(n)$  即得到  $d(n)$ 。维纳滤波器的输入信号是  $v_2(n)$ ，期望信号是  $v_1(n)$ ，由于两个信号都是已知的，所以通过维纳-霍夫方程  $R_{v_1v_2} = kR_{v_2}$  求取它们的自相关和互相关矩阵  $R_{v_2}$ 、 $R_{v_1v_2}$  来获得滤波器系数  $k$ ，程序如下（以  $\alpha = 0.2, p = 5$  为例）：

```
%%%%%%%%%%%%%%维纳滤波器%%%%%%%%%%%%%%
clear all
n=1:1000; N=1000; %取采样点数为1000
p=5;a=0.2; %阶数p分别取5和30，a取0.2和0.8
en=randn(1,N); %均值为0，方差为1的白噪声
v1=filter([1],[1 a],en);
v2=filter([1],[1 -0.6],en);
dn=sin(0.04*n*pi+0.5*pi); %信号d(n)的w0=0.02pi,初始相位为0.5pi
```

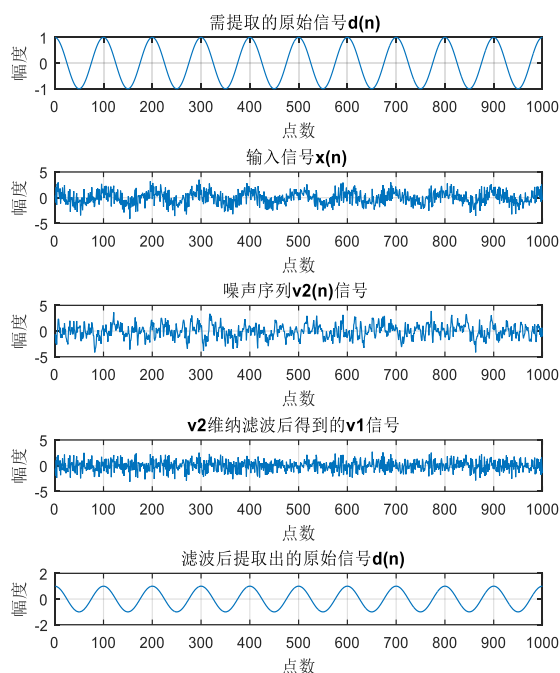
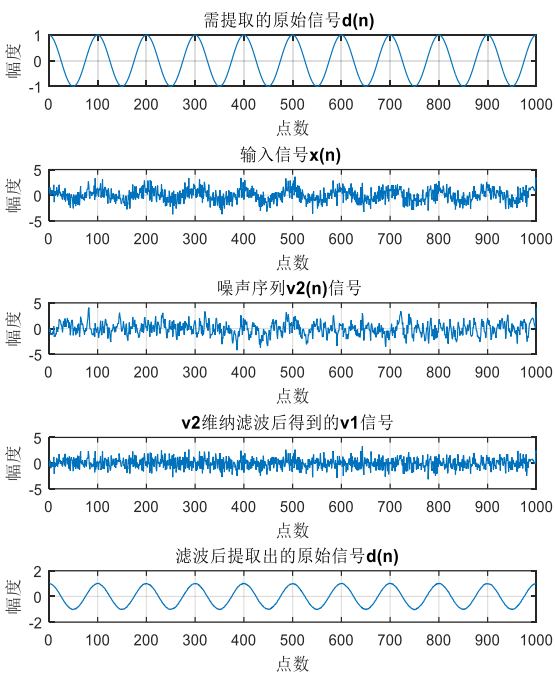
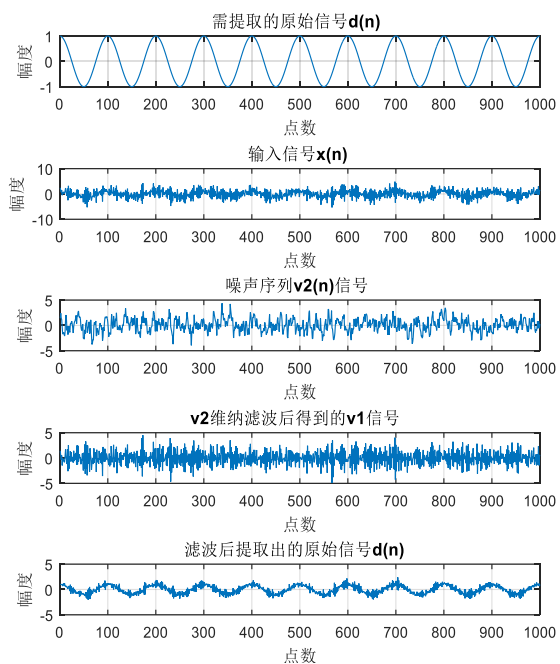
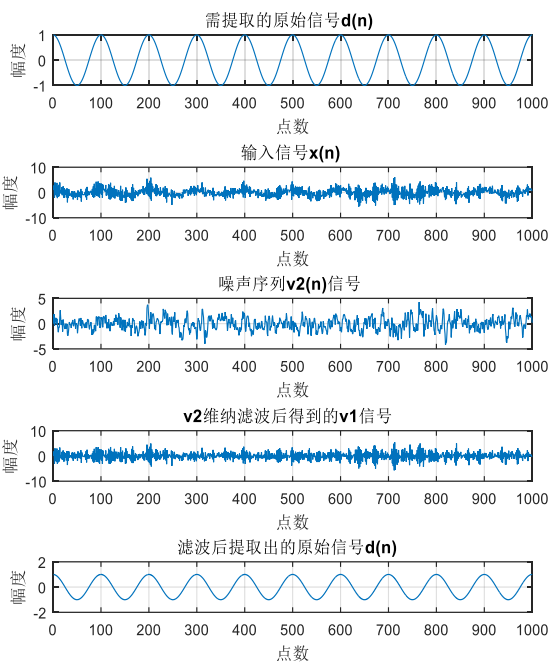
```

xn=dn+v1;
rv2=xcorr(v2,'unbiased');%v2 的自相关序列
rv1v2=xcorr(v1,v2,'unbiased');%v1 和 v2 的互相关序列
for i=1:(p+1)
    Rv2(i,:)=rv2(N-i+1:N-i+p+1);%自相关矩阵
end
for i=1:(p+1)
    Rv1v2(i,:)=rv1v2(i+N-1);%互相关矩阵
end
k=inv(Rv2)*Rv1v2;%滤波器系数 k
v1l=filter(k',1,v2);dnn=xn-v1l;%提取的信号 d(n)
subplot(5,1,1);plot(n,dn);grid on;
title('需提取的原始信号 d(n)');xlabel('点数');ylabel('幅度');
subplot(5,1,2);plot(n,xn);grid on;
title('输入信号 x(n)');xlabel('点数');ylabel('幅度');
subplot(5,1,3);plot(n,v2);grid on;
title('噪声序列 v2(n) 信号');xlabel('点数');ylabel('幅度');
subplot(5,1,4);plot(n,v1l); grid on;
title('v2 维纳滤波后得到的 v1 信号');xlabel('点数');ylabel('幅度');
subplot(5,1,5);plot(n,dnn); grid on;
title('滤波后提取出的原始信号 d(n)');xlabel('点数');ylabel('幅度');

```

### 3. 结果分析

分析过程中  $d(n) = \sin(n\omega_0 + \phi)$  中  $\omega_0 = 0.02\pi$ ，初始相位  $\phi = 0.5\pi$ ，采样点数为 1000，分别取不同的  $\alpha = 0.2$  和  $0.8$ ，阶数分别取  $p = 5$  和  $30$ 。如图 4.1-4.4 所示为需提取的原始信号  $d(n)$ 、输入信号  $x(n)$ 、噪声序列  $v_2(n)$ 、由  $v_2(n)$  维纳滤波后得到的  $v_1(n)$ 、滤波后提取出的原始信号  $d(n)$ 。

图 4.1  $\alpha = 0.2, p = 5$ 图 4.2  $\alpha = 0.2, p = 30$ 图 4.3  $\alpha = 0.8, p = 5$ 图 4.4  $\alpha = 0.8, p = 30$ 

比较各图，可得到以下结论：

(1)  $\alpha$  越小，滤波效果越好，波形平滑，毛刺少，易分辨； $\alpha$  越大，波形波动大，毛刺多，不易分辨，甚至仍然埋在噪声当中。

(2) 维纳滤波器阶数较低，则滤波效果较差，提取出信号较原始信号毛刺多，波形方差大，不平滑，部分区域波形显示规律不清晰；阶数较多，滤波效果较好，提取信号毛刺少，滤波后的信号与原始信号基本一致，波形更平滑且易分

辨。由图 5.2 可以看出, 波形与原始信号非常一致, 因此当阶数继续增加的时候, 滤波效果也不会有更大的改善。

(3) 分析过程中增大  $\omega_0$  后会使滤波后波形状况显示更明显的波动。因此适当地增加  $\omega_0$  可以更明显的观察结果。

**五、(15 分)请简述一下自适应滤波器(LMS 和 RLS), 并任选下面的一题, (MIT-BIH 数据库: <http://www.physionet.org/physiobank/database/mitdb>), (1)(2)数据可从网上下载分析步长及指数加权因子对滤波结果的影响。同时给出迭代次数与滤波器系数, 迭代次数与均方误差之间的关系曲线。**

**(1) 消除心电图的电源干扰; (2) 胎儿心电监护。**

解:

### 1. 自适应滤波器

根据环境的改变, 使用自适应算法来改变滤波器的参数和结构, 这样的滤波器被称之为自适应滤波器。自适应滤波器是一种能自动调整本身参数的特殊维纳滤波器。它在设计时, 不需先知道输入信号和噪声的统计特性。它能在自己工作中估计出所需的统计特性, 并以此依据自动调整自己的参数以达到最佳滤波的目的。自适应滤波器的最重要的特征就在于它能够在未知环境中有效工作, 并能够跟踪输入信号的时变特征。

自适应滤波器由参数可调的数字滤波器和自适应算法两部分组成, 如图 5.1 所示自适应滤波器的原理框图。其中  $x(n)$  为输入信号,  $y(n)$  为输出信号,  $d(n)$  称为期望信号或者参考信号、训练信号,  $e(n) = d(n) - y(n)$  为误差信号。输入信号  $x(n)$  通过参数可调的数字滤波器后得到输出信号  $y(n)$ ,  $y(n)$  与期望信号  $d(n)$  比较得误差信号  $e(n)$ 。参数可调数字滤波器  $H(z)$  的系数根据误差信号  $e(n)$  通过一定的自适应算法不断地进行改变, 使输出信号  $y(n)$  接近期望信号  $d(n)$ , 达到最佳滤波效果, 一旦输入信号的统计特性发生变化, 它又能够跟踪这种变化, 自动调整参数, 使滤波器性能重新达到最佳。

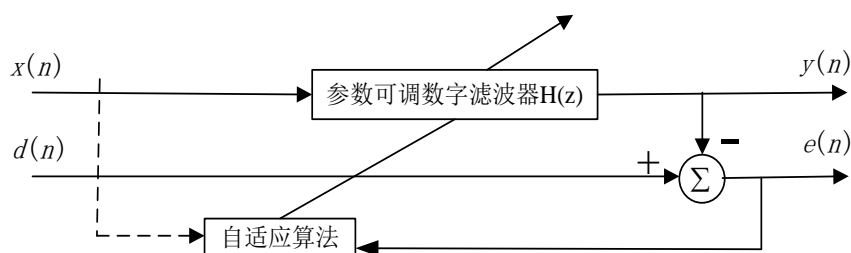




图 5.1 自适应滤波器原理框图

### 1.1 最小均方(LMS)自适应滤波器

LMS(Least-Mean-Square)自适应滤波器是使滤波器的输出信号与期望响应之间的误差的均方值为最小，因此称为最小均方自适应滤波器。

LMS 滤波器算法的性能准则是采用以瞬时值估计梯度矢量的方法，实质是以当前输出误差、当前参考信号和当前权系数求得下个时刻的权系数。基本 LMS 自适应算法如下所示：

(1) 初始化  $w(0) = 0$ ；

(2) 滤波输出  $y(n) = \sum_{i=1}^M w(i)x(k-i+1)$ ；

(3) 计算估计误差  $e(n) = d(n) - y(n)$ ；

(4) 更新滤波器系数  $w(n+1) = w(n) + \mu e(n)x(n)$ 。

其中  $x(n)$  表示第  $n$  时刻参考信号矢量， $n$  为迭代次数， $M$  为滤波器的阶数； $d(n)$  表示第  $n$  时刻的输入信号矢量； $y(n)$ 、 $e(n)$  分别表示第  $n$  时刻的输出信号与误差； $w(n)$  表示  $n$  时刻权系数矢量； $\mu$  表示自适应收敛系数。当  $0 < \mu < 2/\lambda_{\max}$ （其中  $\lambda_{\max}$  是相关矩阵  $R$  的最大特征值），迭代次数  $n$  接近于  $\infty$  时，自适应滤波器系数矢量近似为最佳结果。 $\mu$  的选取必须在收敛速度和失调之间取得较好的折中，既要具有较快的收敛速度，又要使稳态误差最小。 $\mu$  很小说明算法的自适应速度慢； $\mu$  很大说明算法不稳定。LMS 最突出的特点是计算量小，易于实现，且不求脱线计算。

### 1.2 递归最小二乘(RLS)自适应滤波器

RLS(RecursiveLeastSquares)是利用在已知  $n-1$  时刻滤波器抽头权系数矢量  $w(n-1)$  的情况下，通过简单的更新，求出  $n$  时刻的滤波器抽头权系数  $w(n)$ ，使之满足最小二乘解。RLS 算法是通过矩阵求逆原理而导出的，步骤如下：

(1) 初始化：  $w(0) = 0$ ,  $R(0) = \sigma I$

(2) 更新：对于  $n = 1, 2, \dots$  计算：

滤波:  $y(n) = w^H(n-1)u(n)$

估计误差:  $e(n) = d(n) - y(n)$

更新:  $k(n) = \frac{P(n-1)u(n)}{\lambda + u^H(n)P(n-1)u(n)}$

更新权向量:  $w(n) = w(n-1) + k(n)e^*(n)$

更新:  $P(n) = \frac{1}{\lambda} [P(n-1) - k(n)u^H(n)P(n-1)]$

参数递推估计, 每取得一次新的观测数据后, 就在前次估计结果的基础上, 利用新引入的观测数据, 根据递推算法进行修正, 减少估计误差, 从而递推地得出新的参数估计值。这样, 随着新观测数据的逐次引入, 一次接一次地进行参数估计, 直到参数估计值达到满意的精确程度为止。

RLS 算法对非平稳信号的适应性好, 收敛速度快, 估计精度高且稳定性好, 但其实现都以增加计算复杂度和稳定性为代价, 因此 RLS 算法计算复杂度高, 不利于实时性处理。

## 2. 胎儿心电监护

由已知数据可画出母亲胸部心电图和母亲腹部心电图如图 5.1 所示。其中母亲胸部心电图对应信号可看做参考信号, 母亲腹部心电图对应信号可看做输入信号。

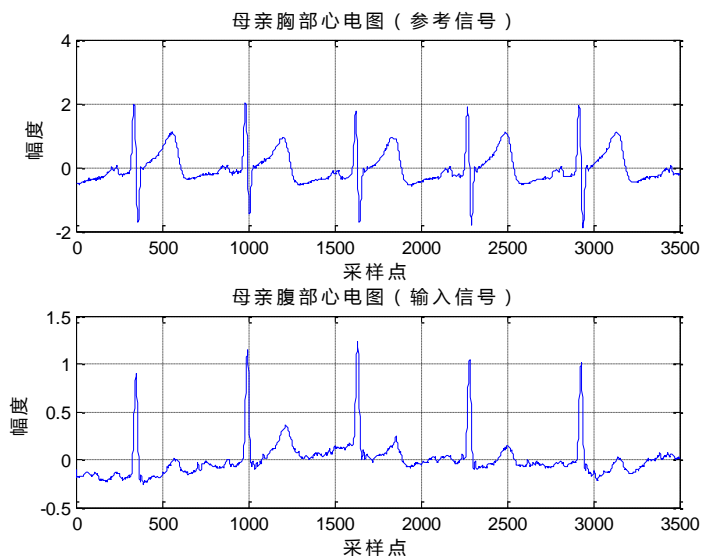


图5.1 母亲胸部和腹部心电图

母亲腹部心电图所示信号中混合了母亲和婴儿的心电信号, 若想获得婴儿的心电图, 就需要将母亲的胸部心电信号作为参考信号, 从母亲腹部心电信号中滤出婴儿心电信号, 如图 5.2 所示。

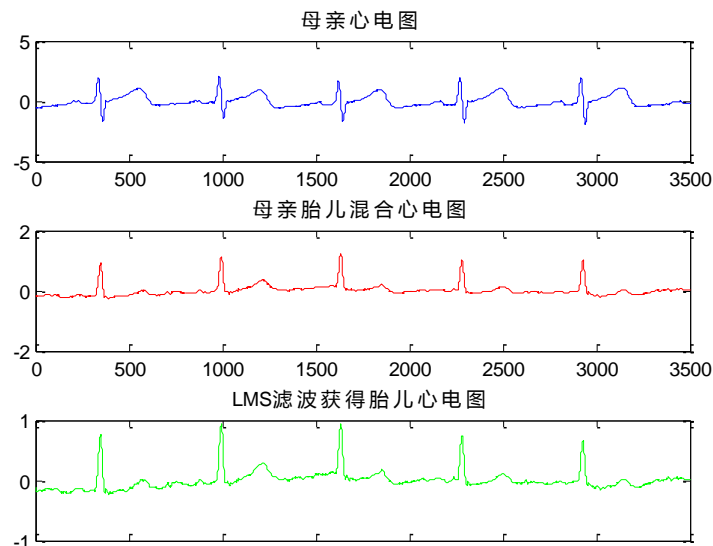


图5.2 LMS滤波获得胎儿心电图

LMS 算法的 matlab 程序如下:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%LMS 算法%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
load 101.mat;x=val(1,1:3500)./15000;
%胎儿心电信号比较弱,为使权值不至过大,这里将幅值除以 15000
x1=val(3,1:3500)./15000;figure(1);subplot(2,1,1),plot(x)
xlabel('采样点');ylabel('幅度');title('母亲胸部心电图(参考信号)');grid on;
subplot(2,1,2),plot(x1)
xlabel('采样点');ylabel('幅度');title('母亲腹部心电图(输入信号)');grid on;
x=x';x1=x1';N=4; %滤波器阶数
mu=0.001; %步长选取 0.001、0.01、0.07
L=length(x); %迭代次数默认为输入信号长度
w=zeros(N,L); % 每一行代表一个加权参量,每一列代表一次迭代,初始为 0
e=zeros(L,1); % 误差序列,e(k)表示第 k 次迭代时预期输出与实际输入的误差
s=zeros(L,1);
%调整滤波器系数的 LMS 算法
for n=N:L;
    x2=x1(n:-1:n-N+1);
    y(n)=w(:,n-1) .* x2; %滤波器输出
    e(n)=x(n)-y(n); %误差
    w(:,n)=w(:,n-1)+2*mu*e(n)*x2; %权矢量迭代
    s(n)=s(n-1)+abs(e(n)).^2;
    c(n)=sqrt(s(n)/n); %均方误差
end;
y=y';%最后稳定后的胎儿心电信号
figure(2);subplot(3,1,1),plot((1:3500),x,'b');title('母亲心电图');
subplot(3,1,2),plot((1:3500),x1,'r');title('母亲胎儿混合心电图');
subplot(3,1,3),plot((1:3500),x1-y,'g');title('LMS 滤波获得胎儿心电图');
figure(3);subplot(3,1,1),plot((1:3500),x1-y,'r',(1:3500),x,'b');
legend('胎儿心电图','母亲心电图');xlabel('采样点数');ylabel('幅度');

```

```
subplot(3,1,2);plot(c);xlabel('迭代次数');ylabel('均方误差');
subplot(3,1,3);plot(w(1,:), 'r');hold on;
plot(w(2,:));plot(w(3,:), 'k');plot(w(4,:), 'k');
xlabel('迭代次数');ylabel('滤波器系数');
legend('权系数 1', '权系数 2', '权系数 3');
```

## 2.1 不同步长对滤波结果的影响

通过 LMS 算法的自适应滤波器获得下图，显示了不同步长对滤波的影响。

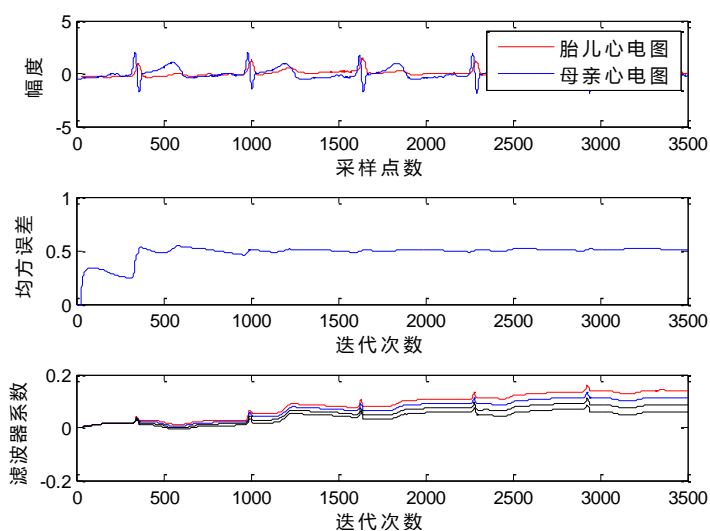


图 5.3 步长  $u=0.001$ ，滤波器阶数  $N=30$

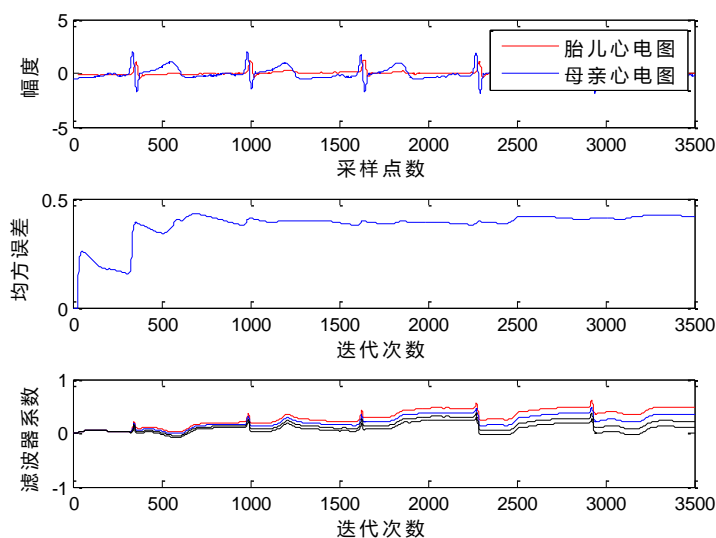
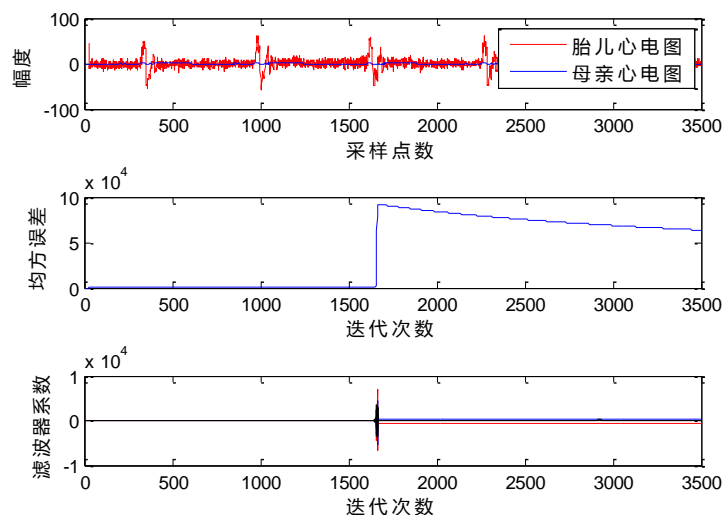


图 5.4 步长  $u=0.01$ ，滤波器阶数  $N=30$

图 5.5 步长  $u=0.07$ ，滤波器阶数  $N=30$ 

从图中可以看出步长对滤波结果是有影响的，滤波器阶数相同的情况下，步长越大则滤波收敛速度越快，但当步长超过一定值时会引起失调，导致滤波结果很模糊，输出信号精度不高；反之，步长越小，收敛速率越慢，系统比较稳定，输出信号失调也小，但自适应过程却相应加长了。由此来看，自适应滤波器的失调和自适应收敛速度之间存在着矛盾，步长的选择应从整个系统要求出发，在满足精度要求的前提下，尽量加大自适应步长。

## 2.2 不同指数加权因子对滤波结果的影响

通过 RLS 算法的自适应滤波获得下图结果，显示了不同的指数加权因子对滤波的影响。

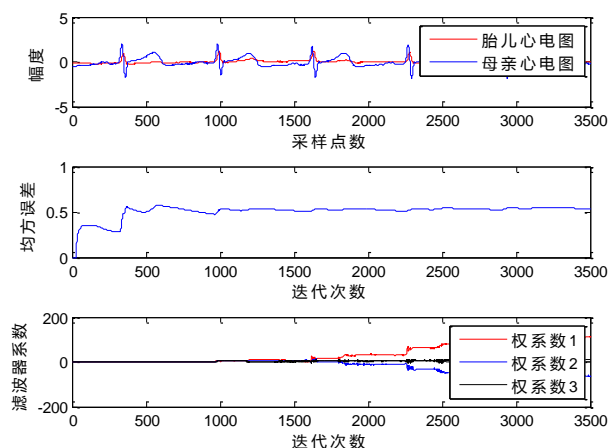


图 5.6 指数加权因子 0.99 的 RLS

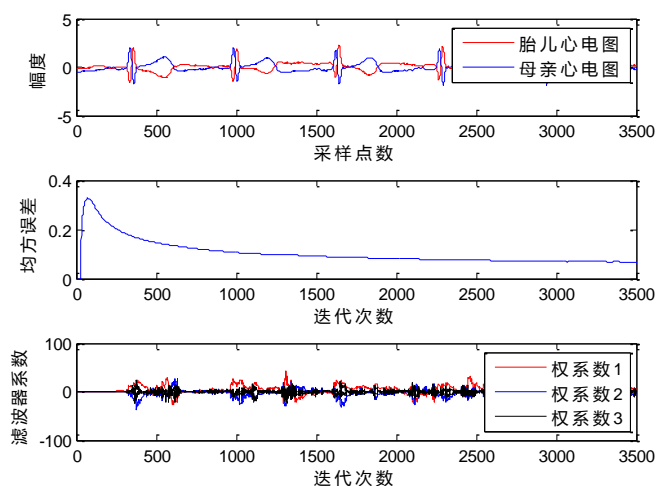


图 5.7 指数加权因子 0.94 的 RLS

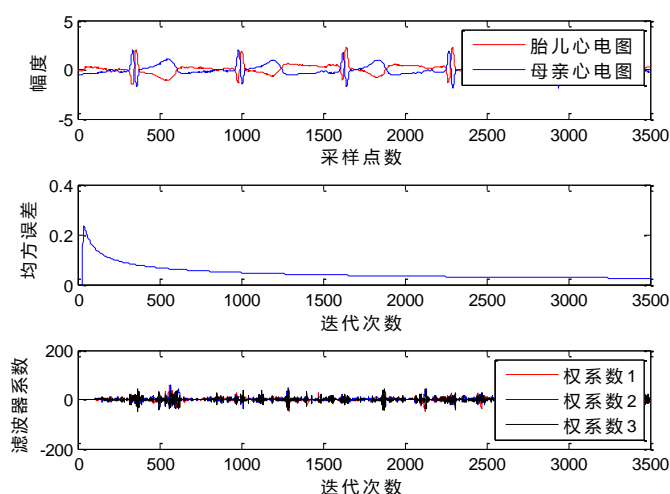


图 5.8 指数加权因子 0.6 的 RLS

从图中可以看出，遗忘因子越小，收敛速度越快，但系统对噪声却越敏感，滤波效果较差。随着遗忘因子的变大，系统对噪声变得不敏感，滤波信号较平滑抖动也少了，但是收敛速度却变慢。由此看来，正确选取遗忘因子的值才能保证系统性能的最佳状态。

RLS 算法的 matlab 源程序如下：

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%RLS 算法%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear,clc
load 101.mat;
s=val(1,1:3500)./15000;
%胎儿心电信号比较弱,为使权值不至过大,这里将幅值除以 15000
Y=val(3,1:3500)./15000;
N=length(s); %观测点数,%1e4 运行数据太大超内存了
s=s';Y=Y';s1=zeros(N,1);
M=30; %RLS 自适应滤波器阶数
Lambda=0.99; %遗忘因子选取 0.99、0.94、0.6

```

```

Delta=0.001;      %相关矩阵 R 的初始化
%滤波输出初始化
y=zeros(N,1);En=zeros(N,1);
%RLS 初始化
P=Delta*eye(M,M);w=zeros(M,N);
%迭代计算
for t=M:N
    u=Y(t:-1:t-M+1);
    cs=u.'*P;      %互相关函数
    k=Lambda+cs*u;
    K(:,t)=(P*u)./k;      %增益矢量
    e(t)=s(t)-w(:,t-1).'*u;%误差函数
    w(:,t)=w(:,t-1)+K(:,t)*e(t);%递归公式
    PPrime=K(:,t)*cs;
    y(t)=w(:,t).'*u;
    En(t)=s(t)-y(t);      %真实估计误差
    P=(P-PPRime)/Lambda;  %误差相关矩阵
    s1(t)=s1(t-1)+abs(En(t)).^2;
    c1(t)=sqrt(s1(t)/t);  %均方误差
end
figure(4);subplot(3,1,1),plot((1:3500),s,'b');
title('母亲心电图');
subplot(3,1,2),plot((1:3500),Y,'r');
title('母亲胎儿混合心电图');
subplot(3,1,3),plot((1:3500),Y-y,'g');
title('RLS 滤波获得胎儿心电图');
figure(5);subplot(3,1,1),plot((1:3500),Y-y,'r',(1:3500),s,'b');
legend('胎儿心电图','母亲心电图');xlabel('采样点数');ylabel('幅度');
subplot(3,1,2);plot(c1);xlabel('迭代次数');ylabel('均方误差');
subplot(3,1,3);plot(w(1,:), 'r');hold on;
plot(w(2,:), 'r');plot(w(3,:), 'k');plot(w(4,:), 'k');
xlabel('迭代次数');ylabel('滤波器系数');
legend('权系数 1','权系数 2','权系数 3');

```

六、(10 分) 用雷达测量地球和月球之间的距离  $d$ ，测量过程用下列方程描述

$$x(n) = d + w(n)$$

其中  $w(n)$  是均值为零，方差为  $\sigma_w^2$  的白噪声序列，它表示测量误差。为了提高测量精度，现采用以下两种滤波器分别对  $x(n)$  进行处理，试比较其方差  $\sigma_w^2$  的大小。

滤波器 1： $y(n) = ay(n-1) + (1-a)x(n)$

滤波器 2： $y(n) = ax(n) + (1-a)x(n-1)$

式中  $0 < a < 1$ 。

### 1. AR 模型

题目中滤波器 1 为一阶的 AR 模型，即自回归 (Auto Regressive, 简称: AR) 模型，又称为时间序列模型。它是一个全极点的模型，其当前输出取决于过去的输出和当前的输入，即已知  $N$  个数据，可由模型推出第  $N$  点前面或后面的数据，目的都是为了增加有效数据。

AR 模型的输入输出关系用数学语言表示为：

$$y(n) = -\sum_{k=1}^p a_k y(n-k) + x(n)$$

式中， $y(n)$  为输出， $x(n)$  为输入，相应的两边进行  $z$  变换，得系统方程：

$$H(z) = \sum \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}$$

$p$  的取值决定了 AR 模型的阶数，如果  $p=1$ ，则是一个典型的一阶 AR 模型，其数学表达式相应为：

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

为了使系统稳定，其中要求  $|a| < 1$ 。

### 2. MA 模型

题目中滤波器 2 为一阶的 MA 模型，即滑动平均 (Moving Average, MA) 模型，它是一个全零点的模型，其当前输出取决于过去的输入和当前输入。滑动平均 MA 系统与其之前进入系统的扰动存在一定的关系，输入输出关系用数学语言表示为：

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b_k x(n-k)$$

其中  $x(n)$  为输入信号， $y(n)$  为输出信号，两边同时进行  $z$  变换得到系统方程：

$$H(z) = B(z) = \sum_{k=0}^q b_k z^{-k}$$

同理，其一阶 MA 模型数学表达式为：

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

相应的也有要求  $|b_k| < 1$ ，才能使系统处于稳定状态。

### 3. 信号滤波处理



信号  $x(n) = d + w(n)$ ， $w(n)$  是均值为 0，方差为  $\sigma_w^2$  的白噪声序列， $x(n)$  的平均值和方差分别为  $E[x(n)] = d$ ， $D[x(n)] = \sigma_w^2$ 。白噪声取不同的方差  $\sigma_w^2$ ，可作为一个控制参量，另外由于两个滤波器中  $0 < a < 1$ ，所以参数  $a$  的不同，比较分别用滤波器 1（AR 模型）和滤波器 2（MA 模型）滤波后的效果，即  $x[n]$  的方差大小。

月球到地球的距离为 384401 公里，则设  $d = 384401000$ ，采样点数  $n = 1000$ 。

### 3.1 白噪声方差 $\sigma_w^2$ 对滤波结果的影响

参数  $a$  保持不变，取  $a = 0.5$ ，白噪声的方差  $\sigma_w^2 = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$  作为变化的控制参量，程序如下：

```
%%%%%%%%%%%%%%AR 模型  MA 模型 (改变噪声方差) %%%%%%%%%%%%%%%
clear all;clc
n=1000;d=384401000;a=0.5;%地月距离 384401 公里,采样点数为 1000,参数 a=0.5
y1(1)=d;y2(1)=d;
for j=1:10
    m=j*0.1;                %改变 m 值来改变噪声方差
    wn=sqrt(m)*randn(1,n);%噪声
    xn=d+wn;                %输入信号
    for i=2:n
        y1(i)=a*y1(i-1)+(1-a)*xn(i);
        y2(i)=a*xn(i)+(1-a)*xn(i-1);
    end
    dx(j)=var(xn); %输入信号方差
    dx1(j)=var(y1); %AR 滤波后信号方差
    dx2(j)=var(y2); %MA 滤波后信号方差
end
N=0.1:0.1:1;figure(1);plot(N,dx,'r','LineWidth',0.5);hold on;
plot(N,dx1,'g','LineWidth',1.5);hold on;
plot(N,dx2,'b','LineWidth',2.5);grid on;
xlabel('白噪声方差值');ylabel('信号方差');
legend('输入信号','AR 滤波后信号方差','MA 滤波后信号方差');
```

得到滤波后信号方差与白噪声方差的关系图如图 6.1 所示，其中最细线为输入信号方差图，最粗线为 MA 滤波后信号方差，另一条为 AR 滤波后信号方差。从图中可以得出以下结论：

- (1) 信号方差随白噪声方差的增加而增加；
- (2) 经过滤波器滤波的信号方差始终小于原始输入信号的方差，说明两种滤波器均可以提高信号的测量精度；
- (3) AR 滤波后输出信号的方差始终小于 MA 滤波后输出信号的方差，且白噪声

方差越大，两者的差越大，说明 AR 滤波效果优于 MA 滤波效果，针对该题的输入信号，AR 模型优于 MA 模型。

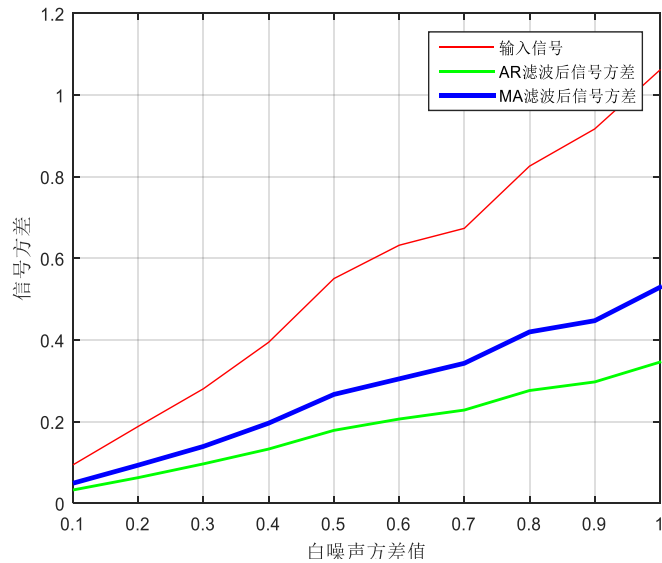


图 6.1 滤波后信号方差与白噪声方差的关系图 ( $a = 0.5$ ,  $\sigma_w^2$  可变)

### 3.2 参数 $a$ 对滤波结果的影响

控制白噪声方差  $\sigma_w^2$  不变，此处取  $\sigma_w^2 = 0.2$ ，参数  $a$  可调，取  $a = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$ ，程序如下：

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%AR 模型  MA 模型(改变参数 a 值)%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all; clc;
n=1000;d=384401000;m=0.2;%地月距离 384401km, 采样点数 1000, 噪声方差为 0.2
wn=sqrt(m)*randn(1,n); %噪声
xn=d+wn; %输入信号
y1(1)=d;y2(1)=d;
for j=1:11
    a=(j-1)*0.1; %改变参数 a 的值
    for i=2:n
        y1(i)=a*y1(i-1)+(1-a)*xn(i);
        y2(i)=a*xn(i)+(1-a)*xn(i-1);
    end
    dx(j)=var(xn); %输入信号方差
    dx1(j)=var(y1); %AR 滤波后信号方差
    dx2(j)=var(y2); %MA 滤波后信号方差
end
N=0:0.1:1;figure(2);
plot(N,dx,'r','LineWidth',0.5);hold on;
plot(N,dx1,'g','LineWidth',1.5);hold on;
plot(N,dx2,'b','LineWidth',2.5);grid on;
xlabel('白噪声方差值');ylabel('信号方差');

```

```
legend('输入信号','AR 滤波后信号方差','MA 滤波后信号方差');
```

得到滤波后信号方差与白噪声方差的关系图如图 6.2 所示,其中最细线为输入信号方差图,最粗线为 MA 滤波后信号方差,另一条为 AR 滤波后信号方差。从图中可得出以下结论:

- (1) 输入信号的方差与参数  $a$  值无关;
- (2) 经过滤波器滤波的信号方差始终小于等于原始输入信号的方差,说明两种滤波器均可以提高信号的测量精度。
- (3) AR 滤波后输出信号方差随参数  $a$  值增大而减小, MA 滤波后输出信号方差随参数  $a$  值增大先减小后增加,参数  $a$  值临界点约为 0.5; AR 滤波后的输出信号的方差始终小于 MA 滤波后的输出信号的方差,且白噪声方差越大,两者的差越大,说明 AR 滤波效果优于 MA 的滤波效果,AR 模型优于 MA 模型。

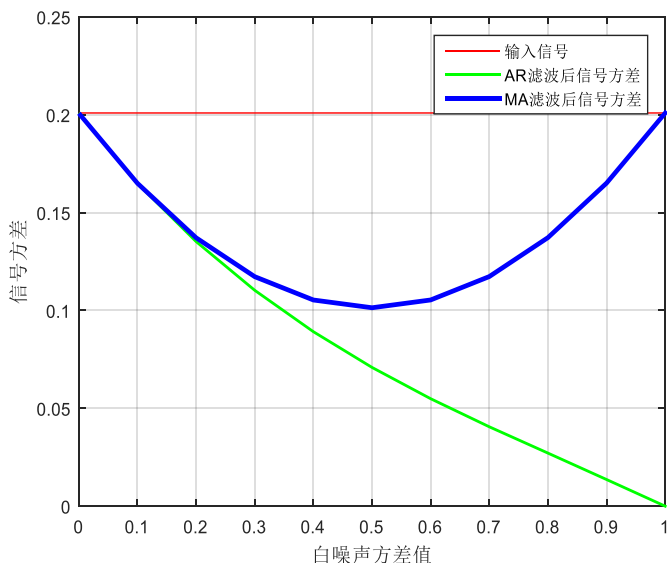


图 6.2 滤波后信号方差与白噪声方差的关系图 ( $\sigma_w^2 = 0.2$ ,  $a$  可变)

通过以上分析可知,在遇到测量结果滤波问题时,应优先使用 AR 模型,尽量将参数  $a$  值调大,若选择 MA 模型,则参数  $a$  值可尽量取 0.5 附近。

### 七、(15 分) 简述卡尔曼滤波器。并计算下面的例子:

一连续平稳的随机信号  $x(t)$ , 自相关函数  $r_x(\tau) = e^{-|\tau|}$ , 信号  $x(t)$  为量测噪声所干扰, 噪声是白噪声, 测量值的离散值  $z(k)$  为已知,  $T_s = 0.05s$ ,

-3.2,-0.8,-14,-16,-17,-18,-3.3,-2.4,-18,-0.3,-0.4,-0.8,-19,-2.0,-1.2,-11,-14,-0.9,0.8,10,0.2,0.5,-0.5,2.4,-0.5,0.5,-13,0.5,10,-12,0.5,-0.6,-15,-0.7,15,0.5,-0.7,-2.0,-19,-17,-11,-14.

利用卡尔曼滤波, 估计信号  $x(t)$  的波形。并给出不同的量测噪声对卡尔曼滤波

的影响，同时给出迭代次数与均方误差的关系曲线。

解：

### 1. 卡尔曼滤波器

卡尔曼滤波器 (Kalman Filter) 是一个最优化自回归数据处理算法。卡尔曼滤波是以最小均方误差为估计的最佳准则，来寻求一套递推估计的算法，基本思想是：采用信号与噪声的状态空间模型，利用前一时刻的估计值和当前时刻的观测值来更新对状态变量的估计，求出当前时刻的估计值。它适合于实时处理和计算机运算，具有计算量小、存储量低、实时性高的优点。

卡尔曼滤波器的两个重要假设：

(1) 被建模的系统是线性的： $k$  时刻的系统状态可以用某个矩阵与  $k-1$  时刻的系统状态的乘积表示。

(2) 影响测量的噪声属于高斯分布的白噪声：噪声与时间不相关，且只用均值和协方差（即噪声完全由一阶距和二阶距描述）就可以准确地地位幅值建模。

为介绍卡尔曼滤波器算法，引入一个离散控制过程的系统：

$$X(k) = AX(k-1) + BU(k) + W(k)$$

系统的测量值： $Z(k) = HX(k) + V(k)$

其中  $X(k)$  是  $k$  时刻的系统状态， $U(k)$  是  $k$  时刻对系统的控制量。 $A$  和  $B$  是系统结构确定的矩阵， $Z(k)$  是  $k$  时刻的测量值， $H$  是测量系统结果确定的矩阵， $W(k)$  和  $V(k)$  分别表示系统和测量的噪声，均值为 0，协方差分别为  $Q, R$ 。

利用系统的过程模型，来预测下一状态的系统。根据系统的模型，可以基于系统的上一状态来预测当前状态：

$$X(k|k-1) = AX(k-1|k-1) + BU(k)$$

其中  $X(k|k-1)$  是利用上一状态预测的结果， $X(k-1|k-1)$  是上一状态的最优结果， $U(k)$  为当前状态的控制量，可为 0。

协方差的更新

$$P(k|k-1) = AP(k-1|k-1)A' + Q$$

其中  $P(k|k-1)$  是  $X(k|k-1)$  对应的协方差， $P(k-1|k-1)$  是  $X(k-1|k-1)$  对应的协方差， $A'$  表示  $A$  的转置矩阵， $Q$  是系统过程的协方差。

结合当前状态的预测值和测量值，可得到当前状态的最优化估算值：

$$X(k|k) = X(k|k-1) + K(k)[Z(k) - HX(k|k-1)]$$

其中  $K(k) = \frac{P(k|k-1)H'}{HP(k|k-1)H' + R}$  为卡尔曼增益。

当前状态下  $X(k|k)$  的协方差的更新：

$$P(k|k) = [I - K(k)H]P(k|k-1)$$

至此卡尔曼滤波器不断的运行下去直到系统过程结束。

## 2. 计算分析

根据题意可知， $x(t)$  的自相关函数离散化后为  $r_x(n) = e^{-|nT_s|}$ ，功率谱密度函数为

$$S_x(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r_x(n)z^{-n} = (1 - e^{-2T_s}) \frac{z}{z - e^{-T_s}} \frac{z^{-1}}{z^{-1} - e^{-T_s}}$$

平稳随机信号可看做白噪声经过线性系统的输出，则输出信号功率谱密度函数也可表示为

$$S_x(z) = H(z)H(z^{-1})W(z) = H(z)H(z^{-1})\sigma_w^2$$

其中  $\sigma_w^2 = 1 - e^{-2T_s}$  为白噪声方差， $H(z) = \frac{z}{z - e^{-T_s}}$  为线性系统传递函数。由此可知， $H(z)$  为时间序列模型 AR(1) 的传递函数，因此信号  $x(t)$  由 AR(1) 模型构成，可表示为  $x(n) = e^{-T_s}x(n-1) + w(n)$ 。信号  $x(t)$  受到量测噪声  $v(n)$  所干扰，且噪声为白噪声，则观测方程： $y(n) = x(n) + v(n)$ 。

由题意可知  $T_s = 0.05s$ ，但是量测噪声  $v(n)$  的方差没有给出，分别取 0.1、1、10，程序如下：

```
%%%%%%%%%%%%%%卡尔曼滤波器%%%%%%%%%%%%%%
Ts=0.05;
C=1;
A=exp(-Ts); %信号 x(t) AR(1) 模型的系数
D=1-exp(-2*Ts); %白噪声方差
R=0.1; %R 取 0.1, 1, 10
p(1)=1; %各初值;
p1(1)=A*p(1)*A'+D; %由 p1 代表 p';
x(1)=0; %设信号初值为 0;
H(1)=p1(1)*C'*inv(C*p1(1)*C'+R);
a=[-3.2,-0.8,-14,-16,-17,-18,-3.3,-2.4,-18,-0.3,-0.4,-0.8,-19,-2.
0,-1.2,-11,-14,-0.9,0.8,10,0.2,0.5,-0.5,2.4,-0.5,0.5,-13,0.5,10,-
12,0.5,-0.6,-15,-0.7,15,0.5,-0.7,-2.0,-19,-17,-11,-14];
```

```

%a 为测量出来的离散值;
N=length(a); %测量的点数 ;
for k=2:N
    p1(k)=A*p(k-1)*A'+D; %未考虑噪声时的均方误差阵;
    H(k)=p1(k)*C'*inv(C*p1(k)*C'+R); %增益方程;
    I=eye(size(H(k))); %产生和 H(k) 维数相同的单位矩阵;
    p(k)=(I-H(k)*C)*p1(k); %滤波的均方误差阵;
    x(k)=A*x(k-1)+H(k)*(a(k)-C*A*x(k-1)); %递推公式;
end
t=(1:N)*Ts;
subplot(2,1,1);plot(t,a);hold on;plot(t,x,'LineWidth',2);grid on;
xlabel('t/s');ylabel('滤波前后信号的幅值');
title('卡尔曼滤波前后信号的波形')
subplot(2,1,2);plot(1:N,p);grid on;

```

卡尔曼滤波器滤波前后信号的波形图及均方误差随迭代次数变化曲线如下图 7.1-7.3 所示，其中卡尔曼滤波前后信号波形图中的细线为滤波前信号波形，粗线为卡尔曼滤波后信号波形。

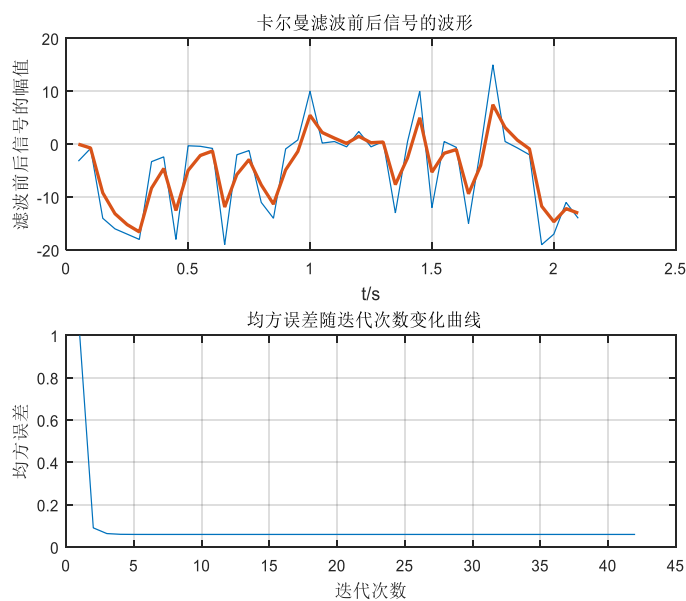
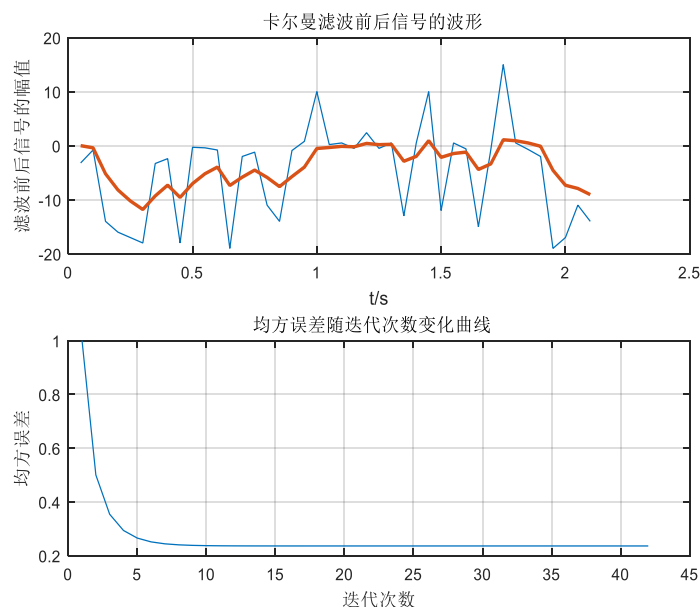
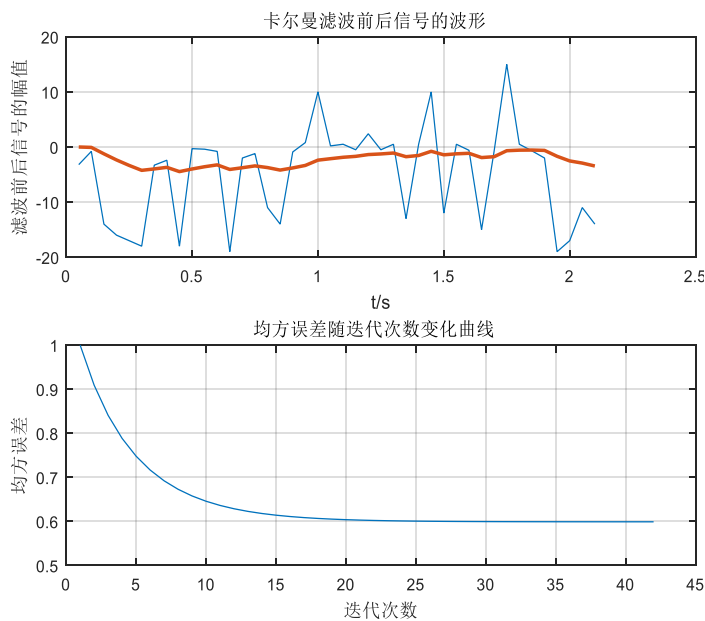


图 7.1 量测噪声方差  $v(n) = 0.1$

图 7.2 量测噪声方差  $v(n)=1$ 图 7.3 量测噪声方差  $v(n)=10$ 

从图中可以看出，卡尔曼滤波器滤波后的信号波形变得平滑，说明卡尔曼滤波器有滤波效果，可以滤除信号中的噪声，且量测噪声方差越大，滤波后信号的波形越平滑，说明对信号的逼近速度越慢。此外，均方误差随迭代次数增加而减小，且减小的速度由快变慢，迭代次数增加到某个值时，均方误差基本不变。量测噪声方差越小，滤波后信号波形与原始信号波形越接近，更能快速地收敛到原始信号，且最终稳定后的均方误差越小。

#### 八、（10 分）简要介绍小波分析方法及消噪中的应用，并举一例说明小波滤波

与其他滤波器之间的区别（建议采用实验数据，对阈值的选择要给出依据）。

解：

## 1. 小波分析方法及消噪中的应用

### 1.1 小波分析方法

小波分析是当前应用数学和工程学科中一个迅速发展的新领域，经过近 10 年的探索研究，重要的数学形式化体系已经建立，理论基础更加扎实。与 Fourier 变换相比，小波变换是空间（时间）和频率的局部变换，因而能有效地从信号中提取信息。通过伸缩和平移等运算功能可对函数或信号进行多尺度的细化分析，解决了 Fourier 变换不能解决的许多困难问题。

对于任意函数或者信号  $f(x)$ ，它的小波变换为

$$W_f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{(a,b)}}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx$$

任意的函数  $f(x)$  小波变换是一个二元函数。对于任意参数对  $(a,b)$ ，小波函数  $\psi_{(a,b)}(x)$  在  $x=b$  的附近存在明显的波动，远离  $x=b$  的地方将迅速地衰减到 0， $W_f(a,b)$  的本质就是原来的函数或者信号  $f(x)$  在  $x=b$  点附近按  $\psi_{(a,b)}(x)$  进行加权的平均，体现的是以  $\psi_{(a,b)}(x)$  为标准快慢尺度的  $f(x)$  的变化情况，一般称参数  $a$  为尺度参数，而参数  $b$  为时间中心参数。

小波变换联系了应用数学、物理学、计算机科学、信号与信息处理、图像处理、地震勘探等多个学科。数学家认为，小波分析是一个新的数学分支，它是泛函分析、Fourier 分析、样调分析、数值分析的完美结晶；信号和信息处理专家认为，小波分析是时间—尺度分析和多分辨分析的一种新技术，它在信号分析、语音合成、图像识别、计算机视觉、数据压缩、地震勘探、大气与海洋波分析等方面的研究都取得了有科学意义和应用价值的成果。

### 1.2 小波分析在消噪中的应用

利用小波方法消噪，是小波分析应用于实际的重要方面。小波消噪的关键是如何选择阈值和如何利用阈值来处理小波系数。如果信号  $f(n)$  被噪声  $e(n)$  污染后为  $s(n)$ ，那么基本的噪声模型就可以表示为

$$s(n) = f(n) + \sigma e(n)$$

式中：噪声  $e(n)$  的强度为  $\sigma$ 。最简单的情况下噪声为高斯白噪声，且  $\sigma=1$ 。小



波变换就是要抑制噪声  $e(n)$  来恢复信号  $f(n)$ ，从而达到去除噪声的目的。从统计学的观点看，这个模型是一个随时间推移的回归模型，也可以看作是在正交基上对函数  $f(n)$  无参估计。小波消噪通常通过以下三个步骤予以实现：

- (1) 小波分解；
- (2) 设定各层细节的阈值，对得到的小波系数进行阈值处理；
- (3) 小波逆变换重构信号。

小波消噪的结果取决于以下两点：一是消噪后的信号应该和原信号有同等的光滑性，二是信号经处理后与原信号的均方根误差越小，信噪比越大，效果越好。

如何选择阈值和如何利用阈值来量化小波系数，将直接影响到小波消噪结果。小波变换中，对各层系数降噪所需的阈值一般是根据原信号的信噪比来决定的。在模型里用  $\sigma$  这个量来表示，可以使用 MATLAB 中的 `wnoisest` 函数计算得到  $\sigma$  值，得到信号的噪声强度后，根据下式来确定各层的阈值，式中  $n$  为信号的长度。

$$thr = 2\sqrt{\log(n)}$$

在确定阈值后，可以采用硬阈值或软阈值的处理方法对小波系数做阈值处理。硬阈值法只保留大于阈值的小波系数并将其他的小波系数置零，其表达式如下：

$$s = \begin{cases} x, & |x| > T \\ 0, & |x| \leq T \end{cases}$$

软阈值法将小于阈值的小波系数置零，并把大于阈值的小波系数向零做收缩，其表达式如下：

$$s = \begin{cases} \text{sig}n(x)(|x| - T) & |x| > T \\ 0 & |x| \leq T \end{cases}$$

## 2. 小波滤波与其他滤波器之间的区别

中值滤波法是一种非线性平滑技术，它将每一像素点的灰度值设置为该点某邻域窗口内的所有像素点灰度值的中值。中值滤波是基于排序统计理论的一种能有效抑制噪声的非线性信号处理技术，基本原理是把数字图像或数字序列中一点的值用该点的一个邻域中各点值的中值代替，让周围的像素值接近的真实值，从而消除孤立的噪声点。中值滤波对脉冲噪声有良好的滤除作用，特别是在滤除噪声的同时，能够保护信号的边缘，使之不被模糊。这些优良特性是线性滤波方法所不具有的。此外，中值滤波的算法比较简单，也易于用硬件实现。

图像信号中，高频分量一般对应于图像的边缘轮廓，采用高通滤波器能够实现将图像锐化的效果，增强图像轮廓的清晰度。拉普拉斯算子是图像处理技术中常用的一种增强算子，其本质上是一种各向同性滤波器。因为各向同性滤波器的响应与滤波处理的图像突变方向无关，同时实现简单，所以被广泛使用在高频增强以及图像锐化等图像增强算法之中。

对比小波滤波、中值滤波和拉普拉斯滤波效果，程序如下：

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%小波滤波和其他滤波器的区别%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all; clc;
load wbarb; % 装载原始图像
subplot(3,3,1); image(X);colormap(map); title(' 原始图像 ');
axis square; % 设置显示比例 , 生成含噪图像并图示
init=0;% 初始值
randn('seed',init); % 随机值
XX=X+8*randn(size(X)); % 添加随机噪声
subplot(3,3,2);image (XX);colormap (map);
title(' 含噪图像 '); % 设置图像标题
axis square;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%小波消噪%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[c,l]=wavedec2(XX,2,'coif2'); % 分解
n=[1,2]; % 设置尺度向量
p=[10.28,24.08]; % 设置阈值向量, 对高频小波系数进行阈值处理
nc=wthcoef2('d',c,l,n,p,'s');
Xl=waverec2(nc,l,'coif2'); % 图像的二维小波重构
subplot(3,3,4);image(Xl);colormap(map);
title('小波消噪后的图像 ');
axis square; % 设置显示比例 , 再次对高频小波系数进行阈值处理
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%中值滤波%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P=double(XX);[m n]=size(P);k=3;m1=m+2;n1=n+2;PP=zeros(m1,n1);
for i=2:m1-1
    for j=2:n1-1
        PP(i,j)=P(i-1,j-1);
    end
end
PP(1,2:n1-1)=P(2,1:n); %对原矩阵进行扩充, 把边缘点考虑进去
PP(m1,2:n1-1)=P(m-1,1:n);
PP(1:m1,1)=PP(1:m1,3);
PP(1:m1,n1)=PP(1:m1,n1-2);
for i=2:m1-1
    for j=2:n1-1
        c=PP(i-1:i+1,j-1:j+1);
        e=c(1,:); %是 c 矩阵的第一行
    end
end

```

```

for u=2:k
    e=[e,c(u,:)]; %将c矩阵变为一个行矩阵
end
mm=median(e); %mm是中值
x2(i,j)=mm; %将模板各元素的中值赋给模板中心位置的元素
end
end

subplot(3,3,5);imagesc(x2);colormap(map);
title('中值滤波消噪后的图像');
axis square;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%拉普拉斯滤波器%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
w4=[1 1 1;1 -4 1;1 1 1];w8=[1 1 1;1 -8 1;1 1 1];
f=im2double(XX);
g4=f-imfilter(f,w4,'replicate');
g8=f-imfilter(f,w8,'replicate');
subplot(3,3,7);image(g4);colormap(map);
title('中心为-4的拉普拉斯滤波');
axis square;
subplot(3,3,8);image(g8);colormap(map);
title('中心为-8的拉普拉斯滤波');
axis square;
h4=fspecial('laplacian',0);B5=filter2(h4,XX);
subplot(3,3,9);imshow(B5,[ ]);colormap(map);
title('拉普拉斯滤波后的图像');

```

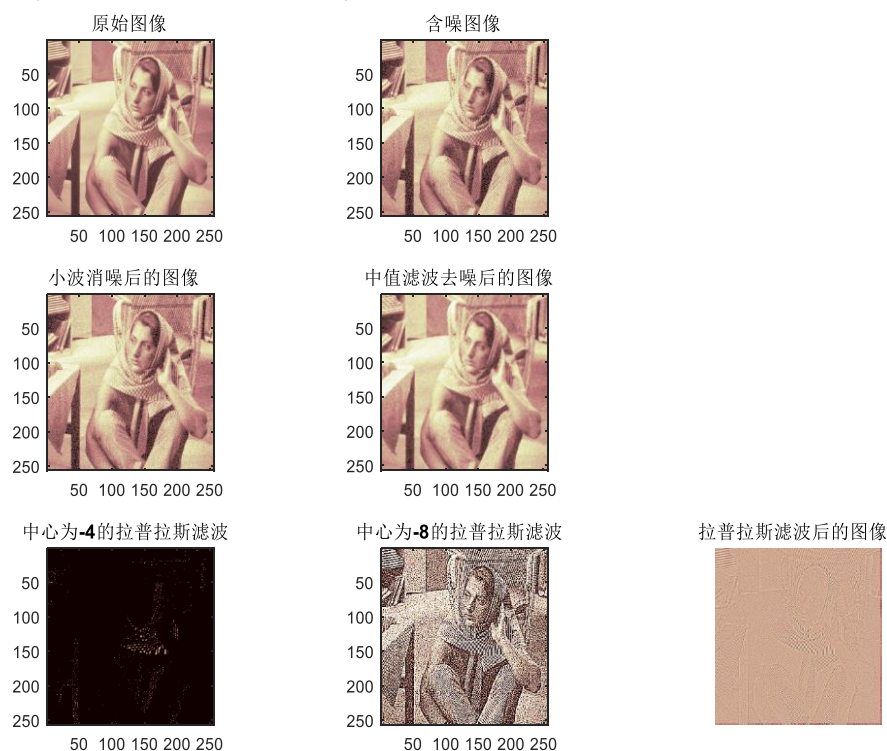


图 8.1 原始图像和消噪后图像

从图 8.1 中可以看出,小波滤波的消噪效果最好,中值滤波后图像的分辨率减小,

拉普拉斯滤波效果最差，但是对图像锐化能力较强。在实际应用中，应视图像噪声类型不同选取合理的滤波方式对图像进行滤波。

**九、（5 分）阅读上课内容以外的其他现代信号方法相关文章，请对其内容进行总结，从技术思路、主要优缺点和您的个人评价三个角度加以阐述。**

要求：1：利用 Matlab 语言来完成，附上程序。

2：最好采用本实验室的实验数据，解决具体的问题。

3：写作时，要有理论依据、不同方法的比较、有数据处理及分析结果。

解：

### 1. 希尔伯特黄变换思想

HHT (Hilbert-Huang Transform, 希尔伯特黄变换)是一个全新的、具有较高时频分辨率的自适应时频分析方法，它可以处理非线性非平稳信号。

N.E.Huang 等认为任何信号都是由基本信号：固有模态信号或固有模态函数 IMF (Intrinsic Mode Function)组成，IMF 相互叠加就形成复合信号。并提出了在物理上定义一个有意义的瞬时频率的必要条件：函数对称于局部零均值，且有相同的极值与过零点。进而定义了满足下面两个条件的函数为固有模态函数 IMF：

(1) 整个数据序列中，极值点的数量与过零点的数量相等或至多相差 1；

(2) 信号上任意一点，由局部极大值点确定的包络线和局部极小值点确定的包络线的均值为 0，即信号关于时间轴局部对称。

### 2. 希尔伯特黄变换的特点

(1) HHT 能分析非线性非平稳信号

传统的数据处理方法，如傅立叶变换只能处理线性非稳的信号，小波变换虽在理论上能处理非线性非平稳信号，但在实际算法实现中却只能处理线性非平稳信号。历史上还出现过不少信号处理方法，然而它们不是受线性束缚就是受平稳性束缚，并不能完全意义上处理非线性非平稳信号。HHT 则不同于这些传统方法，它彻底摆脱了线性和平稳性束缚，非常适用于分析非线性非平稳信号。

(2) HHT 是完全自适应性的

HHT 能够自适应产生“基”，即由“筛选”过程产生的 IMF。这点不同于傅立叶变换和小波变换。傅立叶变换的基是三角函数，小波变换的基是满足“可容性条件”的小波基，小波基也是预先选定的。

(3) HHT 不受 Heisenberg 测不准原理制约

傅立叶变换、短时傅立叶变换、小波变换都受 Heisenberg 测不准原理制约，即时间窗口与频率窗口的乘积必须不小于  $1/2$ 。这就意味着如果要提高时间精度就得牺牲频率精度，反之亦然。而 HHT 不受测不准原理制约，它可以在时间和频率同时达到很高的精度，这使它非常适用于分析突变信号。

#### (4) HHT 的瞬时频率是采用求导得到的

傅立叶变换、短时傅立叶变换、小波变换有一个共同的特点，就是预先选择好基函数，其计算方式是通过与基函数的卷积产生的。HHT 不同于这些方法，它借助 Hilbert 变换求得相位函数，再对相位函数求导产生瞬时频率。这样求出的瞬时频率是局部性的，而不像傅立叶变换，它的频率是全局性的，也不像小波变换，它的频率是区域性的。

### 3. 希尔伯特黄变换实例

利用希尔伯特黄变换对地震波信号进行处理。程序如下：

```
%%%%%%%%%%%%%希尔伯特黄变换处理地震波信号%%%%%%%%%%%%%
load wave3;           %导入地震波信号数据
figure(1);
plot(x5);
figure(2);
imf=emd(x5);
emd_visu(z,1:length(z),imf); %对原始信号进行 EMD 分解，得到 imf
[A,f,t]=hhspectrum(imf);
%希尔伯特-黄变换，A 为各 imf 的幅值，f 为各 imf 的瞬时频率
[im,t]=toimage(A,f);
```

将原信号进行 EMD 变换，得出信号的具有不同局部特征的 IMF 分量，对各个 IMF 分量进行 HHT 变换，得出信号的时-频-幅的分布特征。经验模态分解（EMD）时处理和分析非平稳非线性信号的一种方法，与以往的一些信号处理方法相比，这种方法时先验的直观的自适应的，它是从信号自身出发的一种分解方法，由 EMD 分解得到的 IMF 分量，都可以看做一个独立信号，具有明显的物理意义。能够构造复信号，对 IMF 分量进行希尔伯特变换，可得到信号顺势频率和希尔伯特谱，经过希尔伯特变换能够得到信号的时间与频率之间的关系，可将时间频率表示在同意平面上，便于对信号进行时频分析。此外，还可以得到 Hilbert 振幅谱、边际谱、能量谱和瞬时能量谱，这些都有利于从各个角度分析信号。

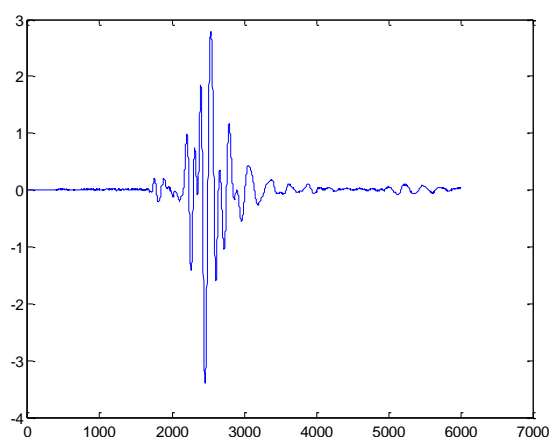


图 9.1 原信号波形

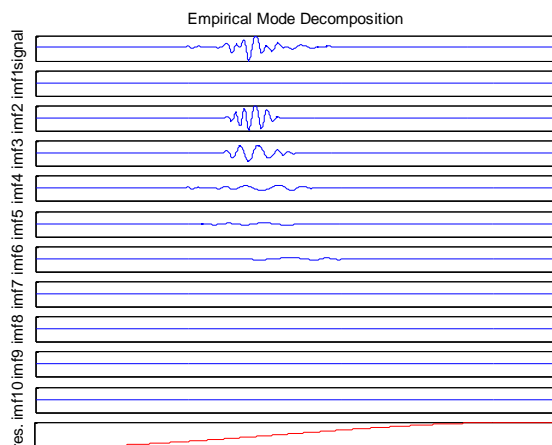


图 9.2 EMD 变换后的波形

#### 4. 希尔伯特黄算法应注意的问题

##### 4.1 IMF 的数学模型与判断

N.E.Huang 给出的 IMF 定义是描述性的，即满足条件：

- (1) 零极点个数最多相差 1；
- (2) 包络对称。

这样的描述显然不够理想，如何给 IMF 以明确的数学模型；在算法实现中，又如何判断一个函数或信号就是 IMF；第一个条件较易实现，第二个条件又如何实现。

##### 4.2 包络问题

如何给所谓的包络以明确的数学模型；用不同的包络算法就会产生不同的 IMFS，如何判断包络算法的优劣。

##### 4.3 端点问题

在应用 EMD 方法时，如果不对端点进行相应处理，就会出现在端点附近上下包络交叉的情况，这样就会使得均值出现偏移，对 EMD 产生不良影响，使得分解出的 IMF 在端点附近产生失真。特别当数据序列较短时，还可能“污染”到内部，使得 IMF 失真更严重，那么如何解决端点问题。

时间：2015 年 7 月 2 日