Matematika Peminatan MAN 2 Kota Malang

Tahun Pelajaran 2022/2023 - Semester 5

oleh : Kaditya Rakan Pandyansa

PROPERTI PENTING

Properti Limit*

a. Sebuah limit memiliki nilai, jika ia memiliki menuju nilai yang sama dari kanan (sumbu-x positif) dan dari kiri (sumbu-x negatif), atau notasinya

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

b. Untuk menyelesaikan suatu soal limit, langkah pertama yang harus dicoba adalah dengan substitusi langsung ke dalam fungsi, jika nilainya $\frac{0}{0}$ maka bisa dilanjutkan dengan merasionalkan atau mengubah bentuknya jika trigonometri.

c. Nilai dari $\lim_{x \to \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}$

   Jika $a > p$, nilai limitnya adalah $+\infty$
   Jika $a < p$, nilai limitnya adalah $-\infty$
   Jika $a = p$, nilai limitnya adalah $\frac{(b-q)}{2\sqrt{a}}$

Properti Trigonometri

a. $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
b. $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta$
c. $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{(a+b)}{2} \cos \frac{(a-b)}{2}$
d. $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{(a+b)}{2} \sin \frac{(a-b)}{2}$
e. $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{(a+b)}{2} \cos \frac{(a-b)}{2}$
f. $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{(a+b)}{2} \sin \frac{(a-b)}{2}$
g. $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$
h. $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

Properti Limit Trigonometri

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$ (intinya pembilang dan penyebut bebas sinus atau tangen, namun tidak berlaku untuk bentuk cosinus)

b. Bentuk umum dari bentuk sebelumnya, $\lim_{x\to \theta} \frac{(\sin a(x-\theta))}{b(x-\theta)} = \frac{a}{b}$

Properti Analisis dan Aplikasi Turunan**

a. Nilai stasioner dari suatu fungsi dapat ditentukan melalui $f'(x) = 0$

b. Suatu fungsi f disebut naik pada suatu interval x, jika untuk setiap nilai x_1 dan x_2 pada interval itu memenuhi $x_1 < x_2$ maka akan selalu $f(x_1) < f(x_2)$, atau jika dan hanya jika nilai $f'(x) > 0$.
c. Sebaliknya suatu fungsi f disebut turun pada suatu interval x, jika untuk setiap nilai x_1 dan x_2 pada interval itu memenuhi $x_1 < x_2$ maka akan selalu $f(x_1) > f(x_2)$, atau jika dan hanya jika nilai $f'(x) < 0$.

d. Kecekungan dan titik belok suatu kurva dapat ditentukan melalui turunan kedua, dengan rincian

   $f''(x) > 0$, cekung ke atas
   $f''(x) < 0$, cekung ke bawah
   $f''(x) = 0$, titik belok kurva

e. Turunan dari suatu fungsi $y = f^n(x)$ adalah $y' = n \times f'(x) \times f^{n-1}(x)$
f. Jika diketahui suatu fungsi posisi, maka turunan pertama adalah kecepatan pada suatu waktu, dan turunan kedua adalah percepatan pada suatu waktu

---

Lebih lengkapnya bisa diakses di

https://drive.google.com/drive/folders/19WgB6gjW_CqIQYFmDW4dVypgYB_Q1lWy

Soal PAS 2021/2022 : SOAL PAS MATPEM XII MIPA 2021-2022

* : Pembuktian Rumus Limit Tak Hingga

** : Aplikasi Turunan Part 1

Pembahasan dan Analisis Soal :

1. Diketahui $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$

   Nilai $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x)$ adalah ...

   Jika kita melihat grafik pada soal, nilai limit pada $\frac{\pi}{4}$, dari sumbu-x negatif (dari kiri) menuju sumbu$-y$ positif. Kemudian dari sumbu$-x$ positif (dari kanan) nilai $f(x)$ nya menuju sumbu$-y$ negatif. Sehingga di dapat limit dari kiri dan limit dari kanan tidak menuju nilai yang sama, disimpulkan nilai limitnya tidak ada.

2. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\tan x}{\csc x + 2}\right)$

   Cek metode pertama, substitusi :

$$\frac{\left(1 + \tan \frac{\pi}{4}\right)}{\csc \frac{\pi}{4} + 2} = \frac{(1+1)}{\sqrt{2} + 2} = \frac{2\left(2 - \sqrt{2}\right)}{\left(2 + \sqrt{2}\right)\left(2 - \sqrt{2}\right)} = \frac{2\left(2 - \sqrt{2}\right)}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

3. Nilai dari $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\tan 2x \sin 2x}$

   Didapat nilai $\frac{0}{0}$ setelah substitusi $x = 0$,
   Maka kita harus ubah bentuk trigonometrinya,

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\frac{\cos 2x - 1}{\tan 2x \sin 2x} = \frac{-2\sin^2 x}{\tan 2x \sin 2x} = \frac{-2\sin^2 x}{\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}} = -\frac{2\sin^2 x\,(1 - 2\sin^2 x)}{\sin^2 2x}$$

$$\frac{-2\sin^2 x + 4\sin^4 x}{4\sin^2 x \cos^2 x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = -\frac{1}{2}\sec^2 x + \tan^2 x$$

$$\lim_{x \to 0} -\frac{1}{2}\sec^2 x + \tan^2 x \Rightarrow -\frac{1}{2}\sec^2(0) + \tan^2(0) = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

4. Nilai dari $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x+\sin x}{\tan 2x-\sin x}$

Didapat nilai $\frac{0}{0}$ setelah substitusi $x = 0$, ubah bentuk fungsinya terlebih dahulu :

$$\frac{\sin 3x + \sin x}{\tan 2x - \sin x} = \frac{\left(2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}\right)}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin x} = \frac{2\sin 2x\cos x}{\frac{2\sin x\cos x - \sin x\cos 2x}{\cos 2x}}$$

$$= \frac{(2\sin 2x\cos x)\cos 2x}{(\sin x)(2\cos x - \cos 2x)} = \frac{(4\sin x\cos^2 x)(\cos 2x)}{(\sin x)(2\cos x - \cos 2x)} = \frac{(4\cos^2 x)(\cos 2x)}{2\cos x - \cos 2x}$$

Selesai, selanjutnya substitusikan $x = 0$ ke bentuk yang baru :

$$\frac{(4\cos^2(0))(\cos 0)}{2\cos 0 - \cos 0} = \frac{4}{1} = 4$$

5. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x^2\tan 2x} - \frac{2}{x^2}\right)$

Masih ditemukan bentuk $\frac{0}{0}$ saat kita substitusikan $x = 0$

Oleh karena itu ubah bentuk fungsi trigonnya,

$$\frac{\sin 4x}{x^2\tan 2x} - \frac{2}{x^2} = \frac{\sin 4x - 2\tan 2x}{x^2\tan 2x} = \frac{\left(2\sin 2x\cos 2x - \frac{2\sin 2x}{\cos 2x}\right)}{\frac{x^2\sin 2x}{\cos 2x}}$$

$$= \frac{\frac{(2\sin 2x\cos^2 2x - 2\sin 2x)}{\cos 2x}}{\frac{x^2\sin 2x}{\cos 2x}} = \frac{2\sin 2x\cos^2 2x - 2\sin 2x}{x^2\sin 2x} = \frac{2\sin 2x\,(\cos^2 2x - 1)}{x^2\sin 2x}$$

$$= \frac{2(\cos^2 2x - 1)}{x^2} = \frac{2(1 - \sin^2 2x - 1)}{x^2} = -\frac{2\sin^2 2x}{x^2} = -2\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2$$

Selanjutnya kita hitung nilai limit menuju 0 dengan fungsi yang sama, namun bentuk yang sudah disederhanakan :

$$\lim_{x\to 0} -2\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2 = -2\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2\right) = -2(2^2) = -8$$

6. Nilai dari $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cot 2(\pi x - \pi)}{\cos(x-1)}$

Ketika disubstitusi $x = 1$, didapat hasilnya $\frac{0}{0}$. Maka ubah bentuknya :

$$\frac{(x-1)\cot 2(\pi x - \pi)}{\cos(x-1)} = \frac{\frac{(x-1)\cos 2\pi(x-1)}{\sin 2\pi(x-1)}}{\cos(x-1)} = \frac{\cos 2\pi(x-1)}{\cos(x-1)} \times \frac{(x-1)}{\sin 2\pi(x-1)}$$

Selanjutnya kita eksekusi limit menuju 1 dengan bentuk yang baru,

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{\cos 2\pi(x-1)}{\cos(x-1)} \times \frac{(x-1)}{\sin 2\pi(x-1)}\right) = \lim_{x \to 1}\left(\frac{\cos 2\pi(x-1)}{\cos(x-1)}\right) \times \lim_{x \to 1}\left(\frac{(x-1)}{\sin 2\pi(x-1)}\right)$$

$$= \frac{\cos 2\pi(0)}{\cos 0} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

7. Nilai dari $\lim_{x \to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x \sin x}$

Menggunakan identitas dan pengubahan bentuk trigonometri,

$$\frac{\cos mx - \cos nx}{x \sin x} = \frac{-2.\sin\left(\frac{m+n}{2}\right)x\,.\sin\left(\frac{m-n}{2}\right)x}{x \sin x}$$

Hitung nilai limitnya,

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2.\sin\left(\frac{m+n}{2}\right)x\,.\sin\left(\frac{m-n}{2}\right)x}{x \sin x}$$
$$= -2\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{m+n}{2}\right)x}{x}\right) \times \lim_{x \to 0}\frac{\left(\sin\left(\frac{m-n}{2}\right)x\right)}{\sin x}$$

$$= -2\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m-n}{2}\right) = -\frac{2(m^2-n^2)}{4} = \frac{1}{2}(n^2-m^2)$$

8. Nilai dari $\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

Rasionalkan bentuknya, karena ketika kita substitusi $x = 0$, hasilnya $\frac{0}{0}$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\left(\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}\right) = \frac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)} = \frac{\left(1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$$

$$= 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$$

Hitung nilai limitnya,

$$\lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\right)^2 \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{1+1}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

9. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x^2+5x-1\right)^2}{x^3-2x+3}$

Pangkat tertinggi dari pembilang : 4
Pangkat tertinggi dari penyebut : 3
Pembilang $>$ Penyebut
Sehingga nilai dari limitnya adalah : ∞

10. Nilai $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-9}\right)$

$$\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-9} = \frac{x+2}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = 0$$

Pangkat tertinggi dari pembilang : 1
Pangkat tertinggi dari penyebut : 2
Pembilang $<$ Penyebut
Sehingga nilai dari limitnya adalah : 0

11. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-9x-4}-\sqrt{x^2+2x+10}$

Menggunakan rumus yang ada pada properti,

$$\frac{-9-2}{2\sqrt{1}} = -\frac{11}{2}$$

12. Diketahui nilai dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-2x+6}-2x-k=\frac{5}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-2x+6}-\sqrt{(2x+k)^2}=\frac{5}{2}$$
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-2x+6}-\sqrt{4x^2+4kx+k^2}=\frac{5}{2}$$

Maka dari pengubahan ruas kiri kita mendapatkan,

$$\frac{\left(-2-(4k)\right)}{2\sqrt{4}}=\frac{5}{2}$$
$$2(-2-4k)=20$$
$$-2-4k=10$$
$$-4k=12$$
$$k=-3$$

13. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} 2x^2\left(1-\cos\frac{4}{x}\right)$ adalah

Substitusi $y=\frac{1}{x}$, bentuk limit menjadi

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{y^2}(1-\cos 4y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{y^2}\left(1-(1-2\sin^2 2y)\right)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{y^2}(2\sin^2 2y)\right)$$
$$=4\times\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin 2y}{y}\right)^2=4\times\left(\frac{2}{1}\right)^2=4\times 4=16$$

14. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2 x-x}{2x+1}$ adalah

Kita belum bisa menemukan nilai limit dalam bentuk normal, maka pembilang dan penyebut kita bagi dengan x,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\sin^2 x}{x}-1\right)}{2+\frac{1}{x}}=\frac{\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2 x}{x}-\lim_{x\to\infty}1\right)}{\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{0-1}{2+0}=-\frac{1}{2}$$

15. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} 2x^2\left(\cos\frac{3}{x}-1\right)$

Substitusi nilai $y=\frac{1}{x}$, bentuk limit menjadi :

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{y^2}(\cos 3y-1)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{y^2}\left(\left(1-2\sin^2\frac{3}{2}y\right)-1\right)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{y^2}\left(-2\sin^2\frac{3}{2}y\right)\right)$$

$$=-4\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3}{2}y}{y}\right)^2=-4\left(\frac{3}{2}\right)^2=-9$$

16. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\cos\left(\frac{4}{x}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{2}{x}\right)-1}$

Substitusi dimana $y=\frac{1}{x}$, bentuknya menjadi :

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{1-\cos 4y}{\cos^2 2y-1}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\left(1-(1-2\sin^2 2y)\right)}{(1-\sin^2 2y)-1}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{2\sin^2 2y}{-\sin^2 2y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{-1}\right)=-2$$

17. Nilai dari $\lim_{h\to 0}\frac{\sin a(x+h)-\sin ax}{h}$

Ini sama dengan turunan pertama pada fungsi trigonometri : $\sin ax$.
Maka jika $f(x)=\sin ax$, diperoleh :

$$f'(x)=a\cos ax$$

18. Diketahui fungsi $(x)=\frac{\tan x}{\sin 2x}$. Tentukan $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Hitung nilai $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{\left(0-\left(2\times(-\sin x)(\cos x)\right)\right)}{(\cos^2 x)^2}=\frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x}=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$$

19. Diketahui fungsi $f(x) = (\sin 2x - \cos 2x)^2$

Nilai dari $f'(x) = 2(\sin 2x - \cos 2x)' \times (\sin 2x - \cos 2x)^1$

$$= 2(2\cos 2x + 2\sin 2x)(\sin 2x - \cos 2x) = 4(\sin^2 2x - \cos^2 2x)$$
$$= -4(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$
$$= -4(\cos 4x) = -4\cos 4x$$

20. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = \left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)' \times \left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{2}{3}-1}$$
$$= \frac{2}{3}\left(-2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{3}}$$
$$= -\frac{4}{3} \times \frac{\left(\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\sqrt[3]{\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}}$$

21. Jika diketahui $f(x) = x^2 \sin 3x$, maka tentukan $f'(x)$:

$$f'(x) = (x^2)'(\sin 3x) + (x^2)(\sin 3x)'$$
$$= 2x(\sin 3x) + x^2(3\cos 3x) = 2x\sin 3x + 3x^2\cos 3x$$

22. Diketahui fungsi $f(x) = \sin^2 2x$, tentukan nilai x yang memenuhi $f'(x) = 2$

$$f'(x) = 2(\sin 2x)' \times (\sin 2x)^{2-1}$$
$$= 2(2\cos 2x) \times (\sin 2x) = 4\sin 2x \cos 2x = 2(2\sin 2x \cos 2x) = 2\sin 4x$$

Selanjutnya mencari nilai x yang memenuhi $f'(x) = 2$,

$$2\sin 4x = 2$$
$$\sin 4x = 1$$
$$4x = 90° = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{8}$$

23. Gradien garis normal kurva $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$, di titik yang berabsis $\frac{\pi}{6}$ adalah :

Gradien garis singgung pada suatu titik pada kurva dapat ditentukan melalui substitusi absis yang diinginkan kepada turunan pertama dari fungsi kurva tersebut, Maka kita cari terlebih dahulu turunan pertama dari fungsinya :

$$y' = \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

Substitusi $= \frac{\pi}{6}$,

$$y' = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Sehingga gradien garis singgungnya adalah 2, kemudian karena garis normal selalu tegak lurus dengan garis singgung, maka gradien garis normalnya adalah :

$$m_{singgung} \times m_{normal} = -1$$
$$m_{normal} = -\frac{1}{2}$$

24. Persamaan garis singgung kurva $y = \frac{1}{2}\cos 2x$ di titik yang berabsis $x = \frac{\pi}{6}$ adalah ...

Cari terlebih dahulu gradien garis singgung kurva pada titik dengan absis $\frac{\pi}{6}$,

$$y' = \frac{1}{2}(-2\sin 2x) = -\sin 2x \Rightarrow m_{singgung} = -\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kemudian cari ordinat supaya kita mengetahui koordinat titik ketika absisnya $\frac{\pi}{6}$:

$$y = \frac{1}{2}\cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$$

Didapat koordinatnya $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{4}\right)$

Selanjutnya cari persamaan garis singgungnya dengan rumus garis :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$\Rightarrow y - \frac{1}{4} = m_{singgung}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

25. Diketahui $f(x) = \sin^2 x + \sin x$. Salah satu titik balik minimum fungsi f untuk $0 < x < 2\pi$ adalah ...

Titik balik dapat ditentukan melalui turunan pertama fungsi $= 0$,

$$f'(x) = 2\sin x\cos x + \cos x$$

$$\cos x\,(2\sin x + 1) = 0$$
$$\cos x = 0 \cup \sin x = -\frac{1}{2}$$

Didapat nilai x yang memenuhi adalah :

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

Cek semua absis pada $f(x)$,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$
$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$
$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$
$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

Nilai paling minimum adalah $-\frac{1}{4}$.
Maka titik balik minimum fungsi f tersebut adalah

$$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right) \text{ atau } \left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$$

26. Nilai maksimum dari $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos^2 x + \sin x$, untuk $0 < x < 2\pi$ dapat dicapai pada saat x …

Untuk menentukan nilai maksimum, kita harus mencari nilai x saat $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(2\cos x)(-\sin x) + \cos x = -\sqrt{2}\sin x\cos x + \cos x$$
$$0 = f'(x) = \cos x\left(-\sqrt{2}\sin x + 1\right)$$
$$\cos x = 0 \cup \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Didapat semua nilai x yang memenuhi $f'(x) = 0$ adalah

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

Kita cek mana saja yang termasuk nilai paling maksimum,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(0) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(0) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$
$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Kita bisa mengetahui bahwa $\frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$,
Maka nilai maksimum dapat dicapai pada saat $x = \frac{\pi}{4}$ dan $\frac{3\pi}{4}$

27. Diketahui fungsi $f(x) = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ pada interval $0 < x < \pi$.

Untuk mengetahui naik turunnya fungsi, kita harus tahu nilai stasioner maksimum dan minimumnya terlebih dahulu.

$$f'(x) = 2\left(-\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) = -\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$$
$$f'(x) = 0$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 0$$

Didapat nilai $2x$ yang memenuhi adalah :

$$2x = \frac{\pi}{3} \text{ dan } \frac{4\pi}{3}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ dan } \frac{2\pi}{3}$$

Cek nilai $f(x)$ ketika $x = \frac{\pi}{6}$ dan $\frac{2\pi}{3}$ dan ketika x pada ujung interval, yaitu 0 dan π

$$f(0) = \cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$$
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2(0) = 1$$
$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$f(\pi) = \cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$$

Kita bisa menemukan fakta bahwa

$$f(0) < f\left(\frac{\pi}{6}\right) | \, | \, f\left(\frac{\pi}{6}\right) > f\left(\frac{2\pi}{3}\right) | \, | \, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < f(\pi)$$

Sehinga dapat disimpulkan :

- Interval fungsi $f(x)$ naik pada $0 < x < \frac{\pi}{6}$ dan $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$
- Interval fungsi $f(x)$ turun pada $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$

28. Grafik fungsi $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ pada interval $0 < x < \pi$, cekung ke atas pada interval ...

Suatu grafik memiliki kecekungan ke atas ketika turunan keduanya lebih dari 0, atau interval x tertentu memenuhi $f''(x) > 0$

Maka tentukan terlebih dahulu turunan kedua dari $f(x)$,

$$f'(x) = 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x) = -9\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Selanjutnya cari interval yang memenuhi,

$$-9\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) > 0$$
$$\Rightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Didapat intervalnya,

$$-\pi < 3x - \frac{\pi}{2} < 0 \text{ atau } \pi < 3x - \frac{\pi}{2} < 2\pi$$
$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 3x < \frac{\pi}{2} \text{ atau } \frac{3\pi}{2} < 3x < \frac{5\pi}{2}$$
$$\Rightarrow -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} \text{ atau } \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$$

Karena pada soal diminta interval grafiknya $0 < x < 2\pi$, maka interval nilai x yang termasuk grafik fungsi naik adalah :

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ atau } \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$$

29. Salah satu titik belok fungsi $f(x) = 2\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ pada interval $0 < x < \pi$, adalah …

Titik belok adalah suatu kondisi dimana absis dari koordinat titik tersebut memenuhi $f''(x) = 0$
Oleh karena itu kita cari terlebih dahulu absis yang termasuk titik belok itu :

$$f'(x) = 2\left(2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\sin 2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x) = 2\left(4\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 8\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Langsung kita cari absis yang memenuhi,
$$8\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$
Didapat nilai $4x$ yang memenuhi,
$$4x = \pi, 2\pi, 3\pi$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$$
Langkah selanjutnya kita substitusi satu persatu ke dalam $f(x)$ untuk mendapatkan koordinat titik beloknya :
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$$

Semua koordinat titik beloknya : $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$

30. Sebuah mesin deprogram untuk bergerak posisi setiap waktunya dirumuskan dengan $x = 2\cos 3t$ dan $y = 2\cos 2t$. Diketahui juga rumus kecepatan pada suatu waktu ditentukan berdasarkan rumus $v_t = \sqrt{(v_x)^2 + \left(v_y\right)^2}$.
Nilai kecepatan saat $t = 30$ detik adalah …

Pertama-tama kita sudah mengetahui fungsi posisi dari sumbu-x maupun sumbu-y

$$x' = v_x = -6\sin 3t$$
$$y' = v_y = -4\sin 2t$$

Sehingga kita substitusi pada v_t :

$$v_t = \sqrt{(-6\sin 3t)^2 + (-4\sin 2t)^2}$$
$$v_t = \sqrt{(36\sin^2 3t + 16\sin^2 2t)}$$

Substitusi $t = 30$

$$v_{30} = \sqrt{(36\sin^2 90° + 16\sin^2 60°)}$$
$$v_{30} = \sqrt{\left(36 \times 1 + 16 \times \frac{3}{4}\right)} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Terima Kasih banyak untuk yang sudah membaca tulisan ini ! Semoga selalu diberikan kelancaran dan keberkahan, Aamiin.

Note Jika ditemukan kesalahan atau mungkin ada pertanyaan, bisa langsung menghubungi penulis, di Instagram : @kadityarakann.