# Python数据分析与机器学习

## —— 多元线性回归算法

讲师：邹义良

# 本节目标

1. 理解多元线性回归算法

# 一元线性回归



某汽车经销商集团

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 广告投入 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| 汽车销量 | 150 | 220 | 225 | 300 | 330 |

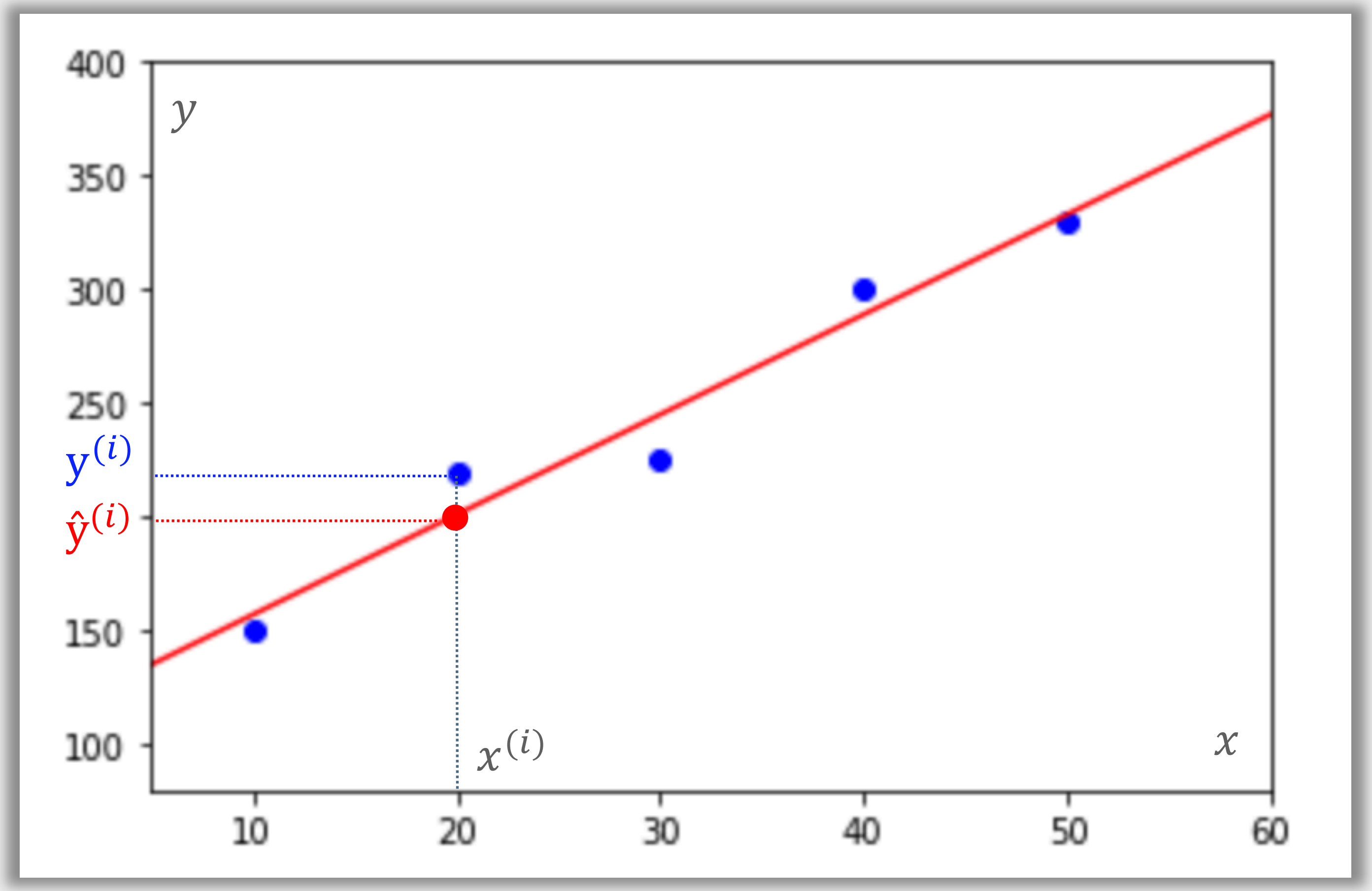
# 多元线性回归

EDU
CSDN学院 IT实战派

## 某汽车经销商集团

| 广告投入 | 汽车品牌 | 4S店位置 | 人均消费水平 | 汽车销量 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 1 | 2.4 | 150 |
| 20 | 1 | 2 | 1.9 | 220 |
| 10 | 2 | 1 | 1.3 | 190 |
| 30 | 2 | 3 | 2.1 | 250 |
| 20 | 3 | 1 | 1.1 | 280 |
| 10 | 2 | 1 | 1.3 | 190 |
| 30 | 2 | 3 | 2.1 | 250 |

# 一元线性回归

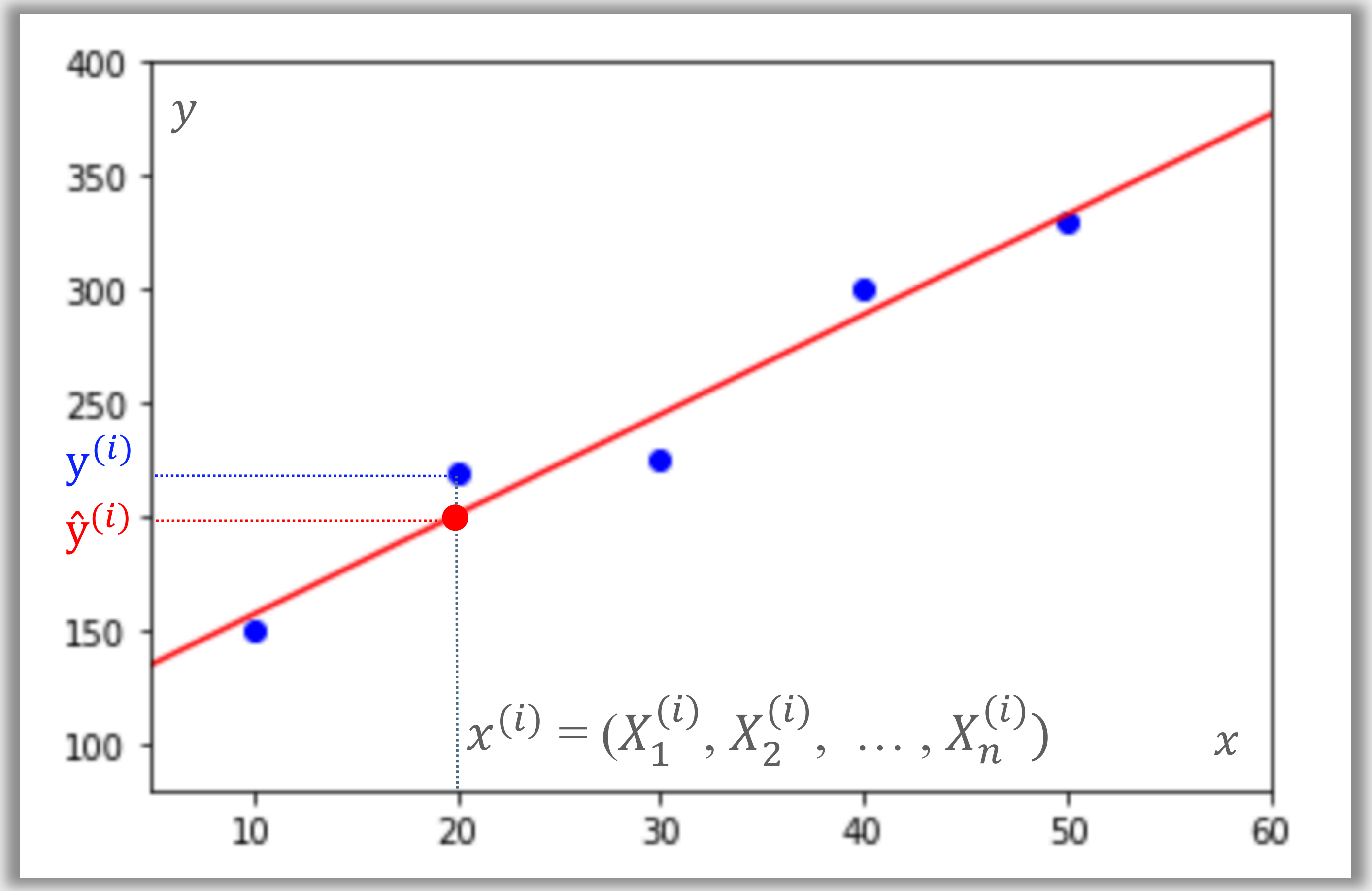



$$y = ax + b$$

$$\hat{y}^{(i)} = ax^{(i)} + b$$

# 多元线性回归






$$\cancel{y = ax + b}$$

$$y = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n x_n$$

$$\hat{y}^{(i)} = \theta_0 + \theta_1 x_1^{(i)} + \theta_2 x_2^{(i)} + \cdots + \theta_n x_n^{(i)}$$

EDU
CSDN学院 IT实战派

$$\sum_{i=1}^{m}(y^{(i)}-\hat{y}^{(i)})^2$$

$$\cancel{\hat{y}^{(i)}=ax^{(i)}+b}$$

$$\hat{y}^{(i)}=\theta_0+\theta_1X_1^{(i)}+\theta_2X_2^{(i)}+\cdots+\theta_nX_n^{(i)}$$

# 多元线性回归

$$\hat{y}^{(i)} = \theta_0 + \theta_1 X_1^{(i)} + \theta_2 X_2^{(i)} + \cdots + \theta_n X_n^{(i)}$$

$$\hat{y}^{(i)} = \theta_0 X_0^{(i)} + \theta_1 X_1^{(i)} + \theta_2 X_2^{(i)} + \cdots + \theta_n X_n^{(i)} \quad , \quad X_0^{(i)} \equiv 1$$

$$X^{(i)} = (X_0^{(i)},\ X_1^{(i)},\ X_2^{(i)}, \ldots ,\ X_n^{(i)})$$

$$\theta = (\theta_0,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots ,\theta_n)^T$$

$$\hat{y}^{(i)} = X^{(i)} \cdot \theta$$

# 多元线性回归

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_1^{(1)} & X_2^{(1)} & \cdots & X_n^{(1)} \\ 1 & X_1^{(2)} & X_2^{(2)} & \cdots & X_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_1^{(m)} & X_2^{(m)} & \cdots & X_n^{(m)} \end{bmatrix} \qquad \theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = X \cdot \theta$$

# 多元线性回归

使 $\sum_{i=1}^{m}(y^{(i)}-\hat{y}^{(i)})^2$ 尽可能小

$$(y-\hat{y})^T(y-\hat{y})$$

$$\hat{y} = X \cdot \theta$$

$$(y-X\cdot\theta)^T(y-X\cdot\theta)$$

# 多元线性回归

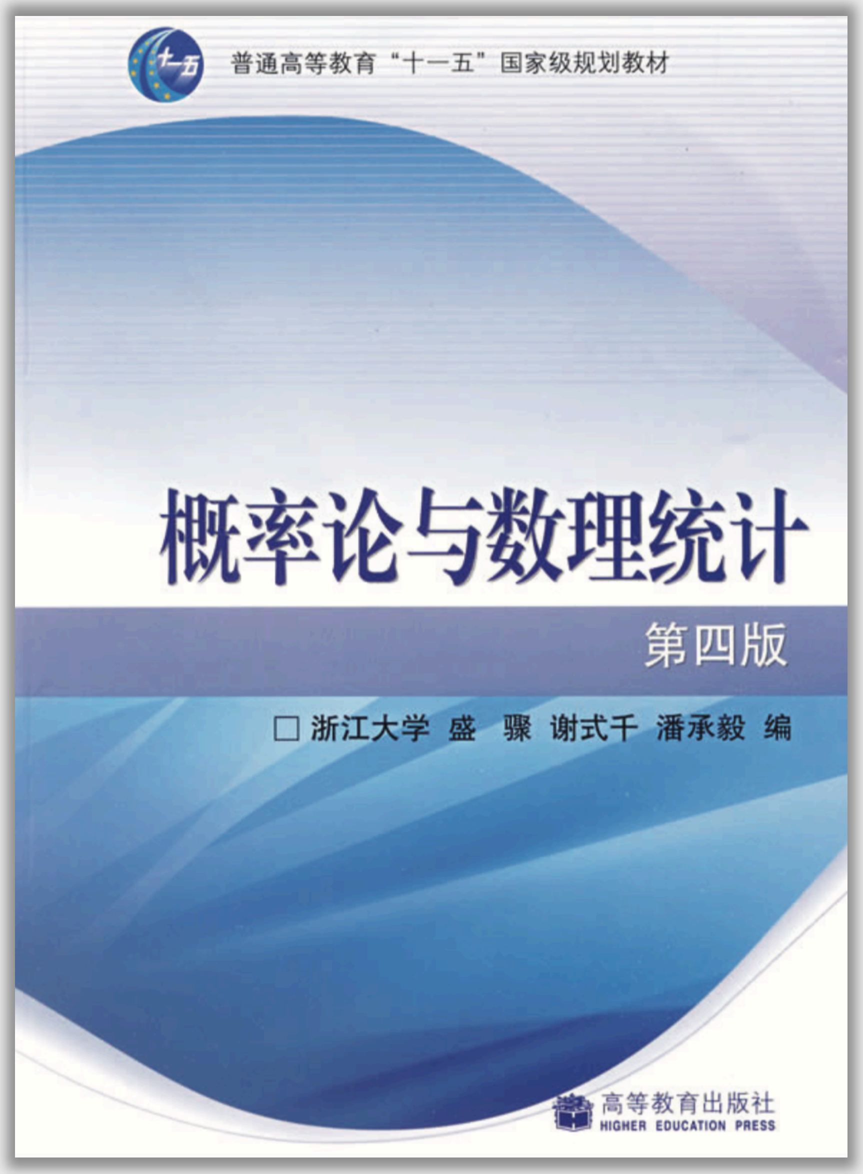
$$Q = (y - X \cdot \theta)^T (y - X \cdot \theta)$$

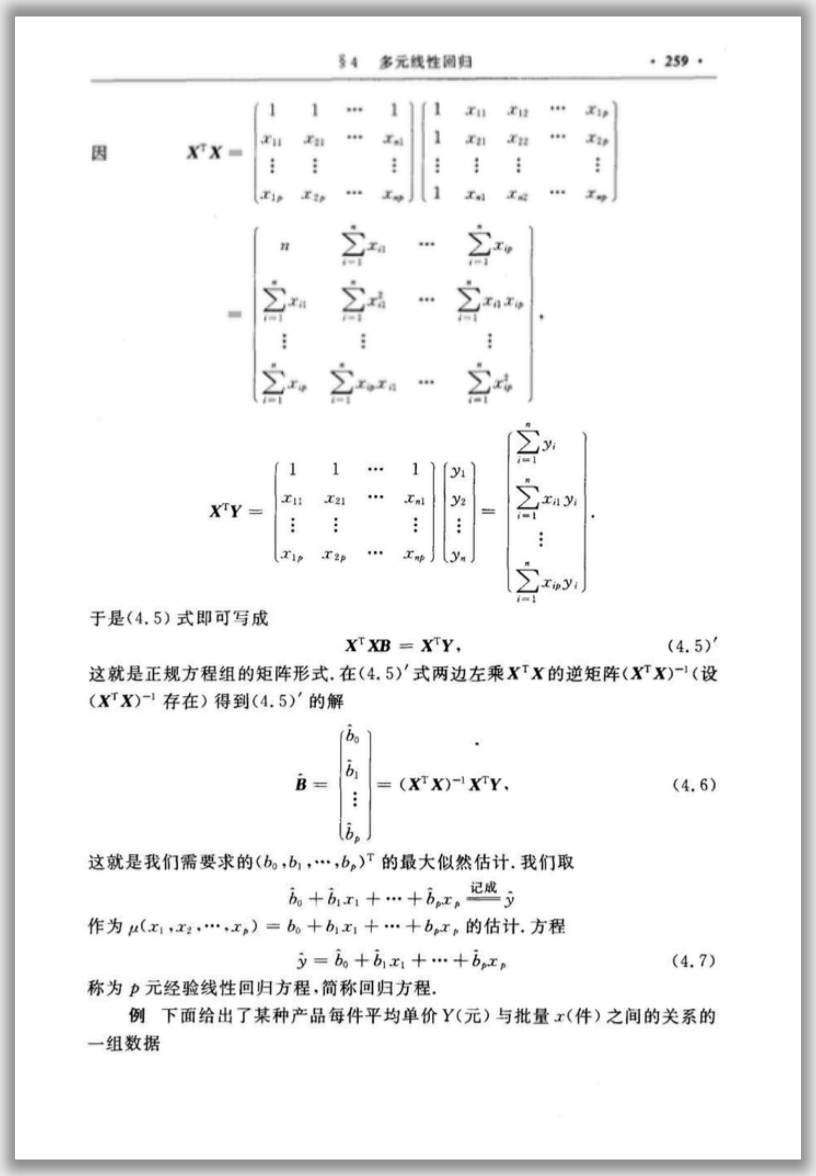
估计 $\theta$ ，使 Q 尽可能小

正规方程解:

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

# 关于数学



§4 多元线性回归 · 259 ·

因
$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\x_{11}&x_{21}&\cdots&x_{n1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{1p}&x_{2p}&\cdots&x_{np}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1p}\\1&x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2p}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_{n1}&x_{n2}&\cdots&x_{np}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}n&\sum_{i=1}^{n}x_{i1}&\cdots&\sum_{i=1}^{n}x_{ip}\\\sum_{i=1}^{n}x_{i1}&\sum_{i=1}^{n}x_{i1}^2&\cdots&\sum_{i=1}^{n}x_{i1}x_{ip}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sum_{i=1}^{n}x_{ip}&\sum_{i=1}^{n}x_{ip}x_{i1}&\cdots&\sum_{i=1}^{n}x_{ip}^2\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\x_{11}&x_{21}&\cdots&x_{n1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{1p}&x_{2p}&\cdots&x_{np}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}y_i\\\sum_{i=1}^{n}x_{i1}y_i\\\vdots\\\sum_{i=1}^{n}x_{ip}y_i\end{pmatrix}.$$
于是(4.5)式即可写成
$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}, \qquad (4.5)'$$
这就是正规方程组的矩阵形式. 在(4.5)′式两边左乘$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$的逆矩阵$(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}$(设$(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}$存在)得到(4.5)′的解
$$\hat{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}\hat{b}_0\\\hat{b}_1\\\vdots\\\hat{b}_p\end{pmatrix}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}, \qquad (4.6)$$
这就是我们需要求的$(b_0,b_1,\cdots,b_p)^{\mathrm{T}}$的最大似然估计. 我们取
$$\hat{b}_0+\hat{b}_1x_1+\cdots+\hat{b}_px_p\xlongequal{\text{记成}}\hat{y}$$
作为$\mu(x_1,x_2,\cdots,x_p)=b_0+b_1x_1+\cdots+b_px_p$的估计. 方程
$$\hat{y}=\hat{b}_0+\hat{b}_1x_1+\cdots+\hat{b}_px_p \qquad (4.7)$$
称为$p$元经验线性回归方程,简称回归方程.

**例** 下面给出了某种产品每件平均单价$Y$(元)与批量$x$(件)之间的关系的一组数据