TDNMF 算法损失函数：

$$\min_{W,H}\|Y-WH^T\|_F^2+\lambda_1(\|W\|_F^2+\|H\|_F^2)+\lambda_2\|W-T\|_F^2+\lambda_3\sum_{i,p=1}^{n}\left\|h_i-h_q\right\|^2C_{ip} \tag{1}$$

$$\mathrm{s.t}, \mathrm{W}\geq 0, \mathrm{H}\geq 0$$

推导思路：拉格朗日函数法

利用 KKT 互补松弛条件实施非负约束。（1）式的拉格朗日函数为：

	$LF=\|Y-WH'\|_F^2+\lambda_1(\|W\|_F^2+\|H\|_F^2)+\lambda_2\|W-T\|_F^2+\lambda_3\sum_{i,p=1}^{n}\left\|h_i-h_q\right\|^2C_{ip}$ $+Tr(\Lambda_1W')+Tr(\Lambda_2H')$	
	$=\mathrm{Tr}[(Y-WH')(Y-WH')']+\lambda_1\{Tr(WW')+Tr(HH')\}+$ $\lambda_2Tr[(W-T)(W-T)']+\lambda_3Tr(H^TLH)+Tr(\Lambda_1W')+Tr(\Lambda_2H')$	
	$=Tr(YY^T)-2Tr(YHW')+Tr(WH'HW')+\lambda_1Tr(WW')+$ $\lambda_1Tr(HH')+\lambda_2Tr(WW')-2\lambda_2Tr(WT')+\lambda_2Tr(TT')+\lambda_3Tr(H^TLH)+$ $Tr(\Lambda_1W')+Tr(\Lambda_2H')$	(9)

我们有下面的 KKT 条件

	$\Lambda_1\odot W=0$	(10)
	$\Lambda_2\odot H=0$	(11)

接下来，我们对公式(9)求导可得：

	$\frac{\partial LF}{\partial W}=-2\mathrm{YH}+2\,WH'H+2(\lambda_1+\lambda_2)W-2\lambda_2T+\Lambda_1$	
	$=2\big((WH'H+(\lambda_1+\lambda_2)W)-(YH+\lambda_2T)\big)+\Lambda_1$	(12)
	同理可得：	
	$\frac{\partial LF}{\partial H}=2\big((HW'W+\lambda_1H+\lambda_3DH)-(Y^TW+\lambda_3CH)\big)+\Lambda_2$	(13)
	令(12)和(13)为 0，可得：	
	$\Lambda_1=-2\big((WH'H+(\lambda_1+\lambda_2)W)-(YH+\lambda_2T)\big)$	(14)
	$\Lambda_2=-2\big((HW'W+\lambda_1H+\lambda_3DH)-(Y^TW+\lambda_3CH)\big)$	(15)
	公式(14)(15)与(10)(11)相结合得：	
	$\big((WH'H+(\lambda_1+\lambda_2)W)-(YH+\lambda_2T)\big)\odot W=0$	(16)
	$\big((HW'W+\lambda_1H+\lambda_3DH)-(Y^TW+\lambda_3CH)\big)\odot H=0$	(17)
	因此，我们可以得到更新公式：	
	$W_{ik}\leftarrow\frac{(YH+\lambda_2T)_{ik}}{\big(WH'H+(\lambda_1+\lambda_2)W\big)_{ik}}W_{ik}$	(18)
	$H_{ik}\leftarrow\frac{\big(Y^TW+\lambda_3CH\big)_{ik}}{\big(HW'W+\lambda_1H+\lambda_3DH\big)_{ik}}H_{ik}$	(19)