TDNMF 算法损失函数：

$$\min_{W,H}\|Y-WH^T\|_F^2+\lambda_1(\|W\|_F^2+\|H\|_F^2)+\lambda_2\|W-T\|_F^2+\lambda_3\sum_{i,p=1}^{n}\left\|h_i-h_q\right\|^2 C_{ip} \tag{1}$$

$$\mathrm{s.t}, \mathrm{W}\geq 0, \mathrm{H}\geq 0$$

推导思路 1：梯度下降法

<table>
<tr><td colspan="3">首先我们考虑无约束条件</td></tr>
<tr><td></td><td>$$\min_{W,H}\|Y-WH^T\|_F^2+\lambda_1(\|W\|_F^2+\|H\|_F^2)+\lambda_2\|W-T\|_F^2+\lambda_3\sum_{i,p=1}^{n}\left\|h_i-h_q\right\|^2 C_{ip}$$</td><td>(2)</td></tr>
<tr><td></td><td>通过“梯度下降法”求次迭代更新公式：</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$\mathrm{LF}=\|Y-WH'\|_F^2+\lambda_1(\|W\|_F^2+\|H\|_F^2)+\lambda_2\|W-T\|_F^2+\lambda_3\sum_{i,p=1}^{n}\left\|h_i-h_q\right\|^2 C_{ip}$$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$=\mathrm{Tr}[(Y-WH')(Y-WH')']+\lambda_1\{Tr(WW')+Tr(HH')\}+$$ $$\lambda_2 Tr[(W-T)(W-T)']+\lambda_3 Tr(H^T LH)$$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$=Tr(YY^T)-2Tr(YHW')+Tr(WH'HW')+\lambda_1 Tr(WW')+$$ $$\lambda_1 Tr(HH')+\lambda_2 Tr(WW')-2\lambda_2 Tr(WT')+\lambda_2 Tr(TT')+\lambda_3 Tr(H^T LH)$$</td><td>(3)</td></tr>
<tr><td></td><td>下面开始求梯度：</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$\frac{\partial LF}{\partial W}=-2\mathrm{YH}+2\,WH'H+2(\lambda_1+\lambda_2)W-2\lambda_2 T$$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$=2\big((WH'H+(\lambda_1+\lambda_2)W)-(YH+\lambda_2 T)\big)$$</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td></td><td>$$\frac{\partial LF}{\partial H}=2\big((HW'W+\lambda_1 H+\lambda_3 DH)-(Y^T W+\lambda_3 CH)\big)$$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>下面开始使用梯度下降法：</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$\mathrm{W}_{ik}\leftarrow W_{ik}-\eta\frac{\partial LF}{\partial W}$$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$\leftarrow W_{ik}+2\eta\left\{(YH+\lambda_2 T)_{ik}-\left(WH^{'}H+(\lambda_1+\lambda_2)W\right)_{ik}\right\}$$</td><td>(5)</td></tr>
<tr><td></td><td>公式(5)是无约束情况，而我们真正需要的是有约束($\mathrm{W}\geq 0,\mathrm{H}\geq 0$)的情况，这里我们可以令$\eta=\frac{\mathrm{w}_{ik}}{2\left(WH^{'}H+(\lambda_1+\lambda_2)W\right)_{ik}}$，便可使其满足约束条件($\mathrm{W}\geq 0,\mathrm{H}\geq 0$)。因此，我们可得：</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$W_{ik}\leftarrow\frac{(YH+\lambda_2 T)_{ik}}{\left(WH^{'}H+(\lambda_1+\lambda_2)W\right)_{ik}}W_{ik}$$</td><td>(7)</td></tr>
<tr><td></td><td>同理可得：</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$H_{ik}\leftarrow\frac{\left(Y^T W+\lambda_3 CH\right)_{ik}}{\left(HW^{'}W+\lambda_1 H+\lambda_3 DH\right)_{ik}}H_{ik}$$</td><td>(8)</td></tr>
</table>

推导思路 2：拉格朗日

利用 KKT 互补松弛条件实施非负约束。（1）式的拉格朗日函数为：

	$LF = \|Y - WH'\|_F^2 + \lambda_1(\|W\|_F^2 + \|H\|_F^2) + \lambda_2\|W - T\|_F^2 + \lambda_3 \sum_{i,p=1}^{n} \left\|h_i - h_q\right\|^2 C_{ip} + Tr(\Lambda_1 W') + Tr(\Lambda_2 H')$	
	$= \mathrm{Tr}[(Y - WH')(Y - WH')'] + \lambda_1\{Tr(WW') + Tr(HH')\} + \lambda_2 Tr[(W - T)(W - T)'] + \lambda_3 Tr(H^T LH) + Tr(\Lambda_1 W') + Tr(\Lambda_2 H')$	
	$= Tr(YY^T) - 2Tr(YHW') + Tr(WH'HW') + \lambda_1 Tr(WW') + \lambda_1 Tr(HH') + \lambda_2 Tr(WW') - 2\lambda_2 Tr(WT') + \lambda_2 Tr(TT') + \lambda_3 Tr(H^T LH) + Tr(\Lambda_1 W') + Tr(\Lambda_2 H')$	(2)

我们由下面的 KKT 条件

	$\Lambda_1 \odot W = 0$	(3)
	$\Lambda_2 \odot H = 0$	(4)

接下来，我们对公式(2)求导可得：

	$\frac{\partial LF}{\partial W} = -2\mathrm{YH} + 2\, WH'H + 2(\lambda_1 + \lambda_2)W - 2\lambda_2 T + \Lambda_1$	
	$= 2\big((WH'H + (\lambda_1 + \lambda_2)W) - (YH + \lambda_2 T)\big) + \Lambda_1$	(5)
	同理可得：	
	$\frac{\partial LF}{\partial H} = 2\big((HW'W + \lambda_1 H + \lambda_3 DH) - (Y^T W + \lambda_3 CH)\big) + \Lambda_2$	(6)
	令(5)和(6)为 0，可得：	
	$\Lambda_1 = -2\big((WH'H + (\lambda_1 + \lambda_2)W) - (YH + \lambda_2 T)\big)$	(9)
	$\Lambda_2 = -2\big((HW'W + \lambda_1 H + \lambda_3 DH) - (Y^T W + \lambda_3 CH)\big)$	(10)
	公式(9)(10)与(3)(4)相结合得：	
	$\big((WH'H + (\lambda_1 + \lambda_2)W) - (YH + \lambda_2 T)\big) \odot W = 0$	(11)
	$\big((HW'W + \lambda_1 H + \lambda_3 DH) - (Y^T W + \lambda_3 CH)\big) \odot H = 0$	(12)
	因此，我们可以得到更新公式：	
	$W_{ik} \leftarrow \frac{(YH + \lambda_2 T)_{ik}}{\big(WH'H + (\lambda_1 + \lambda_2)W\big)_{ik}} W_{ik}$	(13)
	$H_{ik} \leftarrow \frac{\big(Y^T W + \lambda_3 CH\big)_{ik}}{\big(HW'W + \lambda_1 H + \lambda_3 DH\big)_{ik}} H_{ik}$	(14)