TDNMF 算法损失函数：

$$\min_{W,H} \lVert Y - WH^T \rVert_F^2 + \lambda_1(\lVert W \rVert_F^2 + \lVert H \rVert_F^2) + \lambda_2 \lVert W - T \rVert_F^2 + \lambda_3 \sum_{i,p=1}^{n} \lVert h_i - h_q \rVert^2 C_{ip} \tag{1}$$

$$\mathrm{s.t}, \mathrm{W} \geq 0, \mathrm{H} \geq 0$$

推导思路 1：梯度下降法

首先，我们考虑无约束条件		
	$\min_{W,H} \lVert Y - WH^T \rVert_F^2 + \lambda_1(\lVert W \rVert_F^2 + \lVert H \rVert_F^2) + \lambda_2 \lVert W - T \rVert_F^2 + \lambda_3 \sum_{i,p=1}^{n} \lVert h_i - h_q \rVert^2 C_{ip}$	(2)
	通过“梯度下降法”求迭代更新公式：	
	$\mathrm{LF} = \lVert Y - WH' \rVert_F^2 + \lambda_1(\lVert W \rVert_F^2 + \lVert H \rVert_F^2) + \lambda_2 \lVert W - T \rVert_F^2 + \lambda_3 \sum_{i,p=1}^{n} \lVert h_i - h_q \rVert^2 C_{ip}$	
	$= \mathrm{Tr}[(Y - WH')(Y - WH')'] + \lambda_1\{Tr(WW') + Tr(HH')\} + \lambda_2 Tr[(W - T)(W - T)'] + \lambda_3 Tr(H^T LH)$	
	$= Tr(YY^T) - 2Tr(YHW') + Tr(WH'HW') + \lambda_1 Tr(WW') + \lambda_1 Tr(HH') + \lambda_2 Tr(WW') - 2\lambda_2 Tr(WT') + \lambda_2 Tr(TT') + \lambda_3 Tr(H^T LH)$	(3)
	下面开始求梯度：	
	$\frac{\partial LF}{\partial W} = -2\mathrm{YH} + 2\, WH'H + 2(\lambda_1 + \lambda_2)W - 2\lambda_2 T$	
	$= 2\big((WH'H + (\lambda_1 + \lambda_2)W) - (YH + \lambda_2 T)\big)$	(4)
	$\frac{\partial LF}{\partial H} = 2\big((HW'W + \lambda_1 H + \lambda_3 DH) - (Y^T W + \lambda_3 CH)\big)$	(5)
	下面开始使用梯度下降法：	
	$\mathrm{W}_{ik} \leftarrow W_{ik} - \eta \frac{\partial LF}{\partial W}$	
	$\leftarrow W_{ik} + 2\eta \left\{ (YH + \lambda_2 T)_{ik} - \left(WH^{'}H + (\lambda_1 + \lambda_2)W \right)_{ik} \right\}$	(6)
	公式(6)是无约束情况，而我们真正需要的是有约束($\mathrm{W} \geq 0, \mathrm{H} \geq 0$)的情况，这里我们可以令$\eta = \frac{\mathrm{w}_{ik}}{2\left(WH^{'}H + (\lambda_1 + \lambda_2)W\right)_{ik}}$，便可使其满足约束条件($\mathrm{W} \geq 0, \mathrm{H} \geq 0$)。因此，我们可得：	
	$W_{ik} \leftarrow \frac{(YH + \lambda_2 T)_{ik}}{\left(WH^{'}H + (\lambda_1 + \lambda_2)W\right)_{ik}} W_{ik}$	(7)
	同理可得：	
	$H_{ik} \leftarrow \frac{\left(Y^T W + \lambda_3 CH\right)_{ik}}{\left(HW^{'}W + \lambda_1 H + \lambda_3 DH\right)_{ik}} H_{ik}$	(8)

推导思路 2：拉格朗日函数法

利用 KKT 互补松弛条件实施非负约束。（1）式的拉格朗日函数为：

$$
\begin{aligned}
LF &= \|Y-WH'\|_F^2+\lambda_1(\|W\|_F^2+\|H\|_F^2)+\lambda_2\|W-T\|_F^2+\lambda_3\sum_{i,p=1}^{n}\left\|h_i-h_q\right\|^2 C_{ip} \\
&\quad +Tr(\Lambda_1 W')+Tr(\Lambda_2 H') \\
&= \mathrm{Tr}[(Y-WH')(Y-WH')']+\lambda_1\{Tr(WW')+Tr(HH')\}+ \\
&\quad \lambda_2 Tr[(W-T)(W-T)']+\lambda_3 Tr(H^T LH)+Tr(\Lambda_1 W')+Tr(\Lambda_2 H') \\
&= Tr(YY^T)-2Tr(YHW')+Tr(WH'HW')+\lambda_1 Tr(WW')+ \\
&\quad \lambda_1 Tr(HH')+\lambda_2 Tr(WW')-2\lambda_2 Tr(WT')+\lambda_2 Tr(TT')+\lambda_3 Tr(H^T LH)+ \\
&\quad Tr(\Lambda_1 W')+Tr(\Lambda_2 H')
\end{aligned}
\tag{9}
$$

我们有下面的 KKT 条件

$$\Lambda_1 \odot W=0 \tag{10}$$

$$\Lambda_2 \odot H=0 \tag{11}$$

接下来，我们对公式(9)求导可得：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial LF}{\partial W} &= -2\mathrm{YH}+2\,WH'H+2(\lambda_1+\lambda_2)W-2\lambda_2 T+\Lambda_1 \\
&= 2\big((WH'H+(\lambda_1+\lambda_2)W)-(YH+\lambda_2 T)\big)+\Lambda_1
\end{aligned}
\tag{12}
$$

同理可得：

$$\frac{\partial LF}{\partial H}=2\big((HW'W+\lambda_1 H+\lambda_3 DH)-(Y^T W+\lambda_3 CH)\big)+\Lambda_2 \tag{13}$$

令(12)和(13)为 0，可得：

$$\Lambda_1=-2\big((WH'H+(\lambda_1+\lambda_2)W)-(YH+\lambda_2 T)\big) \tag{14}$$

$$\Lambda_2=-2\big((HW'W+\lambda_1 H+\lambda_3 DH)-(Y^T W+\lambda_3 CH)\big) \tag{15}$$

公式(14)(15)与(10)(11)相结合得：

$$\big((WH'H+(\lambda_1+\lambda_2)W)-(YH+\lambda_2 T)\big)\odot W=0 \tag{16}$$

$$\big((HW'W+\lambda_1 H+\lambda_3 DH)-(Y^T W+\lambda_3 CH)\big)\odot H=0 \tag{17}$$

因此，我们可以得到更新公式：

$$W_{ik}\leftarrow\frac{(YH+\lambda_2 T)_{ik}}{\big(WH'H+(\lambda_1+\lambda_2)W\big)_{ik}}W_{ik} \tag{18}$$

$$H_{ik}\leftarrow\frac{\big(Y^T W+\lambda_3 CH\big)_{ik}}{\big(HW'W+\lambda_1 H+\lambda_3 DH\big)_{ik}}H_{ik} \tag{19}$$