# 复杂网络中的路径学习

简介——现在人们对复杂网络中的导航的研究与将其的动态结果和网络的拓扑结构特性联系起来抱有浓厚的兴趣。导航这一概念意味着一个智能体（或漫步者）必须从网络中的源节点s移动到目标节点t。两个极端的导航方案，随机漫步或者定向漫步导航，已经引起了人们的注意。在前一种方案下，漫步者备放置在一个给定的节点上并且每一步都以一种完全随机的方式[1-3]移动到它的其中一个相邻节点。在一个相似的问题下，漫步者可以使用（依照）一个可以随着整个网络一同动态地转变的加权转移概率（进行移动）[4]。在第二种方案下，漫步者通过询问（并且支付代价）有关访问每一节点的最佳选择的信息从而选择最短的路径移动到目标。这一策略允许其使用最小的步数达到目标。[5-8]。处于这两种极端之间的方案也已经纳入考虑之中。拥有有限信息的定向导航已经被以假定每一漫步者所得的每个节点的信息是不完全的这一方式加以探索[9]。缺失信息的结果是相较于实际的最短路径，经历的路程大幅增加了。最近我们中的一人思考了漫步者能够支付（正确的）访问每一节点的信息（的代价）或者随机的遵循一条可用的路径（这两种情况下的）复杂网络中的最佳导航问题。由于这两种恒定的代价是与路径相关联的，漫步者可以通过求得与完整轨迹相关的的最小代价做出一个最佳的决定。

虽然学习是一个在实际导航中出现的重要的现象，但没有一种方案明确的指出这一点。为了填补这一空白，这篇论文通过考察漫步者如何在复杂网络中学习路径来解决这一问题。在学习过程中其获取了有关全部最短路径的知识并且能够在不支付任何额外信息的代价的情况下做出最佳的导航。这个基本的假设是通过模仿蒙特卡洛强化学习框架[11-13]来从线上经验中获得信息。我们展示了在一个给定的复杂网络中学习路径的难度和速度是与其拓扑结构密切相关的。

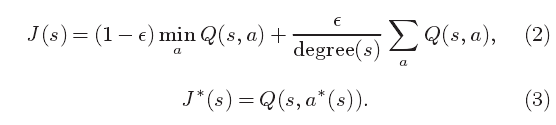
让我们回顾一下一个同样在有关在一个给定的复杂网络中特殊节点的可检索性的导航问题的论文中被考虑的特定的实际问题[14-21]。这个问题的灵感来自于一个有关个人被要求向一个特殊的目标任务送信的经典的研究。如果个人认识那个目标，那封信就应该送达此人，否则，它就应该被送到一个更可能认识目标的朋友的手中。正如我们会在之后看到的，这个被解决的问题同样与达到网络中的确定节点的难度有关。

量化研究——我们从一个具有n个节点的集合V (G) = {1,2,...,t,...,n}的网络G开始，其中t是一个被命名为目标（target）的特殊的节点。假设N(i)表示与节点i相邻的节点，即与节点i相连并且能从i出发一步到达的节点j的集合1。我们定义一个路径η为从给定的起点s到目标t的完整路径，或者漫步者遵循的步数小于mn的路径，其中m是总节点数n的倍数。这个η-路径是目前调查研究的一个基本的定义，因为线上经验的的概念是基于把问题划分为问题的片段。此外，为了确保过去的结论依旧可用并且漫步者可以从经验中学习，我们必须以网络节点数的m倍来限制η的持续时间。路径将按顺序被编号，比如说η= 1,2,...,Nη。

假设Q（s，a）是漫步者从节点s出发并且一步步向a ∈N(s)前进到达目标t所预期的步数。我们的方法的本质是基于前一路径使用所谓的初次访问蒙特卡洛算法（FVMCA）来估计Q（s，a），其中s ∈ V (G)和a ∈N(s)[11-13]。它相当于在节点s之后访问并且选择行动a ∈N(s)来通过η’s到达目标t所用的平均步数。从Q(s,a)的定义中明确的表明了从节点s开始遵循的合适的最佳路径a\*（s）以致Q（s，a\*（s））相较于穿过其他s的相邻节点的路径可以达到最小步数：



对于一个给定的η，认为漫步者是在节点S∈V（G）上并且希望达到节点t。如果漫步者是第一次到达次节点，那么漫步者会在此步中随机的遵循一条可用的路径。另一种情况下，如果它曾经到达过此节点，它会以(1− ε+ ε/degree(s))的概率遵循a\*给定的最优的方向并且以ε/degree(s)的概率遵循一条最记得可能的路径。必须指出的一点是，不断地学习是必不可少的因为漫步者不是总遵循着假定的最优路径。假如漫步者始终遵循着假定的最佳路径边不需要进一步的学习了。这个允许漫步者在一个全局非零的概率ε下选择任何与给定的节点s的相邻节点的策略称为ε-软策略（ε-soft policy）。在ε→0的极限下可以达到ε-贪婪的策略。FVMCA的适应于评估学习过程的关键步骤被呈现在算法（表1）中。通过使用这个算法，基于漫步者现有的知识，例如：

，人们可以估算从节点s到达目标节点t的J(s)的代价与J\*（s）的最优代价。

虽然J（s）反映了实际上当漫步者遵从FVMCA时从s到t的代价，我们注意到J\*（s）更恰当的反映了当前漫步者有关网络中路径的知识等级。此外，如果漫步者决定停止学习并且Q(s,a)在没有学习的情况下被估计，那么这就是他/她将要面对的从节点s到达目标节点t的代价。

漫步者重复了很多遍FVMCA的节点(η → Nη>>1),J\*(s)收敛到一个十分接近从节点s到节点t的最短路径长度值。虽然在s ∈ V (G) 与 a ∈N(s)的情况下Q(s,a)被以一种ε-软策略来估计时，这个值并不是精确的最短路径长度。

基于J(s)的几个平均值是相关的。所以我们让N(s), ∀s ∈ V (G)使之成为的目标t的集合的J\*(s)的平均值，取决于η的值。它度量了当前从节点s到任意其他节点j的导航难度（~为步数）。然后让H(i)，∀i ∈ V (G)成为J\*(s)的平均值，通过在目标t=i的条件下的起点j的集合。因为他同样取决于η，所以它度量了当前从其他任意节点s到达t的步数为~的节点被隐藏的能力（参见[5，7]对于所谓的隐藏的讨论）。通过联立N(s)与H(i)我们得到通过有源s与目标t的J\*(s)的平均值<J>，这个取决于η的全网络导航难度。保有这些平均值的η-进化的轨迹，使得评估最优路径学习的难度成为了可能的事情。以类似的方式，评估<j>e这个从所有源节点s到达目标t的J\*(s)/e (s,t)的平均值成为了可能，其中e (s,t)为从节点s到节点t的最短路径。<j>e比起<J>的一个显而易见的优势是，独立于网络的特性，这个变量可以被预期收敛到一个趋近于1的值。

一个人可以用Ve(η) =<J(η +1)> −< J(η)>来测量学习的瞬时速度。另一种可以用来比较网络之间的学习速度的方法是使用通过V (η) = (< J(η +1)> −< J(η)> )/(< J(η +1)>- 给出的学习的瞬时规一化速度，其中是特征路径长度。Ve(η)可以解释为漫步者在一个给定的路径中学习的总分。此外0≤|V (η)|≤ 1因为其为从一段路径到下一段路径间学习与最可能的学习间的比率。

通过对一段从一个源节点i开始路径η因为步数超过mn的事实而被打断的次数Ns(i)的计数，一个人可以获得有关学习从i开始的路径的难度的信息。类似的，计算一段到达目标t的路径被以同样的理由被打断的次数Nt(i)，一个人可以获得学习到达目标t的路径的难度的信息。最后，在一个给定的网络中学习路径的总难度可以通过NT=Σi(Ns(i)+Nt(i))来估算。

在这篇论文的余下部分中，我们分析了FVMCA使用在几个复杂网络中的结果。在这篇论文的全部仿真中我们选择ε=0.2，m=1000，Nη=500000。

要获得ε的最优选择，显然小值ε的范围必须被调查，就像我们在此论文中所做的那样。虽然较大的ε值意味着更容易的学习，但其更小的值意味着更好的收敛性。我们测试了不同的ε∈ [0.1,0.3]后发现ε=0.2是一个对更快的学习与更好的收敛性的很好地权衡。最后。我们注意到对于m的值的选择只影响了漫步者发现一条从源节点s到目标节点t的路径的尝试尝试步数和生成Nt,Ns和NT的事件的数量。

结论-现在让我们讨论对几种网络类网使用所提到的框架后得到的结果。

*无标度网络*：我们从典型的Barabasi-Albert（BA）无标度网络以及相应的最大(Max)最小(Min)层次版本开始。这些层次版本是通过对复数的边缘对进行优先重新布线同时确保整个网络的连通性来建立的。为了建立最大（最小）层次版本，在每一步中选择两队相互链接的节点对便姑且把这四个节点中最大度的节点连接到这个子集中次大度（最小度）的节点。其余的两个节点随后被连在一起。图一通过fig .1(a)中<J>e呈现了导航难度的关系，学习过程在BA，最大和最小网络中的表现的不同就可以被可视化了。而fig.1(b)做出了<J>e在不同大小的BA网络中的独立性图。由于对数标度在fig.1的这两个坐标轴中均被使用，我们注意到层次结构导致了学习过程中的很大不同。图1（a）和1（b）明确了以下几点：a）网络层次的增加与导航的容易性和学习的可行性成正比；b）路径的学习过程在小网络中运行的更快。<J>（没有被呈现出来）的动态与<J>e的极度接近。

图2向我们提供了有关在与图1中所用网络相同的网络中学习的速度的一些线索。图2（a）展示了|VMax|<|VBA|<|VMin|。因为在开始学习过程时有太多事情需要被学习，这预示了速度的绝对值2随着η减小直到他收敛到0.图2（b）比较了VeBA和VeMax。对于一个小值η，我们注意到VeBA/VeMax>1，这显示了在学习过程中的第一段路径中，漫步者在层最大版本中比原始BA网络中成比例的学习到了更多的路程。然而当η减小时VeBA/VeMax的值随之减小，因为在层最大版本中需要学习的路径数比在原始BA网络中的相应数字小。虽然|VMax|<|VBA|，在层最大版本中的学习过程仍然比在BA网络中的快。类似的结论可以被推广到画在图2种相同位置的|VBA|<|VMin|与|VMax|<|VMin|曲线。

对于在相同网络中的学习过程的NT的值已经被通过路径的Nη的值进行了规范化，分别导致了NTBA/Nη=3.6\*10-5,NTMax/Nη=1.4\*10-5,NTMin/Nη=1.0\*10-5。这一模式经常发生在一个大范围的m中。此外这些值是与图1（a）有关在BA网络与其他它生成的版本中学习路径的难度呈现的结果相一致的。我们还发现了Ns和Nt是对于全部处于网络中的节点都是高度不规则的，这暗示了存在某些可以更容易地达到的节点，但是其他提供了最优地点的节点被隐藏了。实际上更大度的节点趋向于呈现更大的Ns和更小的Nt。这是因为漫步者在更大度的节点上必须在更大的路径数中选择一条去遵循。另一方面，它很容易达到拥有更大度的节点因为大多数的路径是从其他节点连接到这些节点的。

对于BA网络的学习过程的研究表明，首要的，显然网络中导航的难度和学习路径的难度是有关的，即一个漫步者在网络中能更快的学习路径就能更快的被导航。其次，它显示了节点的度是一个关于导航难度和隐藏能力的非常重要的特性。此外除了节点的度，学习还取决于网络的层级结构。

*随机网络*：我们从报告一个随机Erdo˝s-Renyi（ER）网络的结果开始。其中网络的附着概率为p导致了与图1所呈现的BA网络中相同的<k>。这个结果学习曲线位于图1（a）中BA和层最小网络之间，显示了就BA而言的增长随机性使得导航变得困难但，另一方面，比在更一致度分布的层最小网络中更容易。

接下来，我们考虑了几种不同的p的值，以致我们可以浏览不同尺寸与平均节点度的ER随机网络的学习特性。这在图3中不同的面板下可以为典范的被展示了。在面板（a）中我们看到，对于小值η，例如η/500=1，〈J〉n=50<〈J〉n=100<〈J〉n=150<〈J〉n=200。这发生的原因是<J>的上界在最大的网络中是大的。然而，因为最大的网络的连接数是相应的大，特征路径长度也一样，<J>在不同的n值的不同的步法下减少。这导致了，以上的关系在一些学习后被颠倒了（当η增加时）。另一方面，这样的网络尺寸影响被排除在<J>e的表现之外，如同在图3（b）中所示的那样。实际上这些曲线的形式与图1（b）的非常相似。

这相反的影响在我们比较相同尺寸但不同连接数的网络的时候被观察到。图3（c）和（d）展示了改变ER的节点附着概率p到〈J〉和〈J〉e的值的影响。现在在之后的测量观察中观察线的交叉成为了可能，不过在之前不行。这可以被解释为注意到当连接数很大时，它暗示了最短路径是很小的。因此，被呈现在图3（d）中的曲线的交叉式规范化程序中的重要结论。

与图2相同，图4比较了土3中一些网络的学习速度和关系速度。我们现在观察对于有相同n值与不同的p值的网络的线的交点线的交叉。这波动也是比从BA网络中获得的大得多。遵循关于图2的讨论的参数，可以从图2中绘出的主要的结论是在更联通的网络中的学习的过程更快。

*阿波罗网络*：我们现在研究了一个漫步者是如何在同时出现无标度，小世界，欧几里得的性质的阿波罗网络的几何构造中学习路径的[26]。虽然它们分享了这些被在BA和Watts-Strogatz（WS）网络中被充分研究了的重要的性质，它们仍具有自己的把它们从这些多元统计方法的系统的应用中分离出来的独特的性质。因此对于第三种网络类型的分析帮助我们明晰了网络结构对于学习过程的影响。关于η的〈J〉和〈J〉e（没有被展示出来）的表现的性质是与图1（b）中所现的十分相似。