Вариант 1

Подобрать порядок многочлена $\hat{m} \geq 1$ в модели (1), используя критерий Фишера на уровне значимости 0.05, и вычислить оценки неизвестных параметров $(\theta_0, ..., \theta_{\hat{m})}$ методом наименьших квадратов.

Основная и альтернативная гипотеза этого критерия имеют вид:

$$H_0 : \theta_m = 0; \quad H_A : \theta_m \neq 0 \ ,$$

где $B_{q\times(p+1)}$ — матрица, $\Theta_{(p+1)\times 1}$ — матрица параметров модели (1), $C_{q\times 1}$ — константный вектор. При проверке порядка $\hat{m}$ модели (1): $B_{1\times(p+1)} = (0, \ldots, 1), C_{q\times 1} = 0$, так как требуется проверить равенство нулю последнего параметра, чтобы оценить порядок.

Статистика критерия имеет вид:

$$Z = \frac{\hat{\theta}_p^2}{\frac{\alpha_{p+1}}{n-(p+1)}(Y - X\hat{\Theta})^T(Y - X\hat{\Theta})} \ ,$$

где n — объём выборки,$Y_{n\times 1}$ — выборка, $\hat{\Theta}$ — матрица МНК-оценок параметров θ, α_{p+1} — p+1-ый элемент главной диагонали $(X^T X)^{-1}$.

$$Y = \begin{pmatrix} -104,6790756 \\ -93,35448202 \\ \vdots \\ -67,5979395 \end{pmatrix}$$

1 Номер

1.1 (Порядок) p=1: $\theta_0 + x\theta_1 = y$

$$X_{40x2} = \begin{pmatrix} 1 & -3,8 \\ 1 & -3,6 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1}_{2x2} = \begin{pmatrix} 0.0250469 & -0.00046904 \\ -0.00046904 & 0.00469043 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\theta}_{2x1} = (X^T X)^{-1} X^T Y \approx \begin{pmatrix} -26.16117729 \\ 4.4138423 \end{pmatrix}$$

$$(Y - X\widehat{\theta})^T(Y - X\widehat{\theta}) \approx 32970.08988576105$$

$T_1 \approx 4.787229973728436$

Уровень надежности 0,95.Тогда квантиль $f_{0.95,1.38} \approx 4.098$.Поскольку, $T_1 > f$ статистика попала в критическую область.

1.2 (Порядок) p=2: $\theta_0 + x\theta_1 + x^2\theta_2 = y$

$$X_{40x3} = \begin{pmatrix} 1 & -3,8 & 14,44 \\ 1 & -3,6 & 12,96 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$(X^TX)^{-1}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0.05623827 & 0.00070356 & -0.00586304 \\ 0.00070356 & 0.00473451 & -0.00022042 \\ -0.00586304 & -0.00022042 & 0.00110208 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\theta}_{3x1} = (X^TX)^{-1}X^TY \approx \begin{pmatrix} 5.88297961 \\ 5.61850985 \\ -6.02333776 \end{pmatrix}$$

$(Y - X\widehat{\theta})^T(Y - X\widehat{\theta}) \approx 49.83006607275816$

$T_2 \approx 24444.06980215441$

Квантиль $f_{0.95,1.37} \approx 4.1055$. Поскольку, $T_2 > f$ статистика попала в критическую область.

1.3 (Порядок) p=3: $\theta_0 + x\theta_1 + x^2\theta_2 + x^3\theta_3 = y$

$$X_{40x4} = \begin{pmatrix} 1 & -3,8 & 14,44 & -54.872 \\ 1 & -3,6 & 12,96 & -46.656 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

$$(X^TX)^{-1}_{4x4} = \begin{pmatrix} 0.0564852955 & -0.00176149141 & -0.0059404271 & 0.000257958993 \\ -0.00176149141 & 0.0293335919 & 0.00055184568 & -0.00257420232 \\ -0.0059404271 & 0.00055184568 & 0.00112631934 & -0.0000808142209 \\ 0.000257958993 & -0.00257420232 & -0.0000808142209 & 0.000269380736 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\theta}_{4x1} = (X^TX)^{-1}X^TY \approx \begin{pmatrix} 5.95313974 \\ 4.91837394 \\ -6.04531775 \\ 0.07326663 \end{pmatrix}$$

$(Y - X\widehat{\theta})^T(Y - X\widehat{\theta}) \approx 29.902884019787432$

$T_3 \approx 23.99027978144974$

Квантиль $f_{0.95,1.36} \approx 4.113189609999999$.Поскольку,$T_3 > f$ статистика попала в критическую область.

1.4 (Порядок) p=4: $\theta_0 + x\theta_1 + x^2\theta_2 + x^3\theta_3 + x^4\theta_4 = y$

$$X_{40x5} = \begin{pmatrix} 1 & -3,8 & 14,44 & -54.872 & 208.5136 \\ 1 & -3,6 & 12,96 & -46.656 & 167.9616 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ \end{pmatrix}$$

$$(X^TX)^{-1}_{5x5} = \begin{pmatrix} 0.0879 & 0.0022 & -0.0257 & -0.00032 & 0.00145 \\ 0.0022 & 0.0298 & -0.0019 & -0.00265 & 0.00019 \\ -0.0257 & -0.00194 & 0.0135 & 0.00028 & -0.00091 \\ -0.00032 & -0.00265 & 0.000284 & 0.00028 & -0.0000268 \\ 0.00145 & 0.000183 & -0.00091 & -0.000027 & 0.000067 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\theta}_{5x1} = (X^TX)^{-1}X^TY \approx \begin{pmatrix} 5.6446837 \\ 4.87949255 \\ -5.85148016 \\ 0.07896056 \\ -0.01423482 \end{pmatrix}$$

$(Y - X\widehat{\theta})^T(Y - X\widehat{\theta}) \approx 26.87686198131495$

$T_4 \approx 3.940592894369303$

Квантиль $f_{0.95,1.36} \approx 4.12131$.Поскольку,$T_4 < f$ статистика попала в доверительную область область. Получается порядок модели равен 3
Вывод программы:

2 Номер

В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы уровней надёжности $\alpha_1 = 0.95$ и $\alpha_2 = 0.99$ для параметров $(\theta_0, ..., \theta_{\hat{m}})$.

$$\hat{\theta}_k - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-(p+1)} \frac{||\hat{E}||\sqrt{\alpha_k}}{\sqrt{n-(p+1)}} \leq \theta_k \leq \hat{\theta}_k + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-(p+1)} \frac{||\hat{E}||\sqrt{\alpha_k}}{\sqrt{n-(p+1)}},$$

где α_k — k-й элемент главной диагонали матрицы $(X^TX)^{-1}$, а α — уровень значимости.

Следовательно, для уровня надёжности = 0.99:

5.36407965 $\leq \theta_0 \leq$ 6.54219983

4.49387705 $\leq \theta_1 \leq$ 5.34287084

-6.12849847 $\leq \theta_2 \leq$ -5.96213703

0.03258717 $\leq \theta_3 \leq$ 0.11394609

Результат программы:

```
[[ 5.36407965  6.54219983]
 [ 4.49387705  5.34287084]
 [-6.12849847 -5.96213703]
 [ 0.03258717  0.11394609]]
```

Следовательно, для уровня надёжности = 0.95:

5.51383987 $\leq \theta_0 \leq$ 6.3924396

4.6017994 $\leq \theta_1 \leq$ 5.23494849

-6.10735095$\leq \theta_2 \leq$ -5.98328456

0.04292935 $\leq \theta_3 \leq$ 0.10360391

Оценка дисперсиии: $||\hat{E}||$: 5.4683529531100525
$\frac{||\hat{E}||}{\sqrt{n-(p+1)}}$: 0.9113921588516755
Квантиль Стьюдента:(0.95) 2.0280940009804502 , (0.99) 2.719484630449974
α_k :
(0.95):
0.23766635322014812
0.1712705224319586
0.033560681479722326
0.016412822313307974

(0.99):
0.23766635322014812
0.1712705224319586
0.033560681479722326
0.016412822313307974
Результат программы:

```
[[ 5.51383987  6.3924396 ]
 [ 4.6017994   5.23494849]
 [-6.10735095 -5.98328456]
 [ 0.04292935  0.10360391]]
```

3 Номер

В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы уровней надёжности $\alpha_1 = 0.95$ и $\alpha_2 = 0.99$ для полезного сигнала $\varphi(x, \theta) = \theta_0 + \theta_1 x + \ldots + \theta_{\hat{m}} x^{\hat{m}}$.

$$\varphi(x, \hat{\theta}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-(p+1)} \frac{||\hat{E}|| \sqrt{\alpha(x)}}{\sqrt{n-(p+1)}} \leq \varphi(x, \theta) \leq \varphi(x, \hat{\theta}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-(p+1)} \frac{||\hat{E}|| \sqrt{\alpha(x)}}{\sqrt{n-(p+1)}},$$

где $\alpha(x) = (1, x, \ldots, x^{\hat{m}})(X^T X)^{-1}(1, x, \ldots, x^{\hat{m}})^T$
Для уровня надёжности $= 0.99$ при $\hat{m} = 2$:

-105.48271691$\leq \phi(x_0, \theta) \leq$ -102.61999525
-94.70303321 $\leq \phi(x_1, \theta) \leq$ -92.33427158
...

Результат программы:

```
[[-105.48271691 -102.61999525]
 [ -94.70303321  -92.33427158]
 [ -84.52009609  -82.54565689]
 [ -74.93151506  -73.2495081 ]
 [ -65.93268896  -64.44339276]
 [ -57.51431217  -56.1295829 ]
 [ -49.66193814  -48.31549146]
 [ -42.35898673  -41.01066501]
 [ -35.59055547  -34.22297239]
 [ -29.34519365  -27.95683074]
 [ -23.6147427   -22.21336503]
 [ -18.39350018  -16.99124409]
 [ -13.67743881  -12.28746161]
 [  -9.46365776   -8.09788483]
 [  -5.75002961   -4.41760756]
 [  -2.53496503   -1.24118556]
 [   0.18277782    1.43717296]
 [   2.40430102    3.62339949]
 [   4.13083631    5.32329591]
 [   5.36407965    6.54219983]
 [   6.10652786    7.28464804]
```

Для уровня надёжности = 0.95 при m = 2:

$$-105.1188136 \leq \phi(x_0, \theta) \leq -102.98389857$$
$$-94.40192108 \leq \phi(x_1, \theta) \leq -92.6353837$$
$$\ldots$$

Результат программы:

```
[[-105.1188136   -102.98389857]
 [ -94.40192108  -92.6353837 ]
 [ -84.26910943  -82.79664356]
 [ -74.71770178  -73.46332138]
 [ -65.74337268  -64.63270904]
 [ -57.33828822  -56.30560685]
 [ -49.4907806   -48.48664901]
 [ -42.18759083  -41.1820609 ]
 [ -35.41671111  -34.39681675]
 [ -29.1687078   -28.13331659]
 [ -23.43660244  -22.39150529]
 [ -18.21524826  -17.16949601]
 [ -13.50074775  -12.46415267]
 [  -9.2900435    -8.27149909]
 [  -5.58065485   -4.58698232]
 [  -2.37050243   -1.40564816]
 [   0.34223396    1.27771682]
 [   2.55927032    3.46843019]
 [   4.28241933    5.17171288]
 [   5.51383987    6.3924396 ]
 [   6.25628808    7.13488782]
 [   6.51328076    7.40257432]
 [   6.28909537    7.19825524]
 [   5.58860662    6.52408947]
```

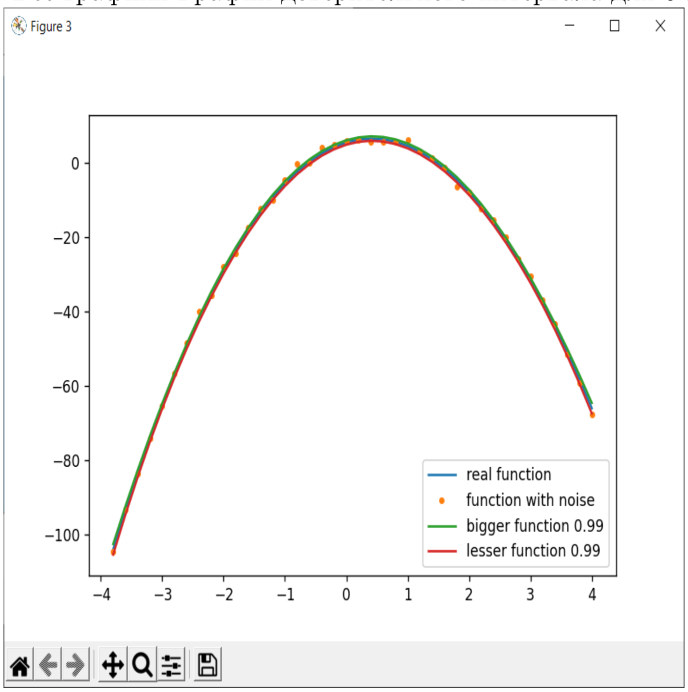
Квантиль Стьюдента:(0.95) 2.0280940009804502 , (0.99) 2.719484630449974
α_k :
(0.95) и (0.99):
0.5775069713176003
0.4778586671535314
0.39831060819287456
0.3393172162180574
0.30044099267526536
0.2793463354451818
0.2716234540786226
0.27200171338186846
0.2758873747505455
0.28007936299057684
0.2827048771280476
0.28288208529343084
0.28040501924480316

0.27552220583901427
0.2687942158482115
0.26099871003892966
0.25305356999050127
0.24593304918908487
0.24055909517931484
0.23766635322014812
0.2376663532201481
0.24055909517931479
0.24593304918908485
0.2530535699905012
0.2609987100389296
0.26879421584821145
0.27552220583901416
0.2804050192448031
0.2828820852934308
0.28270487712804754
0.2800793629905768
0.2758873747505455
0.27200171338186846
0.2716234540786226
0.27934633544518184
0.3004409926752653
0.33931721621805727
0.39831060819287445
0.47785866715353165
0.5775069713176004

Оценка дисперсии: $||\hat{E}||$: 5.4683529531100525
$\frac{||\hat{E}||}{\sqrt{n-(p+1)}}$: 0.9113921588516755

4 Номер

Все графики График доверительного интервала для 0.99:



Увеличенная область на графике,поскольку все сливается:

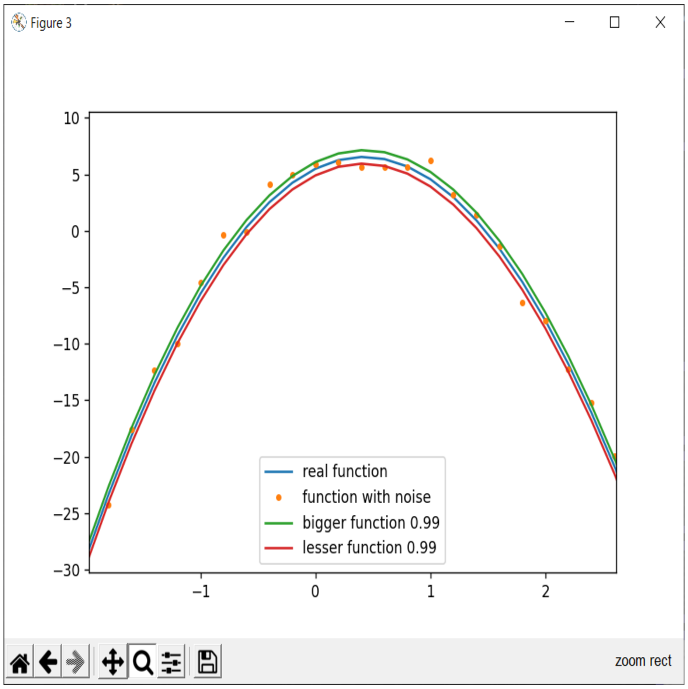
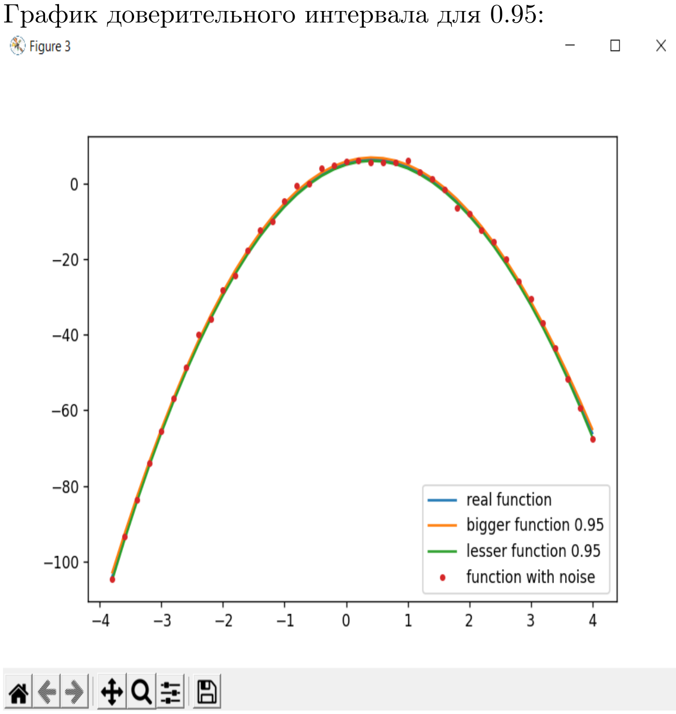
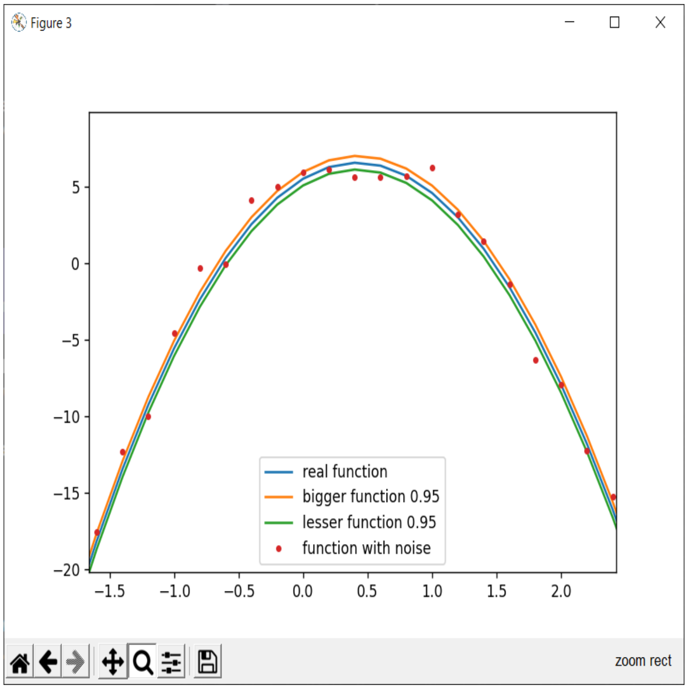
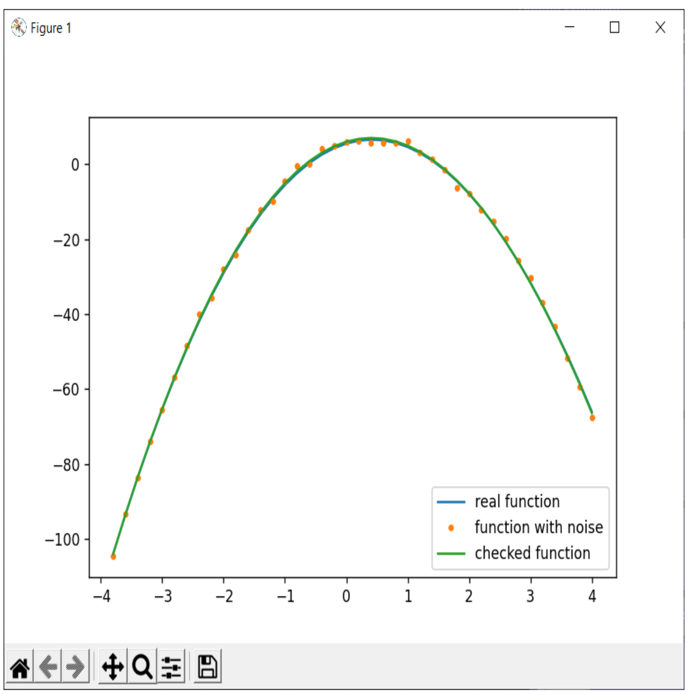


График доверительного интервала для 0.95:



Увеличенная область на графике,поскольку все сливается:





5 Номер

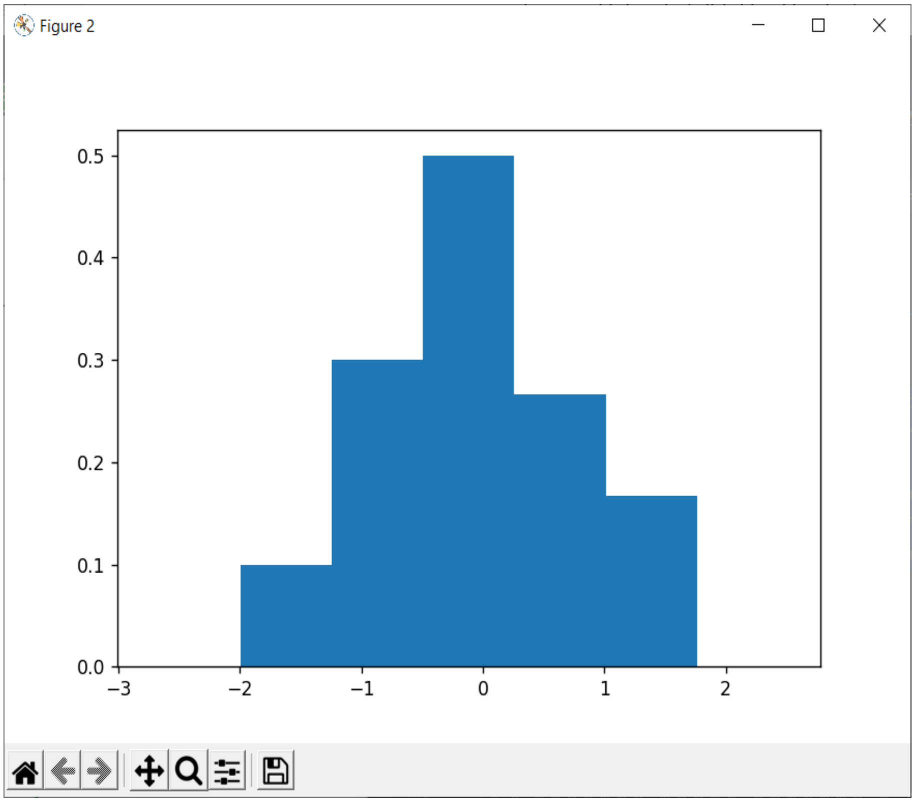
По остаткам регрессии построить оценку плотности распределения случайной ошибки наблюдения в виде гистограммы.

Общий её вид:

$$\hat{f}_n(x) = \begin{cases} \frac{n_k}{n(t_{k+1}-t_k)} & x \in [t_k;\ t_{k+1}) \\ 0 & x \in [t_0;\ t_1) \cup [t_l;\ t_{l+1}) \end{cases} \tag{1}$$

Разделим на $l = 5$ кусочков. Тогда:

$$\hat{f}_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty;\ -1.990) \\ \frac{3}{40 \cdot 0.75} & x \in [-1.990;\ -1.240) \\ \frac{9}{40 \cdot 0.75} & x \in [-1.240;\ -0.490) \\ \frac{15}{40 \cdot 0.75} & x \in [-0.490;\ 0.260) \\ \frac{8}{40 \cdot 0.75} & x \in [0.260;\ 1.010) \\ \frac{5}{40 \cdot 0.75} & x \in [1.010;\ 1.760) \\ 0 & x \in (1.760;\ \infty) \end{cases} \tag{2}$$



6 Номер

В предположении нормальности ошибок вычислить оценку максимального правдоподобия дисперсии σ^2 случайной ошибки.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{||\hat{E}||^2}{n} = \frac{29.902884019787432}{40} = 0.7475721004946858$$

7 Номер

По остаткам регрессии с помощью χ^2 – критерий Пирсона проверить гипотезу о том, что закон распределения ошибки наблюдения является нормальным

$$H_0 : E \sim \mathcal{N}(0, \theta); \quad H_A : E \nsim \mathcal{N}(0, \theta)$$

$$L = \prod_{k=1}^{40} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \cdot exp\left\{-\frac{x_i^2}{2\theta}\right\} = (2\pi\theta)^{-20} \cdot exp\left\{-\frac{1}{2\theta}\sum_{k=1}^{40} x_i^2\right\}$$

$$\bar{L} = -20 \cdot ln(2\pi\theta) + \frac{1}{2\theta}\sum_{k=1}^{40} x_i^2$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta} = -40\theta + \sum_{k=1}^{40} x_i^2 = 0$$

$$\theta = \frac{1}{40}\sum_{k=1}^{40} x_i^2 = \frac{1}{40}||\hat{E}||^2 = \frac{29.902884019787432}{40} = 0.7475721004946858$$

Статистика $T(Z_n)$ считается по формуле:

$$T(Z_n) = n\sum_{k=0}^{l} \frac{(p_k - \hat{p}_k)^2}{p_k} \quad ,$$

где $p_k = \Phi_0\left(\frac{t_{k+1}-m}{\sqrt{\theta}}\right) - \Phi_0\left(\frac{t_k-m}{\sqrt{\theta}}\right)$, а $\hat{p}_k = \frac{n_k}{n}$.

В нашем случае $T(Z_n) = 2.3841901253429842$. Квантиль $\chi^2_{0,95}(5) \approx 11.0705$

$$0 < T(Z_n) = 2.3841901253429842 < \chi^2_{0,95}(5) \approx 11.0705$$

Статистика попала в доверительный интервал. Следовательно, гипотеза H_0 — принимается, и закон распределения ошибок-нормальное.

Вариант 2

Подобрать порядок многочлена $\hat{m} \geq 1$ в модели (1), используя критерий Фишера на уровне значимости 0.05, и вычислить оценки неизвестных параметров $(\theta_0, ..., \theta_{\hat{m})}$ методом наименьших квадратов.

Основная и альтернативная гипотеза этого критерия имеют вид:

$$H_0 : \theta_m = 0; \quad H_A : \theta_m \neq 0 \ ,$$

Статистика критерия имеет вид:

$$Z = \frac{\hat{\theta}_p^2}{\frac{\alpha_{p+1}}{n-(p+1)}(Y - X\hat{\Theta})^T(Y - X\hat{\Theta})} \ ,$$

где n — объём выборки,$Y_{n\times 1}$ — выборка, $\hat{\Theta}$ — матрица МНК-оценок параметров θ, α_{p+1} — p+1-ый элемент главной диагонали $(X^TX)^{-1}$.

$$Y = \begin{pmatrix} -101.28515603 \\ -92.30107622 \\ \vdots \\ -71.50642578 \end{pmatrix}$$

8 Номер

8.1 (Порядок) p=2: $\theta_0 + x\theta_1 + x^2\theta_2 = y$

$$X_{40x3} = \begin{pmatrix} 1 & -3,8 & 14,44 \\ 1 & -3,6 & 12,96 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$(X^TX)^{-1}_{3x3} = \begin{pmatrix} 0.05623827 & 0.00070356 & -0.00586304 \\ 0.00070356 & 0.00473451 & -0.00022042 \\ -0.00586304 & -0.00022042 & 0.00110208 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\theta}_{3x1} = (X^TX)^{-1}X^TY \approx \begin{pmatrix} 5.85740259 \\ 5.14822395 \\ -6.06667728 \end{pmatrix}$$

$(Y - X\widehat{\theta})^T(Y - X\widehat{\theta}) \approx 58.912664563615984$

$T_2 \approx 20974.11589400782$

Квантиль $f_{0.95,1.37} \approx 4.1055$. Поскольку, $T_2 > f$ статистика попала в критическую область.

8.2 (Порядок) p=3: $\theta_0 + x\theta_1 + x^2\theta_2 + x^3\theta_3 = y$

$X_{40x4} = \begin{pmatrix} 1 & -3,8 & 14,44 & -54.872 \\ 1 & -3,6 & 12,96 & -46.656 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$

$(X^TX)^{-1}_{4x4} = \begin{pmatrix} 0.0564852955 & -0.00176149141 & -0.0059404271 & 0.000257958993 \\ -0.00176149141 & 0.0293335919 & 0.00055184568 & -0.00257420232 \\ -0.0059404271 & 0.00055184568 & 0.00112631934 & -0.0000808142209 \\ 0.000257958993 & -0.00257420232 & -0.0000808142209 & 0.000269380736 \end{pmatrix}$

$\widehat{\theta}_{4x1} = (X^TX)^{-1}X^TY \approx \begin{pmatrix} 5.87614817 \\ 4.96115964 \\ -6.07254995 \\ 0.01957559 \end{pmatrix}$

$(Y - X\widehat{\theta})^T(Y - X\widehat{\theta}) \approx 57.490129301858325$

$T_3 \approx 0.8907836883508456$

Квантиль $f_{0.95,1.36} \approx 4.113189609999999$.Поскольку,$T_3 < f$ статистика попала в доверительную область. Отсюда получаем ,что порядок равен 2.
Вывод программы:

9 Номер

В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы уровней надёжности $\alpha_1 = 0.95$ и $\alpha_2 = 0.99$ для параметров $(\theta_0, ..., \theta_{\hat{m})}$

$$\hat{\theta}_k - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-(p+1)} \frac{||\hat{E}||\sqrt{\alpha_k}}{\sqrt{n-(p+1)}} \leq \theta_k \leq \hat{\theta}_k + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-(p+1)} \frac{||\hat{E}||\sqrt{\alpha_k}}{\sqrt{n-(p+1)}},$$

где α_k — k-й элемент главной диагонали матрицы $(X^TX)^{-1}$, а α — уровень значимости.

Следовательно, для уровня надёжности = 0.99:

$5.04484403 \leq \theta_0 \leq 6.66996115$

$4.91246054 \leq \theta_1 \leq 5.38398736$

-6.18042541 $\leq \theta_2 \leq$ -5.95292915

Результат программы:

```
[[ 5.04484403  6.66996115]
 [ 4.91246054  5.38398736]
 [-6.18042541 -5.95292915]]
```

Следовательно, для уровня надёжности = 0.95:

5.25108501 $\leq \theta_0 \leq$ 6.46372017

4.97230124 $\leq \theta_1 \leq$ 5.32414665

-6.15155422$\leq \theta_2 \leq$ -5.98180033

Результат программы:

```
[[ 5.25108501  6.46372017]
 [ 4.97230124  5.32414665]
 [-6.15155422 -5.98180033]]
```

10 Номер

В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы уровней надёжности $\alpha_1 = 0.95$ и $\alpha_2 = 0.99$ для полезного сигнала $\varphi(x, \theta) = \theta_0 + \theta_1 x + \ldots + \theta_{\hat{m}} x^{\hat{m}}$.

$$\varphi(x,\hat{\theta}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-(p+1)} \frac{||\hat{E}||\sqrt{\alpha(x)}}{\sqrt{n-(p+1)}} \leq \varphi(x,\theta) \leq \varphi(x,\hat{\theta}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-(p+1)} \frac{||\hat{E}||\sqrt{\alpha(x)}}{\sqrt{n-(p+1)}},$$

где $\alpha(x) = (1, x, \ldots, x^{\hat{m}})(X^T X)^{-1}(1, x, \ldots, x^{\hat{m}})^T$

Для уровня надёжности = 0.99 при $\hat{m} = 2$:

$$-101.687278 \leq \phi(x_0, \theta) \leq -98.5927217$$
$$-91.6570138 \leq \phi(x_1, \theta) \leq -88.8629862$$
$$...$$

Результат программы:

```
[[-1.01687278e+02 -9.85927217e+01]
 [-9.16570138e+01 -8.88629862e+01]
 [-8.21200237e+01 -7.95999763e+01]
 [-7.30771737e+01 -7.08028263e+01]
 [-6.45294240e+01 -6.24705760e+01]
 [-5.64777417e+01 -5.46022583e+01]
 [-4.89229302e+01 -4.71970698e+01]
 [-4.18653728e+01 -4.02546272e+01]
 [-3.53047421e+01 -3.37752579e+01]
 [-2.92397988e+01 -2.77602012e+01]
 [-2.36684059e+01 -2.22115941e+01]
 [-1.85877918e+01 -1.71322082e+01]
 [-1.39949474e+01 -1.25250526e+01]
 [-9.88699464e+00 -8.39300536e+00]
 [-6.26142153e+00 -4.73857847e+00]
 [-3.11617777e+00 -1.56382223e+00]
 [-4.49673574e-01  1.12967357e+00]
 [ 1.73926745e+00  3.34073255e+00]
 [ 3.45146663e+00  5.06853337e+00]
 [ 4.68744144e+00  6.31255856e+00]
 [ 5.44744144e+00  7.07255856e+00]
 [ 5.73146663e+00  7.34853337e+00]
 [ 5.53926745e+00  7.14073255e+00]
```

Для уровня надёжности = 0.95 при m = 2:

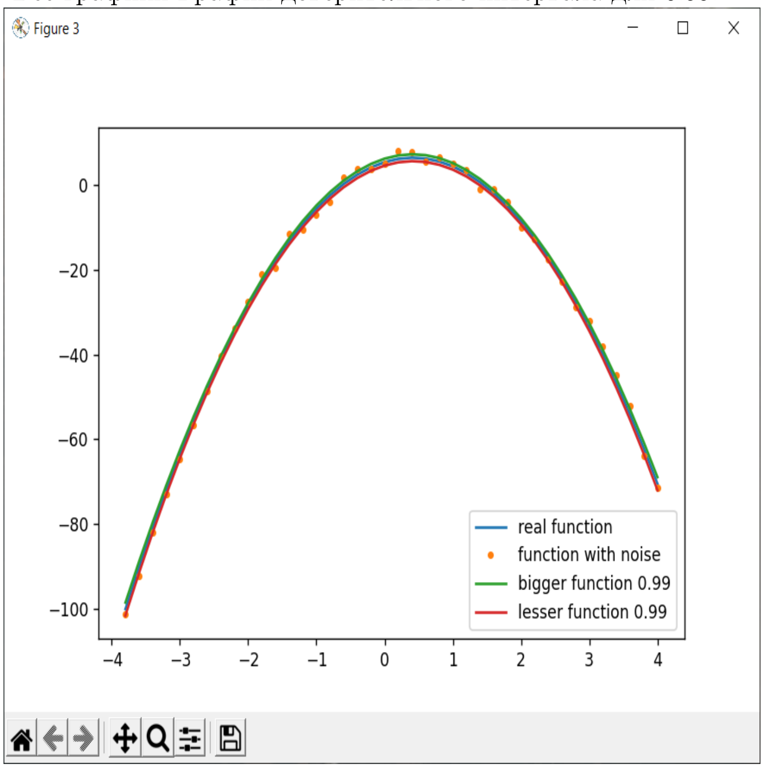
$$-101.29455315 \le \phi(x_0, \theta) \le -98.98544685$$
$$-91.30242826 \le \phi(x_1, \theta) \le -89.21757174$$
$$...$$

Результат программы:

```
[[-101.29455315  -98.98544685]
 [ -91.30242826  -89.21757174]
 [ -81.80020859  -79.91979141]
 [ -72.78853995  -71.09146005]
 [ -64.26813891  -62.73186109]
 [ -56.23972713  -54.84027287]
 [ -48.70390408  -47.41609592]
 [ -41.66095565  -40.45904435]
 [ -35.11063777  -33.96936223]
 [ -29.05202547  -27.94797453]
 [ -23.4835243   -22.3964757 ]
 [ -18.40306604  -17.31693396]
 [ -13.80840546  -12.71159454]
 [  -9.69739487   -8.58260513]
 [  -6.06815998   -4.93184002]
 [  -2.91917084   -1.76082916]
 [  -0.24924118    0.92924118]
 [   1.94250679    3.13749321]
 [   3.65668596    4.86331404]
 [   4.89368242    6.10631758]
 [   5.65368242    6.86631758]
 [   5.93668596    7.14331404]
```

11 Номер

Все графики График доверительного интервала для 0.99:



Увеличенная область на графике,поскольку все сливается:

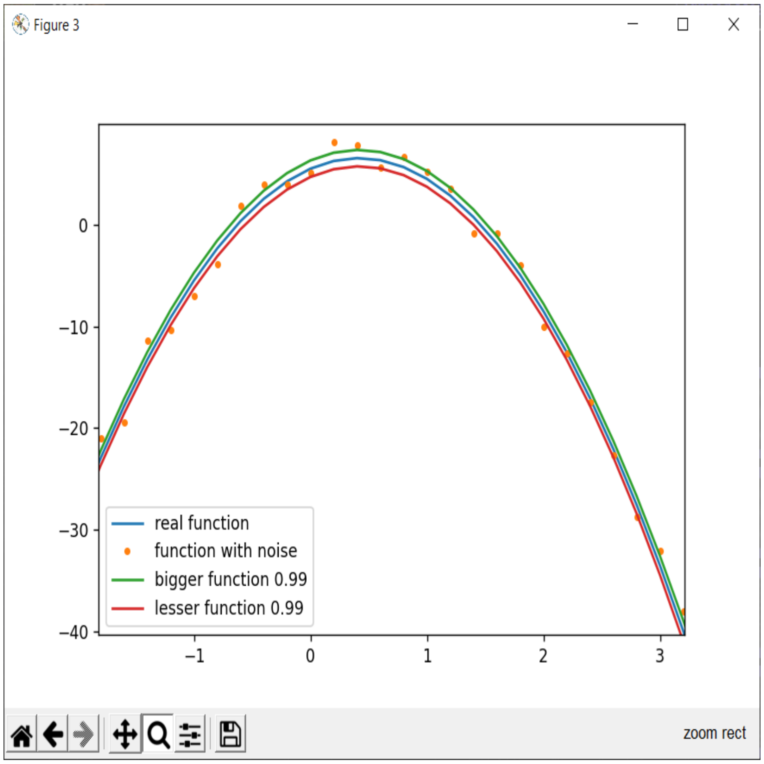
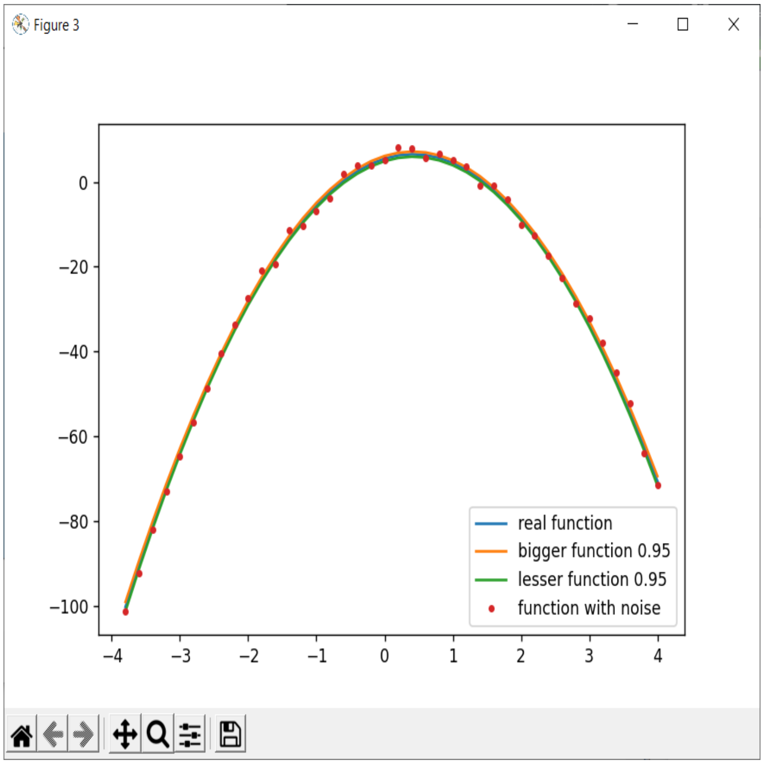


График доверительного интервала для 0.95:



Увеличенная область на графике,поскольку все сливается:

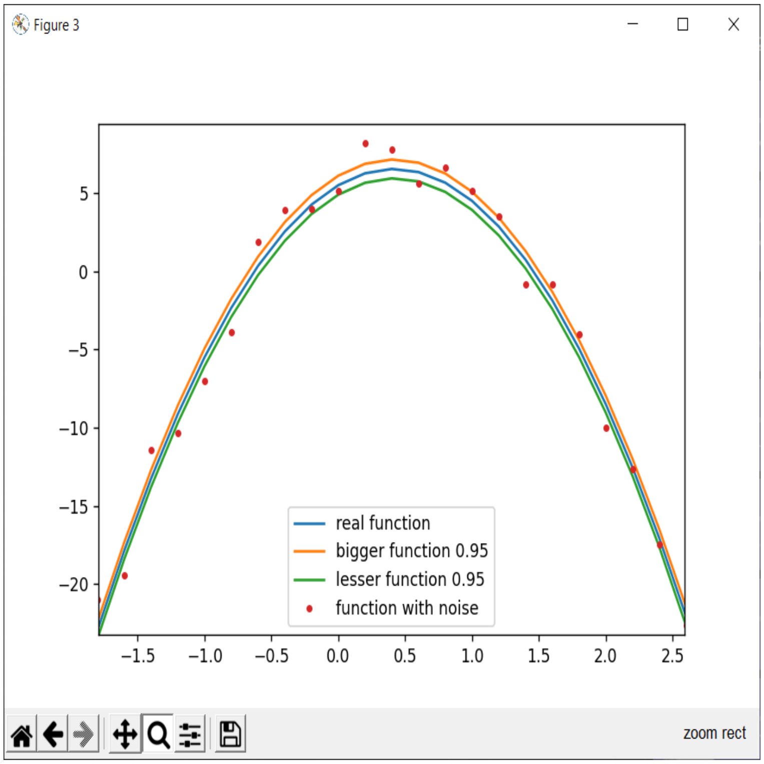
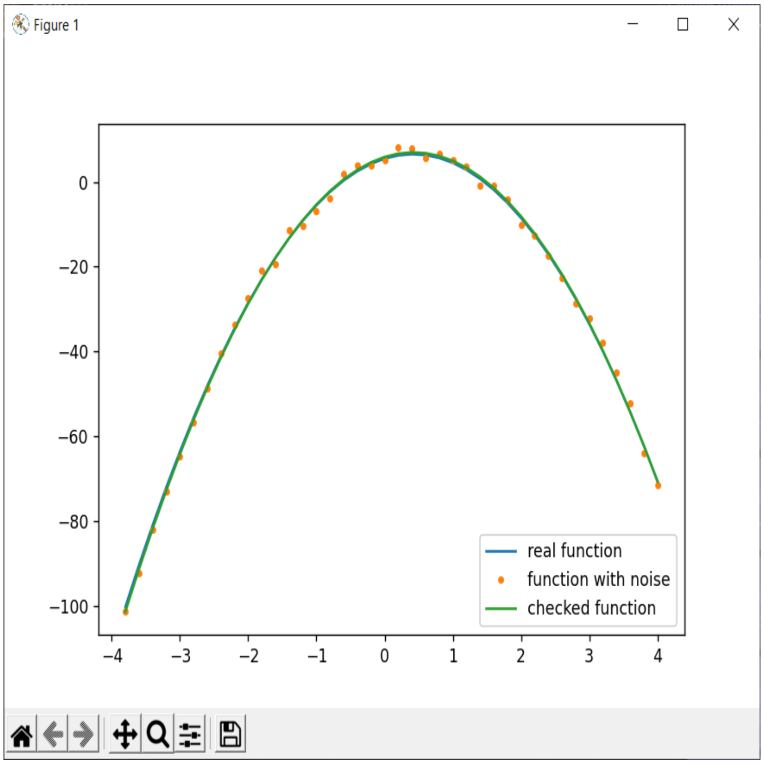


Figure 3
real function
bigger function 0.95
lesser function 0.95
function with noise
zoom rect



12 Номер

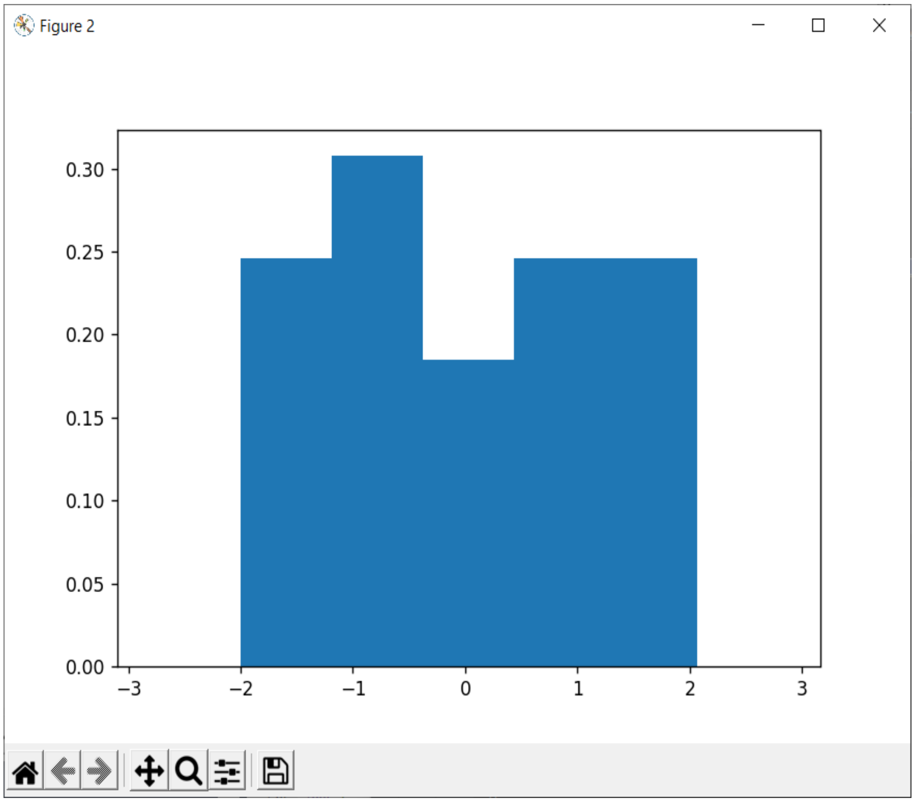
По остаткам регрессии построить оценку плотности распределения случайной ошибки наблюдения в виде гистограммы.

Общий её вид:

$$\hat{f}_n(x) = \begin{cases} \frac{n_k}{n(t_{k+1}-t_k)} & x \in [t_k;\ t_{k+1}) \\ 0 & x \in [t_0;\ t_1) \cup [t_l;\ t_{l+1}) \end{cases} \tag{3}$$

Разделим на $l = 5$ кусочков. Тогда:

$$\hat{f}_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty;\ -1.998) \\ \frac{8}{40 \cdot 0.812} & x \in [-1.998;\ -1.186) \\ \frac{10}{40 \cdot 0.812} & x \in [-1.186;\ -0.372) \\ \frac{6}{40 \cdot 0.812} & x \in [-0.373;\ 0.439) \\ \frac{8}{40 \cdot 0.812} & x \in [0.439;\ 1.251) \\ \frac{8}{40 \cdot 0.812} & x \in [1.251;\ 2.063) \\ 0 & x \in (2.063;\ \infty) \end{cases} \tag{4}$$



13 Номер

В предположении нормальности ошибок вычислить оценку максимального правдоподобия дисперсии σ^2 случайной ошибки.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{||\hat{E}||^2}{n} = \frac{58.912664563615984}{40} = 1.4728166140903995$$

14 Номер

По остаткам регрессии с помощью χ^2 – критерий Пирсона проверить гипотезу о том, что закон распределения ошибки наблюдения является нормальным

$$H_0 : E \sim \mathcal{N}(0, \theta); \quad H_A : E \nsim \mathcal{N}(0, \theta)$$

$$L = \prod_{k=1}^{40} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \cdot exp\left\{-\frac{x_i^2}{2\theta}\right\} = (2\pi\theta)^{-20} \cdot exp\left\{-\frac{1}{2\theta}\sum_{k=1}^{40} x_i^2\right\}$$

$$\bar{L} = -20 \cdot ln(2\pi\theta) + \frac{1}{2\theta}\sum_{k=1}^{40} x_i^2$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta} = -40\theta + \sum_{k=1}^{40} x_i^2 = 0$$

$$\theta = \frac{1}{40}\sum_{k=1}^{40} x_i^2 = \frac{1}{40}||\hat{E}||^2 = \frac{58.912664563615984}{40} = 1.4728166140903995$$

Статистика $T(Z_n)$ считается по формуле:

$$T(Z_n) = n\sum_{k=0}^{l} \frac{(p_k - \hat{p}_k)^2}{p_k} \quad ,$$

где $p_k = \Phi_0\Big(\frac{t_{k+1}-m}{\sqrt{\theta}}\Big) - \Phi_0\Big(\frac{t_k-m}{\sqrt{\theta}}\Big)$, а $\hat{p}_k = \frac{n_k}{n}$.

В нашем случае $T(Z_n) = 11.750988502506637$. Квантиль $\chi^2_{0,95}(5) \approx 11.0705$

$$0 < \chi^2_{0,95}(5) \approx 11.0705 < T(Z_n) = 11.750988502506637$$

Статистика не попала в доверительный интервал. Следовательно, гипотеза H_0 — отвергается, и закон распределения ошибок не является нормальным с параметрами $(0, \theta)$.