

## Домашнее задание 2

Чжоу Гуаньюй

October 23, 2019

Вариант 1

### Задача 1

$$a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, a = \frac{3}{2}$$

Доказать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Analyze:

$$\left| \frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{4n-2} \leq \frac{1}{n} (n \geq 2) \quad (1)$$

therefore, for any  $\epsilon > 0$ , if  $\frac{1}{n} < \epsilon$ , we get:

$$\left| \frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \epsilon \quad (2)$$

it mean that when  $n > \frac{1}{\epsilon}$ , (2) is workable ,and because (1) is holds under the condition  $n \geq 2$ , so:

$$N = \max \left\{ 2, \frac{1}{\epsilon} \right\} \quad (3)$$

Proof:  $\forall \epsilon > 0, \exists N = \max \left\{ 2, \frac{1}{\epsilon} \right\}$ , according to the analysis, when  $n > N$ , the formula (2) is workable.

## Задача 2

### Задание 2(а)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$$

$$\text{solve : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{(x^3 - x^2 + 5x - 5)(x + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^3 - x^2 + 5x - 5} = -\frac{0}{12} = 0$$

Ответ:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5} = 0$$

### Задание 2(б)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{16x^4 - x\sqrt{x}}}{3x^2 + 1}$$

$$\text{solve : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{16x^4 - x\sqrt{x}}}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 + \sqrt{16 - \frac{1}{\sqrt{x^5}}})}{x^2(3 + \frac{1}{x^2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{16 - \frac{1}{\sqrt{x^5}}}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 4}{3} = \frac{5}{3}$$

Ответ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{16x^4 - x\sqrt{x}}}{3x^2 + 1} = \frac{5}{3}$$

### Задание 2(с)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

Solve1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1-9}{\sqrt{2x+1}+3} \cdot \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{2}}{x-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-9)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(\sqrt{2x+1}+3)(x-9)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Solve2:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} (L'Hospital's Rule)$$

Answer:

$$: \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

### Задание 2(d)

$$\lim_{x \rightarrow 8} \left( \frac{2x-7}{x+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$$

Solve: Замена  $x-8=t$ ,  $x=t+8$  so when  $x \rightarrow 8$ ,  $t \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \left( \frac{2x-7}{x+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{2t+9}{t+9} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{t+8}-2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{t}{t+9} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{t+8}-2}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{t}{t+9} \right)^{\frac{t+9}{t} \cdot \frac{t}{t+9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{t+8}-2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{t}{t+9} \right)^{\frac{t+9}{t} \cdot \frac{t}{t+9} \cdot \frac{\sqrt[3]{(t+8)^2+2} \sqrt[3]{t+8}+4}{t}} = \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(t+8)^2+2} \sqrt[3]{t+8}+4}{t+9}} = e^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

Answer:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \left( \frac{2x-7}{x+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}} = e^{\frac{4}{3}}$$

### Задание2 (е)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 \sin 2x}{\arctan 3x^3} \right)^{\frac{x+2}{x+1}}$$

Solve:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 \sin 2x}{\arctan 3x^3} \right)^{\frac{x+2}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x^3}{3x^3} \right)^{\frac{x+2}{x+1}} = \frac{4}{9}$$

Answer:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 \sin 2x}{\arctan 3x^3} \right)^{\frac{x+2}{x+1}} = \frac{4}{9}$$

### Задание 2(f)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x}$$

Solve: Замена  $x - \frac{\pi}{2} = t, t = x + \frac{\pi}{2}$ , so when  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}, t \rightarrow 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(3t + \frac{3\pi}{2})}{\tan(t + \frac{\pi}{2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\cot(3t)}{-\cot t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{\tan(3t)} = \frac{1}{3}$$

Answer:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x} = \frac{1}{3}$$

### Задача 3

$$f(x) = 2^x - 8, g(x) = \ln \frac{x}{3}, x \rightarrow 3$$

1)

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} 2^x - 8 = 0, \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \ln \frac{x}{3} = 0$$

поэтому  $f$  и  $g$  являются бесконечно малыми

2)

a)

гл. часть:  $c(x - x_0)^k$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{c(x - x_0)^k} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{c(x - 3)^k} = 1, \quad \frac{1}{c} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^3(2^{x-3} - 1)}{c(x - 3)^k} = 1, \quad \frac{8}{c} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{x-3} - 1}{c(x - 3)^k} = 1$$

замена:  $x - 3 = t$

$$\frac{8}{c} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^t - 1}{t^k} = 1, \quad \frac{8}{c} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln 2}{t^k} = 1, \quad \frac{8 \ln 2}{c} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{k-1}} = 1$$

так мы получим:  $k = 1, c = 8 \ln 2$ ,

поэтому гл. часть =  $8 \ln 2 \cdot (x - 3)$ ,

$f(x) \sim 8 \ln 2 \cdot (x - 3)$ , при  $(x \rightarrow 3)$

**b)**

гл. часть:  $c(x - x_0)^k$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{c(x - x_0)^k} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln \frac{x}{3}}{c(x - 3)^k} = 1, \quad \frac{1}{c} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln \frac{x}{3}}{(x - 3)^k} = 1$$

замена:  $x - 3 = t$

$$\frac{1}{c} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{t+3}{3}}{t^k} = 1, \quad \frac{1}{c} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{t}{3})}{t^k} = 1, \quad \frac{1}{c} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{3}}{t^k} = 1, \quad \frac{1}{3c} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{k-1}} = 1$$

так мы получим:  $k = 1, c = \frac{1}{3}$

поэтому гл. часть  $= \frac{1}{3}(x - 3)$

$g(x) \sim \frac{1}{3}(x - 3), \quad \text{при } (x \rightarrow 3)$

**3)**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{\ln \frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \ln 2 \cdot 2^x \cdot x = 24 \ln 2 = C$$

Поэтому  $f$  и  $g$  являются бесконечно малыми того же порядка когда  $x \rightarrow 3$ .

## Задача 4

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{x+3}}{2-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

когда  $x=2$  и  $x=0$ , функция не определена, и :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$$

поэтому точки разрыва функции  $x_1 = 0, x_2 = 2$ .

