Домашнее задание 2

Чжоу Гуаньюй

October 29, 2019

Вариант 1

Задача 1

$$a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, a = \frac{3}{2}$$

Показать:

ε	0.1.	0.01	0.001
N(ε)	3	25	250

Доказать:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Analyze:

$$\left|\frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{4n-2} \leq \frac{1}{n}(n \geq 2) \tag{1}$$

therefore, for any $\epsilon > 0$, if $\frac{1}{n} < \epsilon$, we get:

$$\left|\frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \epsilon \tag{2}$$

it mean that when $n > \frac{1}{\epsilon}$,(2) is workable ,and because (1) is holds under the condition $n \geq 2$, so:

$$\text{N=max}\left\{2, \frac{1}{\epsilon}\right\} \tag{3}$$

Proof: $\forall\epsilon > 0, \exists N = max\left\{2, \frac{1}{\epsilon}\right\}$, according to the analysis, when n>N, the formula (2) is workable.

Задача 2

Задание 2(a)

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$$

$$solve: \lim_{x\to -1} \frac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^3-2x-1)(x+1)}{(x^3-x^2+5x-5)(x+1)} =$$
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^3-x^2+5x-5} = -\frac{0}{12} = 0$$

Ответ:

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5} = 0$$

Задание 2(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+\sqrt{16x^4-x\sqrt{x}}}{3x^2+1}$$

$$solve: \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+\sqrt{16x^4-x\sqrt{x}}}{3x^2+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(1+\sqrt{16-\frac{1}{\sqrt{x^5}}})}{x^2(3+\frac{1}{x^2})} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\sqrt{16-\frac{1}{\sqrt{x^5}}}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$$

Ответ:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+\sqrt{16x^4-x\sqrt{x}}}{3x^2+1} = \frac{5}{3}$$

Задание 2(c)

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$$

Solve1:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 4}\frac{2x+1-9}{\sqrt{2x+1}+3}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{x-4}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-9)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2x+1}+3)(x-9)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Solve2:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 4}\frac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+1}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}(L'Hospital'sRule)$$

Answer:

$$:\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Задание 2(d)

$$\lim_{x\to 8}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$$

Solve: Замена $x-8=t, x=t+8$ so when $x\to 8, t\to 0$.

$$\lim_{x\to 8}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{2t+9}{t+9}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{t+8}-2}}=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{t}{t+9}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{t+8}-2}}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{t}{t+9}\right)^{\frac{t+9}{t}\cdot\frac{t}{t+9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{t+8}-2}}=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{t}{t+9}\right)^{\frac{t+9}{t}\cdot\frac{t}{t+9}\cdot\frac{\sqrt[3]{(t+8)^2}+2\sqrt[3]{t+8}+4}{t}}=$$
$$=e^{\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{(t+8)^2}+2\sqrt[3]{t+8}+4}{t+9}}=e^{\frac{4}{3}}$$

Answer:

$$\lim_{x\to 8}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}=e^{\frac{4}{3}}$$

Задание2 (e)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 sin2x}{\arctan 3x^3}\right)^{\frac{x+2}{x+1}}$$

Solve:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 sin2x}{\arctan 3x^3}\right)^{\frac{x+2}{x+1}}=\quad\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^3}{3x^3}\right)^{\frac{x+2}{x+1}}=\frac{4}{9}$$

Answer:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 sin2x}{\arctan 3x^3}\right)^{\frac{x+2}{x+1}} = \frac{4}{9}$$

Задание 2(f)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x}$$

Solve: Замена $x-\frac{\pi}{2}=t, t=x+\frac{\pi}{2}$, so when $x\to\frac{\pi}{2}, t\to 0$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x} = \lim_{t\to 0} \frac{\tan(3t+\frac{3\pi}{2})}{\tan(t+\frac{\pi}{2})} = \lim_{t\to 0} \frac{-\cot(3t)}{-\cot t} = \lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{\tan(3t)} = \frac{1}{3}$$

Answer:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x} = \frac{1}{3}$$

Задача 3

$$f(x) = 2^x - 8, g(x) = \ln\frac{x}{3}, x\to 3$$

1)

$$a)\ \lim_{x\to 3} 2^x - 8 = 0, \quad b)\ \lim_{x\to 3} \ln\frac{x}{3} = 0$$

поэтому f и g являются бесконечно малыми

2)

a)

гл.часть: $\quad c(x-x_0)^k$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{c(x-x_0)^k} = 1, \quad \lim_{x\to 3} \frac{2^x-8}{c(x-3)^k} = 1, \quad \frac{1}{c}\cdot\lim_{x\to 3} \frac{2^3(2^{x-3}-1)}{c(x-3)^k} = 1, \quad \frac{8}{c}\cdot\lim_{x\to 3} \frac{2^{x-3}-1}{c(x-3)^k} = 1$$

замена:$x-3=t$

$$\frac{8}{c}\cdot\lim_{t\to 0} \frac{2^t-1}{t^k} = 1, \quad \frac{8}{c}\cdot\lim_{t\to 0} \frac{t\ln 2}{t^k} = 1, \quad \frac{8\ln 2}{c}\cdot\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{k-1}} = 1$$

так мы получим: $k=1, c=8\ln 2$,
поэтому гл.часть$= 8\ln 2\cdot(x-3)$,
$f(x)\sim 8\ln 2\cdot(x-3), \quad$ при$(x\to 3)$

b)

гл.часть: $c(x-x_0)^k$

$$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)}{c(x-x_0)^k}=1,\quad \lim_{x\to 3}\frac{\ln\frac{x}{3}}{c(x-3)^k}=1,\quad \frac{1}{c}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{\ln\frac{x}{3}}{(x-3)^k}=1$$

замена: $x-3=t$

$$\frac{1}{c}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t+3}{3}}{t^k}=1,\quad \frac{1}{c}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{3}\right)}{t^k}=1,\quad \frac{1}{c}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{3}}{t^k}=1,\quad \frac{1}{3c}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{k-1}}=1$$

так мы получим: $k=1$,$c=\frac{1}{3}$
поэтому гл.часть$=\frac{1}{3}(x-3)$
$g(x)\sim\frac{1}{3}(x-3),\quad$ при$(x\to 3)$

3)

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{2^x-8}{\ln\frac{x}{3}}=\lim_{x\to 3}\ln 2\cdot 2^x\cdot x=24\ln 2=C$$

Поэтому f и g являются бесконечно малыми того же порядка когда $x\to 3$.

Задача 4

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{x+3}}{2-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

когда x=0 и x=2, функция не определена, и :

a)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Поэтому это второй тип разрыва.

b)

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty.$$

Поэтому это второй тип разрыва.

поэтому точки разрыва функции $x_1 = 0, x_2 = 2$.