Д/З 3

Чжоу Гуаньюй

December 20, 2019

Задача 1

$$f(x) = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}, \quad n = 3$$

$$f(0) = 0 - 1 = -1.$$
$$f'(x) = \arccos x, \quad f'(0) = \arccos 0 = 0$$
$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f''(0) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1$$
$$f^{(3)}(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}, \quad f^{(3)}(0) = -\frac{0}{\sqrt{1-0}(1-0)} = 0$$

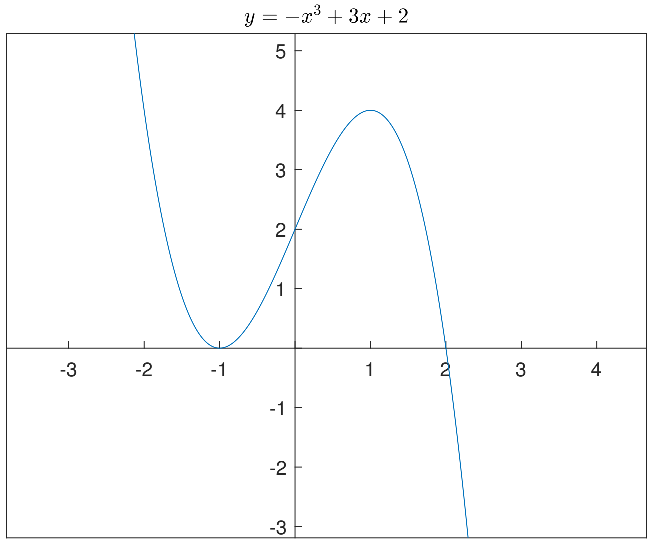
$$f(x) = -1 + 0 - \frac{x^2}{2} + 0 + \circ(x^3) = -1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^3)$$

Задача 2

a)

$$y = -x^3 + 3x + 2$$
$$y' = -3x^2 + 3$$
$$y'' = -6x$$
$$f(1) = 4$$

$x \in$	$(-\infty, -1)$	[-1,0)	[0,1)	[1,2)	$[2, +\infty)$
y	>0	≥ 0	>0	>0	≤ 0
y'	<0	>0	> 0	≤ 0	<0
y''	>0	>0	≤ 0	<0	<0



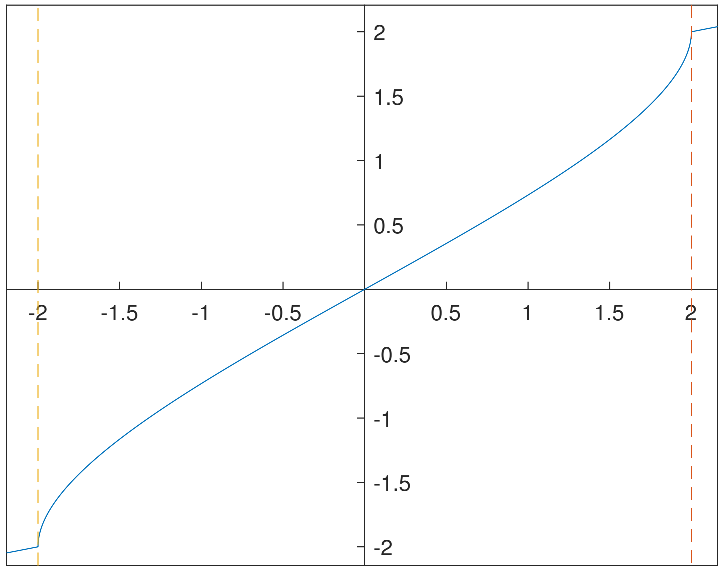
б)

$$y = \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}$$
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$
$$y'' = \frac{4}{\sqrt{(2+x)^3}} - \frac{1}{4\sqrt{(2+x)^3}}$$

$x \in$	(-2,0)	[0,2)
y	<0	>0
y'	>0	<0
y''	<0	>0

$$y(-2) = -2, y(2) = 2$$

$y = \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}$



в)

$$y = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}.$$
$$y' = \cos x + \cos 2x.$$
$$y'' = -\sin x - 2\sin 2x.$$

Анализ:
1)Давайте начнем с y:

$$y = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} = \sin x + \sin x \cos x$$

Замена $\sin x = t$,то:

$$y = t + t\sqrt{1-t^2}$$

После расчета,мы получим:
При $t \in (0,1] \Rightarrow x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi), y > 0.$
При $t \in [-1,0) \Rightarrow x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi), y < 0.$
При $t = 0 \Rightarrow x = k\pi, y = 0.$
(где $k \in \mathbf{Z}$)
Давайте подумаем о диапазоне функции:

$$-1 < \sin x < 1$$
$$-1 < \sin 2x < 1$$
$$-\frac{1}{2} < \frac{\sin 2x}{2} < \frac{1}{2}$$
$$-1 - \frac{1}{2} < \sin x + \frac{\sin 2x}{2} < 1 + \frac{1}{2}$$
$$-\frac{3}{2} < \sin x + \frac{\sin 2x}{2} < \frac{3}{2}$$

2)y':

$$y' = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

Замена $\cos x = t$, то:

$$y = t^2 + t - 1$$

После расчета,мы получим:
При $t \in (\frac{1}{2}, \infty) \Rightarrow \cos x \in (\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow x \in (2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\frac{5\pi}{3}, 2k\pi + \pi), y' > 0$
При $t \in (-1, \frac{1}{2}) \Rightarrow x \in (\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi), y' < 0.$
При $t_1 = -1, t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, x_3 = \pi + 2k\pi, y' = 0.$
(где $k \in \mathbf{Z}$)

3)y'':

$$y'' = -\sin x - 2\sin 2x = -\sin x - 4\sin x\cos x$$

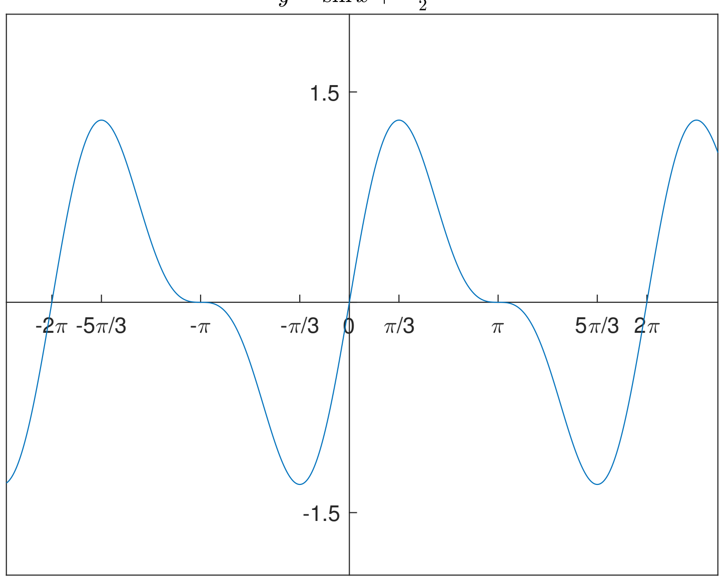
Замена $\sin x = t$,то:

$$y'' = -t - 4t\sqrt{1-t^2}$$

После расчета,мы получим:
При $t \in (0,1], \Rightarrow x \in (2k\pi, 2k\pi+\pi), y < 0.$
При $t \in [-1,0) \Rightarrow x \in (2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi), y > 0.$
При $t = 0 \Rightarrow x = k\pi, y = 0.$
(где $k \in \mathbf{Z}$)

И, наконец, у нас есть график:

$y = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$



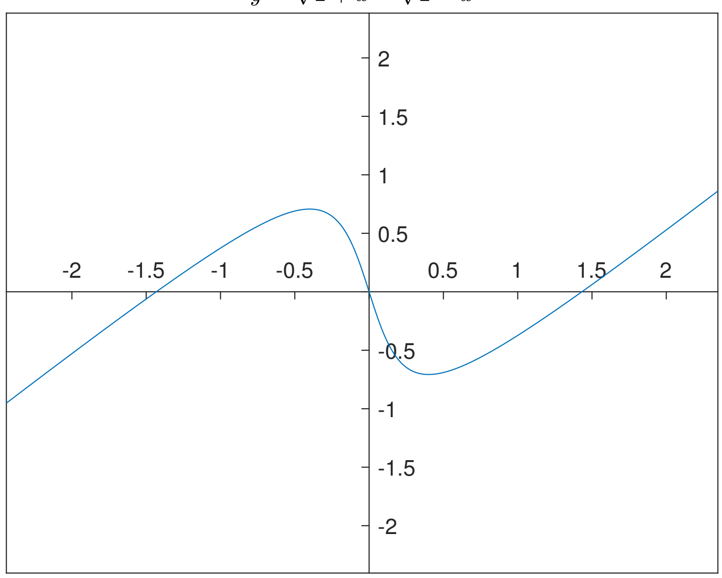
г)

$$y = x - \arctan 5x$$
$$y' = 1 - \frac{5}{1+25x^2}$$
$$y'' = \frac{250x}{(1+25x^2)^2}$$

при $x_1 \approx -1.432, x_2 \approx 1.432,\ x - \arctan 5x = 0.$

$x \in$	$(-\infty, x_1)$	$[x_1, -\frac{2}{5})$	$[-\frac{2}{5}, 0)$	$[0, \frac{2}{5})$	$(\frac{2}{5}, x_2)$	$[x_2, +\infty)$
y	< 0	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0	≥ 0
y'	> 0	> 0	≤ 0	< 0	≥ 0	> 0
y''	< 0	< 0	< 0	≥ 0	> 0	> 0

$y = \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}$



д)

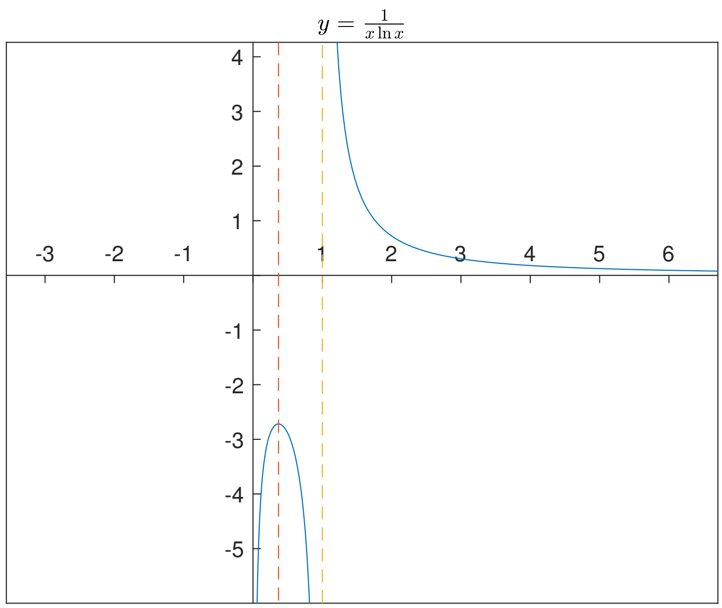
$$y = \frac{1}{x \ln x}$$

$$y' = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \cdot \ln^2 x}$$

$$y'' = \frac{2\ln^2 x + 3\ln x + 2}{x^3 \cdot \ln^3 x}$$

$$x > 0 \quad and \quad x \neq -1$$

$x \in$	$(0, \frac{1}{e})$	$[\frac{1}{e}, 1)$	$(1, +\infty)$
y	< 0	< 0	> 0
y'	> 0	≤ 0	< 0
y''	< 0	< 0	> 0



Задача 3

Сначал, замена$DB = x$, то:$DC = \sqrt{x^2+b^2}$, $AD = a - x$.
Мы можем создать функцию$f(x)$, в которой независимой переменной является x, а зависимой переменной является стоимость транспортировки:

$$f(x) = p(a-x) + q\sqrt{x^2+b^2}$$

Чтобы найти экстремальное значение этой функции, давайте возьмем производную:

$$f'(x) = -px + q\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} = q\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} - px$$

При $f'(x) = 0$,то $x = \sqrt{\frac{q^2}{p^2} - b^2}$, и

$$f'(x)\begin{cases} < 0, & x < \sqrt{\frac{q^2}{p^2} - b^2} \\ > 0, & x > \sqrt{\frac{q^2}{p^2} - b^2} \end{cases}$$

Поэтому при $x = \sqrt{\frac{q^2}{p^2} - b^2}$,функция получает минимум, стоимость транспортировки получает минимум.