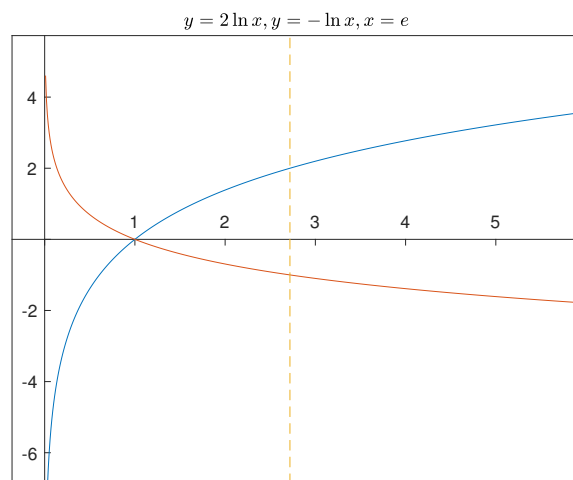


## Д/З Вариант 22

Чжоу Гуаньюй

March 11, 2020

### Задача 1



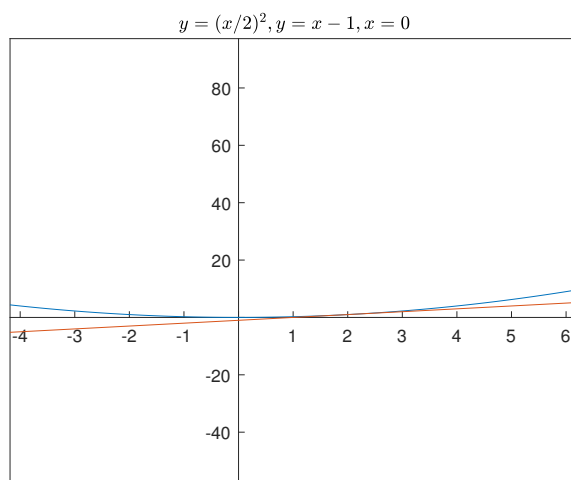
$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \int_0^{2 \ln x} dy dx + \int_1^e \int_{-\ln x}^0 dy dx \\ &= 3 \int_1^e \ln x dx = 3[x \ln x - x]_1^e = 3(e \ln e - e - \ln 1 + 1) = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ответ:

Площадь фигуры  $S = 3$

## Задача 2

$$y = (x/2)^2, y = x - 1, x = 0; \text{ ось } Oy$$



Анализ:

В той части, где  $y$  больше нуля, объем вращающегося тела определяется интегрированием. В той части, где  $y$  меньше нуля, объем вращающегося тела представляет собой конус, то:

$$V = V_{top} + V_{below}$$

Решение:

а)  $V_{top}$

$$\begin{aligned} V_{top} &= \pi \int_0^1 ((y-1)^2 - 4y) dy \\ &= \pi \int_0^1 (y^2 - 2y + 1 - 4y) dy \\ &= \pi \left[ \frac{1}{3}y^3 - y^2 + y \right]_0^1 \\ &= \pi \end{aligned}$$

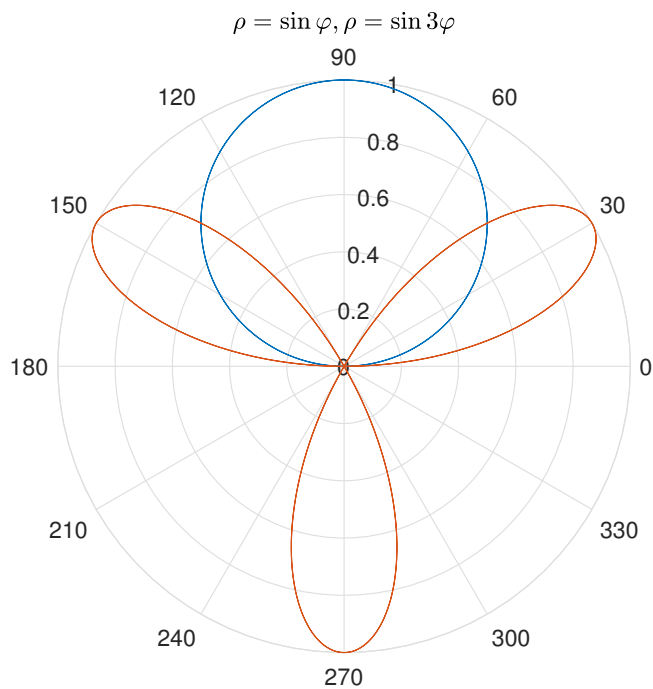
$$\mathbf{b}) V_{below}$$

$$\begin{aligned} V_{below} &= \frac{1}{3}Sh \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 1 \\ &= \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

$$\mathbf{c}) V_{total}$$

$$\begin{aligned} V_{total} &= V_{top} + V_{below} \\ &= \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

### Задача3



Анализ:

Как видно из рисунка, область, окруженная двумя кривыми, является симметричной, поэтому нам нужно рассчитать только площадь одной стороны Решение:

a)

$$\begin{cases} \rho = \sin \varphi \\ \rho = \sin 3\varphi \end{cases}$$

Откуда мы получаем :  $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, 0, \pi, (\varphi \in [0, 2\pi])$

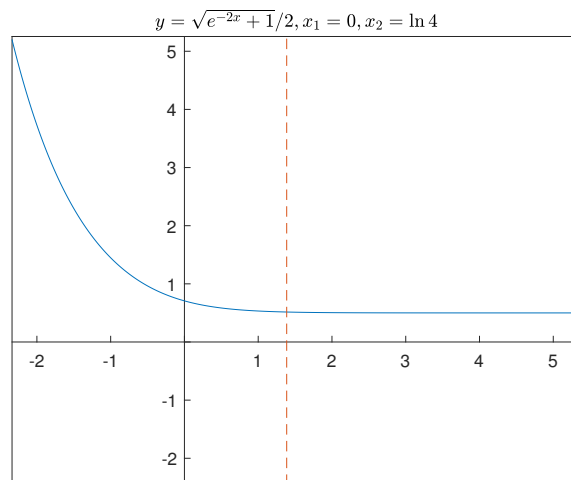
b)

$$S_{total} = S_{left} + S_{right} = 2S_{right}$$

$$\begin{aligned}
S_{right} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 3\varphi d\varphi \\
&= \left[ \frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[ \frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 6\varphi}{12} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\pi - 0 - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3} \\
S_{total} &= 2S_{right} = \pi - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

### Задача 4

$$y = \sqrt{e^{-2x} + 1}/2, x_1 = 0, x_2 = \ln 4, \text{ ось } OX$$



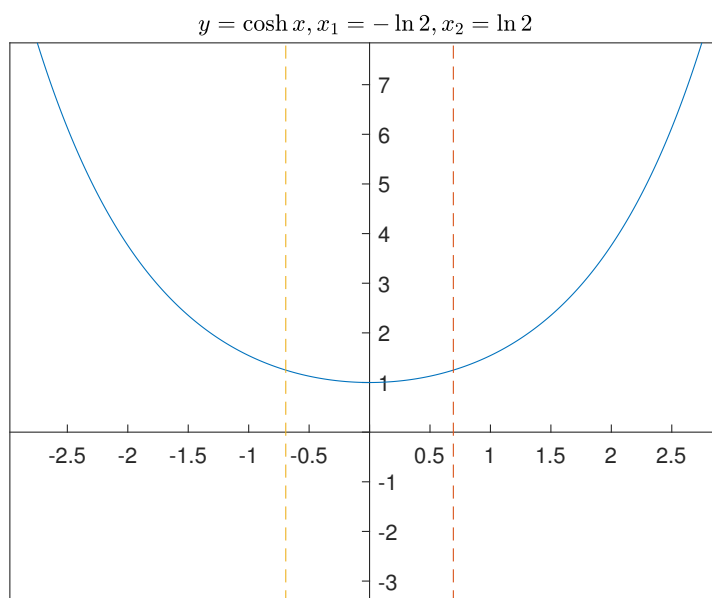
Решение:

$$y'(x) = -\frac{1}{2e^x\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$\begin{aligned}
S_{ox} &= 2\pi \int_0^{\ln 4} y(x) \sqrt{1+(y'(x))^2} dx \\
&= 2\pi \int_0^{\ln 4} \frac{\sqrt{e^{-2x}+1}}{2} \sqrt{1+\left(-\frac{1}{2e^x\sqrt{1+e^{2x}}}\right)^2} dx \\
&= 2\pi \int_0^{\ln 4} \frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{2e^x} \sqrt{1+\left(-\frac{1}{2e^x\sqrt{1+e^{2x}}}\right)^2} dx \\
&= 2\pi \int_0^{\ln 4} \frac{\sqrt{\frac{4e^{2x}+4e^{4x}+1}{4e^{2x}}}}{2e^x} dx \\
&= \frac{1}{2}\pi \int_0^{\ln 4} \frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}} dx \\
&= \frac{1}{2}\pi \left[ 2x - \frac{1}{2e^{2x}} \right]_0^{\ln 4} \\
&= \frac{1}{2}\pi \left( 4\ln 2 + \frac{15}{32} \right) = 2\pi \ln 2 + \frac{15}{64}\pi
\end{aligned}$$

### Задача 5

$$y = \cosh x, l(x) = \operatorname{sech}^2 x, x_1 = -\ln 2, x_2 = \ln 2$$



Решение:

$$y'(x) = \sinh x$$

$$\begin{aligned} m &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \operatorname{sech}^2 x \sqrt{1 + \sinh^2 x} \, dx \\ &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\cosh^2 x} \cosh x \, dx \\ &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\cosh x} \, dx \\ &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{2}{e^x + e^{-x}} \, dx \\ &= [2 \arctan e^x]_{-\ln 2}^{\ln 2} \\ &= 2 \arctan 2 - 2 \arctan \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \operatorname{sech}^2(x) x \sqrt{1 + \sinh^2 x} \, dx \\ &= \frac{1}{m} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{x}{\cosh x} \, dx \\ &= 0 (\text{Нечетная функция}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{m} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \operatorname{sech}^2(x) \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x} \, dx \\ &= \frac{1}{m} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} 1 \, dx \\ &= \frac{\ln 2}{\arctan 2 - \arctan \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ответ:

Центром масс  $C(0, \frac{\ln 2}{\arctan 2 - \arctan \frac{1}{2}})$