Д/З Вариант 22

Чжоу Гуаньюй

March 11, 2020

Задача 1

$$y = 2\ln x, y = -\ln x, x = e$$

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^e \int\limits_0^{2\ln x} dydx + \int\limits_1^e \int\limits_{-\ln x}^0 dydx \\ &= 3\int_1^e \ln x\,dx \quad = 3[x\ln x - x]_1^e = 3(e\ln e - e - \ln 1 + 1) = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ответ:
Площадь фигуры $S = 3$

Задача 2

$$y = (x/2)^2, y = x - 1, x = 0; \text{ось } Oy$$

Анализ:
В той части, где y больше нуля, объем вращающегося тела определяется интегрированием. В той части, где y меньше нуля, объем вращающегося тела представляет собой конус, то:

$$V = V_{top} + V_{below}$$

Решение:

a) V_{top}

$$\begin{aligned} V_{top} &= 2\pi \int_0^2 x(\frac{x^2}{4} - x + 1)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^2 (\frac{x^3}{4} - x^2 + x)\,dx \\ &= 2\pi[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2]_0^2 \\ &= \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

b) V_{below}

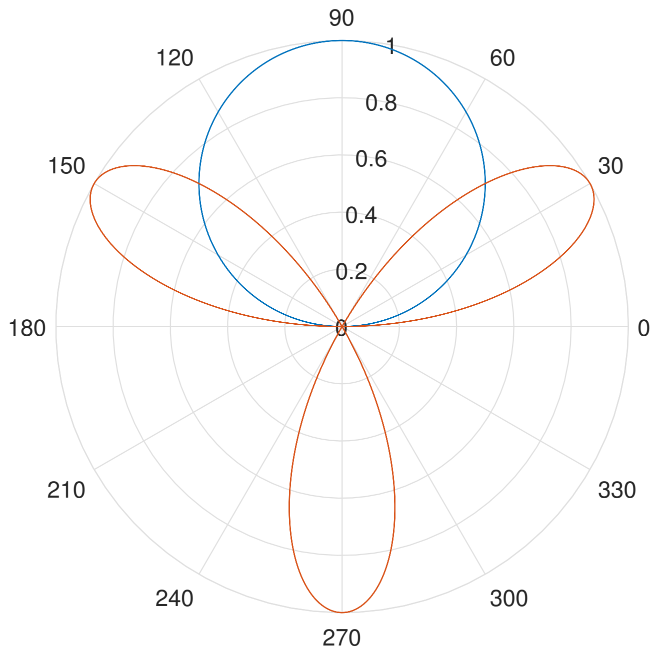
$$\begin{aligned} V_{below} &= \frac{1}{3}Sh \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 1 \\ &= \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

c) V_{total}

$$\begin{aligned} V_{total} &= V_{top} + V_{below} \\ &= \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 2\pi \end{aligned}$$

Задача3

$\rho = \sin\varphi, \rho = \sin 3\varphi$



Анализ:
Как видно из рисунка, область, окруженная двумя кривыми, является симметричной, поэтому нам нужно рассчитать только площадь одной стороны Решение:

a)

$$\begin{cases} \rho = \sin\varphi \\ \rho = \sin 3\varphi \end{cases}$$

Откуда мы получаем :$\varphi = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{3}, 0, \pi, (\varphi \in [0, 2\pi])$

b)

$$S_{total} = S_{left} + S_{right} = 2S_{right}$$

$$
\begin{aligned}
S_{right} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 3\varphi \, d\varphi \\
&= \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 6\varphi}{12}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\pi - 0 - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3} \\
S_{total} &= 2S_{right} = \pi - \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Задача 4

$$y = \sqrt{e^{-2x}+1}/2, x_1 = 0, x_2 = \ln 4, \text{ось Ox}$$

Решение:

$$y'(x) = -\frac{1}{2e^x\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$
\begin{aligned}
S_{ox} &= 2\pi \int_0^{\ln 4} y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_0^{\ln 4} \frac{\sqrt{e^{-2x}+1}}{2}\sqrt{1+(-\frac{1}{2e^x\sqrt{1+e^{2x}}})^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_0^{\ln 4} \frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{2e^x}\sqrt{1+(-\frac{1}{2e^x\sqrt{1+e^{2x}}})^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_0^{\ln 4} \frac{\sqrt{\frac{4e^{2x}+4e^{4x}+1}{4e^{2x}}}}{2e^x}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\pi \int_0^{\ln 4} \frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\pi \left[2x - \frac{1}{2e^{2x}}\right]_0^{\ln 4} \\
&= \frac{1}{2}\pi(4\ln 2 + \frac{15}{32}) = 2\pi\ln 2 + \frac{15}{64}\pi
\end{aligned}
$$

Задача 5

$$y = \cosh x, l(x) = \operatorname{sech}^2 x, x_1 = -\ln 2, x_2 = \ln 2$$

Решение:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \sinh x \\
m &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \operatorname{sech}^2 x \sqrt{1+\sinh^2 x}\, dx \\
&= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\cosh^2 x} \cosh x \, dx \\
&= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\cosh x}\, dx \\
&= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{2}{e^x + e^{-x}}\, dx \\
&= [2 \arctan e^x]_{-\ln 2}^{\ln 2} \\
&= 2\arctan 2 - 2\arctan \frac{1}{2} \\
x_c &= \frac{1}{m} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \operatorname{sech}^2(x) x \sqrt{1+\sinh^2 x}\, dx \\
&= \frac{1}{m} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{x}{\cosh x}\, dx \\
&= 0 (\text{Нечетная функция}) \\
y_c &= \frac{1}{m} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \operatorname{sech}^2(x) \cosh x \sqrt{1+\sinh^2 x}\, dx \\
&= \frac{1}{m} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} 1\, dx \\
&= \frac{\ln 2}{\arctan 2 - \arctan \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ответ:
Центром масс $C(0, \frac{\ln 2}{\arctan 2 - \arctan \frac{1}{2}})$