R13945041 王獻霆 生醫電資所碩一 DSP2025 HW6 心得報告

在這支關於快速傅立葉變換（FFT）的影片，用一個十分引人入勝的方式切入主題—把演算法的世界劃分為兩大類：一類是實用的演算法，另一類則是純粹美麗的演算法。這樣的分法，讓我感受到一股哲學性的深度。因為在過去的學習經驗裡，無論是資料結構、圖形演算法，還是日常見的排序、搜尋等工具，我們往往強調的是「效率」、「實用」、「可用性」。然而，當提到「美麗的演算法」，就有一種脫離日常功利主義的浪漫。這類演算法或許不一定在所有領域都派得上用場，但它們背後蘊藏的數學對稱、簡潔結構，總是能激發人們的靈感、激起探索的慾望。而 FFT 這個演算法，令人驚奇地正是兩者兼具。它既是現代科技的骨幹，擁有極其優美的數學結構，讓每個學過它的人都驚嘆「怎麼會這麼巧妙！」這也是我最初對這部影片感興趣的原因，因為它不是枯燥地講一堆公式，而是引導大家進入一場「美與用」的數學之旅。影片並沒有一開始就讓人掉進複雜的傅立葉級數、信號頻譜的海洋，而是選擇從多項式乘法這個熟悉且直觀的問題作為切入點。這種鋪陳讓我很有共鳴，因為多數人的「數學恐懼」來自於跳過了對生活問題的連結，只見公式與運算，難以體會背後意義。而從多項式乘法開始，所有人都有經驗，可以馬上理解接下來的發展。影片提出一個重要的觀點：一條直線，可以用兩個點來唯一確定；延伸到多項式，任何 d 次多項式，可以由 d+1 個點唯一確定。直觀來說，只要你給我三個點，我就能畫出唯一一條二次曲線經過這三個點。將這種「點到係數」的問題轉化為線性方程組和矩陣運算，並指出這是 Vandermonde 矩陣的應用。這裡讓我深感數學的力量：我們熟悉的高中數學知識，到了高階演算法，竟然成了關鍵的工具。強調多項式的表示法：第一種是係數表示法第二種是點值表示法，前者所有計算都以這些係數為主。然而，當要進行多項式相乘時，這種表示法帶來的運算量非常可觀，需要做大量的乘法和加法，複雜度為 $O(n^2)$。後者則是選擇多個點（通常比多項式次數多一），計算出多項式在這些點上的值。這種方式一開始看起來沒什麼神奇之處，但它的威力在於：在點值表示法下，多項式相乘只需要對每個點對應的值相乘，最後再透過插值還原回係數表示。接下來，影片帶我們進一步思考：「多項式評估」本身的計算難題。假設有一個 n 次多項式，要計算它在 n 個不同點的值，若是用傳統方法，複雜度同樣是 $O(n^2)$。當然，有局部優化法，但整體來說仍難以突破平方級複雜度。因此，影片特別探討了對於簡單多項式，可以選擇「特定的點」進行運算來提升效率。例如：奇次與偶次項的分析、對稱性的運用、進一步提出將多項式分解為「偶次項」和「奇次項」，藉此將一個大問題拆解成兩個小問題。這個過程很有「divide and conquer」，也是我認為 FFT 最令人驚豔的部分。這種思路其實不只出現在 FFT，在演算法設計裡也是一個強大的策略。能否發現問題的「對稱性」、「可分割性」，往往決定了一個解法的優劣。影片在這裡設計了一個絕佳的「橋段」：當我們把多項式分成偶數項和奇數項後，雖然簡化了一部分計算，但在每次遞迴切割後，仍會遇到「點的選擇」難題。這時如果能讓每一層拆分後的點，始

終保持「正負配對」關係，則可以大量簡化運算。在純實數範圍下，這樣的配對很快就不再成立。這正是 FFT 的精華所在：我們需要把計算點的範圍擴展到複數領域，特別是 n 次單位根。透過影片中的三次多項式例子，能很直觀地看到：只要巧妙選點，遞迴就永遠可以維持分治的效率，而不是在某層「卡住」或產生重複運算。這個地方讓我對「複數」的實用價值有了全新認識。以往學複數總覺得很抽象，但當它和演算法結合時，卻成了解決效率瓶頸的關鍵武器。利用「單位圓」和「複數指數表示」來解釋 n 次根的特性，是非常打動我的一點。以往在學複數、傅立葉轉換時，常常只見公式不見全貌，但單位圓上的分布圖，讓一切都變得直觀易懂。n 個 n 次單位根以等角度分布在圓上，每兩個「正負」根剛好互為鏡像，這種結構使得每次分解都能自然對應奇偶配對。進一步地，平方 n 次根也會出現在同樣的分布模式裡，遞迴可以層層推進，最終將原始多項式的計算拆解成許多最基本的運算。這一部分，影片讓我感受到數學之美。單位圓不僅僅是一個圖形，而是一個連接代數、幾何、複數與計算效率的橋樑。這也是 FFT 之所以「美麗」的精髓之一。在理解了上面所有數學結構和思想之後，影片帶領觀眾進入真正的「演算法世界」即如何用程式實現 FFT。這裡的遞迴架構令人驚艷：每一層的運算，都是巧妙利用「正負配對」和「單位根」的對稱性，保證了整體複雜度為 O(nlogn)。當我看到一個如此高深的數學結構，只需十幾行遞迴程式就能優雅地表現出來時，內心有一種「這才是數學與工程的藝術」的感動。這種經驗，遠比單純的公式推導來得震撼，也讓我明白：好的程式設計，必然建立在深刻的數學原理上。如果說 FFT 的運算流程已經讓人驚豔，那麼影片在後半提到逆傅立葉轉換（Inverse FFT）時，更是展現了數學對稱的美學。原來要從「點值表示」還原回「係數表示」，所需要的就是把原本 FFT 流程「輕輕反轉」：調整參數（如取共軛），再做適當的歸一化（通常是每項除以 n），即可。影片指出，DFT 矩陣與其逆矩陣有高度相似結構，只差複數共軛與 1/n 的縮放因子。這使得逆 FFT 的實作極其簡潔，和正向 FFT 的程式幾乎一致，只有極小的差異。這種對稱性不只提升了效率，也使得理論與實務緊密結合。就像許多現代密碼學、訊號處理、資訊壓縮演算法，都仰賴這種「正逆皆美」的特性來進行資料轉換、壓縮還原。我覺得這點給我最大的啟發是：美麗的理論往往能帶來美麗的實踐。 只要數學結構本身足夠優雅，工程實作自然簡潔易懂。FFT 這個「又美又有用」的演算法，幾乎滲透進現代科技的每一個角落。從無線通訊（4G/5G 的基帶處理）、數位音訊（MP3、AAC 編碼）、數位影像（JPEG 壓縮）、甚至天氣預報、地震分析、醫學影像、雷達訊號……，無一不仰賴其高速、穩定的特性。看著影片裡那一幕幕現實世界的應用，我深刻體會到：基礎的數學研究，可能在多年之後，會帶來全人類生活型態的改變。這讓我對自己的學習、對理論的堅持，增加了很多信心與動力。回顧整支影片帶給我的收穫，除了技術上的學習，更有一種價值觀的轉變。FFT 不只是一個解題工具，更是數學與工程精神的最佳代表——尋找規律、發現對稱、轉換視角、簡化世界。

Reference：

有使用 ChatGPT4o 增加一些字來通順文句