命题逻辑

* **(论域)定义：论域是一个数学系统，记为D。它由三部分组成：**
  + **(1)一个非空对象集合S，每个对象也称为个体；**
  + **(2) 一个关于D的函数集合F；**
  + **(3)一个关于D的关系集合R。**
* **（逻辑连接词）定义**
  + **设n>0,称{0,1}n到{0,1}的函数为n元函数，真值函数也称为联结词。**
  + **若n =0，则称为0元函数。**
* **（命题合式公式）定义：**
  + **(1).常元0和1是合式公式；**
  + **(2).命题变元是合式公式；**
  + **(3).若Q,R是合式公式，则(**¬**Q)、(Q**∧**R) 、(Q**∨**R) 、(Q**→**R) 、(Q**↔**R) 、(Q**⊕**R)是合式公式；**
  + **(4).只有有限次应用(1)—(3)构成的公式是合式公式。**
* **（生成公式）定义1.5 设S是联结词的集合。由S生成的公式定义如下：**
  + **⑴若c是S中的0元联结词，则c是由S生成的公式。**
  + **⑵原子公式是由S生成的公式。**
  + **⑶若n≥1，F是S中的n元联结词，A1,…,An是由S生成的公式，则FA1…An是由S生成的公式。**
* **（复杂度）公式A的复杂度表示为FC(A)**
  + **常元复杂度为0**。
  + **命题变元复杂度为0，如果P是命题变元，则 FC (P)=0**。
  + **如果公式A=**¬**B，则FC (A)=FC(B)+1。**
  + **如果公式A=B1** ∧ **B2，或**

**A=B1** ∨ **B2，或**

**A=B1**→**B2，或**

**A=B1**↔ **B2，或**

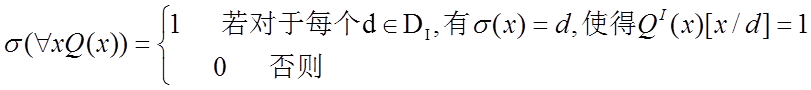
**A=B1** ⊕ **B2，或**

**则FC (A)=max{FC(B1), FC(B2)}+1。**

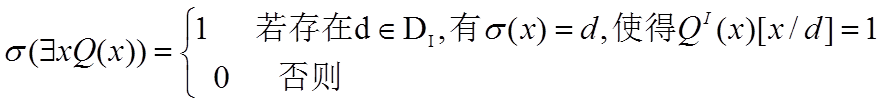
* **命题合式公式语义**
  + **论域：研究对象的集合。**
  + **解释：用论域的对象对应变元。**
  + **结构：论域和解释称为结构。**
  + **语义：符号指称的对象。公式所指称对象。合式公式的语义是其对应的逻辑真值。**
* **（合式公式语义）设S是联结词的集合是{**¬**，**∧**，**∨**，**⊕ **，**→**，**↔**}。由S生成的合式公式Q在真值赋值v下的真值指派v(Q)定义如下：**
  + **⑴v(0)=0, v(1)=1。**
  + **⑵若Q是命题变元p，则v(Q)= pv。**
  + **⑶若Q1,Q2是合式公式**
    - **若Q=** ¬ **Q1，则v(Q)=** ¬ **v(Q1)**
    - **若Q=Q1** ∧ **Q2，则v(Q)=v(Q1)**∧ **v(Q2)**
    - **若Q=Q1∨Q2，则v(Q)=v(Q1)∨v(Q2)**
    - **若Q=Q1**→ **Q2，则v(Q)=v(Q1)**→ **v(Q2)**
    - **若Q=Q1** ↔ **Q2，则v(Q)=v(Q1)**↔ **v(Q2)**
    - **若Q=Q1**⊕ **Q2，则v(Q)=v(Q1)**⊕ **v(Q2)**
* **（真值赋值）由S生成的公式Q在真值赋值v下的真值v(Q)定义如下：**
  + **⑴若Q是S中的0元联结词c，则v(Q)=c。**
  + **⑵若Q是命题变元p，则v(Q)= pv。**
  + **⑶若Q是FQ1…,Qn，其中n≥1， F是S中的n元联结词， Qi是公式，则v(Q)=v(FQ1…Qn)=Fv(Q1)…v(Qn)。**
* **（可满足与有效）定义1.7 设Q是公式。**
  + **⑴如果真值赋值v使得v(Q)=1，则称v满足Q。**
  + **⑵如果每个真值赋值都满足Q，则称Q为有效式，或称为永真式，也称为重言式。**
  + **⑶如果每个真值赋值都不满足Q，则称Q为永假式，也称为矛盾式，不可满足式。**
  + **⑷如果至少有一个真值赋值满足Q，则称Q为可满足式。**
* **定理1.5（对偶定理）**
  + **设A,B是由{0,1,¬,∨,∧}生成的公式，A\*与A互为对偶式，B\*与B互为对偶式。如果A ⇔ B，则A\* ⇔ B\*。**
* **（完全集）定义：**
  + **定义1.12设F是n元联结词，p1,p2,…,pn是不同的命题变元。如果公式A中不出现除p1,p2,…,pn之外的命题变元，并且A⇔Fp1,p2,…,pn，则称A定义F。**
  + **设S是联结词集合。如果每个n(n>0)元的联结词都可由S定义，则称S为完全集。**
  + **如果完全集S1中的每个联结词都可由联结词集合S2定义，则S2也是完全集。**
  + **如果从完全集S中去掉任何一个联结词就成为不完全的了，就称S为极小完全集。**
* **(范式)定义：**
  + **原子公式和原子公式的否定统称为文字。如果一个文字恰为另一个文字的否定，则称它们为相反文字。**
  + **设n是正整数，A1,……,An都是文字，称A1∨…∨An为简单析取式，称A1∧…∧ An为简单合取式。**
  + **定义⒈１６ 设n是正整数。若B1,……,Bn都是简单合取式，则称B1∨…∨Bn为析取范式。若B1,……,Bn都是简单析取式，则称B1 ∧… ∧Bn为合取范式。**
* **（逻辑推论）定义：**
  + **若真值赋值v满足公式集合Γ中的每个公式，则称v满足Γ。若有真值赋值满足Γ，则称Γ是可满足的，否则称Γ是不可满足的。**
  + **设Γ是公式的集合，A是公式。如果每个满足Γ的真值赋值都满足A，则称A是Γ的逻辑推论， 记为Γ|=A。若Γ|=A不成立，记为Γ|≠A。**

谓词逻辑

* **（论域）定义：论域是一个数学系统，记为D。它由三部分组成：**
  + **(1)一个非空对象集合D；**
  + **(2) 一个关于D的函数集合,也称运算；**
  + **(3)一个关于D的关系集合。**
* **（一阶谓词逻辑语言）简称一阶逻辑语言**
  + **逻辑符号：包括变元、联接词、量词；**
  + **非逻辑符号：包括常元、函词、谓词；**
  + **仅有个体变元；**
  + **按形成规则构成的合式公式集合**
  + **（字符集）定义：**
    - **逻辑符号，包括变元、联接词、量词、逗号以及括号等，表示如下：**
      * **变元：x1, x2, …**
      * **联接词：∧,∨,¬,→,↔,⊕；**
      * **量 词：∀, ∃；**
      * **逗 号：, ;**
      * **括 号：(, )**
    - **非逻辑符号，包括常元、函词、谓词等，表示如下：**
      * **常 元：c1, c2 , …**
      * **函 词：f11, f21,......；f12, f22,......；**
      * **谓 词：P11,P 21,......； P 12, P 22,....。**
* **（项）定义：**
  + **(1).个体常元是项；**
  + **(2).个体变元是项；**
  + **(3).若是t1,…,tn项，f in是n元函词，则是f i (t1,…,tn)项。**
* **（合式公式）定义：合式公式是按如下规则构成的有穷长符号串。**
  + **(1).若是t1,…,tn项，Qin是n元谓词，则Qin(t1,…,tn)是合式公式。**
  + **(2).若Q是合式公式，则(**¬**Q)是合式公式；**
  + **(3).若Q和R是合式公式，则(Q**∧**R)、(Q**∨**R)、(Q**→**R) 、(Q**↔**R)及(Q**⊕**R)是合式公式；**
  + **(4).若Q是合式公式，x是变元，则(**∀**xQ)及(**∃**xQ)是合式公式。**
  + **(5).只有有限次应用(1)—(4)构成的公式是合式公式。**
* **（约束变元）定义：**
  + **若(∀xQ)(或∃xQ)是公式，则称变元x在公式(∀xQ) (或∃xQ)中为约束出现，称x是约束变元，并称 x出现的辖域为Q。**
* **（自由变元）定义：**
  + **如果变元x在公式Q中的出现不是约束出现，则称x在Q中为自由出现。在公式Q中有自由出现的变元称为Q的自由变元，将Q中自由变元的集合记为Var(Q)。**
* **定义：不出现变元的项称为基项。**
* **定义：没有自由变元的公式称为语句。**
* **解释（定义）：设D是论域，一个解释*I*由以下四部分组成：**
* **(1)指定一个非空集合，称为*I*的论域。**
* **(2) 对于每个常元c，指派D 中一个元素。**
* **(3) 对于每个n元函词，指派一个D 上的一个n元运算。**
* **(4) 对于每个n元谓词Q，指派一个D 上的一个n元关系。**
* **（结构）定义：**
  + **给定一阶语言L以及论域D和解释I，偶对<D, I>称为L的结构，记为S=<D, I>。**
* **（赋值）定义：**
  + **从变元到论域D 的函数称为I中的赋值，记为σ:V→D。**
* **（模型）定义：**
  + **给定一阶语言L以及它的结构S和赋值σ，偶对<S,σ>称为L的模型，记为M=<S,σ>。**
* **（项的语义）定义：设L是一阶语言，U是论域，I是解释，语言L的项t的语义是D中一个对象，记为σI(t)，简记为σ(t) 。**
  + **(1) 若t是常元a，则σ(t) =aI。**
  + **(2) 若t是变元x，则σ(t) = σ(x)。**
  + **(3) 若t是f (t1, t2, …, tn)，则σ(t) = f I(σ(t1), σ(t2), …, σ(tn))。**
* **（谓词合式公式意义）定义 给定一阶语言L，结构S=<D, I>和赋值函数σ:V→D，t1, t2, …, tn是项。在模型M=<S, σ>下，公式P,Q,R的语义是确定的逻辑真值。**
  + **(1) 若P是Q(t1, t2, …, tn)，则σ(P) = QI(σ(t1), σ(t2), …, σ(tn))。**
  + **(2) 若P是¬Q，则σ(¬Q) = ¬σ(Q)。**
  + **(3) 若P是Q∧R，则σ(Q∧R) =σ(Q) ∧σ(R)。**
  + **(4) 若P是Q∨R，则σ(Q∨R) =σ(Q) ∨σ(R)。**
  + **(5) 若P是Q→R，则σ(Q→R) =σ(Q) →σ(R)。**
  + **(6) 若P是Q↔R，则σ(Q↔R) =σ(Q) ↔σ(R)。**
  + **(7) 若P是Q⊕R，则σ(Q⊕R) =σ(Q) ⊕σ(R)。**
  + **(8) 若P是∀xQ(x)，则**

****

* + **(9) 若P是∃xQ(x)，则**

****

* **（可满足性）定义：**
  + **定义：给定一阶语言L和它的公式Q，如果存在模型M=<S, σ>，使得σ(Q)=1成立，则称公式Q关于模型<S, σ>是可满足的，简称Q可满足，也称模型<S, σ>满足Q，记为╞ M Q。**
  + **定义：给定一阶语言L和它的公式Q，如果不存在模型M=<S, σ>，使得σ(Q)=1成立，则称公式Q关于模型<S, σ>是不可满足的，也称模型<S, σ>不满足Q，记为|≠M Q。**
  + **定义：给定一阶语言L和它的公式集合Γ= {Q1,...,Qn}，如果存在模型M=<S, σ>，使得对于每个公式Qk，Qk∈Γ，有σ(Qk)=1成立，则称公式集合Γ关于模型<S, σ>是可满足的，简称Γ可满足，也称模型<S, σ>满足Γ，记为╞ MΓ，也记为σ(Γ)=1。**
* **（有效性）定义**
  + **定义：若合式公式Q对于一阶语言L的任意模型M=<S, σ>均可满足，即对任意结构S和任意赋值σ成立，则称公式集合Q是永真的或有效的，记为╞ Q。**
  + **定义：若合式公式集合Γ对于一阶语言L的任意模型M=<S, σ>均可满足，即对任意结构S和任意赋值σ成立，称公式集合Γ是永真的或有效的，记为╞ Γ。**
  + **定义：若公式Q对于一阶语言L的任意模型M=<S, σ>均不可满足，即对任意结构S和任意赋值σ都不成立，称公式集合Q是永假的，记为|≠ Q。**
* **（相等关系与推论关系）定义：**
  + **定义：给定一阶语言L及它的两个公式Q,R，如果存在模型M=<S, σ>，使得σ(Q) = σ(R), 则称Q与R是在模型M等值，记为Q⇔MR。**
  + **定义：如果对于任意模型模型M=<S, σ>，都有 σ(Q) = σ(R), 则称Q与R是逻辑等价，记为Q⇔R。**
  + **定义：给定一个语言L , Γ是一个公式集合, Q 是一个公式。若存在模型M=<S, σ>，使得当σ(Γ)=1时有σ(Q)=1，则称Q 是Γ关于模型的逻辑推论，记为Γ╞MQ。**
  + **定义：给定一个语言L , Γ是一个公式集合, Q 是一个公式。若对于任意模型M=<S, σ>，使得当σ(Γ)=1时有σ(Q)=1，则称Q 是Γ逻辑推论，或称Γ语义推出Q，记为Γ╞Q。**
* **（代入与可带入）定义：**
  + **定义：设L是一阶语言，t和 t '是L的项，x是t中自由变元，若t中x的任何自由出现都替换为t ' ，则称项t中的自由变元x被项t '代入 (substitution)。**
  + **定义：设L是一阶语言，t是L的项， Q是合式公式，x是Q中自由变元，若Q中x的任何自由出现都替换为t，则称公式Q中的自由变元x被项t代入 (substitution)。**
  + **定义：设t是项，y是t中任一自由变元，Q是合式公式，x是Q中自由变元，如果Q中x的任何自由出现都不在∀y(∃y)的辖域内，则称项t是对Q中自由变元x可代入的(substitutable)。**
  + **定理：设L是一阶语言，M=<S, σ>是模型，若t和t '是L的项，则σ(t[x/t'])= σ(t[x/σ(t')])。**
  + **定理：设L是一阶语言，模型M=<S, σ>，设t是L的项，Q是L的公式，若对于公式Q中的x是t可代入的，则σ(Q[x/t])= σ(Q[x/σ(t)])。**
* **（对偶性）定义：**
  + **定义：设合式公式Q是由原子公式、联结词（¬ ,∧,∨）、量词（∀, ∃）生成的公式，并且在Q中联结词∧和∨互换，量词∀和∃互换，原子公式和它的否定式互换，而得到公式Q'，则公式Q和Q'互为对偶式。**
  + **定理：设合式公式Q和Q'互为对偶式，则σ(Q) ↔ σ(¬Q')。**

公理系统

* **（形式系统）一个形式系统应当包括以下几部分。**
  + **(1)各种初始符号。初始符号是一个形式系统的“字母”，经解释后其中一部分是初始概念。**
  + **(2)形成规则。规定初始符号组成各种合适符号序列的规则。经解释后合式符号序列是一子句，称为系统里的合式公式或命题。**
  + **(3)公理。把某些所要肯定的公式选出，作为推导其它所要肯定的公式的出发点，这些作为出发点的公式称为公理。**
  + **(4)变形规则。变形规则规定如何从公理和已经推导出的一个或几个公式经过符号变换而推导出另一公式。经过解释，变形规则就是推理规则。**
* **（公理系统）定义：**
  + **从一些公理出发，根据演绎法，推导出一系列定理，形成的演绎体系叫作公理系统。**
  + **公理系统的组成：**
    - **符号集；**
    - **公式集：公式是用于表达命题的符号串；**
    - **公理集：公理是用于表达推理由之出发的初始肯定命题；**
    - **推理规则集：推理规则是由公理及已证定理得出新定理的规则；**
    - **定理集：表达了肯定的所有命题。**
* **定义：命题逻辑的公理系统定义:**
  + **(1).符号集合：**
    - **1).命题变元Q1,Q2,…Qn**
    - **2).联结词符号：¬，→;**
    - **3).括号：(,)**
  + **(2).形成规则(公式定义)：**
    - **1).若Q是命题变元，则Q是公式；**
    - **2).若Q是公式，则(¬Q)是公式；**
    - **3).若Q,R是公式，则(Q→R)是公式。**
  + **(3).公理：公理模式中P,Q,R为任意公式**
    - **1).公理模式A1： R→ (Q→R)**
    - **2).公理模式A2： (P→ (Q→R)) → ((P→Q) → (P→R))**
    - **3).公理模式A3： (¬Q→¬R) → (R→Q)**
  + **(4).变形规则：推理规则(分离规则MP规则)**
    - **若Q和Q→R成立，则R成立。其中， Q和Q→R称为前提，R称为结论。**
* **谓词逻辑的公理系统定义：**
  + **(1).符号集合：**
    - **1).个体变元：x1, x2, …**
    - **2).个体常元：c1, c2 , …**
    - **3).函数符号：f11, f21,......；f12, f22,......；**
    - **4).谓词符号：Q11,Q21,......；Q12, Q22,....;**
    - **5).运算符号：∀, ¬, →；**
    - **6).逗 号：, ;**
    - **7).括 号：(, )**
  + **(2).项定义：**
    - **1).个体常元是项；**
    - **2).个体变元是项；**
    - **3).若是t1,…,tn项，则是fkn (t1,…,tn)项。**
  + **(3).公式集合：**
    - **1).若是t1,…,tn项，则Q kn (t1,…,tn)是公式。**
    - **2).若Q是公式，则(¬Q)是公式；**
    - **3).若Q和R是公式，则(Q→R)是公式；**
    - **4).若Q是公式，则(∀xQ)是公式。**
  + **(4).公理集合：**
    - **1).公理模式A 1：Q→ (R→Q)**
    - **2).公理模式A 2：(P→ (Q→R)) → ((P→Q) → (P→R))**
    - **3).公理模式A 3：(¬Q→¬R) → (R→Q)**
    - **4).公理模式A 4：∀xQ(x)→Q(x)[x/t] 其中，项t对于Q中的x是可代入的。**
    - **5).公理模式A 5：∀x(Q→R(x)) → (Q→∀xR(x)) 其中x不是Q中自由变元。**
  + **(5).推理规则**
    - **1).分离规则（简称MP规则）：从Q和Q→R推出R。**
    - **2).概括规则（简称UG规则）：从Q(x)推出(∀xQ)。**
* **常用定理**
  + **├ (P→(Q→R)) →(Q→(P→R))**
  + **├(Q → R)→((P→Q)→(P→R))**
  + **├(P→ Q)→((Q→R)→(P→R))**
  + **├((P→ Q)→(P→R))**
  + **→(P→(Q →R)**
  + **├Q→Q**
  + **├¬¬Q→Q**
  + **├ Q→¬¬Q**
  + **├ Q∨Q →Q**
  + **├¬(Q∧¬Q)**
  + **├(Q∨¬Q)**
  + **├ (¬¬Q→¬¬R)→(Q→R)**
  + **├ (Q→R)→(¬¬Q→¬¬R)**
  + **├(Q→R)→(¬R→¬Q)**
  + **├(¬Q→R)→(¬R→Q)**
  + **├(Q →¬R )→(R→¬Q)**
  + **├ ¬Q→(Q→ R)**
  + **├(¬Q→Q)→(R→Q)**
  + **├(¬Q→Q)→Q**
  + **├(Q→R) ∨ (R→Q)**
  + **├(Q→ R)∨(Q →¬R)**
  + **├Q→((Q→R)→ R)**
  + **├ Q∧(Q→R)→R**
  + **├(P→Q) →((Q →R) →(P →R))**
  + **├(¬Q→R) →((¬Q→¬R) →Q)**
  + **├(Q→R) →((Q→¬R) →¬Q)**
  + **├(¬Q→R ∧¬R) →Q**
  + **├(P∧Q →R) →(P →(Q →R))**
  + **├ Q→(R→(Q∧R))**
  + **├ (P→Q) ∧(P→R) →(P→Q ∧ R)**
  + **├(P→R) →((Q→R) →((P∨Q) →R))**
  + **├ ∀xR(x) ↔ ∀y R(y)**
  + **├ ∃xR(x) ↔ ∃y R(y)**
  + **├ Q(c) →∃xQ(x)**
  + **├ ¬Q(c) →¬∀xQ(x)**
  + **├ ∀xR(x) → ∃xR(x)**
  + **├ ∀x∀y R(x,y) ↔ ∀y∀xR(x,y)**
  + **├ ∃x∃y R(x,y) ↔ ∃y∃xR(x,y)**
  + **├ ∃x∀yR(x,y) → ∀y∃x R(x,y)**
  + **├ ∀x∀yR(x,y) → ∀xR(x,x)**
  + **├ ∃xR(x,x) → ∃x∃yR(x,y)**
  + **├ ∀x(P(x) →Q(x)) →(∀xP(x) →∀x Q(x))**
  + **├ ∀x(P(x) →Q(x)) →(∃xP(x) → ∃x Q(x))**
  + **├ ∀x(P(x) ∧Q(x)) ↔(∀xP(x) ∧∀xQ(x))**
  + **├ ∀xP(x) ∨ ∀xQ(x))→∀x(P(x) ∨ Q(x))**
  + **├ ∃x(P(x) ∧Q(x)) →(∃xP(x) ∧∃xQ(x))**
  + **├ ∃x(P(x) ∨Q(x)) ↔(∃xP(x) ∨∃xQ(x))**
  + **├ ∀xP(x) ↔¬∃x¬P(x)**
  + **├ ∃xP(x) ↔¬∀x¬P(x)**
  + **├ ∃x¬P(x) ↔ ¬∀xP(x)**
  + **├ ¬ ∃x¬P(x) ↔∀xP(x)**
* **可靠性定理：若*Γ*├ *Q* ，则*Γ* ╞ *Q*。**
* **完备性定理：若Γ ╞ Q ，则Γ├ Q。**
* **（理论与模型)定义：**
  + **理论**
    - **设L 是一个形式语言，L的理论Th就是作为公理的语句集合**
    - **公理包括：逻辑公理和专用公理**
    - **专用公理定义特定函词和谓词性质**
  + **模型**
    - **设Th是形式语言L的理论，若Th的所有语句都在L结构M 中为真，则说M 是Th的模型。**
    - **在给定论域上，关于Th的一个解释和赋值，构成Th的一个模型M。**