

## 基于密切多项式近似的多项式插值算法框架

赵小乐<sup>1</sup>, 吴亚东<sup>1\*</sup>, 张红英<sup>2</sup>, 赵 静<sup>3</sup>

(1. 西南科技大学 计算机科学与技术学院, 四川 绵阳 621010; 2. 西南科技大学 信息工程学院, 四川 绵阳 621010;

3. 四川大学 计算机学院, 成都 610045)

(\* 通信作者电子邮箱 wyd028@163.com)

**摘 要:** 多项式插值技术是近似理论中一种常见的近似方法, 被广泛用于数值分析、信号处理等领域。但传统的多项式插值技术大多是基于数值分析与实验结果相结合得到的, 没有统一的理论描述和规律性的解决方案。为此, 根据密切多项式近似理论为图像的多项式插值算法提出一个统一的理论框架。密切多项式近似的理论框架包括采样点数目、密切阶数和导数近似规则三个部分, 它既可以用于分析现有的多项式插值算法, 也可以用于开发新的多项式插值算法。分析了主流多项式插值技术在密切多项式近似理论框架下的表现形式, 并以四点二阶密切多项式插值算法为例详细描述了利用密切多项式插值的理论框架开发新的多项式插值算法的一般流程。理论分析和数值实验表明大多数主流插值算法都属于密切多项式插值算法, 它们的处理效果与采样点数目、密切阶数和导数近似规则有紧密的关系。

**关键词:** 密切多项式; 导数近似规则; 密切阶数; 多项式插值; 信号处理

**中图分类号:** TP391; TP301.6 **文献标志码:** A

## Polynomial interpolation algorithm framework based on osculating polynomial approximation

ZHAO Xiaole<sup>1</sup>, WU Yadong<sup>1\*</sup>, ZHANG Hongying<sup>2</sup>, ZHAO Jing<sup>3</sup>

(1. School of Computer Science and Technology, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan 621010, China;

2. School of Information Engineering, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan 621010, China;

3. College of Computer Science, Sichuan University, Chengdu Sichuan 610045, China)

**Abstract:** Polynomial interpolation technique is a common approximation method in approximation theory, which is widely used in numerical analysis, signal processing, and so on. Traditional polynomial interpolation algorithms are mainly developed by combining numerical analysis with experimental results, lacking of unified theoretical description and regular solution. A uniform theoretical framework for polynomial interpolation algorithm based on osculating polynomial approximation theory was proposed here. Existing interpolation algorithms could be analyzed and new algorithms could be developed under this framework, which consists of the number of sample points, osculating order for sample points and derivative approximation rules. The presentation of existing mainstream interpolation algorithms was analyzed in proposed framework, and the general process for developing new algorithms was shown by using a four-point and two-order osculating polynomial interpolation. Theoretical analysis and numerical experiments show that almost all mainstream polynomial interpolation algorithms belong to osculating polynomial interpolation, and their effects are strongly related to the number of sampling points, order of osculating, and derivative approximation rules.

**Key words:** osculating polynomial; Derivative Approximation Rule (DAR); osculating order; polynomial interpolation; signal processing

## 0 引言

插值方法的出现与发展经历了漫长的历史过程, 在信号处理、图像处理领域有着极其广泛的应用, 如人口普查、音视频处理、医学或遥感图像处理等<sup>[1-5]</sup>。图像插值是其中的应用之一, 也是许多数字图像处理操作(如图像重采样、尺度变换与几何校准等<sup>[6-7]</sup>)的基础。图像处理中的插值方法大致可以分为两类: 一是传统的插值算法, 这类算法都假设图像信

号是连续的、带宽受限的平滑信号, 但这在自然图像中一般是不成立的<sup>[8]</sup>, 所以这种插值算法只是作为一种初始处理应用于相关领域中(如图像超分辨<sup>[8-11]</sup>); 另一种是基于图像自身结构和成像系统特征的插值算法, 这类算法考虑了图像信号的非线性特征, 其处理效果更符合人眼视觉特征, 可以直接作为图像放大或超分辨的结果<sup>[12-14]</sup>。

多项式插值算法是指插值函数是多项式函数的一类算法, 它是传统插值技术中最具代表性的一类插值算法, 在数字

**收稿日期:** 2015-03-06; **修回日期:** 2015-03-24。 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61303127); 国家科技支撑计划项目(2013BAH32F01); 四川省科技厅科技支撑计划项目(2014SZ0223); 四川省教育厅重点项目(13ZA0169); 中国科学院“西部之光”人才培养计划项目(13ZS0106); 西南科技大学创新基金资助项目(15ycx053)。

**作者简介:** 赵小乐(1987-), 男, 四川南部人, 硕士研究生, CCF 会员, 主要研究方向: 数字图像处理; 吴亚东(1979-), 男, 河南周口人, 教授, 博士, CCF 会员, 主要研究方向: 图形图像处理、信息可视化、人机交互; 张红英(1976-), 女, 四川德阳人, 教授, 博士, 主要研究方向: 数字图像处理; 赵静(1991-), 女, 四川隆昌人, 硕士研究生, 主要研究方向: 数字图像处理。

图像处理、数字信号处理等领域有着广泛的应用。最邻近插值算法(Nearest Neighbor, NN)以 B-Spline 算法的基函数为核函数,双线性插值算法在两个采样点之间构建一个线性函数作为插值函数<sup>[15]</sup>;文献[16]中提出的分段立方卷积(Piecewise Cubic Convolution, PCC)插值算法在插值核函数上直接添加约束条件,并要求插值函数是采样函数的三阶近似;文献[17-18]将插值函数看成分段立方函数进行求解,提出了立方样条插值(Cubic Spline, CS)算法;拉格朗日多项式插值(Lagrange Polynomial Interpolation, LPI)是在采样点集合上构建一个拉格朗日多项式作为插值函数<sup>[2,19-21]</sup>。除上述典型的一维插值算法,文献[22]结合空间域和频率域内的分析方法,将插值核函数看成是二维平面上的空间曲面,提出了一种含有两个参数的二维不可分立方卷积插值方法(2D-2PCC),Shi等<sup>[23]</sup>随后又提出了含有三个和五个参数的二维立方卷积插值方法,即 2D-3PCC 和 2D-5PCC。Watte Tri-Linear 算法<sup>[4]</sup>是一种处理效果较好、执行效率较高的经典插值算法,图 1(a)给出了该算法的基本思路,它首先在  $x_{j-1}$  和  $x_{j+1}$  之间,  $x_j$  和  $x_{j+2}$  之间构建两个线性函数,然后将这两个线性函数同时向右移动,移动过程中对线性函数进行加权求和,权重因子与移动距离有关。它的插值核函数为:

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|x|^2 - \frac{1}{2}|x| + 1, & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{1}{2}|x|^2 - \frac{1}{2}|x| + 1, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (1)$$

图 1(b)显示了 Watte Tri-Linear 算法的核函数在空间域中的图形。上述各种多项式插值算法有不同的表现形式和处理效果,但它们都属于多项式插值技术的范畴,在过去很长一段时间内吸引了大量学者对这一问题进行了深入研究。

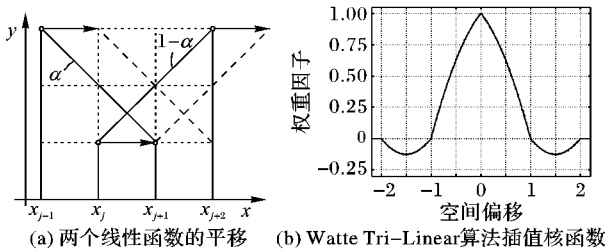


图 1 Watte Tri-Linear 算法

主流多项式插值算法目前已经十分成熟并在实际应用中大量使用,但这些算法有着不同开发思路,其中大多是基于数值分析与实验结果相结合得到的,因此缺乏统一的理论描述。本文重点研究了传统多项式插值算法的理论基础和开发过程,为这类插值算法提出了一个统一的理论框架。尽管各种多项式插值算法的表现形式不尽相同,但在采样间隔相等的情况下,插值函数都可以写成如下形式:

$$g(x) = \sum_j c_j h[(x - x_j)/\Delta] \quad (2)$$

其中:  $h(x)$  是值核函数,  $\Delta$  表示采样间隔,  $c_j$  是与第  $j$  个采样点相关的系数。如果是二维插值算法,则插值函数与核函数变为相应的二元函数。本文总结了大量多项式插值算法的开发思路,以密切多项式近似理论<sup>[2]</sup>为基础,为数字图像的多项式插值算法开发了一个统一的理论框架,理论分析表明当前已经出现的大多数多项式插值算法都是这一理论框架下的特

殊情况。密切多项式插值的理论框架(Osculating Polynomial Interpolation, OPI)可以用来分析现有的多项式插值算法,也可以根据密切多项式插值算法的开发流程和不同的导数近似规则来开发新的插值技术。

## 1 密切多项式插值

### 1.1 理论框架

多项式插值算法的基本思想是在采样点集合上拟合一条曲线作为插值函数。显然,拟合的曲线越接近采样函数,近似精度越高。插值函数接近采样函数的程度可以用采样点处的导数来描述。如果插值函数在每一个采样点处的导数都与采样函数一致,那么插值函数就无限接近于采样函数。用  $f(x)$  表示采样函数,  $g(x)$  表示插值函数,  $h(x)$  表示插值核函数。假设在区间  $[a, b]$  内有  $n+1$  个不同的采样点  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , 在每个采样点处都有一个与之关联的非负整数  $m_j$ , 且:

$$m = \max_{0 \leq j \leq n} (m_j) \quad (3)$$

如果  $f(x) \in C^m[a, b]$ , 那么插值函数所组成的集合  $\mathcal{A}(x)$  可以描述为  $m$  阶密切多项式的集合:

$$\mathcal{A}(x) = \left\{ g(x) \left| \frac{d^k g(x_j)}{dx_j^k} = \frac{d^k f(x_j)}{dx_j^k} \right. \right\} \quad (4)$$

其中:  $0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq m_j$ 。然而,这里存在一个实际的困难,即采样函数在各个采样点位置的实际导数值往往是未知的。解决这一困难的通常做法是利用某种规则来近似这些导数,但这种对导数的近似处理具有任意性,即密切阶数、密切阶数与采样点之间的组合关系是任意的。假设导数近似规则组成的集合为  $R$ , 所有多项式插值算法的核函数组成集合  $\mathcal{H}(x)$ , 那么密切多项式插值算法的理论框架可以描述为:

$$\mathcal{H}(x) = \{ h(x) | h(x) = \mathcal{N}[g(x)] \} \quad (5)$$

其中  $g(x)$  满足:

$$\frac{d^k g(x_j)}{dx_j^k} \in R; g(x) \in \Omega(x)$$

其中  $\mathcal{N}[\cdot]$  表示从插值函数通过规范化过程求解核函数的操作。根据密切多项式近似理论,如果  $n=0$ , 那么插值函数就变成  $m_0$  阶泰勒展开式;若  $m=0$ , 插值函数就是零阶密切多项式,即拉格朗日多项式;如果  $m=1$ , 此时插值函数就变成一阶密切多项式,即艾尔米特多项式;当  $m>1$  时插值函数就是高阶密切多项式<sup>[2]</sup>。

密切多项式插值的理论框架中最重要的部分是导数近似规则,导数近似的误差越小,插值算法的近似精度越高。在利用密切多项式开发插值算法时,还有两点是值得注意:一是密切阶数与采样点之间的组合关系,如图 2(a) 所示。每一个采样点的导数是任意的,多项式的密切阶数与采样点的最大密切阶数相等,而最大密切阶数的采样点可以是  $n+1$  个采样点中的任意一点。这说明在相同采样点个数和密切阶数的情况下,密切多项式也不是唯一的。二是采样点数目与密切多项式之间的关系。在密切多项式近似理论中,所有的采样点都用于构建密切多项式,而采样函数在每一点的各阶导数是已知的。如果采样点的导数是未知的,那么采样点集合中就只有一部分用于构建多项式,即密切点(Osculating Point, OP);另一部分则用来辅助构成导数近似规则,成为辅助点

(Auxiliary Point, AP)。一般情况下,  $n+1$  个采样点最多能近似  $n$  阶导数<sup>[2]</sup>, 所以密切多项式的阶数与采样点个数之间有图 2(b) 所示的关系, 只有右下部分的黑色圆点所表示的对应关系才能构成密切多项式。

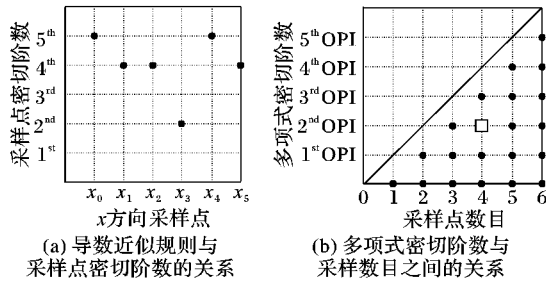


图2 密切多项式插值理论框架

## 1.2 导数近似规则

导数近似规则有标准导数近似规则(Standard Derivative Approximation Rule, SDAR)和非标准导数近似规则(Non-Standard Derivative Approximation Rule, NSDAR)两类。SDAR是指插值函数采用的导数近似值与采样函数的导数精确值之间只相差一个关于采样间隔的高阶无穷小, 即:

$$f^{(k)}(x_j) = g^{(k)}(x_j) + O(\Delta^l) \quad (6)$$

其中:  $\Delta$  表示采样间隔,  $l$  是与  $k$  有关的正整数。NSDAR 与采样函数的真实导数值存在系数上的差异。在等采样间隔的情况下, 根据拉格朗日多项式:

$$g(x) = \sum_{j=0}^n \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} f(x_j) \quad (7)$$

可以求得采样函数在采样点集合  $\{x_j | 0 \leq j \leq n\}$  上任意一点的标准导数近似规则。由于采样点个数和密切阶数不同, 实际的导数近似规则有很多种。式(8)~(11)是几种常用的标准导数近似规则, 这些规则可以用来近似采样点集合中心点(一点或两点)的导数; 式(12)~(15)是与这些导数近似规则对应的边界条件, 其中  $j$  的取值范围根据近似规则用到的采样点个数不同而有所不同。

1) 一阶导数三点近似规则:

$$g'(x_j) = \frac{1}{2\Delta} [f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})] \quad (8)$$

2) 一阶导数五点近似规则:

$$g'(x_j) = \frac{1}{12\Delta} [f(x_{j-2}) - 8f(x_{j-1}) + 8f(x_{j+1}) - f(x_{j+2})] \quad (9)$$

3) 二阶导数三点近似规则:

$$g''(x_j) = \frac{1}{\Delta^2} [f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1})] \quad (10)$$

4) 二阶导数五点近似规则:

$$g''(x_j) = \frac{1}{12\Delta^2} [-f(x_{j-2}) + 16f(x_{j-1}) - 30f(x_j) + 16f(x_{j+1}) - f(x_{j+2})] \quad (11)$$

5) 一阶导数三点近似规则边界条件:

$$\begin{cases} g'(x_0) = \frac{-1}{2\Delta} [3f(x_0) - 4f(x_0 + \Delta) + f(x_0 + 2\Delta)] \\ g'(x_n) = \frac{1}{2\Delta} [f(x_n - 2\Delta) - 4f(x_n - \Delta) + 3f(x_n)] \end{cases} \quad (12)$$

6) 一阶导数五点近似规则边界条件:

$$\begin{cases} g'(x_0) = \frac{1}{12\Delta} [-25f(x_0) + 48f(x_1) - 36f(x_2) + 16f(x_3) - 3f(x_4)] \\ g'(x_1) = \frac{1}{12\Delta} [-3f(x_0) - 10f(x_1) + 18f(x_2) - 6f(x_3) + f(x_4)] \\ g'(x_{n-1}) = \frac{1}{12\Delta} [-f(x_{n-4}) + 6f(x_{n-3}) - 18f(x_{n-2}) + 10f(x_{n-1}) + 3f(x_n)] \\ g'(x_n) = \frac{1}{12\Delta} [3f(x_{n-4}) - 16f(x_{n-3}) + 36f(x_{n-2}) - 48f(x_{n-1}) + 25f(x_n)] \end{cases} \quad (13)$$

7) 二阶导数三点近似规则边界条件:

$$\begin{cases} g''(x_0) = \frac{1}{\Delta^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] \\ g''(x_n) = \frac{1}{\Delta^2} [f(x_{n-2}) - 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{cases} \quad (14)$$

8) 二阶导数五点近似规则边界条件:

$$\begin{cases} g''(x_0) = \frac{1}{12\Delta^2} [35f(x_0) - 104f(x_1) + 114f(x_2) - 56f(x_3) + 11f(x_4)] \\ g''(x_1) = \frac{1}{12\Delta^2} [11f(x_0) - 20f(x_1) + 6f(x_2) + 4f(x_3) - f(x_4)] \\ g''(x_{n-1}) = \frac{1}{12\Delta^2} [-f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + 6f(x_{n-2}) - 20f(x_{n-1}) + 11f(x_n)] \\ g''(x_n) = \frac{1}{12\Delta^2} [11f(x_{n-4}) - 56f(x_{n-3}) + 114f(x_{n-2}) - 104f(x_{n-1}) + 35f(x_n)] \end{cases} \quad (15)$$

目前大多数多项式插值算法都只用到了上述四种近似规则, 但是导数的近似规则并不局限于三点和五点、一阶和二阶的情况, 利用泰勒展开式或拉格朗日多项式还可以求得采样点个数和密切阶数不同的其他导数近似规则。例如 Watter-Tri-Linear 算法采用的是一阶导数的四点近似规则式(16)。在某些应用中, 考虑的关键因素可能不是近似精度, 而是计算时间等其他因素, 比如双立方插值算法采用的非标准一阶导数三点近似规则为式(17), 它只需要进行一次减法运算, 而标准一阶导数三点近似规则式(8)还需要进行一次除法运算。

$$\begin{cases} g'(x_j) = \frac{-1}{2\Delta} [f(x_{j-1}) + f(x_j) - 3f(x_{j+1}) + f(x_{j+2})] \\ g'(x_{j+1}) = \frac{1}{2\Delta} [f(x_{j-1}) - 3f(x_j) + f(x_{j+1}) + f(x_{j+2})] \end{cases} \quad (16)$$

$$g'(x_{j+1}) = \frac{1}{\Delta} [f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})] \quad (17)$$

## 1.3 近似规则边界条件

上述导数近似规则都是对采样点集合中心点的导数进行近似, 但如果需要近似采样点集合两边端点的导数, 就不能采

用类似于中心点的近似规则。如图3所示,基于中心点的三点规则就无法近似 $x_0$ 或 $x_n$ 的导数,五点规则就无法近似 $x_0$ , $x_1, x_{n-1}$ 和 $x_n$ 的导数。而利用密切多项式插值需要对采样点集合中的每一个点进行导数近似计算,因此必须考虑导数近似规则的边界条件。

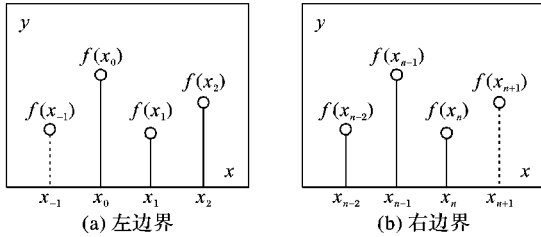


图3 一阶导数三点近似规则的边界条件

边界点导数近似规则也可以利用泰勒展开式或拉格朗日多项式来求解。式(12)~(15)给出了与式(8)~(11)对应的边界条件,基于这些边界条件的导数近似可以保证边界点的近似精度与中心点一致。

#### 1.4 现有密切多项式插值技术

许多现有多项式插值算法实际上都是密切多项式插值算法的特殊情况。根据采样点个数不同可以将其分为一点密切多项式插值、两点密切多项式插值和四点密切多项式插值等;根据密切阶数可以将其分为零阶密切多项式插值、一阶密切多项式插值和二阶密切多项式插值等;根据采用的导数近似规则可以分为标准导数近似规则的密切多项式插值和非标准导数近似规则的密切多项式插值。比如一点密切多项式插值算法即最邻近插值算法,两点密切多项式插值算法就是双线性插值,它们与其他所有的拉格朗日多项式插值算法都属于零阶密切多项式插值算法。

四点立方卷积插值采用一阶导数的标准三点近似规则式(8),它与四点双立方插值和Watte Tri-Linear插值都属于一阶密切多项式插值算法。文献[4]中的六点二阶密切多项式插值算法所采用的一阶和二阶导数近似规则分别为式(8)和(10),边界条件分别为式(13)和(15)。文献[5]中的六点双立方插值算法是采用式(18)构建的六点一阶密切多项式插值算法,这是一种非标准的一阶导数五点近似规则。

$$g'(x_j) = \frac{1}{5\Delta} [f(x_{j-2}) - 4f(x_{j-1}) + 4f(x_{j+1}) - f(x_{j+2})] \quad (18)$$

另外还有很多其他密切多项式插值算法,它们的核函数可以参见文献[4,9]。但无论这些多项式插值算法的表现形式如何,它们都可以采用不同的导数近似规则以密切多项式的方式推导得到。

值得说明的是,许多文献都没有特别提到现有多项式插值算法的边界条件,但为了使边界点的插值精度与中间点保持一致,边界条件是必须指定的。文献[9]中提出的立方卷积插值算法是一种一阶密切多项式插值算法,要求四点立方卷积插值算法的插值函数是采样函数的三阶近似,为了在边界点也满足这一要求,文献中建议在采样区间外增加两个虚拟点 $x_{-1}$ 和 $x_{n+1}$ ,它们满足:

$$f(x_{-1}) = f(x_2) - 3f(x_1) + 3f(x_0) \quad (19)$$

$$f(x_{n+1}) = 3f(x_n) - 3f(x_{n-1}) + f(x_{n-2}) \quad (20)$$

假设 $x_{-1}$ 和 $x_{n+1}$ 都存在,根据标准一阶导数的三点近似规

则式(10)可得:

$$g'(x_0) = \frac{1}{2\Delta} [f(x_1) - f(x_{-1})] \quad (21)$$

$$g'(x_n) = \frac{1}{2\Delta} [f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})] \quad (22)$$

将式(19)和(20)分别代入式(21)和(22)便可以得到式(12)表示的边界条件,也就是说文献[9]算法的边界条件与这里的边界近似规则是一致的。另外,六点立方卷积插值算法是采用标准一阶导数五点近似规则式(9)和边界条件式(13)构成的六点一阶密切多项式插值算法。

## 2 算法开发流程

图像插值是一个不定解问题,必须通过合理假设并为其添加约束条件才能求解。施加约束条件一般有两种思路:一是直接在插值核函数上添加约束,文献[9]推导分段立方卷积插值算法就是采用的这种思路;另一种是在插值函数上添加约束,得到插值函数的具体形式后再通过逆向规范化过程求解核函数。利用密切多项式近似的理论框架开发插值技术就是采用第二种思路,如图4所示:首先确定插值函数的参数化表达,然后根据导数近似规则构建方程组,解这个方程组可以求得插值函数的各个参数,最后通过逆向规范化得到插值核函数。



图4 开发密切多项式插值算法一般流程

文献[4]中的四点二阶密切多项式(图2(b)中的小矩形)用到了四个采样点 $x_{j-1}, x_j, x_{j+1}$ 和 $x_{j+2}$ ,其中 $x_j$ 和 $x_{j+1}$ 为密切点,端点 $x_{j-1}$ 和 $x_{j+2}$ 为辅助点,插值区间为 $(x_j, x_{j+1})$ ,插值点坐标为 $\bar{x}$ ,如图5所示。 $\bar{x}$ 与 $x_j$ 的距离为 $s$ ,即 $\bar{x} = x_j + s\Delta$ 。为了区别函数的自变量,临时用 $x$ 表示采样函数的自变量,用 $t$ 表示插值函数的自变量,从而采样函数和插值函数可分别表示为 $f(x)$ 和 $g(t)$ 。 $\bar{x}$ 在 $g(t)$ 的坐标系中的对应点为 $\bar{t}$ ,且 $\bar{t} = s\Delta$ ,如图5所示。根据密切多项式的定义,插值函数 $g(t)$ 应该满足如下几个条件: $g(0) = f(x_j)$ ,  $g(\Delta) = f(x_{j+1})$ ,  $g'(0) = f'(x_j)$ 以及 $g'(\Delta) = f'(x_{j+1})$ ,  $g''(0) = f''(x_j)$ ,  $g''(\Delta) = f''(x_{j+1})$ 。由于增加了二阶导数,可以将四点二阶密切多项式插值函数 $g(t)$ 设为:

$$g(t) = At^5 + Bt^4 + Ct^3 + Dt^2 + Et + F \quad (23)$$

其中系数 $A, B, C, D, E, F$ 是待确定的参数。

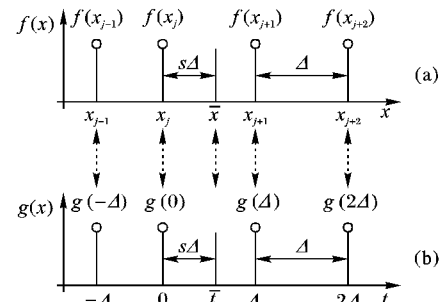


图5 采样函数与插值函数之间的坐标对

由于构建 $g(t)$ 的采样点总数为4,所以一阶导数和二阶导数都只能采用三点导数近似规则,也就是分别采用式(10)

和式(12)来近似,由此可得如下方程组:

$$\begin{cases} g(0) = F \\ g(\Delta) = A\Delta^5 + B\Delta^4 + C\Delta^3 + D\Delta^2 + E\Delta + F \\ g'(0) = E \\ g'(\Delta) = 5A\Delta^4 + 4B\Delta^3 + 3C\Delta^2 + 2D\Delta + E \\ g''(0) = 2D \\ g''(\Delta) = 20A\Delta^3 + 12B\Delta^2 + 6C\Delta + 2D \end{cases} \quad (24)$$

解此方程组可得:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{\Delta^5}[-f(x_{j+2}) + 3f(x_{j+1}) - 3f(x_j) + f(x_{j-1})] \\ B = \frac{5}{2\Delta^4}[f(x_{j+2}) - 3f(x_{j+1}) + 3f(x_j) - f(x_{j-1})] \\ C = \frac{-3}{2\Delta^3}[f(x_{j+2}) - 3f(x_{j+1}) + 3f(x_j) - f(x_{j-1})] \\ D = \frac{1}{2\Delta^2}[f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1})] \\ E = \frac{1}{2\Delta}[f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})] \\ F = f(x_j) \end{cases} \quad (25)$$

将其代入式(23),并按采样点收集各项系数可得

$$g(t) = \sum_{i=-1}^2 c_i(t)f(x_{j+i}) \quad (26)$$

其中:

$$\begin{cases} c_{-1}(t) = \frac{t^5}{\Delta^5} - \frac{5t^4}{2\Delta^4} + \frac{3t^3}{2\Delta^3} + \frac{t^2}{2\Delta^2} - \frac{t}{2\Delta} \\ c_0(t) = -\frac{3t^5}{\Delta^5} + \frac{15t^4}{2\Delta^4} - \frac{9t^3}{2\Delta^3} - \frac{t^2}{\Delta^2} + 1 \\ c_1(t) = \frac{3t^5}{\Delta^5} - \frac{15t^4}{2\Delta^4} + \frac{9t^3}{2\Delta^3} + \frac{t^2}{2\Delta^2} + \frac{t}{2\Delta} \\ c_2(t) = -\frac{t^5}{\Delta^5} + \frac{5t^4}{2\Delta^4} - \frac{3t^3}{2\Delta^3} \end{cases} \quad (27)$$

注意这里  $t = s\Delta$ , 假设  $s_k\Delta$  为当前坐标位置  $\bar{x}$  与  $x_{j+k}$  的距离 ( $k = -1, 0, 1, 2$ ), 那么  $\bar{x}$  与  $g(t)$  坐标系下对应点的距离也为  $s_k$ 。在  $f(x)$  坐标系下可以求得:

$$\begin{cases} s_{-1}\Delta = \bar{x} - x_{j-1} = (s+1)\Delta \\ s_0\Delta = \bar{x} - x_j = s\Delta \\ s_1\Delta = x_{j+1} - \bar{x} = (1-s)\Delta \\ s_2\Delta = x_{j+2} - \bar{x} = (2-s)\Delta \end{cases}$$

从而可得  $s\Delta = (s_{-1} - 1)\Delta$ ,  $s\Delta = s_0\Delta$ ,  $s\Delta = (1 - s_1)\Delta$  以及  $s\Delta = (2 - s_2)\Delta$ , 将其依次代入式(25)并展开整理可得:

$$\begin{cases} c_{-1}(s\Delta) = s_{-1}^5 - \frac{15}{2}s_{-1}^4 + \frac{43}{2}s_{-1}^3 - 29s_{-1}^2 + 18s_{-1} - 4 \\ c_0(s\Delta) = -3s_0^5 + \frac{15}{2}s_0^4 - \frac{9}{2}s_0^3 - s_0^2 + 1 \\ c_1(s\Delta) = -3s_1^5 + \frac{15}{2}s_1^4 - \frac{9}{2}s_1^3 - s_1^2 + 1 \\ c_2(s\Delta) = s_2^5 - \frac{15}{2}s_2^4 + \frac{43}{2}s_2^3 - 29s_2^2 + 18s_2 - 4 \end{cases}$$

此时每个采样点的权重系数都已经换成该采样点与插值点的距离  $s_k$  的函数。将式(26)中的四个权重系数整理成一个统一的形式,并将自变量  $s\Delta$  换成  $x$  便得到文献[4]中四点二阶密切多项式插值算法的核函数式(28)。

$$h(x) = \begin{cases} -3|x|^5 + \frac{15}{2}|x|^4 - \frac{9}{2}|x|^3 - |x|^2 + 1, & 0 \leq |x| < 1 \\ |x|^5 - \frac{15}{2}|x|^4 + \frac{43}{2}|x|^3 - 29|x|^2 + 18|x| - 4, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (28)$$

文献[4]开发该算法的过程与这里略有不同,它是在四个采样点上构建两个拉格朗日多项式,再根据这两个拉格朗日多项式求解插值函数。从本质上讲这两个思路是一致的,但密切多项式插值的理论框架不仅更具有普遍性,而且还可以用来开发新的插值算法。例如,如果采用式(29)所表示的标准三阶导数四点近似规则:

$$g'''(x_j) = \frac{-1}{\Delta^3}[f(x_{j-1}) - 3f(x_j) + 3f(x_{j+1}) - f(x_{j+2})] \quad (29)$$

结合式(10)与式(12),可以开发一种四点三阶密切多项式插值算法。该算法将在后续内容中用于密切多项式插值算法的理论分析与数值实验,其插值核函数为式(30)。

$$h(x) = \begin{cases} 10|x|^7 - 35|x|^6 + 42|x|^5 - \frac{35}{2}|x|^4 + \frac{1}{2}|x|^3 - |x|^2 + 1, & 0 \leq |x| < 1 \\ -\frac{10}{3}|x|^7 + 35|x|^6 - 154|x|^5 + \frac{735}{2}|x|^4 - \frac{1027}{2}|x|^3 + 421|x|^2 - \frac{566}{3}|x| + 36, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (30)$$

### 3 比较与分析

在插值算法的分析中,一般包括近似精度、频谱特征和计算复杂度三个方面的内容。近似精度主要反映插值函数对采样函数的近似程度,属于插值算法的空间域特征;频谱特征是在傅里叶频率域分析插值算法的滤波特性;计算复杂度主要考虑算法实现过程中的时空开销。很明显,如果密切多项式采用的采样点个数越多,密切阶数越高,那么计算量越大,所以这里只对算法的近似精度和频谱特征进行分析。

#### 3.1 空间域分析

从密切多项式插值的定义中可以看出,影响密切多项式近似精度的因素主要是采样点的数目与密切阶数。理论上来说,如果采样点数目相同,密切多项式的密切阶数越高,表示在某个采样点位置可以展开为更高阶的泰勒展开式,从而采样点的近似精度也就越高。若密切阶数相同,所用的采样点越多,那么密切多项式从整体上更接近采样函数,近似效果也会更好。例如四点立方卷积插值算法、四点双立方插值算法和 Watte Tri-Linear 算法都属于四点一阶密切多项式插值算法,它们的区别在于采用的一阶导数近似规则不同。利用泰勒展开式可以看出,四点立方卷积插值算法的导数近似规则可以达到采样函数的  $O(\Delta^2)$  近似,而四点双立方插值和 Watte Tre-Linear 算法分别是  $f'(x_j) + O(\Delta^2)$  和  $O(\Delta)$ , 所以

立方卷积插值算法的近似精度更高,在6个采样点的情况下也有相似的结论。

图6给出了几种采样点个数不同时,零阶密切多项式(拉格朗日多项式)插值的核函数空间域图形,图7给出了四个采样点情况下不同阶数密切多项式插值算法的核函数空间域图形。图6说明在密切多项式阶数相同时,核函数的空间域特征随着采样点的增加而越来越接近理想插值器(参见3.2节)。从图7中可以看出,在采样点个数相同时密切阶数越高,核函数变化越剧烈。这说明随着密切阶数的增加,各采样点的权重系数变化越快,这在一定程度上能够提高算法对图像边缘信息的保护能力。注意密切阶数越高,核函数似乎越偏离理想插值器。这是因为理论上密切多项式插值所需的导数值是精确的,但这里采取的是一种近似做法。

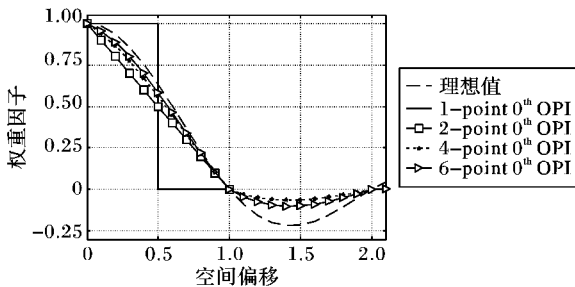


图6 零阶密切多项式插值核函数

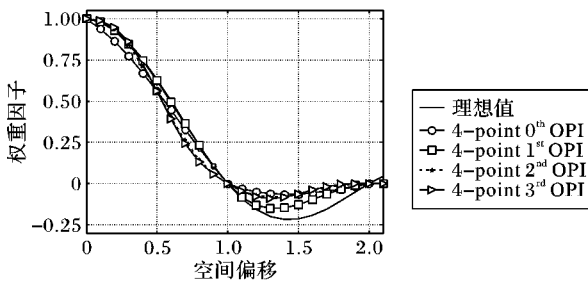


图7 四点密切多项式插值核函数

### 3.2 频率域分析

分析插值算法需要考虑的另一个重要特征是核函数的频谱性能,这需要对插值核函数进行傅里叶变换。根据傅里叶变换的定义:

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx \quad (31)$$

可以求出各种密切多项式插值核函数的傅里叶变换。从式(2)可以看出,如果系数 $c_j$ 就是采样函数的值,那么可以把插值函数看成是采样函数与核函数的卷积,即:

$$g(x) = \sum_j f(x_j) h\left(\frac{x-x_j}{\Delta}\right) = f(x) * h\left(\frac{x}{\Delta}\right) \quad (32)$$

其中: $*$ 表示卷积,也可以用 $\mathfrak{S}\{\cdot\}$ 表示, $\Delta$ 为采样间隔。根据卷积定理<sup>[3]</sup>可得:

$$G(\mu) = \mathfrak{S}\{f(x) * h(x)\} = F(\mu) \cdot H(\mu) \quad (33)$$

其中: $G(\mu)$ 、 $F(\mu)$ 和 $H(\mu)$ 分别表示 $g(x)$ 、 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的傅里叶变换, $\mu$ 为频率域变量。对于一幅给定的图像,采样函数 $f(x)$ 是不变的,对应的傅里叶变换也是固定的,所以只需要分析核函数的频谱特征,这也是通常将插值函数写成式(2)的原因。如果某个插值核函数的傅里叶变换能够使得 $G(\mu) = F(\mu)$ ,那么这样的插值算法具有最理想的滤波特性,满足这一条件的核函数,其傅里叶变换一定是 $H(\mu) = 1$ ,这就是理想插值器:

$$\text{Ideal } h_{\infty}(x) = \text{sinc}(x) = [\sin(\pi x)]/(\pi x) \quad (34)$$

其中 $x \in (-\infty, +\infty)$ 。根据理想插值器的频谱图像可以将频率范围分为通频带(Passband)、截断点(Cutoff Point)和阻频带(Stopband)三个部分<sup>[5]</sup>。通频带 $(-\pi, \pi)$ 对应图像数据的低频部分; $\pm\pi$ 位置的两点称为截断点,主要考虑截断点位置频谱幅度和斜率的大小。截断点位置的频谱幅度越大、斜率越小越容易引起混叠效应(Aliasing Effects);反之,则容易造成图像模糊。阻频带即 $(-\infty, -\pi) \cup (\pi, \infty)$ ,对应了图像数据的高频信息。

图8与图9分别给出了部分零阶密切多项式插值和四点密切多项式插值算法核函数的频谱图像。考虑到频谱图像的对称性,这里只显示 $[0, 4\pi]$ 范围内的频谱图像。

如图8所示,在零阶密切多项式插值的情况下,随着采样点的增加,密切多项式在通频带和阻频带的形态特征都越来越接近理想插值器。不考虑理想插值器的情况下,最邻近插值算法在截断点的频谱幅度最大,斜率也最小,所以最邻近插值算法会导致严重的混叠效应。

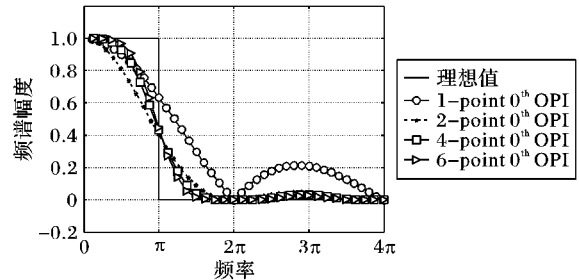


图8 零阶密切多项式插值核函数频率域对比

图9给出了四个采样点和SDAR情况下,不同密切阶数插值算法插值核函数的频谱曲线。可以看出,通频带区域内四点插值算法都随着密切阶数的增加而具有更好的带通性能;在不过于放大高频成分的条件(避免混叠效应),阻频带内的高频分量会逐渐增大(增加清晰度);密切阶数的增加使得截断点的频谱幅度斜率都逐渐增大。这些特征使得密切多项式插值算法既能够随着密切阶数的增加而具有更好的带通性能,又能够适当放大高频分量而不造成混叠效应。正如空间域中的结论一样,密切阶数越高近似精度越低。

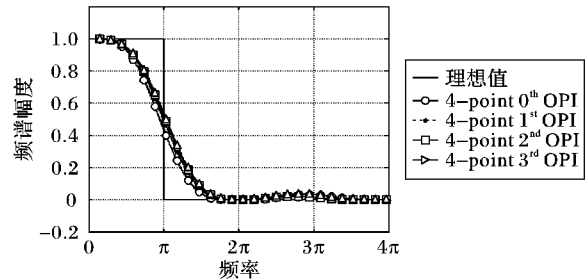


图9 四点密切多项式插值核函数频率域对比

图10给出了四点立方卷积插值(Convolution)、双立方插值(Cubic)和Watte Tri-Linear算法(Watte)的频谱图像。双立方插值和Watte Tri-Linear插值的图形在通频带上出现了较小的“凸起”,说明采用这两种算法进行图像插值会造成图像数据这部分的频率分量被放大。在阻频带,立方卷积算法开始时比双立方插值算法和Watte Tri-Linear算法具有更大的频谱幅度,但它迅速减小为0,随后几乎不再变动,而后两者的频谱曲线

却在较大的频率范围内反复波动。这些频率域特征说明采用 NSDAR 的双立方插值算法比采用 SDAR 的立方卷积插值算法更可能产生较好的视觉效果,但却因近似精度降低而更容易引起锯齿和混叠效应。Watte Tri-Linear 算法虽然也采用 SDAR 构建密切多项式,但近似精度较低,导致它的频谱曲线与双立方插值算法比较相似。

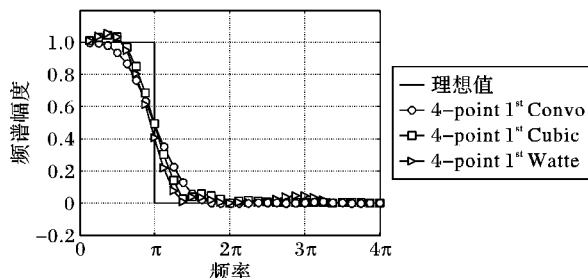


图10 DAR 不同插值核函数的频率域对比

从频率域和空间域分析的结果可以得到如下结论:1)密切阶数相同的情况下,密切多项式插值算法的近似精度会随着采样点个数的增加而增加;2)采样点个数相同的情况下,密切阶数越高的值算法对图像边缘细节和纹理特征的保护能力越强,越可能会降低近似精度;3)导数近似规则近似精度越高,算法具有越好的近似精度和频谱特性。

## 4 实验结果

评价插值算法处理效果需要考虑的一个重要指标就是近似精度。在图像插值算法近似精度的评价体系中,目前较为常用有峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)和结构相似度指数(Structural Similarity Index Measurement, SSIM)<sup>[24]</sup>。图像处理需要考虑的另一个因素是图像的视觉效果,这通常

与图像边缘细节和纹理特征有关。能够较好地评价图像视觉效果效果的测量指标是平均梯度(Average Gradient, AG)<sup>[25]</sup>。另外,图像信息冗余度也是一个值得考虑的因素,它反映了插值算法对图像信息的保留程度,通常用信息熵<sup>[26]</sup>来测量。值得注意的是峰值信噪比和结构相似度指数只表征了近似精度,它们与图像的视觉效果没有必然联系<sup>[3]</sup>。

表1~3给出了四幅灰度图像经过各种密切多项式插值算法处理后的几种测试指标具体值,实验中所有图像的原始大小都是512×512,如图11所示。表1是几种采样点数目不同的零阶密切多项式插值算法插值精度的对比结果(×2,表示放大两倍,其他表示含义依此类推;NN表示最邻近插值算法,Linear表示双线性插值算法,Lagra表示拉格朗日插值算法);表2是密切阶数不同的四点密切多项式插值算法处理效果清晰度和信息保留度的对比结果(×4);表3是采用SDAR构建的四点一阶密切多项式插值算法(四点立方卷积和Watte)和采用NSDAR构建的四点一阶密切多项式插值算法(双立方插值)插值精度对比结果(×4)。值得注意的是表1中的四点拉格朗日插值算法与表2中的四点零阶密切多项式插值是同一种算法,表2中的四点一阶密切多项式插值与表3中的四点立方卷积插值实际上是同一种算法。

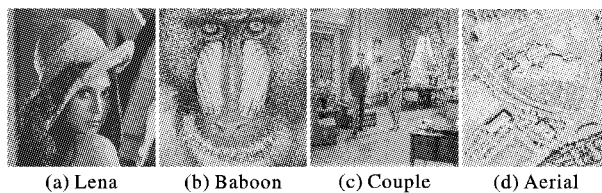


图11 四幅测试图像

表1 密切多项式插值算法在不同采样点数目时的近似精度对比

算法	Lena × 2		Baboon × 2		Couple × 2		Aerial × 2	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
1-point NN	28.0253	0.8813	19.9921	0.7671	25.3273	0.8862	22.6219	0.8827
2-point Linear	31.9889	0.9412	22.0141	0.8504	29.0842	0.9415	26.8409	0.9485
4-point Lagra	32.1533	0.9423	22.0588	0.8509	29.1649	0.9424	27.2018	0.9546
6-point Lagra	32.1538	0.9425	22.2519	0.8542	29.1845	0.9431	27.2061	0.9548

表2 不同密切阶数四点密切多项式插值的清晰度和信息保留度对比

算法	Lena × 4		Baboon × 4		Couple × 4		Aerial × 4	
	AG	Entropy	AG	Entropy	AG	Entropy	AG	Entropy
4-point 0 <sup>th</sup> OPI	3.2874	7.2345	6.9175	7.2761	4.5733	7.3924	6.7496	6.9243
4-point 1 <sup>st</sup> OPI	3.3783	7.2387	7.1402	7.2879	4.6750	7.3978	6.9483	6.9371
4-point 2 <sup>nd</sup> OPI	3.4508	7.242	7.3165	7.2960	4.7612	7.4012	7.1076	6.9458
4-point 3 <sup>rd</sup> OPI	3.5047	7.2443	7.4466	7.3014	4.8255	7.4036	7.2254	6.9519



表3 采用不同 DAR 构建的四点一阶密切多项式插值算法近似精度对比

算法	Lena × 4		Baboon × 4		Couple × 4		Aerial × 4	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
Cubic	26.8936	0.8135	18.6573	0.5745	23.5122	0.7568	21.1408	0.7372
Watte	26.9681	0.8165	18.7397	0.5752	23.5357	0.7559	21.1851	0.7357
Convo	27.3151	0.8296	19.0949	0.5958	23.9264	0.7719	21.5272	0.7506

从表1可以看出,随着采样点个数的增加,密切多项式插值算法的近似精度呈增大趋势,但增大的幅度在逐渐减小。这是因为采样点个数越多,插值算法能够利用的先验信息越多,近似精度也就越高;增幅逐渐变小是因为采样点数目增加导致冗余信息也在逐渐增加。表2展示的结果表明,随着

密切阶数的增加,密切多项式插值算法对图像边缘和纹理细节的处理效果越来越好,保护图像原有信息的能力也越来越强,但这通常伴随着近似精度的下降。结合前面有关导数近似精度的分析,表3则直接说明了导数近似规则的近似精度与算法插值精度之间的联系。所有的这些实验结果与前面的

分析都是一致的。

图12给出了另一幅图像在采用四点密切多项式算法进行插值时的示意图。图像是为了区别插值效果,采用三角函数 $\sin(x^2 + y^2)$ 生成的 $10 \times 10$ 的图像。图12展示了用表2中的四种算法分别对其放大2倍、4倍、8倍和16倍的效果。可以看到放大倍数较小时,四种算法的插值效果十分接近,视觉上几乎看不出差别。当放大倍数增大时,密切阶数低的密切多项式插值算法处理结果的边缘已经十分模糊,图中的黑色矩形和白色线条的形状产生了严重形变;随着密切阶数的增加,边缘模糊现象逐渐减弱,四点三阶密切多项式插值算法的效果图中还能够看出黑色小矩形的形状。

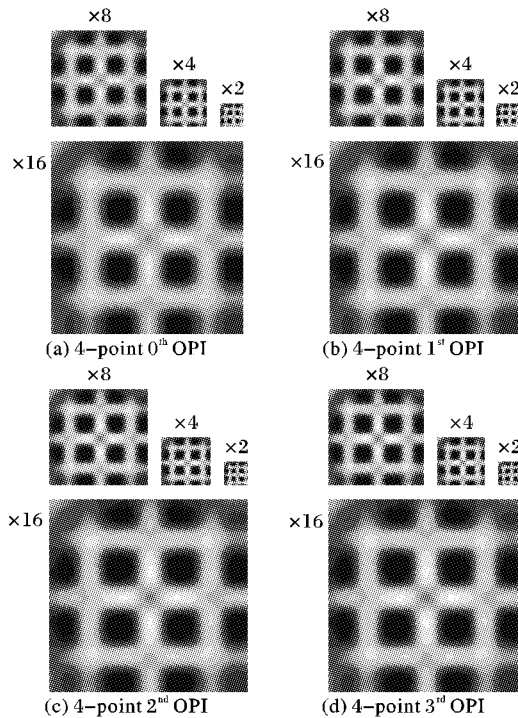


图12 不同密切阶数密切多项式插值算法的处理效果

## 5 结语

本文在总结大量传统多项式插值算法的开发过程,分析现有主流插值技术的共同点和内在规律性的基础上,利用密切多项式近似理论提出了多项式插值算法的密切多项式插值框架。这一理论框架包含了几乎所有的主流多项式插值技术,为分析现有插值技术提供了新的思路,为进一步研究现有插值算法的优化方案提供必要的理论支持。另外,在这一理论框架下,可以根据采样点数目、密切阶数和导数近似规则来开发新的插值技术。

密切多项式的定义在理论上要求采样点位置的导数是已知的,但在实际应用中通常没有它们导数的任何信息。密切多项式插值算法的做法是用不同的导数近似规则来近似这些导数,这必然会存在一定的误差。由于基于密切多项式近似理论的插值算法框架只采用了密切多项式的思想,并没有用到采样函数的真实导数值,所以称这些插值算法为密切多项式插值算法在理论上并不准确。另外,值得深入研究的是密切阶数与导数近似规则之间的关系。比如拉格朗日多项式插值也可以理解为一阶密切多项式插值,利用泰勒展开式可得一阶导数的四点近似规则式(35)(包括边界条件),其中 $\varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ 、 $\varepsilon_3$ 都在四个采样点范围内。如果用中间两个等式作为密切点的一阶导数近似规则构建一阶密切多项式,最终会得

到拉格朗日多项式插值算法的核函数。注意到这里的一阶导数近似规则比四点立方卷积插值算法的近似规则更为精确,所以拉格朗日多项式插值的精度应该比立方卷积插值略高。这一分析结果与大多数实验结果是相符的,因此将拉格朗日多项式插值算法看成这种意义下的一阶密切多项式插值算法更能解释它与立方卷积插值算法之间的性能差异。

$$\left\{ \begin{aligned} g'(x_{j-1}) &= \frac{1}{6\Delta} [-11f(x_{j-1}) + 18f(x_j) - 9f(x_{j+1}) + \\ &\quad 2f(x_{j+2})] - \frac{\Delta^3}{4} f^{(4)}(\varepsilon_0) \\ g'(x_j) &= \frac{1}{6\Delta} [-2f(x_{j-1}) - 3f(x_j) + 6f(x_{j+1}) - \\ &\quad f(x_{j+2})] + \frac{\Delta^3}{12} f^{(4)}(\varepsilon_1) \\ g'(x_{j+1}) &= \frac{1}{6\Delta} [f(x_{j-1}) - 6f(x_j) + 3f(x_{j+1}) + \\ &\quad 2f(x_{j+2})] - \frac{\Delta^3}{12} f^{(4)}(\varepsilon_2) \\ g'(x_{j+2}) &= \frac{1}{6\Delta} [-2f(x_{j-1}) + 9f(x_j) - 18f(x_{j+1}) + \\ &\quad 11f(x_{j+2})] + \frac{\Delta^3}{4} f^{(4)}(\varepsilon_3) \end{aligned} \right. \quad (35)$$

当前已经出现了很多成熟的插值算法,并被广泛应用于现实生活中的各个领域,但在理论上寻求现有主流插值处理技术的共同特点和本质规律,并为其提供统一的优化方案或处理策略仍然具有较大的现实意义,关于这一课题后期的相关工作也更侧重于对这两个方面的研究。

## 参考文献:

- [1] MEIJERING E. A chronology of interpolation: from ancient astronomy to modern signal and image processing [J]. Proceedings of the IEEE, 2002, 90(3): 319–342.
- [2] BURDEN R L, FAIRES J D. Numerical analysis [M]. 7th ed. Beijing: Higher Education Press, 2001: 104–165.
- [3] GONZALEZ R C, WOODS R E. Digital image processing [M]. RUAN Q, RUAN Y, translated. 3rd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011: 36–38. (GONZALEZ R C, WOODS R E. 数字图像处理 [M]. 阮秋琦, 阮宇智, 译. 3版. 北京: 电子工业出版社, 2011: 36–38.)
- [4] NIEMITALO O. Polynomial interpolators for high-quality resampling of oversampled audio [EB/OL]. [2013-12-24]. <http://yehar.com/blog/wp-content/uploads/2009/08/deip.pdf>.
- [5] LEHMANN T M, GONNER C, SPITZER K. Survey: interpolation methods in medical image processing [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1999, 18(11): 1049–1075.
- [6] PHILIPPE T, THIERRY B, UNSER M. Image interpolation and resampling [EB/OL]. [2014-02-27]. <http://bigwww.epfl.ch/publications/thevenaz9901.pdf>.
- [7] HER I, YUAN C T. Resampling on a pseudohexagonal grid [J]. CVGIP Graphical Models and Image Processing, 1994, 56(4): 336–347.
- [8] FREEDMAN G, FATTAL R. Image and video upscaling from local self-examples [J]. ACM Transactions on Graphics, 2011, 30(2): Article No. 12.
- [9] KIM K I, KWON Y. Single-image super-resolution using sparse regression and natural image prior [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32(6): 1127–1133.

(下转第2284页)



值,因而针对它的图像处理、艺术滤镜、交互式编辑等技术还非常不足,对其进一步研究有利于探索出更多的新应用。

#### 参考文献:

- [1] GOOCH A A, LONG J, JI L, *et al.* Viewing progress in non-photorealistic rendering through Heinelein's lens [C]// NPAR '10: Proceedings of the 8th International Symposium on Non-photorealistic Animation and Rendering. New York: ACM, 2010: 165–171.
- [2] CONTE S J. Fractals and art [D]. Worcester: Worcester Polytechnic Institute, 2003: 12–20.
- [3] JEREMIAS P, QUILEZ I. Shadertoy: learn to create everything in a fragment shader [C]// SA'14: SIGGRAPH Asia 2014 Courses. New York: ACM, 2014: Article No. 18.
- [4] HAASE C S, MEYER G W. Modeling pigmented materials for realistic image synthesis [J]. ACM Transactions on Graphics, 1992, 11(4): 305–335.
- [5] BAXTER W, WENDT J, LIN M C. Impasto: a realistic, interactive model for paint [C]// NPAR '04: Proceedings of the 3rd International Symposium on Non-photorealistic Animation and Rendering. New York: ACM, 2004: 45–148.
- [6] ORZAN A, BOUSSEAU A, BARLA P, *et al.* Diffusion curves: a vector representation for smooth-shaded images [J]. Communications of the ACM, 2013, 56(7): 101–108.
- [7] HU S, ZHANG F, WANG M, *et al.* PatchNet: a patch-based image representation for interactive library-driven image editing [J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(6): Article No. 196.
- [8] BOSCH R, OLIVIERI J. Game-of-life mosaics [C]// Proceedings of Bridges 2014: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture. [S. l.]: Tessellations Publishing, 2014: 325–328.
- [9] ARATHI T, PRAMESWARAN L. A method for image representation using Slantlet transform and phase congruency [C]// ICONI-AAC '14: Proceedings of the 2014 International Conference on Interdisciplinary Advances in Applied Computing. New York: ACM, 2014: Article No. 36.
- [10] LI X, SONG Y, LU Y, *et al.* Spatial pooling for transformation invariant image representation [C]// MM '11: Proceedings of the 19th ACM International Conference on Multimedia. New York: ACM, 2011: 1509–1512.
- [11] ZHANG C, WANG S, LIANG C, *et al.* Beyond bag of words: image representation in sub-semantic space [C]// MM '13: Proceedings of the 21st ACM International Conference on Multimedia. New York: ACM, 2013: 497–500.
- [12] SU Z, ZHAO C, ZHANG H. Locality sensitive sparse concept coding and its application to image representation [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2014, 26(1): 81–87. (舒振球, 赵春霞, 张浩峰. 局部敏感的稀疏概念编码及其在图像表示中的应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2014, 26(1): 81–87.)
- [13] LI B, XIONG W, HU W, *et al.* Context-aware affective images classification based on bilayer sparse representation [C]// MM '12: Proceedings of the 20th ACM International Conference on Multimedia. New York: ACM, 2012: 721–724.
- [14] XU T, GONDRA I. Texture map: an effective representation for image segmentation [C]// C3S2E '09: Proceedings of the 2nd Canadian Conference on Computer Science and Software Engineering. New York: ACM, 2009: 197–203.
- [15] LIANG Y, YU J, LIU H. Study of BoF model based image representation [J]. Computer Science, 2014, 41(2): 36–44. (梁晔, 于剑, 刘宏哲. 基于 BoF 模型的图像表示方法研究[J]. 计算机科学, 2014, 41(2): 36–44.)
- [16] PORTER T, DUFF T. Compositing digital images [J]. ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 1984, 18(3): 253–259.
- [17] GEORGIS G, LENTARIS G, REISIS D. Single-image super-resolution using low complexity adaptive iterative back-projection [C]// DSP 2013: Proceedings of the 18th International Conference on Digital Signal Processing. Piscataway: IEEE, 2013: 1–6.
- [18] YU J, GAO X, TAO D, *et al.* A unified learning framework for single image super-resolution [J]. IEEE Transactions on Networks and Learning Systems, 2014, 25(4): 780–792.
- [19] LI X, ORCHARD M T. New edge-directed interpolation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(10): 1521–1527.
- [20] ARÁNDIGA F, YÁÑEZ D F. Cell-average multiresolution based on local polynomial regression: application to image processing [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 245: 1–16.
- [21] BOYD J P. Convergence and error theorems for Hermite function pseudo-RBFs: interpolation on a finite interval by Gaussian-localized polynomials [J]. Applied Numerical Mathematics, 2015, 87: 125–144.
- [22] UNSER M, ALDROUBI A, EDEN M. Fast B-spline transforms for continuous image representation and interpolation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(3): 277–285.
- [23] KEYS R. Cubic Convolution interpolation for digital image processing [J]. IEEE Transactions on Speech and Signal Processing, 1981, 29(6): 1153–1160.
- [24] McKINLEY S, LEVINE M. Cubic spline interpolation [J]. Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities, English Series, 1999, 64(1): 44–56.
- [25] HOU H S, ANDREWS H. Cubic splines for image interpolation and digital filtering [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1978, 26(6): 508–517.
- [26] de BOOR C, HOLLIG K, SABIN M. High accuracy geometric Hermite interpolation [J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(4): 269–278.
- [27] BERRUT J-P, TREFETHEN L N. Barycentric Lagrange interpolation [J]. SIAM Review, 2004, 46(3): 501–517.
- [28] SHARIFI M, SOLEYMANI F, KHAN M, *et al.* On two-point Hermite interpolation: an application of Newton's theorem [J]. World Applied Sciences Journal, 2011, 13(12): 2451–2454.
- [29] REICHENBACH S E, GENG F. Two-dimensional cubic convolution [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(8): 857–865.
- [30] SHI J, REICHENBACH S E. Image interpolation by two-dimensional parametric cubic convolution [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(7): 1857–1870.
- [31] WANG Z, BOVIK A C, SHEIKH H R, *et al.* Image quality assessment: from error visibility to structural similarity [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 600–612.
- [32] CHEN M-J, BOVIK A C. No-reference image blur assessment using multiscale gradient [J]. EURASIP Journal on Image and Video Processing, 2011, 2011: 3.
- [33] SILVA E A, PANETTA K, AGAIAN S S. Quantifying image similarity using measure of enhancement by entropy [EB/OL]. [2014-06-21]. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/downloaddoi=10.1.1.160.6126&rep=rep1&type=pdf>.

(上接第 2273 页)