线性代数

特征值与特征向量 矩阵的对角化

张晓平

数学与统计学院
Email: xpzhang.math@whu.edu.cn
Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

1. 实对称矩阵的对角化
   - 实对称矩阵的特征值和特征向量

定义

元素为复数的矩阵和向量，称为复矩阵和复向量。

定义

设a_{ij}为复数，$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\bar{\mathbf{A}}=(\bar{a}_{ij})_{m\times n}$，$\bar{a}_{ij}$是$a_{ij}$的共轭复数，则称$\bar{\mathbf{A}}$是$\mathbf{A}$的共轭矩阵。

- $\overline{\overline{\mathbf{A}}}=\mathbf{A}$
- $\overline{\mathbf{A}}^T=\overline{\mathbf{A}^T}$
- 当$\mathbf{A}$为实对称矩阵时，$\overline{\mathbf{A}}^T=\overline{\mathbf{A}^T}$

- $\overline{k\mathbf{A}} = \overline{k}\,\overline{\mathbf{A}}$
- $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$
- $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}}$
- $\overline{(\mathbf{A}\mathbf{B})}^T = \overline{\mathbf{B}}^T\overline{\mathbf{A}}^T$
- $\overline{\mathbf{A}^{-1}} = (\overline{\mathbf{A}})^{-1}$
- $\det\bar{\mathbf{A}} = \overline{\det\mathbf{A}}$

1. 实对称矩阵的对角化
   - 实对称矩阵的特征值和特征向量

定理

实对称矩阵$\mathbf{A}$的任一特征值都是实数。

定理

实对称矩阵$\mathbf{A}$的任一特征值都是实数。

证明:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \implies \overline{(\mathbf{Ax})}^T = \overline{\lambda\mathbf{x}}^T \implies \overline{\mathbf{x}}^T\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{x} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} \implies \overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} \implies \lambda\overline{\mathbf{x}}^T$$

定理

实对称矩阵$\mathbf{A}$对应于不同特征值的特征向量是正交的。