向量空间与线性变换

▷▷

张晓平

武汉大学数学与统计学院

◁◁

2017 年 11 月 27 日

目录

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵

- $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
- 标准正交基
- 施密特（Schmidt）正交化方法
- 正交矩阵及其性质

定义 1 设有序向量组 $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\subset\mathbb{R}^n$，如果 B 线性无关，则 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

称 B 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标，记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\quad\text{或}\quad\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

并称之为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标向量。

注 1

- $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的；
- 基本向量组
$$\boldsymbol{\epsilon}_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0), \quad i = 1,2,\cdots,n$$
称为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基或标准基；
- 本课程对于向量及其坐标，采用列向量的形式，即
$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

例 2.1 设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基为自然基 B_1 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$，其中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= (\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= (\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 0)^T,\\
&\ \vdots\\
\boldsymbol{\beta}_{n-1} &= (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ -1)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_n &= (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 1)^T.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

求向量组 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 分别在两组基下的坐标。

定理 1 设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\eta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\eta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关的充要条件是

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵。

定理 2 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

例 2.2　已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基为 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

例 2.3 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^T.$$

(1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 α 在基 B_1 的坐标为 $(1,-2,-1)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵

- $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
- 标准正交基
- 施密特（Schmidt）正交化方法
- 正交矩阵及其性质

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵

- $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
- 标准正交基
- 施密特（Schmidt）正交化方法
- 正交矩阵及其性质

定义 2 在 $\mathbb{R}^n$ 中，对于 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为列向量时，

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}.$$

性质 1 (内积的运算性质) 对于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$ 和 $k\in\mathbb{R}$,

(i) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

性质 1 (内积的运算性质)　对于 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{R}$,

(i) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

定义 3 (向量长度)　向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$$

定理 3 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|$$

定理 3 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

证明 $\forall t \in \mathbb{R}$，有

$$(\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}) \geq 0$$

即

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})t^2+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})t+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) \geq 0$$

此为关于 t 的二次函数，由一元二次方程理论可知

$$\Delta = b^2-4ac = 4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2-4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) \leq 0$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \leq (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$$

亦即

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

定义 4 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$<\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}> = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定义 4 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理 4

$$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}\quad\Longleftrightarrow\quad(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$$

定义 4 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$<\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}> = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理 4

$$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \iff (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

注意：零向量与任何向量的内积为零，从而零向量与任何向量正交。

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

证明

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
&\leq (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})|+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
&\leq \|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2
\end{aligned}$$

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

证明

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) \\
&\leq (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) \\
&\leq \|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2
\end{aligned}$$

注意: 当 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$ 时，$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| = \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$。

定义 5 (欧几里得空间) 定义了内积运算的 n 维实向量空间，称为 n 维欧几里得空间（简称欧氏空间），仍记为 $\mathbb{R}^n$。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

定理 6 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的。

定理 6 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的。

证明. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0,$$

则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$

即

$$k_j(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

由于 $(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) > 0$，故

$$k_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关。 □

定义 6 (标准正交基) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$，若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基。

例 3.1　设 $B = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基，求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标。

例 3.1　设 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基，求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标。

解

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n \\
\Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_j)=x_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j) \\
\Longrightarrow\quad & x_j=\frac{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j).
\end{aligned}
$$

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

目标

从一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 出发，构造一组标准正交向量组。

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$,

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, \qquad (i = 1, 2)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, & (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, & (i = 1, 2) \end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i = 1,2) \\
\Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i = 1,2) \\
\Longrightarrow \quad & k_{3i} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} && (i = 1,2)
\end{aligned}
$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i = 1,2) \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i = 1,2) \\ \Longrightarrow\quad & k_{3i} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} && (i = 1,2) \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)}$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1}, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}\boldsymbol{\beta}_{j-1}.$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(5) 单位化

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m \xrightarrow{\eta_j = \frac{\boldsymbol{\beta}_j}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}} \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$$

例 3.2 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

例 3.2 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,$$

例 3.2 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\end{aligned}$$

例 3.2 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&=(1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),
\end{aligned}$$

例 3.2 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&=(1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2
\end{aligned}$$

例 3.2 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&=(1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\
&=(1,-1,1)^T-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T-\frac{2}{2}(1,-1,0)^T=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

解 (续)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
    - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
    - 标准正交基
    - 施密特（Schmidt）正交化方法
    - 正交矩阵及其性质

定义 7 (正交矩阵)　设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，如果

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

定理 7

$$A\text{为正交矩阵} \iff A\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

定理 7

$$A\text{为正交矩阵} \iff A\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

证明. 将 A 按列分块为 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$A^T A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

定理 7

$$A\text{为正交矩阵} \iff A\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

证明. 将 A 按列分块为 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$A^T A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

因此

$$A^T A = I \iff \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_i = 1, & i = 1, 2, \cdots, n \\ \boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j = 0, & j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\iff A\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

□

定理 8 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶正交矩阵，则

(1) $|\boldsymbol{A}| = 1$ 或 -1

(2) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$

(3) $\boldsymbol{A}^T$ 也是正交矩阵

(4) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵

定理 9 若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$，则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变，即

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \quad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|,$$

$$< \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} > = < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > .$$