

# 线性方程组的解



张晓平

武汉大学数学与统计学院



2017 年 11 月 3 日

# 目录

1.  $n$  维向量及其线性相关性
2. 向量组的秩及其极大线性无关组
3. 矩阵的秩 相抵标准形
4. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
5. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

本章主要讨论线性方程组的解的基本理论，包括

- ▶ 非齐次线性方程组有解的充分必要条件以及解的结构；
- ▶ 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件以及解的结构。

1.  $n$  维向量及其线性相关性
2. 向量组的秩及其极大线性无关组
3. 矩阵的秩 相抵标准形
4. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
5. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

### 考察三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

我们用向量工具给出其几何解释。记

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} = a_{i1}\mathbf{i} + a_{i2}\mathbf{j} + a_{i3}\mathbf{k}, \quad i = 1, 2, 3,$$

且

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$$

定义 1 (向量的内积) 两个向量  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  的内积定义为

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

定义 2 (向量的垂直) 两个向量  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  垂直的充分必要条件是

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

由以上方程组可看出，解向量  $x$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  都垂直。故

- (1) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  不共面，只有零向量与三者都垂直，即线性方程组 (1) 只有零解；
- (2) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  共面但不共线，则与该平面垂直的向量都是线性方程组 (1) 的解，故 (1) 有无穷多个彼此平行的解向量；
- (3) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  共线，则过原点且与该直线垂直的平面上的全体向量都是 (1) 的解向量，此时任一解向量均可表示为

$$x = k_1 x^{(1)} + k_2 x^{(2)},$$

其中  $x^{(1)}, x^{(2)}$  为 (1) 的某两个不共线的非零解向量， $k_1, k_2$  为任意常数。

**定义 3 ( $n$  维向量)** 数域  $F$  上的  $n$  个数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  构成的有序数组称为数域  $F$  上的一个  $n$  维向量, 记为

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (2)$$

其中  $a_i$  称为  $\alpha$  的第  $i$  个分量。



- ▶ 形如 (2) 的向量称为行向量;
- ▶ 形如

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

的向量称为列向量。

数域  $F$  上全体  $n$  维向量组成的集合, 记作  $F^n$ 。设  $\alpha \in F^n$ , 则

- ▶ 当  $F$  取为  $\mathbb{R}$  时,  $\alpha$  为实向量;
- ▶ 当  $F$  取为  $\mathbb{C}$  时,  $\alpha$  为复向量。

**定义 4** 向量运算 设  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in F^n$ ,  $k \in F$ , 定义

(i)  $\alpha = \beta$  当且仅当  $a_i = b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ;

(ii) 向量加法

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

(iii) 向量数乘

$$k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

► 在 (iii) 中取  $k = -1$ , 得

$$(-1)\alpha = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$

右端的向量称为  $\alpha$  的负向量, 记为  $-\alpha$ .

► 向量的减法定义为

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$$

定义 5 (向量的 8 条运算规则) 设  $\alpha, \beta, \gamma \in F^n, 1, k, l \in F$ , 则

(1)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3) 对任一向量  $\alpha$ , 有  $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$

(4) 对任一向量  $\alpha$ , 存在负向量  $-\alpha$ , 使得  $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$

(5)  $1\alpha = \alpha$

(6)  $k(l\alpha) = (kl)\alpha$

(7)  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

(8)  $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

**定义 6 (向量空间)** 数域  $F$  上的  $n$  维向量, 在其中定义了上述加法与数乘运算, 就称之为  $F$  上的  $n$  维向量空间, 仍记为  $F^n$ 。当  $F = \mathbb{R}$  时, 叫做  $n$  维实向量空间, 记作  $\mathbb{R}^n$ 。

定义 7 (线性表示) 设  $\alpha_i \in F^n, k_i \in F (i = 1, 2, \dots, m)$ , 则向量

$$\sum_{i=1}^m k_i \alpha_i = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m$$

称为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  在数域  $F$  上的一个线性组合。如果记

$$\beta = \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i,$$

则称  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示 (或线性表出)。

设有线性方程组  $Ax = b$ , 其中  $A$  为  $m \times n$  矩阵。记

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

即

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

于是线性方程组可等价的表述为

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = b$$

**注 1** 向量  $b$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 等价于方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = b$$

有解。

**定义 8 (线性相关与线性无关)** 若对  $m$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in F^n$ , 有  $m$  个不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m \in F$ , 使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \mathbf{0} \quad (3)$$

成立, 则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  **线性相关**; 否则, 称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  **线性无关**。



注 2 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 指的是

- ▶ 没有不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  使 (3) 成立;
- ▶ 只有当  $k_1, k_2, \dots, k_m$  全为零时, 才使 (3) 成立;
- ▶ 若 (3) 成立, 则  $k_1, k_2, \dots, k_m$  必须全为零。

定理 1 以下两组等价关系成立:

- ▶ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 等价于齐次方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = \mathbf{0}$$

有非零解。

- ▶ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 等价于齐次方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = \mathbf{0}$$

只有零解。

对于只含有一个向量  $\alpha$  的向量组, 若存在不为零的数  $k$  使得

$$k\alpha = \mathbf{0},$$

则

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

若  $\alpha \neq \mathbf{0}$ , 要使

$$k\alpha = \mathbf{0},$$

必须  $k = 0$ .

- ▶ 当  $\alpha = 0$  时, 向量组  $\alpha$  线性相关
- ▶ 当  $\alpha \neq 0$  时, 向量组  $\alpha$  线性无关

**定理 2** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性相关的充分必要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中至少有一个向量可由其余  $m-1$  个向量线性表出。

**定理 2** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性相关的充分必要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中**至少有一个向量**可由其余  $m-1$  个向量线性表出。

**证明.** ( $\Rightarrow$ ) 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性相关, 则必存在不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \mathbf{0},$$

**定理 2** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性相关的充分必要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中**至少有一个向量**可由其余  $m-1$  个向量线性表出。

**证明.** ( $\Rightarrow$ ) 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性相关, 则必存在不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \mathbf{0},$$

不妨设  $k_1 \neq 0$ , 则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1} \alpha_2 - \dots - \frac{k_m}{k_1} \alpha_m$$

必要性得证。

**定理 2** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性相关的充分必要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中**至少有一个向量**可由其余  $m-1$  个向量线性表出。

**证明.** ( $\Rightarrow$ ) 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性相关, 则必存在不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \mathbf{0},$$

不妨设  $k_1 \neq 0$ , 则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1} \alpha_2 - \dots - \frac{k_m}{k_1} \alpha_m$$

必要性得证。

( $\Leftarrow$ ) 不妨设  $\alpha_1$  可由  $\alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示, 即

$$\alpha_1 = l_2 \alpha_2 + \dots + l_m \alpha_m$$



**定理 2** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性相关的充分必要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中**至少有一个向量**可由其余  $m-1$  个向量线性表出。

**证明.** ( $\Rightarrow$ ) 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性相关, 则必存在不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \mathbf{0},$$

不妨设  $k_1 \neq 0$ , 则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1} \alpha_2 - \dots - \frac{k_m}{k_1} \alpha_m$$

必要性得证。

( $\Leftarrow$ ) 不妨设  $\alpha_1$  可由  $\alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示, 即

$$\alpha_1 = l_2 \alpha_2 + \dots + l_m \alpha_m$$

于是有

$$\alpha_1 - l_2 \alpha_2 - \dots - l_m \alpha_m = \mathbf{0},$$

显然  $1, -l_2, \dots, -l_m$  不全为零, 故  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关。 □

证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关的基本方法为：说明齐次方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = \mathbf{0}$$

只有零解。也常常表述为：设

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = \mathbf{0}$$

然后说明上式成立，只能有唯一选择：

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0.$$

例 2.1 设  $n$  维向量  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , 则  $e_1, e_2, \dots, e_n$  线性无关。

**例 2.1** 设  $n$  维向量  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , 则  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  线性无关。

**解** 设存在  $k_1, k_2, \dots, k_n$  使得

$$k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + \dots + k_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0},$$

即

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) = \mathbf{0},$$

则必有  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ , 故  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  线性无关。

**注 3**  $n$  维向量  $e_1, e_2, \dots, e_n$  称为**基本向量**。  $F^n$  中任何向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  都可以由  $e_1, e_2, \dots, e_n$  线性表示, 即

$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

例 2.2 包含零向量的向量组是线性相关的。

例 2.2 包含零向量的向量组是线性相关的。

解 设该向量组为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , 其中  $\alpha_1 = \mathbf{0}$ 。则存在  $m$  个不全为零的数  $1, 0, \dots, 0$  使得

$$1\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots + 0\alpha_m = \mathbf{0},$$

故该向量组线性相关。

#### 注 4

- ▶ 单个向量  $\alpha$  线性相关, 当且仅当  $\alpha$  为零向量;
- ▶ 单个向量  $\alpha$  线性无关, 当且仅当  $\alpha$  为非零向量。



**例 2.3** 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中有一部分向量线性相关, 则整个向量组也线性相关。

**例 2.3** 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中有一部分向量线性相关, 则整个向量组也线性相关。

**证明.** 不妨设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (r < m)$  线性相关, 则存在  $r$  个不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_r$  使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = \mathbf{0},$$

从而有  $m$  个不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_r, 0, \dots, 0$ , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r + 0 \alpha_{r+1} + \dots + 0 \alpha_m = \mathbf{0},$$

故  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关。



## 注 5

- ▶ 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则其中任一部分向量组也线性无关。
- ▶ 部分相关, 则整体相关; 整体无关, 则部分无关。

注 6 该定理不能理解为: 线性相关的向量组中, 每一个向量都能由其余向量线性表示。

如  $\alpha_1 = (0, 1)$ ,  $\alpha_2 = (0, -2)$ ,  $\alpha_3 = (1, 1)$  线性相关 (因为  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关), 但  $\alpha_3$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示。

**定理 3** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in F^n$ , 其中

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})^T, \\ \dots, \alpha_r = (a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{nr})^T,$$

则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$Ax = 0 \quad (4)$$

有非零解, 其中

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

证明. 设

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_r \alpha_r = \mathbf{0}, \quad (5)$$

即

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

此即齐次线性方程组 (4)。

- ( $\Rightarrow$ ) 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关, 则必有不全为零的数  $x_1, x_2, \dots, x_r$  使得 (5) 成立, 即齐次线性方程组 (4) 有非零解。
- ( $\Leftarrow$ ) 若方程组 (4) 有非零解, 就是说不全为零的数  $x_1, x_2, \dots, x_r$  使得 (5) 成立, 故向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关。



结论 1 对于齐次线性方程组, 如果

未知量个数  $>$  方程个数,

则它必有无穷多解, 从而必有非零解。

定理 4 任意  $n+1$  个  $n$  维向量都是线性相关的。

**定理 4** 任意  $n+1$  个  $n$  维向量都是线性相关的。

**证明.** 对向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in F^n$ , 设

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n + x_{n+1} \alpha_{n+1} = \mathbf{0},$$

注意到此齐次线性方程组中, 未知量个数为  $n+1$ , 而方程个数为  $n$ , 故方程组一定有无穷多个解, 从而必有非零解。得证  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  线性相关。  $\square$



### 注 7

- ▶ 向量个数  $>$  向量维数  $\Rightarrow$  向量组必线性相关。
- ▶ 在  $\mathbb{R}^n$  中, 任意一组线性无关的向量最多只能含  $n$  个向量。

**定理 5** 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 而  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关, 则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示, 并且表示法惟一。

**证明.** 因为  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关, 故存在不全为零的数  $k, k_1, k_2, \dots, k_r$  使得

$$k\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0,$$

其中  $k \neq 0$  (若  $k = 0$ , 则由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关可知  $k_1, k_2, \dots, k_r$  全为零, 这与  $k, k_1, k_2, \dots, k_r$  不全为零矛盾)。于是  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示为

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \dots - \frac{k_r}{k}\alpha_r.$$

**证明.** 因为  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关, 故存在不全为零的数  $k, k_1, k_2, \dots, k_r$  使得

$$k\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0,$$

其中  $k \neq 0$  (若  $k = 0$ , 则由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关可知  $k_1, k_2, \dots, k_r$  全为零, 这与  $k, k_1, k_2, \dots, k_r$  不全为零矛盾)。于是  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示为

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \dots - \frac{k_r}{k}\alpha_r.$$

**再证唯一性** 设有两种表示法

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_r\alpha_r, \quad \beta = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \dots + h_r\alpha_r.$$

于是

$$(l_1 - h_1)\alpha_1 + (l_2 - h_2)\alpha_2 + \dots + (l_r - h_r)\alpha_r = 0,$$

由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关可知  $l_i - h_i = 0$ , 即  $l_i = h_i$ . 故  $\beta$  由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示的表示法惟一。□

**推论 1** 如果  $F^n$  中的  $n$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关, 则  $F^n$  中的任一向量  $\alpha$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且表示法惟一。

**推论 1** 如果  $F^n$  中的  $n$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关, 则  $F^n$  中的任一向量  $\alpha$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且表示法惟一。

**证明.** 由"任意  $n+1$  个  $n$  维向量线性相关"知,  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关, 由前述定理可得结论成立。□

例 2.4 设  $\alpha_1 = (1, -1, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 2, 0)$ ,  $\alpha_3 = (1, 0, 3)$ ,  $\alpha_4 = (2, -3, 7)$ . 问:

(1)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是否线性相关?

(2)  $\alpha_4$  可否由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示? 如能表示求出其表示式。

例 2.4 设  $\alpha_1 = (1, -1, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 2, 0)$ ,  $\alpha_3 = (1, 0, 3)$ ,  $\alpha_4 = (2, -3, 7)$ . 问:

(1)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是否线性相关?

(2)  $\alpha_4$  可否由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示? 如能表示求出其表示式。

解

(1) 考察  $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . 由  $|A| = 7$  可知  $A$  可逆, 故  $Ax = 0$  只有零解, 从而  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。



例 2.4 设  $\alpha_1 = (1, -1, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 2, 0)$ ,  $\alpha_3 = (1, 0, 3)$ ,  $\alpha_4 = (2, -3, 7)$ . 问:

(1)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是否线性相关?

(2)  $\alpha_4$  可否由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示? 如能表示求出其表示式.

解

(1) 考察  $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . 由  $|A| = 7$  可知  $A$  可逆, 故  $Ax = 0$

只有零解, 从而  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

(2) 根据推论,  $\alpha_4$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表示法惟一. 设

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \alpha_4 \Rightarrow x_1 \alpha_1^T + x_2 \alpha_2^T + x_3 \alpha_3^T = \alpha_4^T$$

即

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^T & \alpha_2^T & \alpha_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解此方程组得惟一解  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ , 故  $\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$ .

**例 2.5** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 又  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$ ,  $\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ ,  $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$ , 证明  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性相关。

**例 2.5** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 又  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$ ,  $\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ ,  $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$ , 证明  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性相关。

**解** 设有数  $x_1, x_2, x_3$  使得

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0 \quad (6)$$

即

$$x_1(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) + x_2(\alpha_1 - 2\alpha_2) + x_3(\alpha_1 + \alpha_3) = 0$$

亦即

$$(x_1 + x_2)\alpha_1 + (x_1 - 2x_2)\alpha_2 + (x_1 + x_3)\alpha_3 = 0$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 故

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

求解该方程组可得非零解  $(-1, -1, 2)$ 。因此, 有不全为零的数  $x_1, x_2, x_3$  使得 (6) 成立, 从而  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性相关。

**例 2.6** 证明:  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  线性无关的充要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。

**证明.** ( $\Rightarrow$ ) 假设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 则有不全为零的数  $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1$  使得

$$(x_1 + x_2)\alpha_1 + (x_2 + x_3)\alpha_2 + (x_3 + x_1)\alpha_3 = \mathbf{0}$$

即

$$x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + x_3(\alpha_3 + \alpha_1) = \mathbf{0}$$

**例 2.6** 证明:  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  线性无关的充要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。

**证明.** ( $\Rightarrow$ ) 假设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 则有不全为零的数  $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1$  使得

$$(x_1 + x_2)\alpha_1 + (x_2 + x_3)\alpha_2 + (x_3 + x_1)\alpha_3 = \mathbf{0}$$

即

$$x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + x_3(\alpha_3 + \alpha_1) = \mathbf{0}$$

( $\Leftarrow$ ) 设有  $x_1, x_2, x_3$  使得

$$x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + x_3(\alpha_3 + \alpha_1) = \mathbf{0} \quad (7)$$

即

$$(x_1 + x_3)\alpha_1 + (x_1 + x_2)\alpha_2 + (x_2 + x_3)\alpha_3 = \mathbf{0}$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 故

$$x_1 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0,$$

该方程组只有零解。这说明若使 (7), 必有  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , 从而  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  线性无关。 □

**定理 6** 如果一组  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 那么把这些向量各任意添加  $m$  个分量所得的向量 ( $n+m$  维) 组  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_s^*$  也线性无关。亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{ 线性无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{ 线性无关}$$

**定理 7** 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 那么它们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量也线性相关, 亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{ 线性相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{ 线性相关}$$

**证明.** 以上两定理互为逆否命题, 故只需证明第一个。设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_s \alpha_s = \mathbf{0}$$

只有零解。设  $\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{ns}x_s = 0. \end{cases} \quad (8)$$

只有零解。

不妨设每个向量增加了一个分量, 即

$$\alpha_i^* = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}, a_{n+1,i})^T, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

设

$$x_1 \alpha_1^* + x_2 \alpha_2^* + \dots + x_s \alpha_s^* = \mathbf{0}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{ns}x_s = 0, \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \dots + a_{n+1,s}x_s = 0. \end{cases} \quad (9)$$



方程组 (9) 的解全是方程组 (8) 的解。而方程组 (8) 只有零解，故方程组 (9) 也只有零解。故向量组  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_s^*$  线性无关。 □

**推论 2** 设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

**推论 2** 设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

**证明.** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关，把这些向量各任意添加  $m$  个全为零的分量，所得到的新向量组记为  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_s^*$ 。此时方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_s \alpha_s = \mathbf{0}$$

与方程组

$$x_1 \alpha_1^* + x_2 \alpha_2^* + \dots + x_s \alpha_s^* = \mathbf{0}$$

完全相同。所以新向量组  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_s^*$  也线性相关。



对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。

如

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ 0 \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}$$

线性相关性一致。

例 2.7 考察以下向量组的线性相关性:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例 2.7 考察以下向量组的线性相关性:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解 去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关, 故原向量组线性无关。

1.  $n$  维向量及其线性相关性
2. 向量组的秩及其极大线性无关组
3. 矩阵的秩 相抵标准形
4. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
5. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

定义 9 (向量组的秩) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中, 若

- ▶ 存在  $r$  个线性无关的向量,
- ▶ 且其中任一向量可由这  $r$  个线性无关的向量线性表示,

则数  $r$  称为向量组的秩 (rank), 记作

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$$

或

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$$



- ▶ 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ ;
- ▶ 只含零向量的向量组的秩为零。
- ▶ 只含一个非零向量的向量组的秩为 1。

**定义 10** 若向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  中每个向量可由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 就称向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示, 则称这两个向量组是等价的。

向量组的线性表示，具备

- ▶ **自反性**

向量组自己可以由自己线性表示

- ▶ **传递性**

设向量组  $A$  可以被向量组  $B$  线性表示，向量组  $B$  又可以被向量组  $C$  线性表示，则向量组  $A$  可以被向量组  $C$  线性表示

- ▶ **不具备对称性**

向量组  $A$  可以被向量组  $B$  线性表示，不一定有向量组  $B$  又可以被向量组  $A$  线性表示。

如：部分组总是可以由整体线性表示，但反之不成立

向量组的等价，具备

- ▶ 自反性

任一向量组和自身等价

- ▶ 对称性

向量组  $A$  与向量组  $B$  等价，当然向量组  $B$  与向量组  $A$  等价

- ▶ 传递性

设向量组  $A$  与向量组  $B$  等价，向量组  $B$  与向量组  $C$  等价，则向量组  $A$  与向量组  $C$  等价

定理 8 若向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 且  $t > s$ , 则  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性相关。

**定理 8** 若向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 且  $t > s$ , 则  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性相关。

**证明.** 设  $\beta_j = \sum_{i=1}^s k_{ij} \alpha_i, \quad j = 1, 2, \dots, t$ . 欲证  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性相关, 只需证: 存在不全为零的数  $x_1, x_2, \dots, x_t$  使得

$$x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \dots + x_t \beta_t = \mathbf{0}, \quad (10)$$

即

$$\sum_{j=1}^t x_j \beta_j = \sum_{j=1}^t x_j \left( \sum_{i=1}^s k_{ij} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^s \left( \sum_{j=1}^t k_{ij} x_j \right) \alpha_i = \mathbf{0}.$$

当其中  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的系数

$$\sum_{j=1}^t k_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (11)$$

时, (10) 显然成立。注意到齐次线性方程组 (11) 含  $t$  个未知量,  $s$  个方程, 而  $t > s$ , 故 (11) 有非零解。即有不全为零的  $x_1, x_2, \dots, x_t$  使得 (10) 成立, 故  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性相关。 □

推论 3 若向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 且  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性无关, 则

$$t \leq s.$$

推论 4 若  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任何  $r+1$  个向量都是线性相关的。



**推论 4** 若  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任何  $r+1$  个向量都是线性相关的。

**证明.** 不妨设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中的  $r$  个线性无关的向量, 由于该向量组中任一个向量可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示, 由定理 3.2.1 可知, 其中任意  $r+1$  个向量都线性相关。□

**定义 11 (向量组的秩的等价定义 & 极大线性无关组)** 设有向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 。如果能从其中选出  $r$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ , 满足

- ▶ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关;
- ▶ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意  $r+1$  个向量都线性相关,

则称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  为原向量组的一个**极大线性无关组**, 简称**极大无关组**。

极大线性无关组所含向量的个数  $r$ , 称为原向量组的**秩**。

## 注 8

- ▶ 秩为  $r$  的向量组中，任一个线性无关的部分组最多含有  $r$  个向量；
- ▶ 一般情况下，极大无关组不惟一；
- ▶ 不同的极大无关组所含向量个数相同；
- ▶ 极大无关组与原向量组是等价的；
- ▶ 极大无关组是原向量组的**全权代表**。

推论 5 设  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = p$ ,  $\text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r$ , 如果向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 则

$$r \leq p.$$

推论 5 设  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = p$ ,  $\text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r$ , 如果向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 则

$$r \leq p.$$

证明. 不妨设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  与  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  分别为两个向量组的极大线性无关组。

$$(1) \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \text{ 等价于 } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$$

$$\Rightarrow \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \text{ 可由 } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \text{ 线性表示}$$

$$(2) \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \text{ 可由 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性表示}$$

$$(3) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 等价于 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$$

$$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 可由 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \text{ 线性表示}$$

$$\Rightarrow \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \text{ 可由 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \text{ 线性表示}$$

由上述推论可知  $r \leq p$ 。



推论 6 等价向量组的秩相等。

1.  $n$  维向量及其线性相关性
2. 向量组的秩及其极大线性无关组
3. 矩阵的秩 相抵标准形
4. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
5. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

## 定义 12 (行秩 & 列秩)

- ▶ 对于矩阵  $A$ ，把它的每一行称为  $A$  的一个行向量。把  $A$  的行向量组的秩，称为矩阵  $A$  的行秩。
- ▶ 对于矩阵  $A$ ，把它的每一列称为  $A$  的一个列向量。把  $A$  的列向量组的秩，称为矩阵  $A$  的列秩。

对于  $m \times n$  阶矩阵  $A$ ,

- ▶  $A$  的行秩  $\leq m$ ;
- ▶  $A$  的列秩  $\leq n$ 。



## 阶梯形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中  $a_{11} \neq 0, a_{23} \neq 0, a_{34} \neq 0$ 。验证  $A$  的行秩 = 3, 列秩 = 3。

把  $A$  按行和列分块为

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$$

下证  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,  $\beta_1, \beta_3, \beta_4$  线性无关。

(1) 设

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \mathbf{0},$$

即

$$\begin{aligned} x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}) + x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) \\ + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

比较第一个分量

$$x_1 a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

从而

$$x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第 3 个分量

$$x_2 a_{23} = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

从而

$$x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

同理得  $x_3 = 0$ 。于是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。

又  $\alpha_4 = \mathbf{0}$ ，而零向量可由任何向量线性表示，这里

$$\mathbf{0} = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3.$$

故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的极大无关组。所以矩阵  $A$  的行秩为 3。

(2) 设

$$y_1 \beta_1 + y_3 \beta_3 + y_4 \beta_4 = \mathbf{0}$$

即

$$y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

比较第三个分量得  $y_4 = 0$ 。从而

$$y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

比较第二个分量得  $y_3 = 0$ 。从而

$$y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

比较第一个分量得  $y_1 = 0$ 。故  $\beta_1, \beta_3, \beta_4$  线性无关。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

去掉向量组

$$B: \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$$

的最后一个分量，所得的新向量记为

$$B^*: \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*, \beta_4^*, \beta_5^*.$$

注意去掉的分量全为 0，故这两个向量组的相关性是一致的。

由  $\beta_1, \beta_3, \beta_4$  线性无关，则  $\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$  也线性无关。

因任意  $(3+1)=4$  个 3 维向量必线性相关，故  $\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$  为向量组  $B^*$  的极大无关组，即向量组  $B^*$  中任何一个向量都可由  $\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$  线性表示，从而向量组  $B$  的任何一个向量都可以由  $\beta_1, \beta_3, \beta_4$  线性表示。

得证  $\beta_1, \beta_3, \beta_4$  是向量组  $B$  的极大无关组，即矩阵  $A$  的列秩为 3。

**结论 2** 阶梯形矩阵的行秩等于列秩，其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数。

**定理 9** 初等行变换不改变矩阵的行秩。



**证明.** 只需证明每做一次对换、倍乘和倍加变换, 矩阵的行秩不改变。设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 进行一次初等变换所得矩阵为  $B$ 。记  $A$  的行向量为

$A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 。

(1) 证明对调变换  $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$  不改变矩阵的行秩。因  $B$  的行向量组

$$B: \alpha_1, \alpha_2, \dots, c\alpha_j, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_m$$

与  $A$  的行向量组

$$B: \alpha_1, \alpha_2, \dots, c\alpha_i, \dots, c\alpha_j, \dots, \alpha_m$$

一致, 故  $B$  的行秩等于  $A$  的行秩。

(2) 证明倍乘变换  $A \xrightarrow{r_i \times c, c \neq 0} B$  不改变矩阵的行秩。因  $B$  的行向量组

$$B: \alpha_1, \alpha_2, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_m$$

与  $A$  的行向量组

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m$$

等价, 故  $B$  的行秩等于  $A$  的行秩。

(3) 证明倍乘变换  $A \xrightarrow{r_i + r_j \times c} B$  不改变矩阵的行秩。因  $B$  的行向量组

$$B: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i + c\alpha_j, \dots, \alpha_m$$

与  $A$  的行向量组

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m$$

等价, 故  $B$  的行秩等于  $A$  的行秩。



定理 10 初等行变换不改变矩阵的列秩。

**定理 10** 初等行变换不改变矩阵的列秩。

**证明.** 设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = B$$

在  $A, B$  中相同位置任取某  $s$  个列向量:

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s} \text{ 和 } \beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_s},$$

分别记为向量组  $A^*$  和  $B^*$ 。设

$$x_1 \alpha_{i_1} + x_2 \alpha_{i_2} + \dots + x_s \alpha_{i_s} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$x_1 \beta_{i_1} + x_2 \beta_{i_2} + \dots + x_s \beta_{i_s} = \mathbf{0}, \quad (13)$$

注意到方程组 (13) 是方程组 (12) 经过高斯消元法得到, 故两方程组同解。即向量组  $A^*$  和  $B^*$  有完全相同的线性关系。得证  $A, B$  列秩相等。  $\square$

定理 3.3.2 提供了求向量组的秩与极大无关组的一种简便而有效的方法。

### 例 4.1 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解 作矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ , 由

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{r_1 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_4 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

将最后一个阶梯矩阵  $B$  记为  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$

易知  $\beta_1, \beta_2, \beta_4$  为  $B$  的列向量组的一个极大无关组, 故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  也为  $A$  的列向量组的一个极大无关组, 故

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3,$$

且

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4,$$



由定理 3.3.1 与定理 3.3.2 可以推出：初等列变换也不改变矩阵的列秩与行秩。

**定理 11** 初等变换不改变矩阵的行秩与列秩。

定理 12 矩阵的行秩等于其列秩。

**定理 12** 矩阵的行秩等于其列秩。

**证明.** 对  $A$  做初等行变换得到阶梯矩阵  $U$ , 则有

$$\begin{aligned} A \text{ 的行秩} &= U \text{ 的行秩} \\ &= U \text{ 的列秩} = A \text{ 的列秩} \end{aligned}$$



定义 13 (矩阵的秩) 矩阵的行秩或列秩的数值, 称为**矩阵的秩**。记作

$$\mathbf{rank}(A) \quad \text{或} \quad R(A) \quad \text{或} \quad \text{rank}(A)$$

定义 14 (满秩矩阵) 对于  $n$  阶方阵, 若

$$\mathbf{rank}(A) = n,$$

则称  $A$  为**满秩矩阵**。

定理 13 对于  $n$  阶方阵, 下列表述等价:

- (1)  $A$  为满秩矩阵。
- (2)  $A$  为可逆矩阵。
- (3)  $A$  为非奇异矩阵。
- (4)  $\det(A) \neq 0$ 。

**定理 13** 对于  $n$  阶方阵, 下列表述等价:

- (1)  $A$  为满秩矩阵。
- (2)  $A$  为可逆矩阵。
- (3)  $A$  为非奇异矩阵。
- (4)  $\det(A) \neq 0$ 。

**证明.** 只需证明前两个表述等价。

(1) $\Rightarrow$ (2) 设  $\text{rank}(A) = n$ , 记  $A$  的行简化阶梯形矩阵为  $B$ , 则  $B$  有  $n$  个非零行, 由行简化阶梯形矩阵的结构知  $B = I$ , 即存在可逆矩阵  $P$  使得

$$PA = I,$$

故  $A^{-1} = P$ , 即  $A$  可逆。

**定理 13** 对于  $n$  阶方阵, 下列表述等价:

- (1)  $A$  为满秩矩阵。
- (2)  $A$  为可逆矩阵。
- (3)  $A$  为非奇异矩阵。
- (4)  $\det(A) \neq 0$ 。

**证明.** 只需证明前两个表述等价。

(1) $\Rightarrow$ (2) 设  $\text{rank}(A) = n$ , 记  $A$  的行简化阶梯形矩阵为  $B$ , 则  $B$  有  $n$  个非零行, 由行简化阶梯形矩阵的结构知  $B = I$ , 即存在可逆矩阵  $P$  使得

$$PA = I,$$

故  $A^{-1} = P$ , 即  $A$  可逆。

(2) $\Rightarrow$ (1) 若  $A$  可逆, 记  $A^{-1} = P_0$ , 则

$$P_0 A = I,$$

即  $A$  经过初等行变换可以得到  $I$ , 故  $\text{rank}(A) = \text{rank}(I) = n$ 。



**定义 15 (子式与主子式)** 对矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 任意挑选  $k$  行  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  行) 与  $k$  列  $(j_1, j_2, \dots, j_k)$  列), 其交点上的  $k^2$  个元素按原顺序排成的  $k$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \quad (14)$$

称为  $A$  的  $k$  阶子行列式, 简称  $A$  的  $k$  阶子式。

- ▶ 当 (14) 等于零时, 称为  $k$  阶零子式;
- ▶ 当 (14) 不等于零时, 称为  $k$  阶非零子式;
- ▶ 当 (14) 的  $j_1 = i_1, j_2 = i_2, \dots, j_k = i_k$ , 称为  $A$  的  $k$  阶主子式。



**注 9** 若  $A$  存在  $r$  阶非零子式, 而所有  $r+1$  阶子式 (如果有) 都等于零, 则矩阵  $A$  的非零子式的最高阶数为  $r$ 。

事实上, 由行列式的按行展开可知, 若所有  $r+1$  阶子式都等于零, 可得到所有更高阶的子式都等于零。

定理 14  $\text{rank}(A) = r$  的充分必要条件是  $A$  的非零子式的最高阶数为  $r$ 。

**定理 14**  $\text{rank}(A) = r$  的充分必要条件是  $A$  的非零子式的最高阶数为  $r$ 。

**证明.**

( $\Rightarrow$ ) 设  $\text{rank}(A) = r$ , 即  $A$  的行秩为  $r$ , 不妨设  $A$  的前  $r$  行构成的矩阵  $A_1$  的行秩为  $r$ , 其列秩也为  $r$ ; 不妨设  $A_1$  的前  $r$  个列向量线性无关。

由定理 3.3.5 可知,  $A$  的左上角  $r$  阶子式为非零子式。

又因为  $A$  的任意  $r+1$  个行向量线性相关, 所以  $A$  的任意  $r+1$  阶子式都是零子式 (因为其中有一行可由其余  $r$  行线性表示), 因此  $A$  的非零子式的最高阶数为  $r$ 。

**定理 14**  $\text{rank}(A) = r$  的充分必要条件是  $A$  的非零子式的最高阶数为  $r$ 。

**证明.**

( $\Rightarrow$ ) 设  $\text{rank}(A) = r$ , 即  $A$  的行秩为  $r$ , 不妨设  $A$  的前  $r$  行构成的矩阵  $A_1$  的行秩为  $r$ , 其列秩也为  $r$ ; 不妨设  $A_1$  的前  $r$  个列向量线性无关。

由定理 3.3.5 可知,  $A$  的左上角  $r$  阶子式为非零子式。

又因为  $A$  的任意  $r+1$  个行向量线性相关, 所以  $A$  的任意  $r+1$  阶子式都是零子式 (因为其中有一行可由其余  $r$  行线性表示), 因此  $A$  的非零子式的最高阶数为  $r$ 。

( $\Leftarrow$ ) 不妨设  $A$  的左上角  $r$  阶子式  $|A_r| \neq 0$ , 于是  $A_r$  可逆, 其  $r$  个行向量线性无关。将它们添加分量称为  $A$  的前  $r$  个行向量, 它们也线性无关。

而  $A$  的任何  $r+1$  个行向量必线性相关 (否则,  $A$  中存在  $r+1$  阶非零子式, 这与题设矛盾), 故  $A$  的行秩  $= \text{rank}(A) = r$ 。

□

## 关于矩阵的秩的基本结论

- (1)  $\text{rank}(A) = A$ 的行秩 =  $A$ 的列秩 =  $A$ 的非零子式的最高阶数
- (2) 初等变换不改变矩阵的秩

### 性质 1

$$\max\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} \leq \text{rank}(A, B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

特别地, 当  $B = b$  为非零向量时, 有

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A, b) \leq \text{rank}(A) + 1.$$

$$\text{rank}(A, b) = \begin{cases} \text{rank}(A) & \iff b \text{ 可以被 } A \text{ 的列向量线性表示} \\ \text{rank}(A) + 1 & \iff b \text{ 不能被 } A \text{ 的列向量线性表示} \end{cases}$$

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 因

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - (c_1 + 2c_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}, \mathbf{0}),$$

故  $\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b}_1) = \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{0}) = \text{rank}(\mathbf{A})$ , 从而  $\mathbf{b}_1$  可由  $\mathbf{A}$  的列向量线性表示。

(2) 因

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故  $\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{rank}(\mathbf{A}) + 1$ , 从而  $\mathbf{b}$  不能由  $\mathbf{A}$  的列向量线性表示。



## 证明.

- ▶ 因为  $A$  的列均可由  $(A, B)$  的列线性表示, 故

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A, B),$$

同理

$$\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A, B),$$

所以

$$\max\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} \leq \text{rank}(A, B),$$

## 证明.

- ▶ 因为  $A$  的列均可由  $(A, B)$  的列线性表示, 故

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A, B),$$

同理

$$\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A, B),$$

所以

$$\max\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} \leq \text{rank}(A, B),$$

- ▶ 设  $\text{rank}(A) = p$ ,  $\text{rank}(B) = q$ ,  $A$  和  $B$  的列向量组的极大无关组分别为

$$\alpha_1, \dots, \alpha_p \text{ 和 } \beta_1, \dots, \beta_q.$$

显然  $(A, B)$  的列向量组可由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$  线性表示, 故

$$\text{rank}(A, B) = (A, B) \text{ 的列秩} \leq \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) \leq p + q.$$



## 注 10

### ► 不等式

$$\min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} \leq \text{rank}(A, B)$$

意味着：在  $A$  的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当  $B$  的列向量能被  $A$  的列向量线性表示时，等号成立。

## 注 10

- ▶ 不等式

$$\min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} \leq \text{rank}(A, B)$$

意味着：在  $A$  的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当  $B$  的列向量能被  $A$  的列向量线性表示时，等号成立。

- ▶ 不等式

$$\text{rank}(A, B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

意味着：对  $(A, B)$ ，有可能  $A$  的列向量与  $B$  的列向量出现线性相关，合并为  $(A, B)$  的秩一般会比  $\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$  要小。

## 性质 2

$$\textit{rank}(A+B) \leq \textit{rank}(A) + \textit{rank}(B).$$

## 性质 2

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

**证明.** 设  $\text{rank}(A) = p$ ,  $\text{rank}(B) = q$ ,  $A$  和  $B$  的列向量组的极大无关组分别为

$$\alpha_1, \dots, \alpha_p \text{ 和 } \beta_1, \dots, \beta_q.$$

显然  $A+B$  的列向量组可由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$  线性表示, 故

$$\text{rank}(A+B) = A+B \text{ 的列秩} \leq \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) \leq p+q.$$



## 性质 2

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

**证明.** 设  $\text{rank}(A) = p$ ,  $\text{rank}(B) = q$ ,  $A$  和  $B$  的列向量组的极大无关组分别为

$$\alpha_1, \dots, \alpha_p \text{ 和 } \beta_1, \dots, \beta_q.$$

显然  $A+B$  的列向量组可由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$  线性表示, 故

$$\text{rank}(A+B) = A+B \text{ 的列秩} \leq \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) \leq p+q.$$



**注 11** 将矩阵  $A$  和  $B$  合并、相加, 只可能使得秩减小。

### 性质 3

$$\mathit{rank}(AB) \leq \min(\mathit{rank}(A), \mathit{rank}(B)).$$



### 性质 3

$$\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)).$$

**证明.** 设  $A, B$  分别为  $m \times n, n \times s$  矩阵, 将  $A$  按列分块, 则

$$AB = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知,  $AB$  的列向量组可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 故

$$\text{rank}(AB) = AB \text{ 的列秩} \leq A \text{ 的列秩} = \text{rank}(A).$$

类似地, 将  $B$  按行分块, 可得  $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B).$



### 性质 3

$$\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)).$$

**证明.** 设  $A, B$  分别为  $m \times n, n \times s$  矩阵, 将  $A$  按列分块, 则

$$AB = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知,  $AB$  的列向量组可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 故

$$\text{rank}(AB) = AB \text{ 的列秩} \leq A \text{ 的列秩} = \text{rank}(A).$$

类似地, 将  $B$  按行分块, 可得  $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$ . □

该性质告诉我们, 对一个向量组进行线性组合, 可能会使向量组的秩减小。

性质 4 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $P, Q$  分别为  $m$  阶、 $n$  阶可逆矩阵, 则

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(PA) = \text{rank}(AQ) = \text{rank}(PAQ).$$

**性质 4** 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $P, Q$  分别为  $m$  阶、 $n$  阶可逆矩阵, 则

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(PA) = \text{rank}(AQ) = \text{rank}(PAQ).$$

**证明.** 以下给出两种证明方法:

**法一** 可逆矩阵  $P, Q$  可表示为若干个初等矩阵的乘积, 而初等变换不改变矩阵的秩, 故结论成立。

**性质 4** 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $P, Q$  分别为  $m$  阶、 $n$  阶可逆矩阵, 则

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(PA) = \text{rank}(AQ) = \text{rank}(PAQ).$$

**证明.** 以下给出两种证明方法:

**法一** 可逆矩阵  $P, Q$  可表示为若干个初等矩阵的乘积, 而初等变换不改变矩阵的秩, 故结论成立。

**法二** 因

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(P^{-1}(PA)) \leq \text{rank}(PA) \leq \text{rank}(A)$$

故

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(PA).$$

同理可证其他等式。



例 4.2 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 且  $m < n$ , 证明:  $|A^T A| = 0$ .

**例 4.2** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 且  $m < n$ , 证明:  $|A^T A| = 0$ .

**解** 由于  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) \leq \min\{m, n\} < n$ , 根据性质 2, 有

$$\text{rank}(A^T A) \leq \min\{\text{rank}(A^T), \text{rank}(A)\} < n,$$

而  $A^T A$  为  $n$  阶矩阵, 故  $|A^T A| = 0$ 。

**定义 16 (矩阵的相抵)** 若矩阵  $A$  经过初等变换化为  $B$  (亦即存在可逆矩阵  $P$  和  $Q$  使得  $PAQ = B$ )，就称  $A$  **相抵于**  $B$ ，记作  $A \cong B$

**性质 5 (相抵关系的性质)**

▸ 反身性

$$A \cong A$$

▸ 对称性

$$A \cong B \Rightarrow B \cong A$$

▸ 传递性

$$A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$$



定义 17 (阶梯形矩阵) 若矩阵  $A$  满足

- (1) 零行在最下方;
- (2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增,

则称  $A$  为**阶梯形矩阵**。

例 4.3

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 18 行简化阶梯形矩阵 若矩阵  $A$  满足

- (1) 它是阶梯形矩阵;
- (2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外, 其余元素全为零,

则称  $A$  为行简化阶梯形矩阵。

例 4.4

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**定理 15** 若  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 且  $\text{rank}(A) = r$ , 则一定存在可逆的  $m$  阶矩阵  $P$  和  $n$  阶矩阵  $Q$  使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n} = U.$$

**定理 15** 若  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 且  $\text{rank}(A) = r$ , 则一定存在可逆的  $m$  阶矩阵  $P$  和  $n$  阶矩阵  $Q$  使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n} = U.$$

**证明.** 对  $A$  做初等行变换, 可将  $A$  化为有  $r$  个非零行的行简化阶梯形矩阵, 即存在初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_s$  使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = U_1.$$

对  $U_1$  做初等列变换可将  $U_1$  化为  $U$ , 即存在初等矩阵  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$  使得

$$U_1 Q_1 Q_2 \cdots Q_t = U$$

记  $P_s \cdots P_2 P_1 = P$ ,  $Q_1 Q_2 \cdots Q_t = Q$ , 则有  $PAQ = U$ . □

定义 19 (相抵标准形) 设  $\text{rank}(A_{m \times n}) = r$ , 则矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

称为  $A$  的相抵标准形, 简称标准形。

- ▶ 秩相等的同型矩阵, 必有相同的标准形。
- ▶ 两个秩相等的同型矩阵是相抵的。

**例 4.5** 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵 ( $m > n$ ),  $\text{rank}(A) = n$ , 证明: 存在  $n \times m$  矩阵  $B$  使得

$$BA = I_n.$$

**例 4.5** 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵 ( $m > n$ ),  $\text{rank}(A) = n$ , 证明: 存在  $n \times m$  矩阵  $B$  使得

$$BA = I_n.$$

**证明.** 由定理 7 可知, 存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$  与  $n$  阶可逆矩阵  $Q$  使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{0}_1 \end{pmatrix} \Rightarrow PA = \begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{0}_1 \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} \\ \mathbf{0}_1 \end{pmatrix}$$

其中  $\mathbf{0}_1$  为  $(m-n) \times n$  零矩阵。取

$$C = (Q \ \mathbf{0}_2),$$

其中  $\mathbf{0}_2$  为  $n \times (m-n)$  阶零矩阵, 则

$$CPA = (Q \ \mathbf{0}_2) \begin{pmatrix} Q^{-1} \\ \mathbf{0}_1 \end{pmatrix} = QQ^{-1} + \mathbf{0}_2 \mathbf{0}_1 = I_n.$$

故存在  $B = CP$  使得  $BA = I_n$ . □

例 4.6 设

$$\alpha_1 = (1, 3, 1, 2), \alpha_2 = (2, 5, 3, 3),$$

$$\alpha_3 = (0, 1, -1, a), \alpha_4 = (3, 10, k, 4),$$

试求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的秩, 并将  $\alpha_4$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。



解 将 4 个向量按列排成一个矩阵  $A$ , 做初等变换将其化为阶梯形矩阵  $U$ , 即

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

(1) 当  $a=1$  或  $k=2$  时,  $U$  只有 3 个非零行, 故

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \text{rank}(A) = 3.$$

(2) 当  $a \neq 1$  且  $k \neq 2$  时,  $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \text{rank}(A) = 4.$

(3) 当  $k=2$  且  $a \neq 1$  时,  $\alpha_4$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且

$$\alpha_4 = -\frac{1+5a}{1-a}\alpha_1 + \frac{2+a}{1-a}\alpha_2 + \frac{3}{1-a}\alpha_3.$$

(4) 当  $k \neq 2$  或  $a=1$  时,  $\alpha_4$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

例 4.7 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知  $\text{rank}(A) = 2$ , 求  $t$ 。

例 4.7 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知  $\text{rank}(A) = 2$ , 求  $t$ 。

解

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

由于  $\text{rank}(B) = \text{rank}(A)$ , 故  $B$  中第 2、3 行必须成比例, 即

$$\frac{-2}{2+t} = \frac{-4}{6},$$

即得  $t = 1$ 。

1.  $n$  维向量及其线性相关性
2. 向量组的秩及其极大线性无关组
3. 矩阵的秩 相抵标准形
4. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
5. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 考察以  $A$  为系数矩阵的齐次线性方程组

$$Ax = 0. \quad (15)$$

若将  $A$  按列分块为

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

齐次方程组 (15) 可表示为

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = 0.$$

而齐次方程组 (15) 有非零解的充分必要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关, 即

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < n.$$

定理 16 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 则

$$\underline{Ax = 0 \text{ 有非零解}} \iff \underline{\text{rank}(A) < n}.$$

定理 17 (定理 1 的等价命题) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 则

$$\underline{Ax = 0 \text{ 只有零解}} \iff \underline{\text{rank}(A) = n = A \text{ 的列数}}.$$

**例 5.1** 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 证明: 存在  $n \times s$  矩阵  $B \neq \mathbf{0}$ , 使得  $AB = \mathbf{0}$  的充分必要条件是

$$|A| = 0.$$

**例 5.1** 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 证明: 存在  $n \times s$  矩阵  $B \neq 0$ , 使得  $AB = 0$  的充分必要条件是

$$|A| = 0.$$

**证明.**  $|A| = 0 \iff Ax = 0$  有非零解。下证

存在  $n \times s$  矩阵  $B \neq 0$  使得  $AB = 0 \iff Ax = 0$  有非零解.

( $\Rightarrow$ ) 设  $AB = 0$ , 则  $B$  的解向量为  $Ax = 0$  的解。又  $B \neq 0$ , 则  $B$  至少有一个非零列向量, 从而  $Ax = 0$  至少有一个非零解。

( $\Leftarrow$ ) 设  $Ax = 0$  有非零解, 任取一个非零解  $\beta$ , 令

$$B = (\beta, 0, \dots, 0)$$

则  $B \neq 0$ , 且  $AB = 0$ 。





**定理 18** 若  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  为齐次线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的两个解, 则

$$k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

也是它的解。

**定理 18** 若  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  为齐次线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的两个解, 则

$$k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

也是它的解。

**证明.** 因为

$$A(k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2) = k_1 A\mathbf{x}_1 + k_2 A\mathbf{x}_2 = k_1 \mathbf{0} + k_2 \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故  $k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2$  也为  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解。



**定义 20 (基础解系)** 设  $x_1, x_2, \dots, x_p$  为  $Ax = 0$  的解向量, 若

- (1)  $x_1, x_2, \dots, x_p$  线性无关;
- (2)  $Ax = 0$  的任一解向量可由  $x_1, x_2, \dots, x_p$  线性表示。

则称  $x_1, x_2, \dots, x_p$  为  $Ax = 0$  的一个基础解系。

注 12 关于基础解系, 请注意以下几点:

- (1) 基础解系即全部解向量的极大无关组。
- (2) 找到了基础解系, 就找到了齐次线性方程组的全部解:

$$k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + k_p \mathbf{x}_p \quad (k_1, k_2, \cdots, k_p \text{ 为任意常数}).$$

- (3) 基础解系不唯一。

## 例 5.2 求方程组

$$x + y + z = 0$$

的全部解。

解

(1) 选取  $y, z$  为自由未知量, 则

$$\begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数})$$

## 解 (续)

(2) 选取  $x, z$  为自由未知量, 则

$$\begin{cases} x &= & x \\ y &= & -x - z \\ z &= & z \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数})$$

(3) 选取  $x, y$  为自由未知量, 则

$$\begin{cases} x &= & x \\ y &= & y \\ z &= & -x - y \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数})$$

三个不同的基础解系为

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

**定理 19** 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 若  $\text{rank}(A) = r < n$ , 则齐次线性方程组  $Ax = 0$  存在基础解系, 且基础解系含  $n - r$  个解向量。

**注 13** 注意以下两点:

- ▶  $r$  为  $A$  的秩, 也是  $A$  的行阶梯形矩阵的非零行行数, 是非自由未知量的个数。
- ▶  $n$  为未知量的个数, 故  $n - r$  为自由未知量的个数。有多少自由未知量, 基础解系里就对应有多少个向量。

例 5.3 求齐次线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$



解

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & 24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \div 4]{r_3 \div 8} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 5.4 求齐次线性方程组

$$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$$

的基础解系。

### 例 5.4 求齐次线性方程组

$$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$$

的基础解系。

**解** 原方程等价于  $x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}$ , 即

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_{n-1} \\ x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1} \end{cases}$$

基础解系为

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}$$

例 5.5 设  $A$  与  $B$  分别为  $m \times n$  和  $n \times s$  矩阵, 且  $AB = \mathbf{0}$ 。证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n.$$

**例 5.5** 设  $A$  与  $B$  分别为  $m \times n$  和  $n \times s$  矩阵, 且  $AB = 0$ 。证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n.$$

**证明.** 由  $AB = 0$  知,  $B$  的列向量是  $Ax = 0$  的解。故  $B$  的列向量组的秩, 不超过  $Ax = 0$  的基础解系的秩, 即

$$\text{rank}(B) \leq n - \text{rank}(A),$$

即

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n.$$



例 5.6 设  $n$  元齐次线性方程组  $Ax = 0$  与  $Bx = 0$  同解, 证明

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B).$$

例 5.6 设  $n$  元齐次线性方程组  $Ax = 0$  与  $Bx = 0$  同解, 证明

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B).$$

解  $Ax = 0$  与  $Bx = 0$  同解, 故它们有相同的基础解系, 而基础解系包含的向量个数相等, 即

$$n - \text{rank}(A) = n - \text{rank}(B),$$

从而

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B).$$



例 5.7 设  $A$  为  $m \times n$  实矩阵, 证明  $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$ 。

例 5.7 设  $A$  为  $m \times n$  实矩阵, 证明  $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$ 。

证明. 只需证明  $Ax = 0$  与  $(A^T A)x = 0$  同解。

(1) 若  $x$  满足  $Ax = 0$ , 则有  $(A^T A)x = A^T(Ax) = 0$ 。

(2) 若  $x$  满足  $A^T Ax = 0$ , 则

$$x^T A^T Ax = 0,$$

即

$$(Ax)^T Ax = 0,$$

故  $Ax = 0$ 。



1.  $n$  维向量及其线性相关性
2. 向量组的秩及其极大线性无关组
3. 矩阵的秩 相抵标准形

4. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
5. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

**定理 20** 对于非齐次线性方程组  $Ax = b$ , 以下命题等价:

- (i)  $Ax = b$  有解;
- (ii)  $b$  可由  $A$  的列向量组线性表示;
- (iii)  $\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A)$ 。

**证明.** 分两步证明:

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) 记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 则  $Ax = b$  等价于

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = b.$$

**证明.** 分两步证明:

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) 记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 则  $Ax = b$  等价于

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = b.$$

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) 若  $b$  可由  $A$  的列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 则  $(A, b)$  的列向量组与  $A$  的列向量组等价, 故  $\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A)$ 。反之, 若  $\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A)$ , 则  $b$  能由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 否则  $\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A) + 1$ , 导致矛盾。



注 14  $\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A) + 1$  会导致矛盾方程的出现

记  $\text{rank}(A) = r$ , 若  $\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A) + 1$ , 则增广矩阵  $(A, b)$  经过初等行变换所得的行阶梯形矩阵形如

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

其中  $d_{r+1} \neq 0$  (否则  $\text{rank}(A, b) = r$ )。这意味着出现了矛盾方程

$$0 = d_{r+1}.$$

推论 7

$Ax = b$ 有唯一解  $\iff \text{rank}(A, b) = \text{rank}(A) = A$ 的列数.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$



**定理 21** 若  $x_1, x_2$  是  $Ax=b$  的解, 则  $x_1-x_2$  是  $Ax=0$  的解。

**定理 21** 若  $x_1, x_2$  是  $Ax = b$  的解, 则  $x_1 - x_2$  是  $Ax = 0$  的解。

**证明.**

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0,$$

故  $x_1 - x_2$  是  $Ax = 0$  的解。



定理 22 若  $Ax = b$  有解, 则其一般解 (或称通解) 为

$$x = x_0 + \bar{x}$$

其中  $x_0$  是  $Ax = b$  的一个特解, 而

$$\bar{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_p x_p$$

为  $Ax = 0$  的一般解。

**定理 22** 若  $Ax = b$  有解, 则其一般解 (或称通解) 为

$$x = x_0 + \bar{x}$$

其中  $x_0$  是  $Ax = b$  的一个特解, 而

$$\bar{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_p x_p$$

为  $Ax = 0$  的一般解。

**证明.**

$$A(x_0 + \bar{x}) = Ax_0 + A\bar{x} = b \Rightarrow x_0 + \bar{x} \text{ 是 } Ax = b \text{ 的解}$$

设  $x^*$  是  $Ax = b$  的任意一个解, 则  $x^* - x_0$  是  $Ax = 0$  的解, 而

$$x^* = x_0 + (x^* - x_0).$$

故  $x^*$  可表示为  $x_0 + \bar{x}$  的形式。



非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的通解为

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_p x_p + x_0$$

其中  $x_1, x_2, \dots, x_p$  为  $Ax = 0$  的基础解系,  $x_0$  为  $Ax = b$  的一个特解。

注 15 “ $Ax = b$  的通解” = “ $Ax = 0$  的通解” + “ $Ax = b$  的特解”

例 6.1 求非齐次线性方程组  $Ax = b$  的一般解，其中增广矩阵为

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

解

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left( \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \div 2]{r_1-r_3, r_3+\frac{1}{2}r_2} \left( \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

同解方程为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$



故通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

例 6.2 (重要题型) 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +(1+\lambda)x_3 & = & \lambda \end{cases}$$

问  $\lambda$  取何值时, 此方程组

- (1) 有唯一解?
- (2) 无解?
- (3) 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解。

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2.$$

故当  $\lambda \neq 0$  且  $\lambda \neq -3$  时, 有唯一解。当  $\lambda = 0$  时, 原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组, 故无解。

当  $\lambda = -3$  时, 增广矩阵为

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

**例 6.3** 设  $\eta^*$  为  $Ax=b$  的一个解,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  为对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

- (1)  $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关;
- (2)  $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \eta^* + \xi_2, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$  线性无关。

## 证明.

- (1) 假设  $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性相关, 而  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关, 故  $\eta^*$  可由  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性表示, 从而  $\eta^*$  为  $Ax=0$  的解, 这与  $\eta^*$  为  $Ax=b$  的解矛盾。故假设不成立, 即  $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关。
- (2) 显然,

$\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  等价于  $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \eta^* + \xi_2, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ ,

由题 (1) 结论可知

$$\begin{aligned} & \text{rank}(\eta^*, \eta^* + \xi_1, \eta^* + \xi_2, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}) \\ &= \text{rank}(\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}) = n - r + 1 \end{aligned}$$

从而结论成立。



**例 6.4** 设  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_s$  为  $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$  的  $s$  个解,  $k_1, k_2, \dots, k_s$  为实数, 满足  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$ 。证明:

$$\boldsymbol{x} = k_1 \boldsymbol{\eta}_1 + k_2 \boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_s \boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解。

**例 6.4** 设  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_s$  为  $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$  的  $s$  个解,  $k_1, k_2, \dots, k_s$  为实数, 满足  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$ 。证明:

$$\boldsymbol{x} = k_1 \boldsymbol{\eta}_1 + k_2 \boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_s \boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解。

**证明.**

$$\begin{aligned} A(k_1 \boldsymbol{\eta}_1 + k_2 \boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_s \boldsymbol{\eta}_s) &= k_1 A\boldsymbol{\eta}_1 + k_2 A\boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_s A\boldsymbol{\eta}_s \\ &= k_1 \boldsymbol{b} + k_2 \boldsymbol{b} + \dots + k_s \boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{b}. \end{aligned}$$





**例 6.5** 对于  $Ax = b$ ,  $\text{rank}(A) = r$ ,  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$  为它的  $n-r+1$  个线性无关的解。证明它的任一解可表示为

$$x = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_{n-r+1} \eta_{n-r+1},$$

其中  $k_1 + k_2 + \dots + k_{n-r+1} = 1$

**证明.** 取向量组  $\eta_2 - \eta_1, \eta_2 - \eta_1, \dots, \eta_{n-r+1} - \eta_1$ . 下证该向量组为  $Ax = 0$  的一个基础解系。

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}) \xrightarrow{j=2, \dots, n-r+1} (\eta_1, \eta_2 - \eta_1, \dots, \eta_{n-r+1} - \eta_1)$$

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$  线性无关

$\Rightarrow \eta_1, \eta_2 - \eta_1, \dots, \eta_{n-r+1} - \eta_1$  线性无关

$\Rightarrow \eta_2 - \eta_1, \dots, \eta_{n-r+1} - \eta_1$  线性无关

$\Rightarrow \eta_2 - \eta_1, \dots, \eta_{n-r+1} - \eta_1$  为  $Ax = 0$  的基础解系.

于是  $Ax = b$  的任意一个解  $x$  可表示为

$$x = k_2(\eta_2 - \eta_1) + \dots + k_{n-r+1}(\eta_{n-r+1} - \eta_1) + \eta_1$$

$$\Rightarrow x = (1 - k_2 - \dots - k_{n-r+1})\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

$$\Rightarrow x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$



例 6.6 设四元齐次线性方程组

$$(I): \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \quad (II): \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

求

- (1) 方程组 (I) 与 (II) 的基础解系
- (2) 方程组 (I) 与 (II) 的公共解

解 (1)、因为

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_2 \end{cases}$$

故 (I) 的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解 (续) 因为

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= & x_2 &-x_3 \\ x_4 &= & -x_2 &+x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= & x_2 &-x_3 \\ x_2 &= & x_2 & \\ x_3 &= & & x_3 \\ x_4 &= & -x_2 &+x_3 \end{cases}$$

故 (II) 的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解 (续) (2)、方程 (I) 与 (II) 的公共解即为联立 (I) 与 (II) 所得新方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解 (续)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_4+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_3+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}.$$