总复习

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 12 月 30 日

1. 行列式

2. 矩阵及其运算

3. 向量组　矩阵的秩

4. 向量空间与线性变换

5. 特征值问题

6. 二次型

1. 行列式

2. 矩阵及其运算

3. 向量组　矩阵的秩

4. 向量空间与线性变换

5. 特征值问题

6. 二次型

1.1 知识点

- 行列式的定义

  余子式、代数余子式、行列式的按行（列）展开

- 行列式的性质
  - 互换行与列，行列式不变
  - 某行全为零，行列式为零
  - 两行相等，行列式为零
  - 两行成比例，行列式为零
  - 行倍加，行列式不变
  - 行倍乘，行列式倍乘
  - 交换两行，行列式反号
  - $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} |\boldsymbol{A}|$$

- 行列式的计算
  - 通过初等行变换化为上三角行列式
  - 降阶法（使某行（列）只有一个非零元）
  - 升阶法（加边法），适用于

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

或

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

一些特殊的行列式

- 奇数阶反对称矩阵的行列式等于零
- 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ * & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- 斜三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & & a_n \\ & & & a_{n-1} & * \\ & & & \vdots & \vdots \\ & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

- 对角块行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{vmatrix} = |A_1|\ |A_2|\ \cdots\ |A_n|$$

$$\begin{vmatrix} A & \\ C & B \end{vmatrix} = |A|\ |B|$$

- 爪形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 爪形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其解法固定，即从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。

- 爪形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其解法固定，即从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。

类似的方式还可用于求解如下形式的“爪型行列式”

(g) (h) (i)

- 发散型行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n$$

- 范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

常见题型

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

1.2 往年试题

例 1 (2005 - 2006 第二学期) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，求 $|AA^T|$。

例 1 (2005 - 2006 第二学期)　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，求 $|AA^T|$。

解　因 $|AA^T|=|A|\ |A^T|=|A|^2$，而

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 11 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -6 & 11 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -6 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 50$$

故

$$|AA^T| = 2500$$

例 2 (2009 - 2010 第二学期) **设** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, **求** $|AA^T|$。

例 2 (2009 - 2010 第二学期) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$，求 $|AA^T|$。

解 因 $\mathrm{r}(AA^T) \le \mathrm{r}(A) \le 3$，故 AA^T 为降秩矩阵，从而 $|AA^T|=0$。

例 3 (2006 - 2007 第一学期) 设 $A=(a_{ij})$ 为 2007 阶方阵，其中 $a_{ij}=i-j$，求 $|A|$

例 3 (2006 - 2007 第一学期) 设 $A = (a_{ij})$ 为 2007 阶方阵，其中 $a_{ij} = i - j$，求 $|A|$

解 注意到

$$a_{ij} = i - j = -(j - i) = -a_{ji},$$

故 A 为反对称矩阵，由奇数阶反对称矩阵的行列式为零可知，

$$|A| = 0.$$

例 4 (2006 - 2007 第二学期) **计算**

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} \quad (n\geq 1)$$

例 4 (2006 - 2007 第二学期) **计算**

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} \quad (n \geq 1)$$

解

$$D \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n!$$

例 5 (2006 - 2007 第二学期) **计算**

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

例 5 (2006 - 2007 第二学期) 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例 6 (2007 - 2008 第一学期，2010 - 2011 第二学期，2011 - 2012 第一学期)

计算 $D=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$

例 6 (2007 - 2008 第一学期，2010 - 2011 第二学期，2011 - 2012 第一学期)

计算 $D=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$

解 (加边法)

- 当 $x=0$ 时，$D=0$
- 当 $x\neq 0$ 时，

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{r_1-\frac{a_1}{x}r_2-\cdots--\frac{a_n}{x}r_{n+1}}}\begin{vmatrix} 1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{x} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=x^{n-1}(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)$$

例 7 (2008 - 2009 第一学期) **计算**

$$D=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

例 8 (2011 - 2012 第二学期) **计算** $D=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & x \end{vmatrix}$

例 8 (2011 - 2012 第二学期) **计算** $D=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & x \end{vmatrix}$

解

$$D=(x+45)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & x \end{vmatrix}=(x+45)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & x-8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x-9 \end{vmatrix}$$

$$=(x+45)\begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x-8 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x-9 \end{vmatrix}=(x+45)(x-1)(x-2)\cdots(x-9)$$

例 9 (2012 - 2013 第二学期) 计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

例 9 (2012 - 2013 第二学期) 计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解 可用加边法

例 10 (2007 - 2008 第一学期，2010 - 2011 第一学期) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1| = m, \quad |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = n,$$

求四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$

例 10 (2007 - 2008 第一学期，2010 - 2011 第一学期) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1| = m,\quad |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = n,$$

求四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$

解

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2| &= |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1| + |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2| \\ &= |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1| - |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = m-n\end{aligned}$$

例 11 (2007 - 2008 第二学期) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都是三维列向量，记三阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3), \quad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

已知 $|\boldsymbol{A}| = 1$，求 $|\boldsymbol{B}|$。

例 11 (2007 - 2008 第二学期) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都是三维列向量，记三阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3), \quad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

已知 $|\boldsymbol{A}| = 1$，求 $|\boldsymbol{B}|$。

解 因

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

而

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

故

$$|\boldsymbol{B}| = 2|\boldsymbol{A}| = 2.$$

例 12 (2008 - 2009 第一学期) 计算 $D=\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -cf \end{vmatrix}$

例 12 (2008 - 2009 第一学期) **计算** $D=\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -cf \end{vmatrix}$

解

$$D=adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -c \end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ 0 & 0 & 2e \\ 0 & 2c & e-c \end{vmatrix}$$

$$=-adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ 0 & 2c & e-c \\ 0 & 0 & 2e \end{vmatrix}=-adf\cdot(-b)\cdot 2c\cdot 2e=4abcdef$$

例 13 (2012 - 2013 第二学期) 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

例 13 (2012 - 2013 第二学期) 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot 10=30$$

例 14 (2013 - 2014 第一学期) 在 n 阶行列式 D 中，如果把第一列移到最后一列，而其余各列保持原来次序各向左移动了一列，得到行列式 Δ，问 Δ 与 D 有何关系？

例 14 (2013 - 2014 第一学期) 在 n 阶行列式 D 中，如果把第一列移到最后一列，而其余各列保持原来次序各向左移动了一列，得到行列式 Δ，问 Δ 与 D 有何关系？

解

$$\Delta = (-1)^{n-1} D$$

1. 行列式

2. 矩阵及其运算

3. 向量组　矩阵的秩

4. 向量空间与线性变换

5. 特征值问题

6. 二次型

2.1 往年试题

例 15 (2005-2006 第一学期) 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geq 2)$ 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，求 $(\boldsymbol{A}^*)^*$。

例 15 (2005-2006 第一学期)　已知 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geq 2)$ 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，求 $(\boldsymbol{A}^*)^*$。

解　由 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*/|\boldsymbol{A}|$，可知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，从而 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$。而

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}^*|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

例 16 (2005-2006 第一学期, 2009-2010 第一学期, 2010-2011 第一学期, 2011-2012 第一学期) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & a \end{pmatrix}$，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$，求 a 和 $\boldsymbol{X}$。

例 16 (2005-2006 第一学期, 2009-2010 第一学期, 2010-2011 第一学期, 2011-2012 第一学期)　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&6&a\end{pmatrix}$, 且 $\mathrm{r}(A)=2$, X 满足 $AX+I=A^2+X$, 求 a 和 X。

解　因 $A\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&a-1\end{pmatrix}$, 由 $\mathrm{r}(A)=2$ 知 $a=1$, 故 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&6&1\end{pmatrix}$.

$$AX+I=A^2+X \quad\Rightarrow\quad (A-I)X=A^2-I=(A-I)(A+I)$$

因 $A-I=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&6&0\end{pmatrix}$ 可逆, 故

$$X=A+I=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&6&2\end{pmatrix}$$

例 17 (2005-2006 第一学期) 设 A 为 n 阶实矩阵，

(1) 当 n 为奇数且 $AA^T = I$ 及 $|A| = 1$ 时，证明 $|I - A| = 0$；

(2) 当 m 为任意给定正整数且 $(A+I)^m = 0$，证明 A 可逆。

例 17 (2005-2006 第一学期)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，

(1) 当 n 为奇数且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{I}$ 及 $|\boldsymbol{A}|=1$ 时，证明 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$；

(2) 当 m 为任意给定正整数且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^m=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

证明.

(1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{I}$ 知 $A^T=\boldsymbol{A}^{-1}$。又 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}$，故

$$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{I}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=(-1)^n=|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$$

而 n 为奇数，于是 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$，即 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$。

例 17 (2005-2006 第一学期)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，

(1) 当 n 为奇数且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{I}$ 及 $|\boldsymbol{A}|=1$ 时，证明 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$；

(2) 当 m 为任意给定正整数且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^m=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

证明.

(1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{I}$ 知 $A^T=\boldsymbol{A}^{-1}$。又 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}$，故

$$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{I}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=(-1)^n=|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$$

而 n 为奇数，于是 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$，即 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$。

(2) 由 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^m=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A}^m+C_m^{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots++C_m^1\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 可知，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{m-1}+C_m^{m-1}\boldsymbol{A}^{m-2}+\cdots+C_m^1\boldsymbol{I})=-\boldsymbol{I}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=-(\boldsymbol{A}^{m-1}+C_m^{m-1}\boldsymbol{A}^{m-2}+\cdots+C_m^1\boldsymbol{I}).$$

□

例 18 (2005-2006 第二学期) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，且 $A^2-AB=I$，

(1) 求 B;

(2) 令 $C=4A^2-B^2-2BA+2AB$，计算 C^*。

例 18 (2005-2006 第二学期)　设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，且 $A^2-AB=I$，

(1) 求 B；

(2) 令 $C=4A^2-B^2-2BA+2AB$，计算 C^*。

解

(1) 由 $A^2-AB=I$ 知 $AB=A^2-I$。利用如下过程可求得 B:

$$\boxed{(A,\ \ A^2-I)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(I,\ \ B)}$$

易求得 $A^2-I=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&0&2&1\\0&1&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&2&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) 易求得

$$C=(2A-B)(2A+B)=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

故

$$C^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |C|=64.$$

故

$$C^{*}=|C|C^{-1}=16\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 19 (2006-2007 第一学期) 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，

(1) 若 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$；并由反例说明一般情况下 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$ 得不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，将其第二行的 2 倍加到第三行的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，问 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 是否可逆？

例 19 (2006-2007 第一学期) 设三阶方阵 $A=(a_{ij})$,

(1) 若 $A^T=A$ 且 $A^2=\mathbf{0}$，证明 $A=\mathbf{0}$；并由反例说明一般情况下 $A^2=\mathbf{0}$ 得不出 $A=\mathbf{0}$；

(2) 若 A 可逆，将其第二行的 2 倍加到第三行的矩阵为 B，问 $BA^{-1}-AB^{-1}$ 是否可逆？

解

(1) 由条件知 $A^TA=\mathbf{0}$，而 $(A^TA)_{ii}=a_{1i}^2+a_{2i}^2+\cdots+a_{ni}^2=0$，故 $a_{ij}=0$，即 $A=\mathbf{0}$。反例：$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$，但 $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

例 19 (2006-2007 第一学期)　设三阶方阵 $A=(a_{ij})$，

(1) 若 $A^T=A$ 且 $A^2=\mathbf{0}$，证明 $A=\mathbf{0}$；并由反例说明一般情况下 $A^2=\mathbf{0}$ 得不出 $A=\mathbf{0}$；

(2) 若 A 可逆，将其第二行的 2 倍加到第三行的矩阵为 B，问 $BA^{-1}-AB^{-1}$ 是否可逆？

解

(1) 由条件知 $A^TA=\mathbf{0}$，而 $(A^TA)_{ii}=a_{1i}^2+a_{2i}^2+\cdots+a_{ni}^2=0$，故 $a_{ij}=0$，即 $A=\mathbf{0}$。反例：$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$，但 $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

(2) 由题意知 $B=PA$，其中 $P=\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\0&3&1\end{pmatrix}$. 故

$$
\begin{aligned}
BA^{-1}-AB^{-1} &= PAA^{-1}-AA^{-1}P^{-1}=P-P^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\0&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\0&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\0&0&\\0&6&0\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

显然不可逆。

例 20 (2006-2007 第二学期)　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)$;

(2) 求 A^{-1}。

例 20 (2006-2007 第二学期) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$,

(1) 求 $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)$;

(2) 求 A^{-1}。

解

(1) $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=BA-AB=\begin{pmatrix}1&-1&0\\8&6&6\\0&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&7&3\\-2&5&2\\-2&4&3\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}1&-8&-3\\10&1&4\\2&-5&-2\end{pmatrix}$$

例 20 (2006-2007 第二学期) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

(1) 求 $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)$；

(2) 求 A^{-1}。

解

(1) $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=BA-AB=\begin{pmatrix}1&-1&0\\8&6&6\\0&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&7&3\\-2&5&2\\-2&4&3\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}1&-8&-3\\10&1&4\\2&-5&-2\end{pmatrix}$$

(2)

$$(A,\ I)=\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&-3&-1&-2&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&1&-1&1&0&-1\\0&0&-4&1&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

例 21 (2006-2007 第二学期)　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $4\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2-2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$;

(2) 求 $|\boldsymbol{A}^*|$。

例 21 (2006-2007 第二学期) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $4A^2-B^2-2BA+2AB$;

(2) 求 $|A^*|$。

解

(1) $4A^2-B^2-2BA+2AB=(2A-B)(2A+B)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -44 & -24 & -60 \\ -5 & -25 & 11 \end{pmatrix}$

例 21 (2006-2007 第二学期)　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，

(1) 求 $4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB$；

(2) 求 $|A^*|$。

解

(1) $4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB = (2A - B)(2A + B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -44 & -24 & -60 \\ -5 & -25 & 11 \end{pmatrix}$

(2) 因 $|A^*| = |A|^2$，而 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$，故 $|A^*| = 0$。

例 22 (2007-2008 第一学期)　**证明**

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明：若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$；

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B},\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$，证明：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$。

例 22 (2007-2008 第一学期) 证明

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明：若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$；

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B},\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$，证明：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$。

证明.

(1) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=0$；

例 22 (2007-2008 第一学期)　证明

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明：若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$；

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B},\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$，证明：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$。

证明.

(1) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=0$；

(2) 由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$ 知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆。故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}))=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$$

于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

□

例 23 (2007-2008 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，$AC - I = B + C$，求 C。

例 23 (2007-2008 第二学期)　设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&0\\2&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&-3\\2&-1&4\\0&-1&4\end{pmatrix}$, $AC-I=B+C$，求 C。

解　由题意可知 $(A-I)C=B+I$,

$$(A-I,B+I)=\begin{pmatrix}1&-1&1&1&2&-3\\1&1&0&2&0&4\\2&1&1&0&-1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&1&2&-3\\0&2&-1&1&-2&7\\0&3&-1&-2&-5&11\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1&1&2&-3\\0&2&-1&1&-2&7\\0&0&1&-7&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&8&6&-4\\0&1&0&-3&-3&4\\0&0&1&-7&-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&8&6&-4\\0&1&0&-3&-3&4\\0&0&1&-7&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&5&3&0\\0&1&0&-3&-3&4\\0&0&1&-7&-4&1\end{pmatrix}$$

例 24 (2008-2009 第一学期) 设 A, B 为三阶方阵，满足 $AB + I = A^2 + B$，且 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 B 及 B^*。

例 24 (2008-2009 第一学期)　设 A,B 为三阶方阵，满足 $AB+I=A^2+B$，且 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 B 及 B^*。

解　依题意可知

$$(A-I)B=A^2-I=(A-I)(A+I),$$

而 $A-I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 非奇异，故

$$B=A+I=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

例 25 (2009-2010 第一学期)　计算下列各题：

(1) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{2010}$；

(2) 设 $n(n\geq 2)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，求 $(\boldsymbol{A}^*)^*$。

例 25 (2009-2010 第一学期)　计算下列各题:

(1) 已知 $A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 A^{2010};

(2) 设 $n(n\geq 2)$ 阶方阵 A 非奇异, 求 $(A^*)^*$。

解

(1) 由 $|A-\lambda I|=(a+b+c-\lambda)\lambda^2=0$ 知, 特征值为 $\lambda_{1,2}=0$ 与 $\lambda_3=a+b+c$。

- $\lambda_{1,2}=0$, 方程为 $x+y+z=0$, 基础解系为 $\boxed{x_1=(-1,1,0)^T, x_2=(-1,0,1)^T}$。
- $\lambda_3=a+b+c$, 方程为 $\begin{pmatrix} -b-c & a & a \\ b & -a-c & b \\ c & c & -a-b \end{pmatrix} x=0$, 基础解系为 $\boxed{x_3=(a,b,c)^T}$。

故

$$A(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & a+b+c \end{pmatrix}$$

从而

$$\boldsymbol{A}^{2010}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & a+b+c \end{pmatrix}^{2010}\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{a+b+c}\begin{pmatrix} -b & a+c & -b \\ -c & -c & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{2010}=(a+b+c)^{2009}\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

例 26 (2009-2010 第一学期，2011-2012 第二学期)　设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$。

例 26 (2009-2010 第一学期，2011-2012 第二学期)　设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$。

解　依题意可知 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$，解此矩阵方程即可求得 $\boldsymbol{X}$。

例 26 (2009-2010 第一学期，2011-2012 第二学期)　设三阶方阵 A 满足 $AX = A + 2X$，且 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X。

解　依题意可知 $(A-2I)X = A$，解此矩阵方程即可求得 X。

$$(A-2I, A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

例 27 (2009-2010 第二学期) 已知矩阵方程满足 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{C}^{-1}$，求 $\boldsymbol{A}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

例 27 (2009-2010 第二学期)　已知矩阵方程满足 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{C}^{-1}$，求 $\boldsymbol{A}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

解　依题意知 $\boldsymbol{A}^T=(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{C}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}))^{-1}=(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}$

$$(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&0&1&0&0&-4\\0&1&2&0&0&1&0&-3\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0&-3&2\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

例 28 (2012-2013 第二学期)　已知 A 为三阶矩阵，$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且满足 $2A^{-1}B=B-4I$，I 为三阶单位矩阵，求矩阵 A。

例 28 (2012-2013 第二学期)　已知 A 为三阶矩阵，$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，且满足 $2A^{-1}B=B-4I$，I 为三阶单位矩阵，求矩阵 A。

解　依题意 $A(B-4I)=2B$，可用 $\boxed{\begin{pmatrix}B-4I\\ 2B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}I\\ A\end{pmatrix}}$ 求 A。

$$\begin{pmatrix}B-4I\\ 2B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 2 & -4 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

例 29 (2012-2013 第二学期) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $A^*BA=2BA-9I$，求 B。

例 29 (2012-2013 第二学期) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $A^*BA=2BA-9I$，求 B。

解 易知 $|A|=-1$，即 A 可逆，由 $AA^*=|A|I=-I$ 可得

$$A^*BA=2BA-9I \quad\Rightarrow\quad AA^*BA=A(2BA-9I)$$

$$\Rightarrow\quad -BA=2ABA-9A \quad\Rightarrow\quad -B=2AB-9I \quad\Rightarrow\quad (2A+I)B=9I$$

$$(2A+I,9I)=\begin{pmatrix}-1&0&0&9&0&0\\0&3&0&0&9&0\\0&2&3&0&0&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-9&0&0\\0&1&0&0&3&0\\0&0&1&0&-2&3\end{pmatrix}$$

例 30 (2012-2013 第二学期)　设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 A^n;

(2) 设 $A^2+AB-A=I$，求 $|B|$。

例 30 (2012-2013 第二学期)　设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 A^n;

(2) 设 $A^2 + AB - A = I$，求 $|B|$。

解

(1) 求矩阵的特征值与特征向量。

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)^3$$

- 当 $\lambda_{1,2,3}=2$ 时，$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$

基础解系为

$$\boldsymbol{x}_1=(-1,1,0,0)^T,\quad \boldsymbol{x}_2=(-1,0,1,0)^T,\quad \boldsymbol{x}_3=(-1,0,0,1)^T.$$

故对应于 $\lambda_{1,2,3}=2$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3,(k_1,k_2,k_3$不全为零$)$;

- 当 $\lambda_4=-2$ 时，$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应方程为

$$\begin{cases} x_1=x_4 \\ x_2=x_4 \\ x_3=x_4 \\ x_4=x_4 \end{cases}$$

基础解系为

$$\boldsymbol{x}_3=(1,1,1,1)^T$$

取

$$P=(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

则 $AP=P\Lambda$，即

$$A=P\Lambda P^{-1},$$

从而

$$A^n=P\Lambda^nP^{-1}=2^nP\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&(-1)^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

当 n 为偶数时，$A^n=2^nI$ 当 n 为奇数时，$A^n=2^nP\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}P^{-1}$ 而

$A=2P\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}P^{-1}$ 故 $A^n=2^{n-1}A$。

(2) 依题意，

$$AB = I - A + A^2 = I - A + 4I = -A + 5I$$

故

$$|A||B| = |-A + 5I|$$

即

$$-16|B| = |A - 5I| = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 189$$

故

$$|B| = -\frac{189}{16}.$$

1. 行列式
2. 矩阵及其运算
3. 向量组　矩阵的秩
4. 向量空间与线性变换
5. 特征值问题
6. 二次型

3.1 知识点

线性相关性

设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 m 维列向量，则线性组合

$$x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n$$

可表示为矩阵形式

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

线性相关性与齐次线性方程组的解

结论　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，等价于齐次方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

有非零解，也等价于

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n) < n = \text{矩阵 } \boldsymbol{A} \text{ 的列数}.$$

线性相关性与齐次线性方程组的解

结论 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，等价于齐次方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

只有零解，也等价于

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = n = \text{矩阵 } \boldsymbol{A} \text{ 的列数}.$$

线性表示与非齐次线性方程组的解

结论　向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，等价于方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

有解，也等价于

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

线性表示与非齐次线性方程组的解

结论 向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 惟一地线性表示，等价于方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

有惟一解，也等价于

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\text{的列数}.$$

线性相关性

结论 关于向量组的线性相关性，有如下结论：

- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。
-

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{相关}$$

向量组和矩阵的秩

定义 (向量组的秩)　设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$。如果能从其中选出 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，满足

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；
- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关，

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

极大线性无关组所含向量的个数 r，称为原向量组的秩。

定义 (矩阵的秩)　矩阵的行秩或列秩的数值，称为矩阵的秩。

向量组的秩

结论 设

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = p, \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r,$$

如果向量组 B: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由 A: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则

$$r \le p.$$

以上结论中，向量组 B: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可看作是向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个线性组合。由此可知

结论 (★★★★★) 对向量组进行线性组合，秩不变或减少。

矩阵的秩

性质

$$\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\} \quad\le\quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \quad\le\quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \quad\le\quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}) \quad\le\quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1.$$

设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=p$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=q$， $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p \quad 和 \quad \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列向量组可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q$ 线性表示。

注 1

- $$\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\} \quad \le \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$$

  意味着：在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当 $\boldsymbol{B}$ 的列向量能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示时，等号成立。

- $$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \quad \le \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$$

  意味着：对 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$，有可能 $\boldsymbol{A}$ 的列向量与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量出现线性相关，合并为 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ 的秩一般会比 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 要小。

矩阵的秩

性质

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=p$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=q$， $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \quad 和 \quad \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

矩阵的秩

性质

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=p$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=q$， $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \quad 和 \quad \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 线性表示。

注 2　将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合并、相加，秩不变或减小。

矩阵的秩

性质

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leq \min(\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{r}(\boldsymbol{B})).$$

矩阵的秩

性质

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \le \min(\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{r}(\boldsymbol{B})).$$

证明. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n, n\times s$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，则

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{AB}\text{的列秩} \le \boldsymbol{A}\text{的列秩} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

矩阵的秩

性质

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \le \min(\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{r}(\boldsymbol{B})).$$

证明. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n, n\times s$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，则

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{AB}\text{的列秩} \le \boldsymbol{A}\text{的列秩} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

类似地，将 $\boldsymbol{B}$ 按行分块，可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \le \mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

□

矩阵的秩

性质 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{PA})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AQ})=\mathrm{r}(\boldsymbol{PAQ}).$$

齐次线性方程组解的结构

定义 (基础解系)　设 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，若

(1) $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 线性无关

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任一解向量可由 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 线性表示。

则称 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

定理 (★★★★★)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r<n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 存在基础解系，且基础解系含 $n-r$ 个解向量。

齐次线性方程组的全部解可由基础解系给出：

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{x}_p \quad (k_1,k_2,\cdots,k_p\text{为任意常数}).$$

非齐次线性方程组

结论 (非齐次线性方程组解的结构)

$$\text{“}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\text{ 的通解”} = \text{“}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{ 的通解”} + \text{“}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\text{ 的特解”}$$

几类重要的矩阵

定义 (阶梯形矩阵)　若矩阵 A 满足

(1) 零行在最下方；

(2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增，

则称 A 为**阶梯形矩阵**。

几类重要的矩阵

定义 (阶梯形矩阵) 若矩阵 A 满足

(1) 零行在最下方;

(2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增,

则称 A 为**阶梯形矩阵**。

例 31

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

几类重要的矩阵

定义 (行简化阶梯形矩阵) 若矩阵 A 满足

(1) 它是阶梯形矩阵；

(2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外，其余元素全为零，

则称 A 为**行简化阶梯形矩阵**。

定义 (行简化阶梯形矩阵) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 它是阶梯形矩阵;

(2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外，其余元素全为零,

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行简化阶梯形矩阵**。

例 32

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

几类重要的矩阵

定义 (行最简阶梯形矩阵) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 它是行简化阶梯形矩阵；

(2) 非零行首元为 1,

则称 $\boldsymbol{A}$ 为行最简阶梯形矩阵。

几类重要的矩阵

定义 (行最简阶梯形矩阵) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 它是行简化阶梯形矩阵；

(2) 非零行首元为 1，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行最简阶梯形矩阵**。

例 33

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2　典型例题 1　（线性相关性）

典型例题 1 （线性相关性）

例 34 (2007-2008 第一学期，2010-2011 第一学期) 若有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$ 成立，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性相关。试讨论该结论是否正确？

典型例题 1 （线性相关性）

例 34 (2007-2008 第一学期，2010-2011 第一学期) 若有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$ 成立，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性相关。试讨论该结论是否正确？

该题可转换为：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\text{有非零解} \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\text{和}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\text{都有非零解}$$

典型例题 1　（线性相关性）

例 35 (2007-2008 第二学期)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，易知 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是否线性相关？为什么？

典型例题 1 （线性相关性）

例 35 (2007-2008 第二学期) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times m$ 矩阵，I 为单位矩阵，易知 $BA = I$，试判断 A 的列向量组是否线性相关？为什么？

解 一方面

$$\mathrm{r}(A) \geq \mathrm{r}(BA) = n,$$

另一方面

$$\mathrm{r}(A) \leq n$$

故 $\mathrm{r}(A) = n$，于是 A 的列向量组线性无关。

典型例题 1 （线性相关性）

例 36 (2012-2013 第二学期) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$n<m$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关。

典型例题 1 （线性相关性）

例 37 (2008-2009 第一学期) 证明：与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系。

典型例题 1 （线性相关性）

例 37 (2008-2009 第一学期) 证明：与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系。

证明设 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为基础解系，$B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是 A 的等价组，且线性无关。由于 B 等价于 A，故 A,B 可以互相线性表示。因 A 为基础解系，齐次线性方程组的全部解能由 A 线性表示，而 A 可由 B 线性表示，故齐次线性方程组的全部解能由 B 线性表示。注意到 $r(A)=r$ 和 $r(B=s)$，而 A 与 B 等价，故 $r(A)=r(B)$，即 $r=s$。综上所述，B 也为基础解系。

典型例题 1 （线性相关性）

例 38 (2009-2010 第一学期) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，

1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性无关，并说明理由。

2 常数 l, m 满足何种条件时，$l\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, m\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，并说明理由。

典型例题 1 （线性相关性）

例 38 (2009-2010 第一学期)　已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，

1. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性无关，并说明理由。
2. 常数 l, m 满足何种条件时，$l\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, m\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，并说明理由。

证明

1. 整体无关，则部分无关。
2. 设 $x_1(l\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + x_3(m\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0}$ 即

$$(lx_1 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_1 + x_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (x_2 + mx_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

$$\left\{\begin{array}{rcl} lx_1 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_2 + mx_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

只有零解。

3.3 典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

例 39 (★★★★★) 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\6\\4\\-1\end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

例 39 (★★★★★)　设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\6\\4\\-1\end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解　作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$，由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div 3}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

将最后一个阶梯矩阵 $\boldsymbol{B}$ 记为 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$

典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

将最后一个阶梯矩阵 $\boldsymbol{B}$ 记为 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$

易知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3,$$

且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

例 40 (★★★★★)　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,k,4)$，试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩，并将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

例 40 (★★★★★) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,k,4)$，试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩，并将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

解 将 4 个向量按列排成一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换，将其化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{U}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}=\boldsymbol{U}$$

例 40 (★★★★★) 设
$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,k,4)$，试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩，并将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

解 将 4 个向量按列排成一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换，将其化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{U}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{U}$$

(1) 当 $a=1$ 或 $k=2$ 时，$\boldsymbol{U}$ 只有 3 个非零行，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3.$$

例 40 (★★★★★) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,k,4)$，试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩，并将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

解 将 4 个向量按列排成一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换，将其化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{U}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}=\boldsymbol{U}$$

(1) 当 $a=1$ 或 $k=2$ 时，$\boldsymbol{U}$ 只有 3 个非零行，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3.$$

(2) 当 $a\neq 1$ 且 $k\neq 2$ 时，

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=4.$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

- 当 $k=2$ 且 $a\neq 1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{1+5a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2+a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{3}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

- 当 $k=2$ 且 $a\neq 1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{1+5a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2+a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{3}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

- 当 $k\neq 2$ 或 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

例 41 (★★★★★) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $\mathrm{r}(A) = 2$，求 t。

例 41 (★★★★★) 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $\mathrm{r}(A)=2$，求 t。

解

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

例 41 (★★★★★) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $\mathrm{r}(A) = 2$，求 t。

解

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

由于 $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A)$，故 B 中第 2、3 行必须成比例，即

$$\frac{-2}{2+t} = \frac{-4}{6},$$

即得 $t = 1$。

典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

例 42 (2005-2006 第二学期) 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,1,3,1),$$

求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个极大无关组。

典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

例 43 (2006-2007 第二学期) 计算向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-2,3,-1,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,2,-2,-3)^T,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (5,0,7,-5,-4)^T, \boldsymbol{\alpha}_4 = (3,-1,5,-3,-1)^T$$

的秩和一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

例 44 (2007-2008 第二学期) 计算向量组

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(-8,4,8)^T,\boldsymbol{\xi}_3=(2,-1,-2)^T,\boldsymbol{\xi}_4=(10,5,6)^T$$

的秩和一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

例 45 (2008-2009 第一学期) 计算向量组

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,2,1)^T, \boldsymbol{\xi}_2 = (2,0,1,-1)^T, \boldsymbol{\xi}_3 = (1,1,0,1)^T, \boldsymbol{\xi}_4 = (4,1,3,1)^T$$

的秩和一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

例 46 (2008-2009 第一学期)　计算向量组

$$\xi_1=(1,1,0)^T,\xi_2=(0,1,1)^T,\xi_3=(1,1,1)^T,\xi_4=(1,2,1)^T$$

的秩和一个极大无关组，并给出向量组中不能由其余向量线性表示的向量。

典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

例 47 (2009-2010 第一学期) 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

1 求 λ, a.
2 求其通解。

例 48 (2009-2010 第一学期) 设有向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)^T,\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^T,$$

讨论当 a,b 为何值时，

1. $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；
2. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 惟一地线性表示，并求出表示式；
3. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）

例 49 (2012-2013 第二学期)　已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix}$$

问 a,b 为何值时，

1. $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；
2. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 惟一地线性表示，并求出表示式；
3. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式；
4. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，并在此时求它的秩和一个最大无关组，且用该最大无关组表示其余向量。

3.4 典型题型 3 （非齐次线性方程组）

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

例 50 (★★★★★)　设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组

(1) 有唯一解？

(2) 无解？

(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

例 50 (★★★★★) 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +(1+\lambda)x_3 & = & \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组

(1) 有唯一解？

(2) 无解？

(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

解

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2.$$

故当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时，有唯一解。

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

当 $\lambda=0$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

当 $\lambda=0$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

当 $\lambda=-3$ 时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

当 $\lambda=0$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

当 $\lambda=-3$ 时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_3-1 \\ x_2=x_3-2 \\ x_3=x_3 \end{cases}$$

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

当 $\lambda=0$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

当 $\lambda=-3$ 时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_3-1 \\ x_2=x_3-2 \\ x_3=x_3 \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c\in\mathbb{R}$$

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

例 51 (2005-2006 第一学期) 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix},$$

问 λ 为何值时，该方程组有唯一解、无解或无穷多解？并在有无穷多解时求其解。

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

例 52 (2005-2006 第二学期；2006-2007 第二学期) 设线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + \lambda_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & \lambda - 1 \end{cases}$$

，问 λ 为何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在无穷多解时求出其通解。

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

例 53 (2006-2007 第一学期) 当 a,b 为何值时，方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & a+8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b+7 \end{pmatrix}$$

有唯一解、无解或无穷多解？在有解时，给出方程组的解。

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

例 54 (2007-2008 第一学期，2010-2011 第二学期)　设线性方程组
$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 & = & \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 & = & -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 & = & -2 \end{cases}$，问 λ 为何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在无穷多解时求出其通解。

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

例 55 (2008-2009 第一学期)　设线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

，问 λ 为何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在无穷多解时求出其通解。

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

例 56 (2009-2010 第一学期)　设线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix},$$

问 λ 为何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在无穷多解时求出其通解。

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

例 57 (2009-2010 第一学期)　设线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$，问 a, b 为何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在无穷多解时求出其通解。

例 58 (2011-2012 第一学期)　已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形，对 λ 进行讨论，并在无穷多解时求其通解。

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

例 59 (2011-2012 第二学期) 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&1&3&5\\3&2&a&7\\1&-1&3&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\b\end{pmatrix}$. 就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形，对 a,b 进行讨论，并在无穷多解时求其通解。

例 60 (2012-2013 第二学期) 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4&\lambda-5\\2&5-\lambda&-4\\2-\lambda&2&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\lambda+1\\2\\1\end{pmatrix}$. 就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形，对 λ 进行讨论，并在无穷多解时求其通解。

典型题型 3 （非齐次线性方程组）

例 61 (2013-2014 第一学期) 已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2b \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2b \end{pmatrix}.$$

就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形，对 a,b 进行讨论，并在无穷多解时求其通解。

1. 行列式

2. 矩阵及其运算

3. 向量组　矩阵的秩

4. 向量空间与线性变换

5. 特征值问题

6. 二次型

4.1 知识点

基与坐标

定义 ($\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标) 设有序向量组 $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\subset\mathbb{R}^n$，如果 B 线性无关，则 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

称 B 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标，记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\quad 或 \quad \boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

并称之为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标向量。

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

基与坐标

定理 设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\eta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\eta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关的充要条件是

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

基与坐标

设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵。

基与坐标

定理 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

例 62 已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基为 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

基与坐标

例 63　已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^T.$$

(1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 α 在基 B_1 的坐标为 $(1,-2,-1)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标。

内积

定义 (内积)　在 $\mathbb{R}^n$ 中，对于 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为列向量时，

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}.$$

内积

性质 对于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$ 和 $k\in\mathbb{R}$,

(i) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

定义 (向量长度) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$$

内积

定理 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \le \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|$$

定义 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$<\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}> = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理

$$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \iff (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

定理 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \le \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|.$$

标准正交基

定理 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的。

定义 (标准正交基) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$，若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基。

标准正交基

例 64 设 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基，求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标。

解

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\\
\Longrightarrow\quad&(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_j)=x_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)\\
\Longrightarrow\quad&x_j=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)
\end{aligned}
$$

施密特正交化过程

目标

从线性无关的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 出发，构造标准正交向量组。

施密特正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,

- 正交化
  1. $$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$$
  2. $$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$
  3. $$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$
  4. $$\cdots\cdots$$
  5. $$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_{m-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{m-1},\boldsymbol{\beta}_{m-1})}\boldsymbol{\beta}_{m-1}.$$
- 单位化

$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\xrightarrow{\eta_j=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_j}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}}\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$$

施密特正交化过程

例 65 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&= (1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\
&= (1,-1,1)^T-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T-\frac{2}{2}(1,-1,0)^T=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

施密特正交化过程

解 (续)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

正交矩阵

定义（正交矩阵） 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，如果

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

定理

$$\boldsymbol{A}\text{为正交矩阵}\quad\Longleftrightarrow\quad\boldsymbol{A}\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

正交矩阵

定理 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶正交矩阵，则

(1) $|\boldsymbol{A}| = 1$ 或 -1

(2) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$

(3) $\boldsymbol{A}^T$ 也是正交矩阵

(4) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵

定理 若列向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$，则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变.

线性空间的定义

定义　数域 F 上的线性空间 V 是一个非空集合，存在两种运算

- 加法（$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$）
- 数乘 ($\lambda\in\boldsymbol{\alpha}$)

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,\lambda\in F$，且 V 对两种运算封闭，并满足以下 8 条性质：

1. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$
2. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$
3. 存在 $\mathbf{0}\in V$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\mathbf{0}$ 称为 V 的零元素
4. 存在 $-\boldsymbol{\alpha}\in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，其中 $-\boldsymbol{\alpha}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素
5. $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$
6. $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$
7. $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$
8. $k(\alpha+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V,k,l\in F$。

线性空间的定义

例 66

- 数域 F 上的全体多项式$F(x)$，对通常的多项式加法和数乘多项式的运算构成数域 F 上的线性空间，其中
- 如果只考虑次数小于 n 的实系数多项式，则它们连同零多项式一起构成实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间，记为$\mathbb{R}[x]_n$。

线性空间的定义

例 67　对矩阵的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间，记为$\mathbb{R}^{m\times n}$。

线性空间的定义

例 68　对于$[a,b]$ 上的全体实连续函数，加法与数乘运算构成实数域上的线性空间，记为$C[a,b]$。

对于(a,b) 上全体 k 阶导数连续的实函数，对同样的加法和数乘运算也构成实线性空间，记为$C^k(a,b)$。

线性空间的性质

性质 线性空间的零元素是唯一的。

性质 线性空间中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素是唯一的。

性质 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V; k,l\in F$，则

$$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\beta},\quad (k-l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\alpha}.$$

性质

- $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$
- $k(-\boldsymbol{\beta})=-(k\boldsymbol{\beta})$
- $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$
- $(-l)\boldsymbol{\alpha}=-(l\boldsymbol{\alpha})$.

性质 设 $\boldsymbol{\alpha}\in V, k\in F$，若 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则 $k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

线性子空间

定义 (线性子空间)　设 $V(F)$ 是一个线性空间，W 是 V 的一个非空子集合。如果 W 对 $V(F)$ 中定义的线性运算也构成数域 F 上的一个线性空间，则称 W 为 $V(F)$ 上的一个线性子空间（简称子空间）。

定理　线性空间 $V(F)$ 的非空子集合 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

线性子空间

例 69 在线性空间 V 中，

- 由单个的零向量组成的子集合 $\{\mathbf{0}\}$ 是 V 的一个子空间，称为零子空间；
- V 本身也是 V 的一个子空间，

这两个子空间都称为 V 的平凡子空间，而 V 的其他子空间称为非平凡子空间。

线性子空间

例 70　设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解集合

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

是 F^n 的一个子空间，称为齐次线性方程组的解空间 (也称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间，记作 $\mathcal{N}(A)$)。

注：非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解集合不是 F^n 的子空间。

线性子空间

例 71　全体 n 阶实数量矩阵、实对角矩阵、实对称矩阵、实上（下）三角矩阵分别组成的集合，都是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间。

线性子空间

例 72　设 $\mathbb{R}^3$ 的子集合

$$V_1 = \{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}, V_2 = \{(1, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\},$$

则 V_1 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，V_2 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

注：在 $\mathbb{R}^3$ 中，

- 凡是过原点的平面或直线上的全体向量组成的子集合都是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间；
- 凡是不过原点的平面或直线上的全体向量组成的子集合都不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

线性子空间

定理 设 V 是数域 F 上的线性空间，S 是 V 的一个非空子集合，则 S 中的一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W = \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\alpha}_i \in S,\ k_i \in F,\ i = 1, \cdots, m\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间。

这里，W 称为由 V 的非空子集 S 生成的子空间。

特别地，当 S 为有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 时，记

$$W = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) \text{ 或} W = span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$$

为由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间。

线性子空间

例 73

- $Ax = \mathbf{0}$ 的解空间是由它的基础解系生成的子空间；
- $\mathbb{R}^3$ 中任一个过原点的平面上的全体向量所构成的子空间，是由该平面上任意两个线性无关的向量生成的子空间。

线性子空间

定理 设 W_1, W_2 是数域 F 上的线性空间 V 上的两个子空间，且

$$W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s),\ W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

则 $W_1 = W_2$ 的充分必要条件是两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价。

线性子空间

定义　设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间，则 V 的子集合

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 \quad &= \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in W_1 \text{ 且} \boldsymbol{\alpha} \in W_2\}, \\ W_1 + W_2 \quad &= \{\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mid \boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2\} \end{aligned}$$

分别称为两个子空间的交与和。

如果 $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$，则称 $W_1 + W_2$ 为直和，记为$W_1 \oplus W_2$。

定理　线性空间 $V(F)$ 的两个子空间 W_1, W_2 的交与和仍是 V 的子空间。

线性子空间

定义 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组生成的子空间，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）空间，记为 $\mathscr{R}(A)$ （$\mathscr{R}(A^T)$）。

若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则

- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为
$$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in \mathbb{R}^m$$
- $\boldsymbol{A}$ 的行向量组为
$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^n$$

于是

- $\mathscr{R}(A) = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间；
- $\mathscr{R}(A^T) = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

线性子空间

$$\begin{aligned} & \text{非齐次线性方程组 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \text{ 有解} \\ \Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{b} \text{ 是 } \boldsymbol{A} \text{ 的列向量组的线性组合} \\ \Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{b} \text{ 属于 } \boldsymbol{A} \text{ 的列空间，即 } \boldsymbol{b} \in \mathscr{R}(\boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

线性子空间

定义 设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$，$W$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。如果对于任意的 $\boldsymbol{\gamma} \in W$，均有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0},$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与子空间 W 正交，记作 $\boldsymbol{\alpha} \perp W$。

定义 设 V 和 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间。如果对于任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\beta} \in W$，均有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0},$$

则称 V 与 W 正交，记作 $V \perp W$。

例 74　对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，其每个解向量与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个行向量都正交，故解空间与 $\boldsymbol{A}$ 的行空间是正交的，即

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{A})\perp\mathcal{R}(A^T).$$

线性子空间

定理 $\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V,\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

线性子空间

定义 $\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全体向量构成的子空间 W，称为 V 的**正交补**，记为 $W = V^{\perp}$。

例 75 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间 $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$ 由与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量都正交的全部向量构成，故

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^{\perp}.$$

这是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的一个基本性质。

线性空间的基、维数和向量的坐标

在一般的线性空间 $V(F)$ 中讨论元素（或称向量）的线性相关性、基、维数以及坐标。

例 76　**证明：线性空间** $\mathbb{R}[x]_n$ **中元素** $f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = x^2, \cdots, f_{n-1} = x^{n-1}$ **是线性无关。**

例 77　**证明：线性空间** $\mathbb{R}^{2\times 2}$ **中的元素**

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是线性无关的。

线性空间的基、维数和向量的坐标

显然，在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，矩阵

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

是也线性无关的，且 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任一矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=a\boldsymbol{E}_{11}+b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}+d\boldsymbol{E}_{22}.$$

在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任意 5 个元素 (二阶矩阵)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{Q}$ 是线性相关的，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 线性无关，则 $\boldsymbol{Q}$ 可由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 线性表出，且表示法唯一。

由此可以发现 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的这些属性与 $\mathbb{R}^4$ 是类似的，我们可以把线性空间的这些属性抽象为基、维数与坐标的概念。

线性空间的基、维数和向量的坐标

定义 如果线性空间 $V(F)$ 中存在线性无关的向量组 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，且任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 都可以由 B 线性表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称

- V 是 n 维线性空间（或者说V 的维数为 n，记作 $dimV=n$）；
- B 是 V 的一个基；
- 有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 B 的坐标（向量），记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in F^n.$$

线性空间的基、维数和向量的坐标

在 n 维线性空间 V 中，

- 任意 $n+1$ 个元素 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 都可以由 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，
- n 维线性空间中任意 $n+1$ 个元素都是线性相关的，

故 n 维线性空间 V 中，任何 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

例 78

- $F[x]_n$ 是 n 维线性空间，$\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\}$ 是它的一组基；
- $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 是 4 维线性空间，$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 是它的一组基；
- $F^{m\times n}$ 是 $m\times n$ 维线性空间，$\{\boldsymbol{E}_{ij}\}_{i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n}$ 是它的一组基。

在线性空间 V 中，$\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$ 的基。

例 79　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})$ 和行空间 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}^T)$ 的维数都等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩。V 的零子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 的维数为零。

线性空间的基、维数和向量的坐标

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是其解空间 $\mathscr{N}(\boldsymbol{A})$ 的基，如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，则解空间 $\mathscr{N}(\boldsymbol{A})$ 的维数为 $n-r$，所以

$$\dim\,(\mathscr{R}(\boldsymbol{A}^T))+\dim\,(\mathscr{N}(\boldsymbol{A}))=n.$$

线性空间的基、维数和向量的坐标

定理 设 V 是 n 维线性空间，W 是 V 的 m 维子空间，且 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 W 中的一组基，则 B_1 可以扩充为 V 的基，即在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基.

定理 (子空间的维数公式) 设 W_1,W_2 是线性空间 $V(F)$ 的子空间，则

$$\dim\ W_1+\dim\ W_2=\dim\ (W_1+W_2)+\dim\ (W_1\cap W_2).$$

线性空间的基、维数和向量的坐标

n 维线性空间 $V(F)$ 中向量在基 B 下的坐标，与 F^n 中向量关于基 B 的坐标是完全类似的，主要有以下几个结论：

- 向量在给定基下的坐标是唯一的；
- 由基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵是可逆的；
- 基变换与坐标变换的公式

在这里都是适用的。

线性空间的基、维数和向量的坐标

给定 $V(F)$ 中的一组基 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$，$V(F)$ 中的向量及其坐标（F^n 中的向量）不仅是一一对应的，而且这种对应保持线性运算关系不变，即

$V(F)$ 中 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}$ 对应于 F^n 中 $\boldsymbol{\alpha}_B+\boldsymbol{\gamma}_B$

$V(F)$ 中 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 对应于 F^n 中 $\lambda\boldsymbol{\alpha}_B$

事实上，若 $\alpha=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\gamma}=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\beta}_n,\lambda\in F$，则有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= (x_1+y_1)\boldsymbol{\beta}_1+(x_2+y_2)\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+(x_n+y_n)\boldsymbol{\beta}_n,\\ \lambda\boldsymbol{\alpha} &= (\lambda x_1)\boldsymbol{\beta}_1+(\lambda x_2)\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+(\lambda x_n)\boldsymbol{\beta}_n\end{aligned}$$

故

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})_B=\boldsymbol{\alpha}_B+\boldsymbol{\beta}_B,\quad (\lambda\boldsymbol{\alpha})_B=\lambda\boldsymbol{\alpha}_B.$$

线性空间的基、维数和向量的坐标

具有上述对应关系的两个线性空间 $V(F)$ 和 F^n，称它们是同构的。

也就是说，研究任何 n 维线性空间 $V(F)$，都可以通过基和坐标，转化为研究 n 维向量空间 F^n。

这样，我们对不同的 n 维线性空间就有了统一的研究方法，统一到研究 F^n。

因此，通常把线性空间也成为向量空间，线性空间中的元素也称为向量。

例 80 证明：$B=\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的一组基，并求

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

在基 B 下的坐标。

证明. 前面我们已经证明 B 是线性无关的，且 $\forall p(x)\in\mathbb{R}[x]_n$ 均可表示成

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1},$$

故 B 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的一组基（自然基），因此 $\mathbb{R}[x]_n$ 是 n 维实线性空间。$p(x)$ 在基 B 下的坐标为

$$(p(x))_B=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T.$$

$$p(x)=(1,x,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

□

例 81 设 $B_1=(g_1,g_2,g_3), B_2=(h_1,h_2,h_3)$，其中

$$\begin{cases} g_1=1, \\ g_2=-1+x, \\ g_3=1-x+x^2, \end{cases}, \quad \begin{cases} h_1=1-x-x^2, \\ h_2=3x-2x^2, \\ h_3=1-2x^2, \end{cases}$$

1. 证明 B_1, B_2 是 $\mathbb{R}[x]_3$ 的基
2. 求 B_1 到 B_2 的过渡矩阵
3. 已知 $[p(x)]_{B_1}=(1,4,3)^T$，求 $[p(x)]_{B_2}$.

定义 (线性变换)　设 $V(F)$ 是一个向量空间，若 $V(F)$ 的一个变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足条件：$\forall \alpha, \beta \in V$ 和 $\lambda \in F$，

1. $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$
2. $\boldsymbol{\sigma}(\lambda \boldsymbol{\alpha})=\lambda \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$

就称 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $V(F)$ 的一个**线性变换**，并称 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的象，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 的原象。

线性运算等价于：$\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ 和 $\lambda, \mu \in F$，有

$$\boldsymbol{\sigma}(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta})=\lambda \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})+\mu \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}).$$

线性变换的定义

例 82 (旋转变换)　$\mathbb{R}^2$ 中每个向量绕原点按逆时针方向旋转 θ 角的变换 $\boldsymbol{R}_\theta$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个线性变换。

例 83 (镜像变换)　$\mathbb{R}^2$ 中每个向量关于过原点的直线 L（看做镜面）相对称的变换 $\boldsymbol{\phi}$ 也是 $\mathbb{R}^2$ 的一个线性变换，即

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}'.$$

例 84 (投影变换)　把 $\mathbb{R}^3$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$ 投影到 xOy 平面上的向量 $\boldsymbol{\beta} = (x_1, x_2, 0)$ 的投影变换 $P(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{P}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$$

是 $\mathbb{R}^2$ 的一个线性变换。

例 85 (恒等变换、零变换、数乘变换)

- 恒等变换 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$,　$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$
- 零变换 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$,　$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$
- 数乘变换 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\boldsymbol{\alpha}$,　$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$

例 86 $\mathbb{R}^3$ 中定义变换

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - 4x_3, 2x_3),$$

则 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性变换。

例 87 $\mathbb{R}^3$ 中定义变换

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2 + x_3, x_2),$$

则 $\boldsymbol{\sigma}$ 不是 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性变换。

对于 $\mathbb{R}^n$ 的变换

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

- 当 y_i 都是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合时，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换。
- 当 y_i 有一个不是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合时，$\boldsymbol{\sigma}$ 不是 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换。

线性变换的简单性质

对于数域 F 上的向量空间 V 中的线性变换 σ

- $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{0})=\mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall \boldsymbol{\alpha}\in V$；
- 若 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n, \quad k_i\in F, \quad \boldsymbol{\alpha}_i\in V$，则
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_n\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n).$$
- 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则其象向量组 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也线性相关。

注 3　但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，不能推导出 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也线性无关。

线性变换的矩阵表示

定理　设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $V(F)$ 的一组基，若 $V(F)$ 的两个线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 关于这组基的象相同，即

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_i),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}$.

线性变换的矩阵表示

因 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_i) \in V(F)$，故它们可由 $V(F)$ 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性表出，即有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_{12} + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_{22} + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_{22} + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n))$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}. \tag{1}$$

线性变换的矩阵表示

定义　若 $V(F)$ 中的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$，使得 $V(F)$ 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 关于基的象 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 满足

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}},$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下对应的矩阵。

线性变换的矩阵表示

定理 设 $V(F)$ 中，

- 线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,
- 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基下的坐标向量为 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$,
- $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 在基下的坐标向量为 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$,

则

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

线性变换的矩阵表示

例 88　旋转变换 $\boldsymbol{R}_\theta$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{e}_2=(0,1)^T$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

例 89　镜像变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的标准正交基 $\{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\eta}\}$ 下所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 90　$\mathbb{R}^n$ 的恒等变换、零变换和数乘变换在任何基下的矩阵分别都是 $\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{0}_n,\lambda\boldsymbol{I}_n$。

线性变换的矩阵表示

例 91　设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性变换，$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，已知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1 &= (1,0,0)^T, & \boldsymbol{\alpha}_2 &= (1,1,0)^T, & \boldsymbol{\alpha}_3 &= (1,1,1)^T, \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) &= (1,-1,0)^T, & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2) &= (-1,1,-1)^T, & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3) &= (1,-1,2)^T. \end{aligned}$$

1. 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 B 下对应的矩阵；
2. 求 $\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\alpha}_2),\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\alpha}_3)$；
3. 已知 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$ 在基 B 下的坐标为 $(2,1,-2)^T$，问 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$ 的原象 $\boldsymbol{\beta}$ 是否唯一？并求 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标。

线性变换的矩阵表示

解　1. 由 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3)\boldsymbol{A}$ 可知

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}$$

可求得

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解　2. 由

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)=(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_2),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_3))=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)\boldsymbol{A}$$

可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_2),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_3))&=\boldsymbol{\sigma}((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)\boldsymbol{A})\\&=(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3))\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)\boldsymbol{A}^2\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)\begin{pmatrix}6&-10&14\\-4&9&-14\\1&-4&7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

解　3. 设 $(\boldsymbol{\beta})_B=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

解得

$$(x_1,x_2,x_3)=(3,2,0)+k(1,2,1),\quad k\in\mathbb{R}$$

故 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$ 的原象 $\boldsymbol{\beta}$ 不唯一。

定理 设线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和基 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，且 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$，则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.$$

例 92 设 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的矩阵，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^T, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = (-1,1,0)^T, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = (-1,0,1)^T.$$

2. $\boldsymbol{\alpha} = (1,2,3)^T$，求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的坐标向量 $(y_1, y_2, y_3)^T$ 及 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$.

解　1. 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$$

知

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

解　2. $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基下的坐标向量为其本身，即 $(1,2,3)^T$，因此，由坐标变换公式得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的坐标向量为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

线性变换的矩阵表示

由

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}:=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$$

知，给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，$\mathbb{R}^n$ 中任一向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 就等价于任给上式中的一个矩阵 $\boldsymbol{A}$。

反过来，任给 n 个向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，是否存在唯一的一个线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$，使得 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\beta}_j$？

线性变换的矩阵表示

定理 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中任意给定的 n 个向量，则一定存在唯一的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$，使得

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\beta}_j,\quad j=1,\cdots,n.$$

线性变换的矩阵表示

综上所述，可得重要结论：

给定 $\mathbb{R}^n$ 的一组基后，$\mathbb{R}^n$ 中的线性变换与 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的矩阵一一对应。

线性变换的运算

定义 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 是线性空间 $V(F)$ 的两个线性变换，$\lambda \in F$，定义

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\alpha}) &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\tau}(\alpha), \\
(\lambda\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\alpha}) &= \lambda\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}), \\
(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\alpha}) &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}))
\end{aligned}$$

上述定义的$\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau}, \lambda\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau}$ 仍是 $V(F)$ 的线性变换。

线性变换的运算

定理 设线性空间 $V(F)$ 的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 在 V 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下对应的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau},\lambda\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau}$在该组基下对应的矩阵分别为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\lambda\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$。

定义 如果线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则称 $\boldsymbol{\sigma}$ 是可逆的线性变换。
$\boldsymbol{\sigma}$ 可逆也可定义为：如果存在线性变换 $\boldsymbol{\tau}$ 使得

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{\sigma}$ 为可逆的线性变换。

线性变换的象（值域）与核

定义　设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是线性空间 $V(F)$ 的一个线性变换，

- 把 V 中所有元素在 $\boldsymbol{\sigma}$ 下的象所组成的集合

$$\boldsymbol{\sigma}(V)=\{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha}\in V\}$$

  称为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的象或值域，记为 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\sigma}$；

- V 的零元 $\mathbf{0}$ 在 $\boldsymbol{\sigma}$ 下的完全原象

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})=\{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\alpha}\in V\}$$

  称为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的核，记为 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\sigma}$。

线性变换的象（值域）与核

(1) $\boldsymbol{\sigma}(V)$（或 $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\sigma}$）是线性空间 $V(F)$ 的一个子空间；

(2) $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$（或 $\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{\sigma}$）也是线性空间 $V(F)$ 的一个子空间；

(3) 线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 是单射的充分必要条件是 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$。

线性变换的象（值域）与核

- $\dim \boldsymbol{\sigma}(V)$ 称为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的秩，记作 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\sigma})$；
- $\dim \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$ 称为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的零度，记作 $\mathscr{N}(\boldsymbol{\sigma})$。

线性变换的象（值域）与核

定理 设线性空间 $V(F)$ 的维数为 n，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 $V(F)$ 的一个线性变换，则

$$\dim \boldsymbol{\sigma}(V) + \dim \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0}) = n.$$

线性变换的象（值域）与核

$$\dim\ \boldsymbol{\sigma}(V) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

$$\dim\ \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0}) = \dim\ \mathscr{N}(\boldsymbol{A}).$$

4.2　往年试题

例 93 (13-14 上)　在 $\mathbb{R}^4$ 中，已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2-a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

1 求 a 使得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\mathbb{R}^4$ 的基；
2 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

例 94　在 $P[x]_3$ 中，求 $f(x)=3x^2+7x+3$ 在基：$f_1=x^2+x, f_2=x^2-x, f_3=x+1$ 下的坐标。

解　设 $f=k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3$ 得

$$\begin{cases} k_1+k_2=3, \\ k_1-k_2+k_3=7, \\ k_3=3 \end{cases}$$

它有唯一解 $(k_1,k_2,k_3)=(\frac{7}{2},-\frac{1}{2},3)$。故 $f(x)$ 在所给基下的坐标为 $(\frac{7}{2},-\frac{1}{2},3)$。

例 95　在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中所有 2 阶实对称矩阵所组成的集合构成 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一个子空间 V。在 V 中定义线性变换 $T:T(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，求线性变换 T 在基 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵。

解　设

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{A}_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3, \\ T(\boldsymbol{A}_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_2+2\boldsymbol{A}_3, \\ T(\boldsymbol{A}_3) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_3, \end{aligned}$$

故所求矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

例 96 已知 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1)^T$，线性变换 T 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别变到 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,-1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(0,3,-2)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T$。

1. 线性变换 T 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵表示 $\boldsymbol{A}$；
2. 求 $\boldsymbol{\xi}=(1,2,-1)^T$ 以及 $T(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标。

解

1. 由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(T(\boldsymbol{\alpha}_1),T(\boldsymbol{\alpha}_2),T(\boldsymbol{\alpha}_3))=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$ 得矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{A}$$

可求得

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 设 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，那么 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}$，即

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

解得

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

例 97　设 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 表示由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间，设有子空间

$$V_1 = \left\{ \boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

1. 将 V_1 和 V_2 用 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 表示出来；
2. 求子空间 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的维数和一组基。

解

1. 解 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ 得基础解系：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,0)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,0)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0,1)^T$$

解 $x_1-x_2+x_3-x_4=0$ 得基础解系：

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0,0)^T,\ \boldsymbol{\beta}_2=(-1,0,1,0)^T,\ \boldsymbol{\beta}_3=(1,0,0,1)^T$$

故

$$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\quad V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3).$$

2. 显然 $\dim\ V_1=\dim\ V_2=3$，$V_1+V_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$。而

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&&&&&-1\\&1&&&&\\&&1&&&1\\&&&1&&\end{bmatrix}$$

由此可以看出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$ 是 V_1+V_2 的一组基，从而 $\dim\ (V_1+V_2)=4$。由 $\dim\ V_1+\dim\ V_2=\dim\ (V_1\cap V_2)+\dim\ (V_1+V_2)$ 知 $\dim\ (V_1\cap V_2)=2$。解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

可得 $V_1\cap V_2$ 的一组基

$$\boldsymbol{\gamma}_1=(-1,0,1,0)^T,\quad \boldsymbol{\gamma}_2=(0,-1,0,1)^T.$$

例 98

1. $1+x, x+x^2, x^2-1$ 可否作为 $L(1+x, x+x^2, x^2-1)$ 的一组基？求 $L(1+x, x+x^2, x^2-1)$ 的维数；
2. 求 $V \to W$ 的线性变换 $T(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ 0 & 2a+b+2c \end{bmatrix}$ 的值域的基和零空间的基。

解

1. 因 $[1+x, x+x^2, x^2-1] = [1, x, x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，而
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 故 $1+x, x+x^2$ 可作为 $L(1+x, x+x^2, x^2-1)$ 的一组基，其维数为 2。
2. 因 $T(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ 0 & 2a+b+2c \end{bmatrix} = (E_{11}, E_{12}, E_{22}) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
而 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，故 $R(T)$ 的基为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，
$ker(T)$ 的基为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

1. 行列式

2. 矩阵及其运算

3. 向量组　矩阵的秩

4. 向量空间与线性变换

5. 特征值问题

6. 二次型

5.1　知识点

特征值与特征向量

定义 (特征值与特征向量) 设 A 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶矩阵，如果存在数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零的 n 维向量 x 使得

$$Ax = \lambda x$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值，x 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

(1) 特征向量 $x \neq 0$；

(2) 特征值问题是对方针而言的。

特征值与特征向量

由定义，n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，就是使齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

有非零解的 λ 值，即满足方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

的 λ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

特征值与特征向量

定义 (特征多项式、特征矩阵、特征方程) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵，$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程。

例 99　例 1 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

例 99　例 1 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-2)^2 = 0$$

故特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_{2,3}=2$(二重特征值）。

特征值与特征向量

- 对于特征值 $\lambda_1 = 3$，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,1)^T$，因此$k_1\boldsymbol{x}_1 (k_1 \neq 0)$是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量。

- 对于特征值 $\lambda_{2,3} = 2$，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $\boldsymbol{x}_2 = (1,1,2)^T$，因此$k_2\boldsymbol{x}_2 (k_2 \neq 0)$是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_{2,3} = 2$ 的全部特征向量。

特征值与特征向量的性质

定理 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

(2) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(\boldsymbol{A})$

- 当 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵时，其特征值全为非零数；
- 奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个零特征值。

特征值与特征向量的性质

定理　一个特征向量不能属于不同的特征值。

特征值与特征向量的性质

性质　性质 1

表: 特征值与特征向量

	特征值	特征向量
$\boldsymbol{A}$	λ	$\boldsymbol{x}$
$k\boldsymbol{A}$	$k\lambda$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{A}^m$	λ^m	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{A}^{-1}$	λ^{-1}	$\boldsymbol{x}$

性质　性质 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 的特征值相同。

特征值与特征向量的性质

例 100　例 对于下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，能做怎样的断言？

(1) $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2)=0$

(2) $\boldsymbol{A}^k=0$

(3) $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$（$\lambda_0$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值）

相似矩阵

定义（相似矩阵） 对于方阵 A 和 B，若存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

就称 A 相似于 B，记作 $A \sim B$.

定理 相似矩阵的特征值相同。

矩阵可对角化的条件

矩阵可对角化，即矩阵与对角阵相似。

定理 矩阵可对角化 $\iff$ n 阶矩阵有 n 个线性无关的特征向量

定理 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

推论 推论 若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似。

矩阵可对角化的条件

例 101　例 设实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

问 A 是否可对角化？若可对角化，求对角阵 Λ 及可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，再求 A^k。

例 101 例 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

问 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化？若可对角化，求对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 及可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，再求 $\boldsymbol{A}^k$。

证明

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)^3$$

故特征值为 $\lambda_1 = -2$，$\lambda_{2,3,4} = 2$

矩阵可对角化的条件

- 对于特征值 $\lambda_1=-2$，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为

$$\boldsymbol{x}_1=(1,1,1,1)^T,$$

故对应于 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{x}_1(k_1\neq 0)$.

矩阵可对角化的条件

- 对于特征值 $\lambda_1=-2$，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为

$$\boldsymbol{x}_1=(1,1,1,1)^T,$$

故对应于 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{x}_1(k_1\neq 0)$.

- 对于特征值 $\lambda_{2,3,4}=2$，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为

$$\boldsymbol{x}_2=(1,-1,0,0)^T,\quad \boldsymbol{x}_3=(1,0,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{x}_4=(1,0,-1,0)^T,$$

故对应于 $\lambda_2=2$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3+k_4\boldsymbol{x}_4(k_2,k_3,k_4$不全为零$)$

矩阵可对角化的条件

由特征值问题定义可知

$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}}$$

取

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\Lambda}$，注意到 $\det(\boldsymbol{P}) \neq 0$，于是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}.$$

矩阵可对角化的条件

例 102　例 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是主对角元全为 2 的上三角矩阵，且存在 $a_{ij}\neq 0(i<j)$，问 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化?

矩阵可对角化的条件

例 102　例 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是主对角元全为 2 的上三角矩阵，且存在 $a_{ij}\neq 0(i<j)$，问 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化?

证明

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & * & \cdots & * \\ 0 & 2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=(2-\lambda)^n \Longrightarrow \lambda=2\text{为 } \boldsymbol{A} \text{ 的 } n \text{ 重特征值}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\geq 1 \quad &\Longrightarrow \quad (2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{的基础解系所含向量个数}\leq n-1 \\ &\Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}\text{的线性无关的特征向量的个数}\leq n-1 \\ &\Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}\text{不与对角阵相似。} \end{aligned}$$

实对称矩阵的对角化

定理 实对称矩阵 A 的任一特征值都是实数。

定理 实对称矩阵 A 对应于不同特征值的特征向量正交。

实对称矩阵的对角化

定理 对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$$

例 103　例 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

求正交阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

例 103　例 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

求正交阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

特征值为 $\lambda_{1,2} = 2$（二重）和 $\lambda_3 = -7$。

实对称矩阵的对角化

- 对于特征值 $\lambda_{1,2}=2$，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{x}_1=(2,-1,0)^T$， $\boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T$。

- 对于特征值 $\lambda_2=-7$，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{x}_3=(1,2,-2)^T$。

实对称矩阵的对角化

- 对特征向量 $\boldsymbol{x}_1=(2,-1,0)^T$, $\boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T$, 先用施密特正交化过程正交化，然后单位化。

  先正交化得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{x}_1, \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{x}_2-\frac{(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 \\
&= \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

实对称矩阵的对角化

- 对特征向量 $x_1=(2,-1,0)^T$， $x_2=(2,0,1)^T$，先用施密特正交化过程正交化，然后单位化。

  先正交化得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{x}_1,\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{x}_2-\frac{(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\ &= \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  再单位化得

$$\boldsymbol{y}_1=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\ -\frac{\sqrt{5}}{5},\ 0\right)^T,\quad \boldsymbol{y}_2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{15},\ -\frac{4\sqrt{5}}{15},\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$$

- 对特征向量 $x_3=(1,2,-2)^T$ 单位化，得 $\boldsymbol{y}_3=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)^T$。

实对称矩阵的对角化

取正交矩阵

$$T=(\boldsymbol{y}_1,\quad \boldsymbol{y}_2,\quad \boldsymbol{y}_3)=\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\operatorname{diag}(2,2,-7).$$

例 104　例 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是相似矩阵，证明：存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$。

例 104　例 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是相似矩阵，证明：存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$。

证明

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B} \quad &\Longrightarrow \quad \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}\text{有相同的特征值 } \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \\
&\Longrightarrow \quad \exists\text{正交阵}\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\quad s.t.\ \ \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 \\
&\Longrightarrow \quad \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

实对称矩阵的对角化

例 105　例 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，若存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$ 都是对角阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵。

例 105　例 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，若存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$ 都是对角阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵。

证明

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{\Lambda}_1 \\ \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{\Lambda}_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2 = \boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{\Lambda}_1 = (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$$

$$\Longrightarrow (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

实对称矩阵的对角化

例 106　★★★ 三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^T$，求 $\boldsymbol{A}$。

实对称矩阵的对角化

例 106　★★★ 三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^T$，求 $\boldsymbol{A}$。

证明

$$\boldsymbol{A}\sim \mathrm{diag}(-1,\ 1,\ 1)$$

注意不同特征值对应的特征向量正交，在与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交的平面上取两个线性无关的向量，如 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1)^T$，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交，单位化即得标准正交向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_2=(1,0,0)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T.$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

5.2　往年试题

例 107 (05-06 上)　设二阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{A}$ 所有可能的特征值。

例 108 (05-06 下)　设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，且 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$，λ_3 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

例 109 (05-06 下)　设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$x$ 为实数，试讨论 x 为何值时，A 可与对角阵相似？

例 110 (06-07 上，08-09 上)　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

- 当 $k=1$ 时，是否存在正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角阵？如果存在，是否唯一？
- 当 $k=0$ 时，A 能否与对角阵相似？

例 111 (07-08 上) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

- 求 A 的特征值和特征向量;
- 求 A^k 及其特征值和特征向量;

例 112 (07-08 下)　已知 $1, 1, -1$ 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,2,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量。

(1) 能否求出 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量？如能，试求出该特征向量，若不能，请说明理由；

(2) 能否由此求得 $\boldsymbol{A}$? 若能，试求之，若不能请说明理由。

例 113 (08-09 上)　已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2 \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{0}$。

(1) 能否求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值？如能，试求出该特征值，若不能，请说明理由；

(2) $\boldsymbol{A}$ 能否对角化？若能，试求之，若不能请说明理由。

(3) 已知 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{I}$，能否求得 $\det(\boldsymbol{B})$，若能，试求之，若不能请说明理由。

例 114 (09-10 下)　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零实列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，

(1) 计算 $\boldsymbol{A}^T$，并回答 $k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 能否对角化？请说明理由，其中 k 为常数；

(2) 计算 $\boldsymbol{A}^2$，并回答 $k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 是否可逆？请说明理由，其中 $k\neq\pm1$ 为常数；

(3) 给出 $\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 为正交矩阵的充分必要条件。

例 115 (08-09 上) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2 \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{A}^3 = \mathbf{0}$。

(1) 能否求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值？如能，试求出该特征值，若不能，请说明理由；

(2) $\boldsymbol{A}$ 能否对角化？若能，试求之，若不能请说明理由。

(3) 已知 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{I}$，能否求得 $\det(\boldsymbol{B})$，若能，试求之，若不能请说明理由。

例 116 (12-13 下)　已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称阵，且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，已知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$。

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值？

(2) 计算 $\det(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})$

(3) 当 k 为何值时，$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 正定。

例 117 (12-13 下)　已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,3$，求 $\det(\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A})$

例 118 (12-13 下)　证明：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零实对称矩阵，则存在 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \neq 0$.

例 119 (13-14 上)　设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^T,\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^T$，且 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2) 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$。

1. 行列式

2. 矩阵及其运算

3. 向量组　矩阵的秩

4. 向量空间与线性变换

5. 特征值问题

6. 二次型

6.1 知识点

二次型的定义和矩阵表示

定义 n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & & & & & & & & & \\
a_{11}x_1^2 & + & 2a_{12}x_1x_2 & + & 2a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & 2a_{1n}x_1x_n \\
 & + & a_{22}x_2^2 & + & 2a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & 2a_{2n}x_2x_n \\
 & & & & \cdots & & \cdots & & \\
 & & & & & & & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}
$$

其矩阵形式为

$$
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}
$$

二次型的定义和矩阵表示

例 120　设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_4+x_3^2+5x_4^2$，则它的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 下的坐标向量分别为

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

又

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n)\boldsymbol{C}$$

故

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

从而

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$$

二次型的定义和矩阵表示

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 下的坐标向量分别为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

又

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n)\boldsymbol{C}$$

故

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

从而

$$f(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$$

二次型 $f(\boldsymbol{\alpha})$ 在两组基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 下所对应的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

矩阵的合同

定义 (矩阵的合同) 对于两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B},$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$，记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$。

用正交变换法将二次型化为标准型

- 含平方项而不含混合项的二次型称为标准二次型。
- 化二次型为标准型，就是对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻找可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵。

用正交变换法将二次型化为标准型

定理 (主轴定理) 对于任一个 n 元二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{Q}$ 为正交阵)，使得

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，$\boldsymbol{Q}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的标准正交特征向量。

例 121 ★★★★★ 用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

例 121 ★★★★★ 用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

对应方程为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

用正交变换法将二次型化为标准型

例 121 ★★★★★ 用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

对应方程为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

得特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 和 $\lambda_3=10$.

用正交变换法将二次型化为标准型

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_3=(1,2,-2)^T.$$

用正交变换法将二次型化为标准型

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_3=(1,2,-2)^T.$$

对 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 用施密特正交化过程先正交化，再单位化，得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5},0\right)^T, \qquad \boldsymbol{\xi}_2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$$

对 $\boldsymbol{x}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\xi}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^T$$

用正交变换法将二次型化为标准型

取正交矩阵

$$Q = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(1, 1, 10).$$

用正交变换法将二次型化为标准型

取正交矩阵

$$Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\mathrm{diag}(1,1,10).$$

令 $x=(x_1,x_2,x_3)^T, y=(y_1,y_2,y_3)^T$，做正交变换 $x=Qy$，原二次型就化成标准型

$$x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

惯性定理和二次型的规范形

定理 (惯性定理)　对于一个 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，不论做怎样的坐标变换使之化为标准形，其中正平方项的项数 p 和负平方项的项数 q 都是唯一确定的。或者说，对一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，不论取怎样的可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，只要使

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} d_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & d_p & & & & & & \\ & & & -d_{p+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -d_{p+q} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $d_i>0(i=1,2,\cdots,p+q),p+q\leq n$ 成立，则 p 和 q 是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的。

惯性定理和二次型的规范形

定义 二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形中，

- 正平方项的项数（与 $\boldsymbol{A}$ 合同的对角阵中正对角元的个数），称为二次型（或 $\boldsymbol{A}$）的**正惯性指数**；
- 负平方项的项数（与 $\boldsymbol{A}$ 合同的对角阵中负对角元的个数），称为二次型（或 $\boldsymbol{A}$）的**负惯性指数**；
- 正、负惯性指数的差称为符号差；
- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩也成为**二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩**。

惯性定理和二次型的规范形

定义 二次型 x^TAx 的标准形中，

- 正平方项的项数（与 A 合同的对角阵中正对角元的个数），称为二次型（或 A）的**正惯性指数**；
- 负平方项的项数（与 A 合同的对角阵中负对角元的个数），称为二次型（或 A）的**负惯性指数**；
- 正、负惯性指数的差称为符号差；
- 矩阵 A 的秩也成为**二次型 x^TAx 的秩**。

设 $\mathrm{r}(A) = r$，正惯性指数为 p，则

- 负惯性指数为 $q = r - p$
- 符号差为 $p - q = 2p - r$
- 与 A 合同的对角阵的零对角元个数为 $n - r$。

惯性定理和二次型的规范形

推论 设 A 为 n 阶实对称矩阵，若 A 的正、负惯性指数分别为 p 和 q，则

$$\underbrace{A \simeq \mathrm{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{p\text{个}},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{q\text{个}},\underbrace{0,\cdots,0}_{n-p-q\text{个}})}_{A\text{的合同规范形}}$$

惯性定理和二次型的规范形

推论 设 A 为 n 阶实对称矩阵，若 A 的正、负惯性指数分别为 p 和 q，则

$$\underbrace{A \simeq \mathrm{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{p\text{个}},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{q\text{个}},\underbrace{0,\cdots,0}_{n-p-q\text{个}})}_{A\text{的合同规范形}}$$

或者说，对于二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，存在坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\underbrace{y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2}_{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\text{的规范形}}.$$

正定二次型和正定矩阵

定义 如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

正定二次型和正定矩阵

定义 如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

注：正定矩阵是针对对称矩阵而言的。

结论　二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 正定
$\iff$ $d_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

结论　一个二次型 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$，经过非退化线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C} \boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}) \boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \overset{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}) \boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

定理 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则以下命题等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 正定；

(2) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n，即 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{I}$；

(3) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{P}$；

(4) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于零。

(5) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式全大于零。

定理

$$\boldsymbol{A}\text{正定} \implies a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \cdots, n) \quad \text{且} \quad \det(\boldsymbol{A}) > 0$$

例 122 A正定 $\Longrightarrow$ A^{-1}正定

例 123 判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$$

是否为正定二次型。

例 124　判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$$

是否为正定二次型。

6.2　典型例题

例 125 (2005-2006 第一学期) 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩。

例 126 (2005-2006 第一学期) 设二次型
$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1$,

(1) 求二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵;

(3) 计算 $\det(\boldsymbol{A}^m)$.

例 127 (2005-2006 第二学期)　判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_2+6x_2x_3$ 的正定性。

例 128 (2006-2007 第一学期) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，试求该二次型的矩阵，并指出 λ 取何值时，f 正定？

例 129 (2006-2007 第二学期) 判断二次型 $f(x,y,z)=3x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz$

(1) 用正交变换化二次型 f 为标准型，并写出相应的正交阵；

(2) 求 $f(x,y,z)$ 在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值和最小值。

例 130 (2006-2007 第二学期)　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+2x_1x_3-2x_2x_3$,

(1) 写出二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量;

(3) 化 f 为标准型;

(4) 判断 f 是否正定.

例 131 (2007-2008 第一学期，2009-2010 第一学期)　对于二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

(1) 求 a,b;

(2) 化 f 为标准型，并写出所用的正交变换和正交矩阵。

例 132 (2007-2008 第二学期) 设二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a,b,c 为常数，则

(1) 写出二次型 f 的具体形式;

(2) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量;

(3) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，化 f 为标准型;

(4) 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 的条件下，求 f 的最大值和最小值.

例 133 (2008-2009 第一学期)　**设二次型** $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$，**经正交变换** $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ **化为标准型** $f=y_2^2+2y_3^2$，**试求** a,b。

例 134 (2008-2009 第一学期)　设二次型
$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1$,

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，化 f 为标准型;

(3) 计算 $\det(\boldsymbol{A}^m)$

例 135 (2009-2010 第二学期)　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+x_2^2$，

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量；

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，化 f 为标准型。

例 136 (2010-2011 第一学期) 设二次型
$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$,

(1) 写出 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，化 f 为标准型。

例 137 (2010-2011 第二学期)　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 的矩阵是奇异阵，

(1) 写出 $\boldsymbol{A}$ 并求 t 的值；

(2) 根据所求 t 的值，求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和一个对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$；

(3) 求 $\boldsymbol{A}^n(n\geq 2)$.

例 138 (2011-2012 第二学期)　在正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准型。

例 139 (2012-2013 第二学期)　已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2，

(1) 求 a;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将 f 化为标准型.

例 140 (2012-2013 第二学期) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 的秩为 2,

(1) 把 f 写成 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的形式;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(3) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 将 f 化为标准型.

例 141 (2013-2014 第一学期)　用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准型.