线性代数

线性方程组

张晓平

数学与统计学院
Email: xpzhang.math@whu.edu.cn
Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

1 n维向量及其线性相关性

2 向量组的秩及其极大线性无关组

考察三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

我们用向量工具给出其几何解释。

考察三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

我们用向量工具给出其几何解释。 记

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以及

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} = a_{i1}\mathbf{i} + a_{i2}\mathbf{j} + a_{i3}\mathbf{k}$$

该线性方程组的解可记为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$$

向量的垂直

两个向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$垂直的充分必要条件是

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0.$$

向量的垂直

两个向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$垂直的充分必要条件是

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0.$$

由以上方程组可看出，解向量$\mathbf{x}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都垂直。

向量的垂直

两个向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$垂直的充分必要条件是

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0.$$

由以上方程组可看出，解向量$\mathbf{x}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都垂直。故

(1) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$不共面，只有零向量与三者都垂直，即线性方程组(1)只有零解；

向量的垂直

两个向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$垂直的充分必要条件是

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0.$$

由以上方程组可看出，解向量$\mathbf{x}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都垂直。故

(1) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$不共面，只有零向量与三者都垂直，即线性方程组(1)只有零解；

(2) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$共面但不共线，则与该平面垂直的向量都是线性方程组(1)的解， 故(1)有无穷多个彼此平行的解向量；

向量的垂直

两个向量$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$垂直的充分必要条件是

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0.$$

由以上方程组可看出，解向量$\mathbf{x}$与$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$都垂直。故

(1) 若$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$不共面，只有零向量与三者都垂直，即线性方程组(1)只有零解；

(2) 若$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$共面但不共线，则与该平面垂直的向量都是线性方程组(1)的解， 故(1)有无穷多个彼此平行的解向量；

(3) 若$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$共线，则过原点且与该直线垂直的平面上的全体向量都是(1)的解向量， 此时任一解向量均可表示为

$$\mathbf{x} = k_1 \mathbf{x}^{(1)} + k_2 \mathbf{x}^{(2)},$$

其中$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}$为(1)的某两个不共线的非零解向量，$k_1, k_2$为任意常数。

n维向量

数域F上的n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$构成的有序数组称为数域F上的一个n维向量，记为

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

其中a_i称为α的第i个分量。

n维向量

数域F上的n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$构成的有序数组称为数域F上的一个n维向量，记为

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

其中a_i称为α的第i个分量。

- 形如(2)的向量称为行向量；
- 形如

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

的向量称为列向量。

n维向量

数域F上的n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$构成的有序数组称为数域F上的一个n维向量，记为

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

其中a_i称为α的第i个分量。

- 形如(2)的向量称为行向量；
- 形如

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

的向量称为列向量。

数域F上全体n维向量组成的集合，记作F^n。

n维向量

数域F上的n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$构成的有序数组称为数域F上的一个n维向量，记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

其中a_i称为$\boldsymbol{\alpha}$的第i个分量。

- 形如(2)的向量称为行向量；
- 形如

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

  的向量称为列向量。

数域F上全体n维向量组成的集合，记作F^n。设$\boldsymbol{\alpha} \in F^n$，则

- 当F取为$\mathbb{R}$时，$\boldsymbol{\alpha}$为实向量；
- 当F取为$\mathbb{C}$时，$\boldsymbol{\alpha}$为复向量。

向量运算

设$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in F^n$，$k \in F$，定义

(i) $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$当且仅当$a_i = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$；

(ii) 向量加法

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

(iii) 向量数乘

$$k\boldsymbol{\alpha} = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$

向量运算

设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in F^n$，$k\in F$，定义

(i) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$当且仅当$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$；

(ii) 向量加法

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

(iii) 向量数乘

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

- 在(iii)中取$k=-1$，得

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

右端的向量称为$\boldsymbol{\alpha}$的负向量，记为$-\boldsymbol{\alpha}$.

- 向量的减法定义为

$$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\alpha})$$

向量的8条运算规则

设$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in F^n, 1, k, l \in F$，则

(1) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$

(2) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$

(3) 对任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，有$\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$

(4) 对任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，存在负向量$-\boldsymbol{\alpha}$，使得$\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$

(5) $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$

(7) $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$

(8) $(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$

向量的8条运算规则

设$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in F^n, 1, k, l \in F$，则

(1) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$

(2) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$

(3) 对任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，有$\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$

(4) 对任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，存在负向量$-\boldsymbol{\alpha}$，使得$\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$

(5) $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$

(7) $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$

(8) $(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$

向量空间

数域F上的n维向量，在其中定义了上述加法与数乘运算，就称之为F上的n维向量空间，仍记为F^n。当$F = \mathbb{R}$时，叫做n维实向量空间，记作$\mathbb{R}^n$。

定义(线性表示)

设$\boldsymbol{\alpha}_i \in F^n, k_i \in F(i = 1, 2, \cdots, m)$，则向量

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{\alpha}_i = k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$在数域$F$上的一个线性组合。

如果记

$$\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{\alpha}_i,$$

则称$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示（或线性表出）。

设有线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵。记

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\mathbf{b}$$

于是线性方程组可等价的表述为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{b}$$

注

向量$\mathbf{b}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，等价于方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{b}$$

有解。

定义(线性相关与线性无关)

若对m个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in F^n$，有$m$个不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0} \tag{3}$$

成立，则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关；否则，称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关。

定义(线性相关与线性无关)

若对m个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in F^n$，有$m$个不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0} \tag{3}$$

成立，则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关；否则，称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关。

注

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，指的是

- 没有不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使(3)成立
- 只有当$k_1, k_2, \cdots, k_m$全为零时，才使(3)成立
- 若(3)成立，则$k_1, k_2, \cdots, k_m$必须全为零

定理3.1.1

- 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，等价于齐次方程组
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$
有非零解。
- 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，等价于齐次方程组
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$
只有零解。

对于只含有一个向量$\boldsymbol{\alpha}$的向量组，若存在不为零的数k使得

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

则

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

对于只含有一个向量$\boldsymbol{\alpha}$的向量组，若存在不为零的数k使得

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

则

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

若$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，要使

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

必须$k = 0$.

对于只含有一个向量$\boldsymbol{\alpha}$的向量组，若存在不为零的数k使得

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

则

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

若$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，要使

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

必须$k = 0$.

小结

- 当$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$时，向量组$\boldsymbol{\alpha}$线性相关
- 当$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$时，向量组$\boldsymbol{\alpha}$线性无关

定理3.1.2

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

定理3.1.2

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

证明: $(\Rightarrow)$　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关，则必存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

定理3.1.2

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

证明： $(\Rightarrow)$ 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关，则必存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

不妨设$k_1 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m\text{fi}$$

必要性得证。

定理3.1.2

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

证明： $(\Rightarrow)$ 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关，则必存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

不妨设$k_1 \neq 0$，则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m \text{fi}$$

必要性得证。

$(\Leftarrow)$ 不妨设α_1可由$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示，即

$$\alpha_1 = l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m$$

定理3.1.2

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

证明: $(\Rightarrow)$ 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关，则必存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

不妨设$k_1 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m\text{fi}$$

必要性得证。

$(\Leftarrow)$ 不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - l_2\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - l_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

定理3.1.2

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

证明： $(\Rightarrow)$ 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关，则必存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

不妨设$k_1 \neq 0$，则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m \text{fi}$$

必要性得证。

$(\Leftarrow)$ 不妨设α_1可由$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示，即

$$\alpha_1 = l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m$$

于是有

$$\alpha_1 - l_2\alpha_2 - \cdots - l_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

显然$1, -l_2, \cdots, -l_m$不全为零，故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关。

证明线性无关的方法

证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的基本方法为：

说明齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

只有零解。

证明线性无关的方法

证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的基本方法为：

说明齐次方程组
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$
只有零解。

也常常表述为：设
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$
然后说明上式成立，只能有唯一选择：
$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0.$$

例1

设n维向量$\mathbf{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$，则$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$线性无关。

例1

设n维向量$\mathbf{e}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，则$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$线性无关。

解: 设存在$k_1,k_2,\cdots,k_n$使得

$$k_1\mathbf{e}_1+k_2\mathbf{e}_2+\cdots+k_n\mathbf{e}_n=\mathbf{0},$$

即

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\mathbf{0},$$

则必有$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$线性无关。

例1

设n维向量$\mathbf{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$，则$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$线性无关。

解: 设存在$k_1, k_2, \cdots, k_n$使得

$$k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \cdots + k_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0},$$

即

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) = \mathbf{0},$$

则必有$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，故$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$线性无关。

注

n维向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$称为基本向量。$F^n$中任何向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$都可以由$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$线性表示，即

$$\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n.$$

例2

包含零向量的向量组是线性相关的。

例2

包含零向量的向量组是线性相关的。

解: 设该向量组为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$。则存在$m$个不全为零的数$1, 0, \cdots, 0$使得

$$1\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

故该向量组线性相关。

例3

如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关。

例3

如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关。

证明: 不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r < m)$线性相关，则存在$r$个不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_r$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

从而有m个不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + 0\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

故$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关。

注

- 如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，则其中任一部分向量组也线性无关。
- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

注

- 如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，则其中任一部分向量组也线性无关。
- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

注

该定理不能理解为：线性相关的向量组中，每一个向量都能由其余向量线性表示。

注

- 如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，则其中任一部分向量组也线性无关。
- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

注

该定理不能理解为：线性相关的向量组中，每一个向量都能由其余向量线性表示。

如$\alpha_1 = (0, 1)$，$\alpha_2 = (0, -2)$，$\alpha_3 = (1, 1)$线性相关(因为α_1，α_2线性相关)，但α_3不能由α_1，α_2线性表示。

重要结论

对于齐次线性方程组，如果

$$\text{未知量个数} \quad > \quad \text{方程个数},$$

则它必有无穷多解，从而必有非零解。

定理3.1.3

任意$n+1$个n维向量都是线性相关的。

定理3.1.3

任意$n+1$个n维向量都是线性相关的。

证明： 对向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \in F^n$，设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n + x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0},$$

注意到此齐次线性方程组中，未知量个数为$n+1$，而方程个数为n，故方程组一定有无穷多个解，从而必有非零解。得证$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$线性相关。

定理3.1.3

任意$n+1$个n维向量都是线性相关的。

证明： 对向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \in F^n$，设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n + x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0},$$

注意到此齐次线性方程组中，未知量个数为$n+1$，而方程个数为n，故方程组一定有无穷多个解，从而必有非零解。得证$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$线性相关。

注

- 向量个数 $>$ 向量维数 $\Rightarrow$ 向量组必线性相关。

定理3.1.3

任意$n+1$个n维向量都是线性相关的。

证明： 对向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \in F^n$，设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n + x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0},$$

注意到此齐次线性方程组中，未知量个数为$n+1$，而方程个数为n，故方程组一定有无穷多个解，从而必有非零解。得证$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$线性相关。

注

- 向量个数 > 向量维数 $\Rightarrow$ 向量组必线性相关。
- 在$\mathbb{R}^n$中，任意一组线性无关的向量最多只能含n个向量。

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故存在不全为零的数$k, k_1, k_2, \cdots, k_r$使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

其中$k \neq 0$

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故存在不全为零的数$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

其中$k\neq 0$(若$k=0$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关可知$k_1,k_2,\cdots,k_r$全为零，这与$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零矛盾)。

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故存在不全为零的数$k, k_1, k_2, \cdots, k_r$使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

其中$k \neq 0$(若$k = 0$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关可知$k_1, k_2, \cdots, k_r$全为零，这与$k, k_1, k_2, \cdots, k_r$不全为零矛盾)。于是$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示为

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故存在不全为零的数$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

其中$k\neq 0$(若$k=0$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关可知$k_1,k_2,\cdots,k_r$全为零，这与$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零矛盾)。于是$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

再证唯一性　设有两种表示法

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r,\quad \boldsymbol{\beta}=h_1\boldsymbol{\alpha}_1+h_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+h_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故存在不全为零的数$k, k_1, k_2, \cdots, k_r$使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

其中$k \neq 0$(若$k = 0$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关可知$k_1, k_2, \cdots, k_r$全为零，这与$k, k_1, k_2, \cdots, k_r$不全为零矛盾)。于是$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示为

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

再证唯一性　设有两种表示法

$$\boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_r\boldsymbol{\alpha}_r, \quad \boldsymbol{\beta} = h_1\boldsymbol{\alpha}_1 + h_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + h_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

于是

$$(l_1 - h_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (l_2 - h_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (l_r - h_r)\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0},$$

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故存在不全为零的数$k, k_1, k_2, \cdots, k_r$使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

其中$k \neq 0$(若$k = 0$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关可知$k_1, k_2, \cdots, k_r$全为零，这与$k, k_1, k_2, \cdots, k_r$不全为零矛盾)。于是$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示为

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

再证唯一性　设有两种表示法

$$\boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_r\boldsymbol{\alpha}_r, \quad \boldsymbol{\beta} = h_1\boldsymbol{\alpha}_1 + h_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + h_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

于是

$$(l_1 - h_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (l_2 - h_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (l_r - h_r)\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0},$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关可知 $l_i - h_i = 0$,　即$l_i = h_i$.

故$\boldsymbol{\beta}$由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示的表示法惟一。

推论

如果F^n中的n个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关，则$F^n$中的任一向量$\alpha$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示，且表示法惟一。

推论

如果F^n中的n个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关，则$F^n$中的任一向量$\alpha$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示，且表示法惟一。

证明： 由"任意$n+1$个n维向量线性相关"知，$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关，由前述定理可得结论成立。

例4

设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0), \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3), \boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是否线性相关?

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$可否由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示? 如能表示求出其表示式。

例4

设$\alpha_1=(1,-1,1),\alpha_2=(1,2,0),\alpha_3=(1,0,3),\alpha_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关?

(2) α_4可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示? 如能表示求出其表示式。

解:

(1) 考察 $\mathbf{A}=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 由$|\mathbf{A}|=7$可知$\mathbf{A}$可逆，

故$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

例4

设$\alpha_1=(1,-1,1),\alpha_2=(1,2,0),\alpha_3=(1,0,3),\alpha_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关?

(2) α_4可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示? 如能表示求出其表示式。

解:

(1) 考察 $\mathbf{A}=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 由$|\mathbf{A}|=7$可知$\mathbf{A}$可逆，

故$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

(2) 根据推论，α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法惟一。

例4

设$\alpha_1=(1,-1,1),\alpha_2=(1,2,0),\alpha_3=(1,0,3),\alpha_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关?

(2) α_4可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示? 如能表示求出其表示式。

解:

(1) 考察 $\mathbf{A}=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 由$|\mathbf{A}|=7$可知$\mathbf{A}$可逆，故$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

(2) 根据推论，α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法惟一。设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4$$

例4

设$\alpha_1=(1,-1,1),\alpha_2=(1,2,0),\alpha_3=(1,0,3),\alpha_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关?

(2) α_4可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示? 如能表示求出其表示式。

解:

(1) 考察 $\mathbf{A}=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 由$|\mathbf{A}|=7$可知$\mathbf{A}$可逆，

故$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

(2) 根据推论，α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法惟一。设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4\Rightarrow x_1\alpha_1^T+x_2\alpha_2^T+x_3\alpha_3^T=\alpha_4^T$$

即

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T & \alpha_2^T & \alpha_3^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$$

例4

设$\alpha_1=(1,-1,1),\alpha_2=(1,2,0),\alpha_3=(1,0,3),\alpha_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关？

(2) α_4可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？如能表示求出其表示式。

解:

(1) 考察 $\mathbf{A}=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 由$|\mathbf{A}|=7$可知$\mathbf{A}$可逆，故$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

(2) 根据推论，α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法惟一。设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4\Rightarrow x_1\alpha_1^T+x_2\alpha_2^T+x_3\alpha_3^T=\alpha_4^T$$

即

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T & \alpha_2^T & \alpha_3^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$$

解此方程组得惟一解$x_1=1,x_2=-1,x_3=2$，故$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$.

例5

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$线性相关。

例5

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$线性相关。

解: 设有数x_1, x_2, x_3使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0} \tag{4}$$

例5

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$线性相关。

解: 设有数x_1, x_2, x_3使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0} \tag{4}$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2) + x_3(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$$

亦即

$$(x_1 + x_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_1 - 2x_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (x_1 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

例5

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$线性相关。

解: 设有数x_1, x_2, x_3使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0} \tag{4}$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2) + x_3(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$$

亦即

$$(x_1 + x_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_1 - 2x_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (x_1 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，故

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

求解该方程组可得非零解$(-1, -1, 2)$。因此，有不全为零的数x_1, x_2, x_3使得(4)成立，从而$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$线性相关。

定理3.1.5

(1) 如果一组n维向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，那么把这些向量各任意添加$m$个分量所得的向量($n+m$维)组$\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_s^*$也线性无关。

(2) 如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，那么它们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量也线性相关。

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}\cdots,\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}\text{线性无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix}\text{线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性相关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性相关}$$

证明: 两者互为逆否命题，证明第一个即可。

证明: 两者互为逆否命题，证明第一个即可。

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

只有零解。

证明: 两者互为逆否命题，证明第一个即可。

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

只有零解。设$\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})^T$，$i = 1, 2, \cdots, s$，即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & = & 0, \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ns}x_s & = & 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

只有零解。

不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}, a_{n+1,i})^T, \quad ii = 1, 2, \cdots, s.$$

不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\alpha_i^* = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}, a_{n+1,i})^T, \quad ii = 1, 2, \cdots, s.$$

设

$$x_1\alpha_1^* + x_2\alpha_2^* + \cdots + x_s\alpha_s^* = \mathbf{0}$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & = & 0, \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ns}x_s & = & 0, \\ a_{n+1,1}x_1 & + & a_{n+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n+1,s}x_s & = & 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

方程组(6)的解全是方程组(5)的解。

不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}, a_{n+1,i})^T, \quad ii = 1, 2, \cdots, s.$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s^* = \mathbf{0}$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & = & 0, \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ns}x_s & = & 0, \\ a_{n+1,1}x_1 & + & a_{n+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n+1,s}x_s & = & 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

方程组(6)的解全是方程组(5)的解。

而方程组(5)只有零解，故方程组(6)也只有零解。故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$线性无关。

注

设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

注

设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

证明： 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，把这些向量各任意添加$m$个全为零的分量， 所得到的新向量组记为$\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_s^*$。

注

设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

证明: 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，把这些向量各任意添加$m$个全为零的分量， 所得到的新向量组记为$\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$。此时方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

与方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s^* = \mathbf{0}$$

完全相同。所以新向量组$\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$也线性相关。

小结

对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。

小结

对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。

如

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ 0 \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}$$

线性相关性一致。

例6

考察以下向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\5\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\\6\\9\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\\3\end{pmatrix}$$

例6

考察以下向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解: 去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关，故原向量组线性无关。

1. n维向量及其线性相关性

2. 向量组的秩及其极大线性无关组

向量组的秩

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$中，若

- 存在r个线性无关的向量，
- 且其中任一向量可由这r个线性无关的向量线性表示，

则数r称为向量组的秩(rank)，记作

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$$

或

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$$

向量组的秩

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$中，若

- 存在r个线性无关的向量，
- 且其中任一向量可由这r个线性无关的向量线性表示，

则数r称为向量组的秩(rank)，记作

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$$

或

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$$

- 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = s$；
- 只含零向量的向量组的秩为零。
- 只含一个非零向量的向量组的秩为1。

定义

若向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$中每个向量可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示， 就称向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示。

定义

若向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$中每个向量可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示， 就称向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

定义

若向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$中每个向量可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示， 就称向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

向量组的线性表示，具备

- 自反性

  向量组自己可以由自己线性表示

定义

若向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$中每个向量可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示， 就称向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

向量组的线性表示，具备

- 自反性

  向量组自己可以由自己线性表示

- 传递性

  设向量组A可以被向量组B线性表示，向量组B又可以被向量组C线性表示， 则向量组A可以被向量组C线性表示

定义

若向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$中每个向量可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示， 就称向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

向量组的线性表示，具备

- 自反性

  向量组自己可以由自己线性表示

- 传递性

  设向量组A可以被向量组B线性表示，向量组B又可以被向量组C线性表示， 则向量组A可以被向量组C线性表示

- 不具备对称性

  向量组A可以被向量组B线性表示，不一定有向量组B又可以被向量组A线性表示。

定义

若向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$中每个向量可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示， 就称向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

向量组的线性表示，具备

- 自反性

  向量组自己可以由自己线性表示

- 传递性

  设向量组A可以被向量组B线性表示，向量组B又可以被向量组C线性表示， 则向量组A可以被向量组C线性表示

- 不具备对称性

  向量组A可以被向量组B线性表示，不一定有向量组B又可以被向量组A线性表示。

  如：部分组总是可以由整体线性表示，但反之不成立

向量组的等价，具备

- 自反性

  任一向量组和自身等价

向量组的等价，具备

- 自反性

  任一向量组和自身等价

- 对称性

  向量组A与向量组B等价，当然向量组B与向量组A等价

向量组的等价，具备

- 自反性

  任一向量组和自身等价

- 对称性

  向量组A与向量组B等价，当然向量组B与向量组A等价

- 传递性

  设向量组A与向量组B等价，向量组B与向量组C等价， 则向量组A与向量组C等价

定理3.2.1

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$t>s$， 则$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关。

定理3.2.1

若向量组B : $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由向量组$A$: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示，且$t > s$， 则$B$: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性相关。

证明: 设

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{s} k_{ij}\alpha_i, \quad j = 1, 2, \cdots, t,$$

欲证$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性相关，只需证：存在不全为零的数$x_1, x_2, \cdots, x_t$使得

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_t\beta_t = \mathbf{0}, \tag{7}$$

定理3.2.1

若向量组B：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由向量组$A$：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示，且$t > s$， 则$B$：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性相关。

证明: 设

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{s} k_{ij}\alpha_i, \quad j = 1, 2, \cdots, t,$$

欲证$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性相关，只需证：存在不全为零的数$x_1, x_2, \cdots, x_t$使得

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_t\beta_t = \mathbf{0}, \tag{7}$$

即

$$\sum_{j=1}^{t} x_j\beta_j = \sum_{j=1}^{t} x_j\left(\sum_{i=1}^{s} k_{ij}\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t} k_{ij}x_j\right)\alpha_i = \mathbf{0}.$$

定理3.2.1

若向量组$B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$t > s$， 则$B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性相关。

证明: 设

$$\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{i=1}^{s} k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i, \quad j = 1, 2, \cdots, t,$$

欲证$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性相关，只需证：存在不全为零的数$x_1, x_2, \cdots, x_t$使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_t\boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{0}, \tag{7}$$

即

$$\sum_{j=1}^{t} x_j\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{j=1}^{t} x_j\left(\sum_{i=1}^{s} k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\right) = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t} k_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}.$$

当其中$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$的系数

$$\sum_{j=1}^{t} k_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s \tag{8}$$

时，(7)显然成立。

定理3.2.1

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$t>s$，　则$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关。

证明: 设

$$\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\quad j=1,2,\cdots,t,$$

欲证$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关，只需证：存在不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_t$使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0},\tag{7}$$

即

$$\sum_{j=1}^{t}x_j\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{j=1}^{t}x_j\left(\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}.$$

当其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的系数

$$\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j=0,\quad i=1,2,\cdots,s\tag{8}$$

时，(7)显然成立。注意到齐次线性方程组(8)含t个未知量，s个方程，而$t>s$，故(8)有非零解。

定理3.2.1

若向量组B: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$t > s$，则$B$: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性相关。

证明: 设

$$\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{i=1}^{s} k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i, \quad j = 1, 2, \cdots, t,$$

欲证$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性相关，只需证：存在不全为零的数$x_1, x_2, \cdots, x_t$使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_t\boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{0}, \tag{7}$$

即

$$\sum_{j=1}^{t} x_j\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{j=1}^{t} x_j\left(\sum_{i=1}^{s} k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\right) = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t} k_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}.$$

当其中$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$的系数

$$\sum_{j=1}^{t} k_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s \tag{8}$$

时，(7)显然成立。注意到齐次线性方程组(8)含t个未知量，s个方程，而$t > s$，故(8)有非零解。即有不全为零的$x_1, x_2, \cdots, x_t$使得(7)成立，

推论3.2.1(定理3.2.1的逆否命题)

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关，则$t\leq s$。

推论3.2.2

若$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$， 则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$中任何$r+1$个向量都是线性相关的。

推论3.2.2

若$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r$， 则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任何$r+1$个向量都是线性相关的。

证明: 不妨设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中的$r$个线性无关的向量，由于该向量组中任一个向量可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示，由定理3.2.1可知，其中任意$r+1$个向量都线性无关。

定义(向量组的秩的等价定义 & 极大线性无关组)

设有向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$。如果能从其中选出$r$个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，满足

- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关；
- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任意$r+1$个向量都线性相关，

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

定义(向量组的秩的等价定义 & 极大线性无关组)

设有向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$。如果能从其中选出$r$个向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，满足

- 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关；
- 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$中任意$r+1$个向量都线性相关，

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$为原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

极大线性无关组所含向量的个数r，称为原向量组的秩。

定义(向量组的秩的等价定义 & 极大线性无关组)

设有向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$。如果能从其中选出$r$个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，满足

- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关；
- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任意$r+1$个向量都线性相关，

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

极大线性无关组所含向量的个数r，称为原向量组的秩。

注

- 秩为r的向量组中，任一个线性无关的部分组最多含有r个向量；
- 一般情况下，极大无关组不惟一；
- 不同的极大无关组所含向量个数相同；
- 极大无关组与原向量组是等价的;
- 极大无关组是原向量组的全权代表。

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = p$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r$， 如果向量组$B$: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由$A$: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示， 则$r \leq p$。

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = p$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r$，如果向量组$B$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，则$r \leq p$。

证明： 不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$与$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = p$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r$， 如果向量组$B$： $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由$A$： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，则$r \leq p$。

证明: 不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$与$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

$$(1) \quad \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r \text{等价于} \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r \text{可由} \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t \text{线性表示}$$

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=p$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$， 如果向量组$B$： $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由$A$： $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示， 则$r\le p$。

证明: 不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\text{等价于}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\\
&\Rightarrow\quad \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\text{可由}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\text{线性表示}\\
&(2)\quad \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\text{可由}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\text{线性表示}
\end{aligned}
$$

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=p$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$， 如果向量组$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，则$r\leq p$。

证明: 不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

(1) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$等价于$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示

(2) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$等价于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$线性表示

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=p$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$，如果向量组$B$: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由$A$: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，则$r\leq p$。

证明: 不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

(1) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$等价于$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示

(2) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$等价于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$线性表示

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$线性表示

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=p$, $\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r$， 如果向量组$B$： $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$A$： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示， 则$r\leq p$。

证明： 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\text{等价于}\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\\
&\Rightarrow\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\text{可由}\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\text{线性表示}\\
&(2)\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{线性表示}\\
&(3)\quad \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{等价于}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\\
&\Rightarrow\quad \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\text{线性表示}\\
&\Longrightarrow\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\text{线性表示}
\end{aligned}
$$

由推论3.2.1可知$r\leq p$。

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=p$，$\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r$， 如果向量组$B$：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$A$：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则$r\le p$。

证明： 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

(1) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$等价于$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

$\Rightarrow$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示

(2) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$

$\Rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$线性表示

$\Longrightarrow$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$线性表示

由推论3.2.1可知$r\le p$。

注

由该推论可知，等价向量组的秩相等。