线性代数

矩阵的初等变换与初等矩阵

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 4 月 26 日

1. 习题

1. 习题

例 28 求与 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 可交换的全体三阶矩阵。

例 29 已知 $\boldsymbol{A}$ 是对角元互不相等的 n 阶对角矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

当 $i \neq j$ 时，$a_i \neq a_j$。证明：与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必是对角矩阵。

例 29 已知 $\boldsymbol{A}$ 是对角元互不相等的 n 阶对角矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$。证明：与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必是对角矩阵。

证明设与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，即

$$\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

亦即

$$\begin{pmatrix} 0 & (a_1-a_2)b_{12} & \cdots & (a_1-a_n)b_{1n} \\ (a_2-a_1)b_{21} & 0 & \cdots & (a_2-a_n)b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n-a_1)b_{n1} & (a_n-a_2)b_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

因为 $a_i \neq a_j (i \neq j)$，故

$$b_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

例 30 证明：两个 n 阶下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

例 31 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 是对角元全为零的上三角矩阵，则 $\boldsymbol{A}^2$ 也是主对角元全为零的上三角矩阵。

例 32 证明：对角元全为 1 的上三角矩阵的乘积，仍是主对角元全为 1 的上三角矩阵。

例 33 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

计算 $\boldsymbol{AB}^T$, $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{BB}^T+\boldsymbol{AB}^T$。

例 34 证明：$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^T=\boldsymbol{A}_k^T\cdots\boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{A}_1^T$。

例　34 证明：$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^T=\boldsymbol{A}_k^T\cdots\boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{A}_1^T$。

证明由 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ 及数学归纳法容易证明。

例 35 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵。

例 35 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵。

证明对称矩阵的线性组合仍是对称矩阵。

例 36 对于任意的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，证明：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T$ 是反对称矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 可表示对称矩阵和反对称矩阵之和。

例 36 对于任意的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，证明：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T$ 是反对称矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 可表示对称矩阵和反对称矩阵之和。

证明

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}+\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}$$

例 37 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换。

例 37 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换。

证明

($\Rightarrow$)

$$\boldsymbol{AB}\text{对称} \Rightarrow \boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{BA}$$

($\Leftarrow$)

$$\boldsymbol{AB}\text{可交换} \Rightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} \Rightarrow (\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB}$$

例 38 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

例 38 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明因为 $\boldsymbol{A}$ 实对称，故

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$$

观察 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 的主对角元，

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2=0$$

故

$$a_{ij}=0\quad \forall i,j.$$

例 39 已知 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 n 阶反对称矩阵。

(1) 问 $\boldsymbol{A}^k$， $\boldsymbol{B}^k$ 是否为对称或反对称矩阵？

(2) 证明：$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是一个反对称矩阵。

例 39 已知 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 n 阶反对称矩阵。

(1) 问 $\boldsymbol{A}^k$， $\boldsymbol{B}^k$ 是否为对称或反对称矩阵？

(2) 证明：$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是一个反对称矩阵。

证明

(1)

$$(\boldsymbol{A}^k)^T=(\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A})^T=\boldsymbol{A}^T\cdots\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{AA}=\boldsymbol{A}^k \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{A}^k\text{对称}$$

$$(\boldsymbol{B}^k)^T=(-\boldsymbol{B})\cdots(-\boldsymbol{B})(-\boldsymbol{B})=(-1)^k\boldsymbol{B}^k \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}\boldsymbol{B}^k\text{对称}, & k\text{为偶数}\\ \boldsymbol{B}^k\text{反对称}, & k\text{为奇数}\end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^T &= (\boldsymbol{AB})^T+(\boldsymbol{BA})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T\\ &= -\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}.\end{aligned}$$

例 40（求逆矩阵）

(1)

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

例 40（求逆矩阵）

(2)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

例 40（求逆矩阵）

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 40（求逆矩阵）

(4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

例 40（求逆矩阵）

(5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例 40（求逆矩阵）

(6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 41（解矩阵方程）

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

例 41（解矩阵方程）

(3)

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 42（解线性方程组）

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

例 43 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 为同阶方阵，

(1) 问 $\boldsymbol{A}$ 满足什么条件时，命题$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC} \Rightarrow \boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 成立；

(2) 问：若 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$ 时，是否必有 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{AC}$?

(1) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，该命题成立。

(2) 不一定。例如，当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 时，不论任何 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$，总有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$。

例 44 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，问：下列命题是否成立？若成立，给出证明；若不成立，举反例说明。

(1) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆不可逆，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也不可逆；

(2) 若 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都可逆；

(3) 若 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都不可逆；

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆 (k 是数)。

(1) 不成立。例如，令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 皆不可逆，但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆。

(2) 成立。$\boldsymbol{AB}$可逆 $\Rightarrow |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}|\neq 0 \Rightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$且$|\boldsymbol{B}|\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$都可逆。

(3) 不成立。例如，令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 不可逆，但 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 但 $\boldsymbol{B}$ 可逆。

(4) 不成立。$\boldsymbol{A}$可逆 $\Rightarrow \begin{cases} k\boldsymbol{A}\text{可逆}, & k\neq 0, \\ k\boldsymbol{A}\text{不可逆}, & k=0. \end{cases}$

例 45 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2 = \boldsymbol{0}$，证明：

(1) $\boldsymbol{A}$ 和 $-\boldsymbol{A}$ 都可逆，并求它们的逆；

(2) $\boldsymbol{A}+$ 和 $\boldsymbol{A} - 2$ 不同时可逆。

例 46 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + 4 = \boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}+$ 和 $\boldsymbol{A} - 3$ 都可逆，并求它们的逆。

例 47 试求上（或下）三角矩阵可逆的充要条件，并证明：可逆上（或下）三角矩阵的逆矩阵也是可逆上（或下）三角矩阵。

例 28

例 28

例 28

例 28

例 28

例 28

例 28

例 28

例 28

例 28

例 28