

矩阵



武汉大学数学与统计学院



2017 年 10 月 19 日

1. 矩阵的定义

2. 矩阵的计算

3. 矩阵的转置、对称矩阵

4. 逆矩阵

5. 矩阵的初等变换与初等矩阵

6. 矩阵分块

1. 矩阵的定义



定义 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵, 记作

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

这 $m \times n$ 个数称为 \mathbf{A} 的元素, 数 a_{ij} 位于矩阵 \mathbf{A} 的第 i 行第 j 列, 称为矩阵的 (i, j) 元。可简记为 (a_{ij}) 、 $(a_{ij})_{m \times n}$ 或 $\mathbf{A}_{m \times n}$ 。

注 对矩阵的定义, 需做以下几点说明:

- ▶ 元素是实数的矩阵称为**实矩阵**, 元素为复数的矩阵称为**复矩阵**;

- ▶ 行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。 n 阶矩阵 \mathbf{A} 也记作 \mathbf{A}_n ;
- ▶ 只有一行的矩阵

$$\mathbf{A} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

称为行矩阵，又称行向量，也记为

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n);$$

- ▶ 只有一列的矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，又称列向量。

- ▶ 两行矩阵的行数相等、列数也相等时，称它们为同型矩阵。
- ▶ 如果 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 和 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 是同型矩阵，且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n),$$

则称矩阵 **A** 与 **B** 相等，记作

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

- ▶ 元素都为 0 的矩阵称为**零矩阵**，记作**O**。**注意不同型的零矩阵是不同的。**

接下来我们举几个例子介绍矩阵的应用。

例 某厂向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

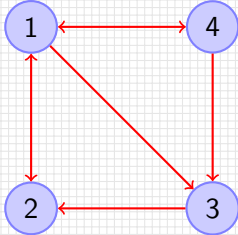
$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{商店 1} & \text{商店 2} & \text{商店 3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3} \\ \text{产品 4} \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

其中 a_{ij} 为工厂向第 j 店发送第 i 种产品的数量。这四种产品的单价及单件重量也可列成矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{单价} & \text{单件重量} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3} \\ \text{产品 4} \end{matrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

其中 b_{i1} 为第 i 种产品的单价, b_{i2} 为第 i 种产品的单件重量。

例 四个城市间的单向航线如图所示



若令

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有 1 条单向航线,} \\ 0, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线,} \end{cases}$$

则该航线图可用矩阵表示为

$$\begin{array}{c}
 \text{城市 1} \quad \text{城市 2} \quad \text{城市 3} \quad \text{城市 4} \\
 \mathbf{A} = \begin{array}{c} \text{城市 1} \\ \text{城市 2} \\ \text{城市 3} \\ \text{城市 4} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

例 设变量 x_1, x_2, \dots, x_n 与变量 y_1, y_2, \dots, y_m 满足：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

它表示一个从变量 x_1, x_2, \dots, x_n 到变量 y_1, y_2, \dots, y_m 的线性变换，其系数 a_{ij} 构成矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 。

► 给定了线性变换 (1)，其系数矩阵也就确定。

- ▶ 反之，若给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定。
- ▶ 从这个意义上讲，线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系。

(1)、线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

称为**恒等变换**，它对应 n 阶方阵

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

该方阵称为 n 阶单位矩阵，简称单位阵。其 (i, j) 元为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(2)、线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1, \\ y_2 = \lambda_2 x_2, \\ \vdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}$$

对应于 n 阶方阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

这种方阵称为**对角矩阵**，简称**对角阵**，记作

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

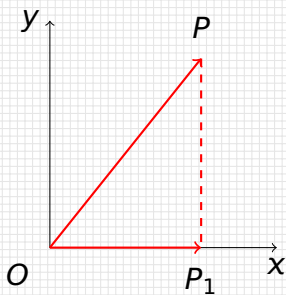
(3)、矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所对应的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

是一个投影变换。



(4)、矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

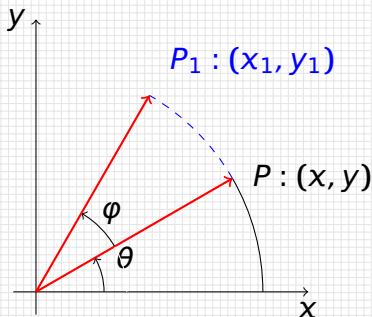
对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y_1 = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{cases}$$

设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$x_1 = r(\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) = r \cos(\theta + \varphi),$$

$$y_1 = r(\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta) = r \sin(\theta + \varphi),$$



这表明经过上述变换, 将向量 OP 逆时针旋转 φ 角得到向量 OP_1 .

例 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2 \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \\ -3x_3 + 9x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & & + 3x_4 = -1 \\ & x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & & - 3x_3 + 9x_4 = 3 \\ & & & - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & & + 3x_4 = -1 \\ & x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & & x_3 - 3x_4 = -1 \\ & & & x_4 = 0 \end{cases}$$

如此形状的方程组称为**阶梯形线性方程组**. 该方程组可写成矩阵形式

$$\left(A \mid b \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array} \right)$$

图: 增广矩阵

求解过程可表示为

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A & & & & b \end{array} \right) \xrightarrow{\underline{\underline{r_1 \div 2}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \underline{\underline{r_2 + (-2) \times r_1}} \\ \underline{\underline{r_3 + (-3) \times r_1}} \\ \underline{\underline{r_4 + (-5) \times r_1}} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{r_3 \leftrightarrow r_4}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right)$$

例 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$$

解

其增广矩阵为

$$\left(A \mid b \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array} \right)$$

求解过程可表示为：

$$\left(A \mid b \right) \xrightarrow[r_4 + (-1) \times r_1]{r_2 + (-2) \times r_1, r_3 + (-3) \times r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 + (-2) \times r_2]{r_3 + (-2) \times r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_4 \div (-3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

该矩阵称为**行简化阶梯矩阵**，对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & & + 7x_5 = 1 \\ & x_3 & + 4x_5 = 2 \\ & & x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

注 该方程组有 5 个未知量，其中 x_1, x_3, x_4 为**基本未知量**， x_2, x_5 为**自由未知量**。

任取 $x_2 = k_1, x_5 = k_2$ ，可得线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 = 1 + k_1 - 7k_2, \\ x_2 = k_1, \\ x_3 = 2 - 4k_2, \\ x_4 = -1 + 3k_2, \\ x_5 = k_2. \end{cases}$$

例 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

解

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3+(-1)\times r_2}$$

由第三行可以看出，该线性方程组无解。

- ▶ 含有矛盾方程而无解的方程组称为**不相容方程组**；
- ▶ 有解的方程组称为**相容方程组**；
- ▶ **多余方程**。

对于一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

对于以上增广矩阵，总是可以经过一系列的变换将其化成

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} c_1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

其中 $c_{ii} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, r$)。对应线性方程组解的情况如下：

1 线性方程组有解 $\Leftrightarrow d_{r+1} = 0$;

2 在有解的情况下：

- ▶ 当 $r = n$ 时, 有唯一解 $x_1 = d_1, x_2 = d_2, \dots, x_n = d_n$;
- ▶ 当 $r < n$ 时, 有无穷多解

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & d_1 - c_{1,r+1}k_1 - \dots - c_{1n}k_{n-r}, \\ x_2 & = & d_2 - c_{2,r+1}k_1 - \dots - c_{2n}k_{n-r}, \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & d_r - c_{r,r+1}k_1 - \dots - c_{rn}k_{n-r}, \\ x_{r+1} & = & k_1, \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & k_{n-r}. \end{array} \right.$$

2. 矩阵的计算



2.1 矩阵的加法



定义 (矩阵的加法) 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 和 $\mathbf{B} = (b_{ij})$, 则矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 之和记为 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, 规定为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

注 只有当两个矩阵同型时才能进行加法运算。

矩阵加法的运算律:

- (i) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
- (ii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, 称

$$-\mathbf{A} = (-a_{ij}),$$

为 \mathbf{A} 的负矩阵, 显然有

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

由此规定矩阵的减法为

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

2.2 矩阵的数乘



定义 (矩阵的数乘) 数 k 与矩阵 \mathbf{A} 的乘积记作 $k\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}k$, 规定为

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

注 用数 k 乘一个矩阵, 需要把数 k 乘矩阵的每一个元素, 这与行列式的数乘性质不同。

矩阵数乘的运算律:

- (i) $(kl)\mathbf{A} = k(l\mathbf{A});$
- (ii) $(k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A};$
- (iii) $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$

2.3 矩阵的乘法



设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2, \end{cases} \quad (3)$$

若想求从 t_1, t_2 到 y_1, y_2 的线性变换, 可将 (3) 代入 (2), 便得

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2. \end{cases} \quad (4)$$

线性变换 (4) 可看成是先作线性变换 (3) 再作线性变换 (2) 的结果。把线性变换 (4) 叫做线性变换 (2) 和 (3) 的乘积, 相应地把线性变换 (4) 对应的矩阵定义为线性变换 (2) 与 (3) 所对应矩阵的乘

积, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

定义 (矩阵乘法) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times s$ 矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

则 A 与 B 之乘积 AB (记为 $C = (c_{ij})$) 为 $m \times s$ 矩阵, 且

$$c_{ij} = c_{i1}b_{1j} + c_{i2}b_{2j} + \cdots + c_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

注 两个矩阵 A 与 B 相乘有意义的前提是 A 的列数等于 B 的行数。

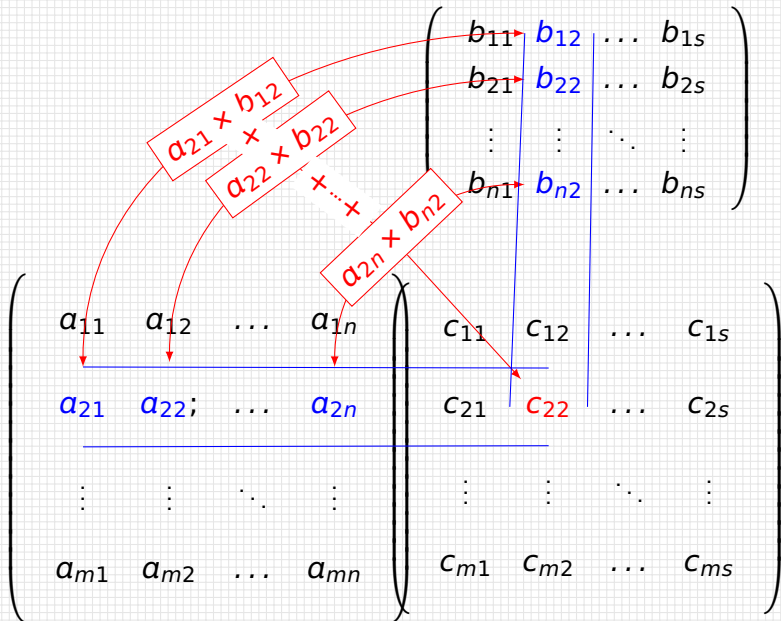


图: 矩阵乘法示意图

例 求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ 的乘积

\mathbf{AB}

解

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times (-5) + (-1) \times 6 & 1 \times 6 + 2 \times (-6) + (-1) \times 0 \\ (-1) \times 5 + 3 \times (-5) + 4 \times 6 & (-1) \times 6 + 3 \times (-6) + 4 \times 0 \\ 1 \times 5 + 1 \times (-5) + 1 \times 6 & 1 \times 6 + 1 \times (-6) + 1 \times 0 \end{pmatrix}$$

例 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n)$$

计算 \mathbf{AB} 与 \mathbf{BA} .

解

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

例 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

计算 \mathbf{AB} , \mathbf{AC} 和 \mathbf{BA} .

解

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ -2ab & -2ab \end{pmatrix}$$

由以上例题可以看出一些结论：

1 矩阵乘法不满足交换律。

若 $AB \neq BA$ ，则称 **A** 与 **B** 不可交换。

若 $AB = BA$ ，则称 **A** 与 **B** 可交换。

2 $AB = 0$ $A = 0$ 或 $B = 0$

$$A \neq 0 \text{ 且 } B \neq 0 \xrightarrow{\text{有可能}} AB = 0$$

3 矩阵乘法不满足消去律，即当 $A \neq 0$ 时，

$$AB = AC \quad B = C$$

当 **A** 为非奇异矩阵，即 $|A| \neq 0$ 时，

$$AB = 0 \Rightarrow B = 0; \quad AB = AC \Rightarrow B = C.$$

矩阵乘法的运算律：

(i) 结合律

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

(ii) 数乘结合律

$$k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

(iii) 左结合律

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

右结合律

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$$

2.4 一些特殊矩阵及其运算



定义 (单位矩阵与数量矩阵)

- 1 主对角元全为 1, 其余元素全为零的 n 阶方阵, 称为 n 阶**单位矩阵**, 记为 $\mathbf{I}_n, \mathbf{I}, \mathbf{E}$

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- 2 主对角元全为非零数 k , 其余元素全为零的 n 阶方阵, 称为 n 阶**数量矩阵**, 记为 $k\mathbf{I}_n, k\mathbf{I}, k\mathbf{E}$

$$k\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$$

注

- 1 **单位阵在矩阵乘法中的作用相当于数 1 在数的乘法中的作用。**

2 一些等式:

$$(k\mathbf{I})\mathbf{A} = k(\mathbf{I}\mathbf{A}) = k\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}(k\mathbf{I}) = k(\mathbf{A}\mathbf{I}) = k\mathbf{A}.$$

定义 (对角矩阵) 非对角元皆为零的 n 阶方阵称为 n 阶**对角矩阵**, 记作 $\mathbf{\Lambda}$, 即

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

或记作 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

注

- 1 用对角阵 $\mathbf{\Lambda}$ 左乘 \mathbf{A} , 就是用 $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ 乘 \mathbf{A} 中第 i 行的每个元素;

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 2 用对角阵 Λ 右乘 A , 就是用 $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ 乘 A 中第 i 列的每个元素, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义 (三角矩阵)

- 1 主对角线以上的元素全为零的 n 阶方阵称为上三角矩阵
($a_{ij} = 0, i > j$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 2 主对角线以下的元素全为零的 n 阶方阵称为下三角矩阵

$$(a_{ij} = 0, i < j)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例 证明：两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵。

证明. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令 $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{ij})$, 则当 $i > j$ 时,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{\downarrow 0} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{\downarrow 0} = 0$$



注 两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

第 i 个方程可表示为

$$(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此上述线性方程组可表示为

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

定理 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是两个 n 阶方阵, 则

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

证明.

设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times n}$, 则

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+a_{1i}r_{n+i}]{i=1,\dots,n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

仿照上述步骤，可将行列式的左上角元素全消为零，即得

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}||\mathbf{B}| &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{I} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n |\mathbf{AB}| |-\mathbf{I}_n| = (-1)^n |\mathbf{AB}| (-1)^n \\ &= |\mathbf{AB}|. \end{aligned}$$

□

例 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 是行列式 $|\mathbf{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式。证明：当 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时， $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ 。

证明. 设 $\mathbf{AA}^* = \mathbf{C} = (c_{ij})$ ，其中

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij}|\mathbf{A}|$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & & & \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_n,$$

因此,

$$|\mathbf{A}||\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^n,$$

由于 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 故 $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$. □

定义 (矩阵幂) 设 \mathbf{A} 是 n 阶矩阵, k 个 \mathbf{A} 的连乘积称为 \mathbf{A} 的 k 次幂, 记作 \mathbf{A}^k , 即

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_k$$

矩阵幂的运算律:

1 当 m, k 为正整数时,

$$\mathbf{A}^m \mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{m+k}, \quad (\mathbf{A}^m)^k = \mathbf{A}^{mk}.$$

2 当 \mathbf{AB} 不可交换时，一般情况下，

$$(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$$

3 当 \mathbf{AB} 可交换时，

$$(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k = \mathbf{B}^k \mathbf{A}^k.$$

定义 (矩阵多项式) 设

$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是 x 的 k 次多项式， \mathbf{A} 是 n 阶矩阵，则

$$f(\mathbf{A}) = a_k \mathbf{A}^k + a_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}$$

称为矩阵 \mathbf{A} 的 k 次多项式。

注

1 若 $f(x), g(x)$ 为多项式， \mathbf{A}, \mathbf{B} 皆是 n 阶矩阵，则

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}).$$

2 当 \mathbf{AB} 不可交换时，一般

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{B}) \neq g(\mathbf{B})f(\mathbf{A})$$

3. 矩阵的转置、对称矩阵



定义 (转置矩阵) 把一个 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到的一个 $n \times m$ 矩阵, 称之为 \mathbf{A} 的转置矩阵, 记为 \mathbf{A}^T 或 \mathbf{A}' , 即

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

定理 (矩阵转置的运算律)

(i) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

$$(iii) (k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$$

$$(iv) (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

证明. 只证 (iv)。设

$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times s}$, $\mathbf{A}^T = (a_{ij}^T)_{n \times m}$, $\mathbf{B}^T = (b_{ij}^T)_{s \times n}$, 注意到

$$a_{ij} = a_{ji}^T, b_{ij} = b_{ji}^T,$$

有

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)_{ji} = \sum_{k=1}^n b_{jk}^T a_{ki}^T = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = (\mathbf{AB})_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji}^T,$$

于是 $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$. □

定义 (对称矩阵、反对称矩阵) 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个 n 阶矩阵。

1 如果

$$a_{ij} = a_{ji},$$

则称 \mathbf{A} 为**对称矩阵**；

2 如果

$$a_{ij} = -a_{ji},$$

则称 \mathbf{A} 为**反对称矩阵**。

注 关于对称矩阵与反对称矩阵，有如下性质：

1. \mathbf{A} 为对称矩阵的充分必要条件是 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ ；
2. \mathbf{A} 为反对称矩阵的充分必要条件是 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ ；
3. 反对称矩阵的主对角元全为零。
4. 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。
5. 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

设 \mathbf{A} 为一 n 阶方阵, 则

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}$$

容易验证 $\frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2}$ 为对称阵, $\frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}$ 为反对称阵。

6. 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

若 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 均为对称矩阵, 则 \mathbf{AB} 对称的充分必要条件是 \mathbf{AB} 可交换。

例 设 \mathbf{A} 是一个 $m \times n$ 矩阵, 则 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ 都是对称矩阵。

证明.

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$$



例 设 \mathbf{A} 为 n 阶反对称矩阵, \mathbf{B} 为 n 阶对称矩阵, 则 $\mathbf{AB} + \mathbf{BA}$ 为 n 阶反对称矩阵。

证明.

$$(\mathbf{AB} + \mathbf{BA})^T = (\mathbf{AB})^T + (\mathbf{BA})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \mathbf{B}(-\mathbf{A}) + (-\mathbf{A}^T)\mathbf{B} =$$



4. 逆矩阵



给定一个从 \mathbf{x} 到 \mathbf{y} 的线性变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5)$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用 \mathbf{A} 的伴随阵 \mathbf{A}^* 左乘 (5), 得

$$\mathbf{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = |\mathbf{A}| \mathbf{x}.$$

当 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时, 有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* \mathbf{y}.$$

记

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \quad (6)$$

它表示一个从 \mathbf{y} 到 \mathbf{x} 的线性变换，称为线性变换 (5) 的逆变换。

注 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的关系：

1. 将 (6) 代入 (5)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y}) = (\mathbf{AB})\mathbf{y}$$

可见 \mathbf{AB} 为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}.$$

2. 将 (5) 代入 (6)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{BA})\mathbf{x}$$

可见 \mathbf{BA} 为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

定义 (逆矩阵) 对于 n 阶矩阵 \mathbf{A} , 如果有一个 n 阶矩阵 \mathbf{B} , 使

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

则称 \mathbf{A} 是**可逆**的, 并把 \mathbf{B} 称为 \mathbf{A} 的**逆矩阵**。

注

1. 可逆矩阵与其逆矩阵为同阶方阵。
2. \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 地位相等, 也可称 \mathbf{A} 为 \mathbf{B} 的逆矩阵。

定理 若 \mathbf{A} 可逆, 则 \mathbf{A} 的逆阵惟一。

证明.



\mathbf{A} 的矩阵记作 \mathbf{A}^{-1} , 即

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

定理 若 \mathbf{A} 可逆, 则 $|\mathbf{A}| \neq 0$.

证明.

定义 代数余子式矩阵, 伴随矩阵 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, A_{ij} 为行列式 $|\mathbf{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 称

$$\text{coef}\mathbf{A} = (A_{ij})_{n \times n}$$

为 \mathbf{A} 的代数余子式矩阵, 并称 $\text{coef}\mathbf{A}$ 的转置矩阵为 \mathbf{A} 的伴随矩阵, 记为 \mathbf{A}^* , 即

$$\mathbf{A}^* = (\text{coef}\mathbf{A})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

之前已证

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

同理可证

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

定理 若 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 则 \mathbf{A} 可逆, 且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$$

证明.



该定理提供了求 \mathbf{A}^{-1} 的一种方法。

推论 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ (或 $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$), 则

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

证明.



该推论告诉我们, 判断 \mathbf{B} 是否为 \mathbf{A} 的逆, 只需验证 $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ 或 $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ 的一个等式成立即可。

定义 (奇异阵与非奇异阵) 当 $|\mathbf{A}| = 0$ 时, \mathbf{A} 称为**奇异矩阵**, 否则称为**非奇异矩阵**。

注 可逆矩阵就是非奇异矩阵。

定理 可逆矩阵有如下运算规律：

1 若 \mathbf{A} 可逆，则 \mathbf{A}^{-1} 亦可逆，且

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

2 若 \mathbf{A} 可逆， $k \neq 0$ ，则 $k\mathbf{A}$ 可逆，且

$$(k\mathbf{A})^{-1} = k^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

3 若 \mathbf{A} , \mathbf{B} 为同阶矩阵且均可逆，则 \mathbf{AB} 可逆，且

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

若 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$ 皆可逆，则

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$

4 若 \mathbf{A} 可逆，则 \mathbf{A}^T 亦可逆，且

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

5 若 \mathbf{A} 可逆, 则

$$|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}.$$

例 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{A}^{-1} 。

解

$$|\mathbf{A}| = ad - bc, \quad |\mathbf{A}^*| = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1 当 $|\mathbf{A}| = ad - bc = 0$ 时, 逆阵不存在;

2 当 $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$ 时,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例 求方阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆阵。

解 $|\mathbf{A}| = 2$, 故 \mathbf{A} 可逆。计算 \mathbf{A} 的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11} = 2 & M_{12} = 3 & M_{13} = 2 \\ M_{21} = -6 & M_{22} = -6 & M_{23} = -2 \\ M_{31} = -4 & M_{32} = -5 & M_{33} = -2 \end{array}$$

$$\text{cof}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 设方阵 \mathbf{A} 满足方程

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

证明: $\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵。

证明.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 10\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A} \left[\frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \right] = \mathbf{I}$$

故 \mathbf{A} 可逆, 且 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = 6\mathbf{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

故 $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ 可逆, 且 $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$.



例 证明：可逆对称矩阵的逆矩阵仍为对称矩阵；可逆反对称矩阵的逆矩阵仍为反对称矩阵。

例 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 为非零实矩阵，证明：若 $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$ ，则 \mathbf{A} 可逆。

证明. 欲证 \mathbf{A} 可逆，只需证 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 。

由 $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$ 及 \mathbf{A}^* 的定义可知， \mathbf{A} 的元素 a_{ij} 等于自身的代数余子式 A_{ij} 。

再根据行列式的按行展开定义，有

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

由于 \mathbf{A} 为非零实矩阵，故 $|\mathbf{A}| \neq 0$ ，即 \mathbf{A} 可逆。 □

例 设 \mathbf{A} 可逆，且 $\mathbf{A}^* \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}$ ，证明 \mathbf{B} 可逆，当

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ 时，求 } \mathbf{B}.$$

解

$$\mathbf{A}^* \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B} \Rightarrow (\mathbf{A}^* - \mathbf{I})\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow |\mathbf{A}^* - \mathbf{I}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}^{-1}| \neq 0$$

故 \mathbf{B} 与 $\mathbf{A}^* - \mathbf{I}$ 可逆。

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}^* - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{A}(\mathbf{A}^* - \mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^* - \mathbf{A})^{-1} = (|\mathbf{A}|\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

其中

$$|\mathbf{A}|\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & & \\ & 8 & \\ & & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

易算得

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 设 \mathbf{A} , \mathbf{B} 均为 n 阶可逆矩阵, 证明:

$$(1). (\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*$$

$$(2). (\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2} \mathbf{A}$$

证明.

(1) 由 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$ 可知 \mathbf{AB} 可逆, 且有 $(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$ 。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由 $(\mathbf{A}^*)^* \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$, 得

$$(\mathbf{A}^*)^* |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1} \mathbf{I}$$

两边同时右乘 \mathbf{A} 得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2} \mathbf{A}.$$



例 设 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AP} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$, 求 \mathbf{A}^n .

解

$$|\mathbf{P}| = 2, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1}, \quad \dots, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{\Lambda}^n = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

结论 令

$$\varphi(\mathbf{A}) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_m \mathbf{A}^m.$$

(i) 若 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$, 则 $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}$, 从而

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{A}) &= a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_m\mathbf{A}^m \\ &= \mathbf{P}a_0\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}a_1\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} + \cdots + \mathbf{P}a_m\mathbf{\Lambda}^m\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}\varphi(\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-1}.\end{aligned}$$

(ii) 若 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为对角阵, 则
 $\mathbf{\Lambda}^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$, 从而

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{\Lambda}) &= a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{\Lambda} + \cdots + a_m\mathbf{\Lambda}^m \\ &= a_0 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} + \cdots + a_m \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

5. 矩阵的初等变换与初等矩阵



矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

- (i) 对调两行；
- (ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；
- (iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为**矩阵的初等行变换**，

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

- (i) 对调两行；
- (ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；
- (iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为**矩阵的初等行变换**，分别称为

- (i) **对换变换** $r_i \leftrightarrow r_j$;
- (ii) **倍乘变换** $r_i \times k$;
- (iii) **倍加变换** $r_i + r_j \times k$ 。

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

- (i) 对调两行；
- (ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；
- (iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为**矩阵的初等行变换**，分别称为

- (i) **对换变换** $r_i \leftrightarrow r_j$;
- (ii) **倍乘变换** $r_i \times k$;
- (iii) **倍加变换** $r_i + r_j \times k$ 。

对应的还有**初等列变换**。

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

- (i) 对调两行；
- (ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；
- (iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为**矩阵的初等行变换**，分别称为

- (i) **对换变换** $r_i \leftrightarrow r_j$;
- (ii) **倍乘变换** $r_i \times k$;
- (iii) **倍加变换** $r_i + r_j \times k$ 。

对应的还有**初等列变换**。**初等行变换与初等列变换统称为初等变换**。

矩阵的初等变换与初等矩阵

三种初等变换都是可逆的,

初等变换	逆变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	$r_i \div k$
$r_i + r_j \times k$	$r_i - r_j \times k$

表: 初等变换及其逆变换

矩阵的初等变换与初等矩阵

定义 (矩阵的等价)

- (i) 如果 \mathbf{A} 经过有限次初等行变换变成 \mathbf{B} , 就称 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 行等价, 记为 $\mathbf{A} \sim^r \mathbf{B}$;
- (ii) 如果 \mathbf{A} 经过有限次初等列变换变成 \mathbf{B} , 就称 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 列等价, 记为 $\mathbf{A} \sim^c \mathbf{B}$;
- (iii) 如果 \mathbf{A} 经过有限次初等变换变成 \mathbf{B} , 就称 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 等价, 记为 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ 。

矩阵的初等变换与初等矩阵

性质 矩阵的等价满足以下三条性质：

- (i) **反身性**： $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$ ；
- (ii) **对称性**：若 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ ，则 $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$ ；
- (iii) **传递性**：若 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ ， $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$ ，则 $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$ 。

矩阵的初等变换与初等矩阵

定义 (初等矩阵) 将单位矩阵 I 做一次初等变换所得的矩阵称为**初等矩阵**。对应于 3 类初等行、列变换, 有 3 种类型的初等矩阵。

矩阵的初等变换与初等矩阵

以下介绍三种初等矩阵：

1. 初等对调矩阵；
2. 初等倍乘矩阵；
3. 初等倍加矩阵。

矩阵的初等变换与初等矩阵

1、对调 \mathbf{I} 的两行或两列 (初等对调矩阵)

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \\ 1 & \cdots & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

第 i 行

第 j 行

第 i 列 第 j 列

矩阵的初等变换与初等矩阵

a、用 m 阶初等矩阵 E_{ij} 左乘 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 得

$$E_{ij}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

相当于 把 A 的第 i 行与第 j 行对调 ($r_i \leftrightarrow r_j$) .

矩阵的初等变换与初等矩阵

b、用 n 阶初等矩阵 E_{ij} 右乘 A ，得

$$AE_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第 i 列 第 j 列

相当于把 A 的第 i 列与第 j 列对调 ($c_i \leftrightarrow c_j$) .

矩阵的初等变换与初等矩阵

2、以非零常数 k 乘 \mathbf{I} 的某行或某列 (**初等倍乘矩阵**)

$$\mathbf{E}_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

第 i 行

第 i 列

矩阵的初等变换与初等矩阵

a、以 m 阶初等矩阵 $E_i(k)$ 左乘 A , 得

$$E_i(k)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{第 } i \text{ 行}$$

相当于以数 k 乘 A 的第 i 行 ($r_i \times k$) ;

矩阵的初等变换与初等矩阵

b、以 n 阶初等矩阵 $E_i(k)$ 右乘 A ，得

$$AE_i(k) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第 i 列

相当于以数 k 乘 A 的第 i 列 ($c_i \times k$)。

矩阵的初等变换与初等矩阵

3、将非零常数 k 乘 \mathbf{I} 的某行再添加到另一行上 (初等倍加矩阵)

$$\mathbf{E}_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

第 i 行

第 j 行

矩阵的初等变换与初等矩阵

a、以 m 阶初等矩阵 $E_{ij}(k)$ 左乘 A ，得

$$E_{ij}(k)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

相当于把 A 的第 j 行乘以数 k 加到第 i 行上 ($r_i + r_j \times k$) ;

矩阵的初等变换与初等矩阵

b、以 n 阶初等矩阵 $E_{ij}(k)$ 右乘 A ，得

$$AE_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} + ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} + ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第 i 列 第 j 列

相当于把 A 的第 i 列乘以数 k 加到第 j 列上 ($c_j + c_i \times k$)。

矩阵的初等变换与初等矩阵

定理 设 \mathbf{A} 为一个 $m \times n$ 矩阵,

- ▶ 对 \mathbf{A} 施行一次初等行变换, 相当于在 \mathbf{A} 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵;
- ▶ 对 \mathbf{A} 施行一次初等列变换, 相当于在 \mathbf{A} 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

矩阵的初等变换与初等矩阵

练习 请自行补充以下变换的具体含义：

$$\mathbf{E}_i(k)\mathbf{A}:$$

$$\mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{A}:$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}:$$

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_i(k):$$

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}(k):$$

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}:$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换为其本身可知

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

(ii) 由变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \div k$ 可知

$$E_i(k)^{-1} = E_i(k^{-1})$$

(iii) 由变换 $r_i + r_j \times k$ 的逆变换为 $r_i - r_j \times k$ 可知

$$E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

以上结论也可总结为

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(k^{-1}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

例 设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ 及 $(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 (续) 因

$$(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 (续) 因

$$(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1}$$

而

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 (续) 因

$$(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1}$$

而

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

例 将三对角矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 分解成主对角元为 1 的

下三角矩阵 \mathbf{L} 和上三角阵 \mathbf{U} 的乘积 $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ (称为矩阵的 LU 分解)。

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_1}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_2}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 (续) 将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$, 则

$$\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 (续) 将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$, 则

$$\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1)^{-1} \mathbf{U} \triangleq \mathbf{L} \mathbf{U},$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 (续) 将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$, 则

$$\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1)^{-1} \mathbf{U} \triangleq \mathbf{L} \mathbf{U},$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= (\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1)^{-1} \\ &= \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_3^{-1}\end{aligned}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 (续) 将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$, 则

$$\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1)^{-1} \mathbf{U} \triangleq \mathbf{L} \mathbf{U},$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1)^{-1} \\ &= \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_3^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 (续) 将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$, 则

$$\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1)^{-1} \mathbf{U} \triangleq \mathbf{L} \mathbf{U},$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1)^{-1} \\ &= \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_3^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & 3 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

定理 可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

矩阵的初等变换与初等矩阵

证明. 对于高斯消去法, 其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换, 并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵, 即

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c|c} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \end{array} \right)$$

其中 $c_{ii} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, r$)。



矩阵的初等变换与初等矩阵

续.

因此, 对于任何矩阵 \mathbf{A} , 都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵, 即存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

续.

因此, 对于任何矩阵 \mathbf{A} , 都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵, 即存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

当 \mathbf{A} 为 n 阶可逆矩阵时, 行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵, 从而 \mathbf{U} 必为单位矩阵 \mathbf{I} . □

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论 可逆矩阵 \mathbf{A} 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论 可逆矩阵 \mathbf{A} 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明. 由上述定理, 必存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论 可逆矩阵 \mathbf{A} 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明. 由上述定理, 必存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1)^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1},$$

亦即

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1.$$



矩阵的初等变换与初等矩阵

推论 如果对可逆矩阵 \mathbf{A} 与同阶单位矩阵 \mathbf{I} 做同样的初等行变换, 那么当 \mathbf{A} 变为单位阵时, \mathbf{I} 就变为 \mathbf{A}^{-1} , 即

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right)$$

同理,

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等列变换}} \left(\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right)$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论 如果对可逆矩阵 \mathbf{A} 与同阶单位矩阵 \mathbf{I} 做同样的初等行变换，那么当 \mathbf{A} 变为单位阵时， \mathbf{I} 就变为 \mathbf{A}^{-1} ，即

$$\left(\mathbf{A} \quad \mathbf{I} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\mathbf{I} \quad \mathbf{A}^{-1} \right)$$

同理，

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等列变换}} \left(\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right)$$

注 该推论给出了求可逆矩阵的逆的一种有效方法，请大家熟练掌握。

矩阵的初等变换与初等矩阵

例 求 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$(\mathbf{A} | \mathbf{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} | \mathbf{I}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} | \mathbf{I}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_1 + r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

例 已知 $\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I}$, 求 \mathbf{B} , 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 2\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{A}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 2\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{A}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 2\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{A}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

而

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 2\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{A}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

而

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论 对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 如果增广矩阵

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \xrightarrow{r} (\mathbf{I}, \mathbf{x}),$$

则 \mathbf{A} 可逆, 且 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ 为惟一解。

矩阵的初等变换与初等矩阵

例 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ 与 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ 的解。

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$(\mathbf{A} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$(\mathbf{A} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$(\mathbf{A} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_3 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \div 5 \\ r_3 + 3r_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$(\mathbf{A} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_3 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \div 5 \\ r_3 + 3r_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2 + 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

例 求解矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{A} + \mathbf{X}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 原方程等价于

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 原方程等价于

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}$$

而

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I} \quad \mathbf{A}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 原方程等价于

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}$$

而

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I} \quad \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 原方程等价于

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}$$

而

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I} \quad \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 + 4r_2 \\ r_3 \div (-1) \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 原方程等价于

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}$$

而

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I} \quad \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 + 4r_2 \\ r_3 \div (-1) \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_3 + 4r_2 \\ r_3 \div (-1) \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

例 当 a, b 满足什么条件时, 矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 不可逆。

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_1 \leftrightarrow c_2 \\ c_2 \leftrightarrow c_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4+r_1 \times (-2)]{r_2+r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4+r_1 \times (-2)]{r_2+r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4+r_2 \times (-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4+r_1 \times (-2)]{r_2+r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_4+r_2 \times (-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知 \mathbf{A} 不可逆的条件是 $(a-1)b=0$ 。

6. 矩阵分块



矩阵分块

矩阵

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right)$$

可记为

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, & \mathbf{A}_{12} &= \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, & \mathbf{A}_{22} &= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

矩阵分块

定义 (矩阵的按行分块)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

矩阵分块

定义 (矩阵的按列分块)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_s)$$

其中

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

当 n 阶矩阵 \mathbf{A} 中非零元素都集中在主对角线附近, 有时可分块成如下**对角块矩阵**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix}$$

其中 \mathbf{A}_i 为 r_i 阶方阵 ($i = 1, 2, \dots, m$), 且

$$\sum_{i=1}^m r_i = n.$$

矩阵分块

如

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的加法) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为同型矩阵, 采用相同的分块法, 有

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 \mathbf{A}_{ij} 与 \mathbf{B}_{ij} 为同型矩阵, 则

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} + \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} + \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} + \mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的数乘)

$$\lambda \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{A}_{11} & \cdots & \lambda \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \lambda \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的乘法) 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 为 $n \times s$ 矩阵,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{r1} & \cdots & \mathbf{A}_{rs} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{st} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, \dots, \mathbf{A}_{is}$ 的列数分别等于 $\mathbf{B}_{1j}, \mathbf{B}_{2j}, \dots, \mathbf{B}_{sj}$ 的行数, 则

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{r1} & \cdots & \mathbf{C}_{rt} \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^s \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj}.$$

矩阵分块

例 用分块矩阵的乘法计算 \mathbf{AB} , 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵分块

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_3 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \end{array} \right)$$

矩阵分块

则

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 - \mathbf{I}_3 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 为 $n \times s$ 矩阵, \mathbf{B} 按列分块成 $1 \times s$ 分块矩阵, 将 \mathbf{A} 看成 1×1 分块矩阵, 则

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s) = (\mathbf{Ab}_1, \mathbf{Ab}_2, \dots, \mathbf{Ab}_s)$$

若已知 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 则显然

$$\mathbf{Ab}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

因此, \mathbf{B} 的每一列 \mathbf{b}_j 都是线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解。

矩阵分块

例 设 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$, 证明 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

矩阵分块

例 设 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$, 证明 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

证明. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, 把 \mathbf{A} 用列向量表示为 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$, 则

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例 设 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$, 证明 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

证明. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, 把 \mathbf{A} 用列向量表示为 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$, 则

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

因为 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$, 故

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

矩阵分块

例 设 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$, 证明 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

证明. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, 把 \mathbf{A} 用列向量表示为 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$, 则

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

因为 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$, 故

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

特别地, 有

$$\mathbf{a}_j^T \mathbf{a}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

即

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 = 0 \Rightarrow a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{mj} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

矩阵分块

例 若 n 阶矩阵 \mathbf{C}, \mathbf{D} 可以分块成同型对角块矩阵, 即

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & & \\ & \mathbf{C}_2 & \\ & & \dots \\ & & & \mathbf{C}_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & & \\ & \mathbf{D}_2 & \\ & & \dots \\ & & & \mathbf{D}_m \end{pmatrix}$$

其中 \mathbf{C}_i 和 \mathbf{D}_i 为同阶方阵 ($i = 1, 2, \dots, m$), 则

$$\mathbf{CD} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{D}_1 & & \\ & \mathbf{C}_2\mathbf{D}_2 & \\ & & \dots \\ & & & \mathbf{C}_m\mathbf{D}_m \end{pmatrix}$$

例 证明：若方阵 \mathbf{A} 为可逆的上三角阵，则 \mathbf{A}^{-1} 也为上三角阵。

矩阵分块

证明. 对阶数 n 用数学归纳法。

矩阵分块

证明. 对阶数 n 用数学归纳法。

1 当 $n = 1$ 时, $(a)^{-1} = (\frac{1}{a})$, 结论成立。

矩阵分块

证明. 对阶数 n 用数学归纳法。

- 1 当 $n = 1$ 时, $(a)^{-1} = (\frac{1}{a})$, 结论成立。
- 2 假设命题对 $n - 1$ 阶可逆上三角矩阵成立, 考虑 n 阶情况, 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中 \mathbf{A}_1 为 $n - 1$ 阶可逆上三角阵。



矩阵分块

续. 设 \mathbf{A} 的逆阵为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

矩阵分块

续. 设 \mathbf{A} 的逆阵为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\gamma} & a_{11}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_1\boldsymbol{\gamma} & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



续. 于是

$$\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_1 \Rightarrow \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}.$$

矩阵分块

续. 于是

$$\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_1 \Rightarrow \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}.$$

由归纳假设, \mathbf{B}_1 为 $n-1$ 阶上三角矩阵, 因此

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。



矩阵分块

定义 (分块矩阵的转置) 分块矩阵 $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{kl})_{s \times t}$ 的转置矩阵为

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{B}_{lk})_{t \times s},$$

其中 $\mathbf{B}_{lk} = \mathbf{A}_{kl}$.

矩阵分块

定义 (分块矩阵的转置) 分块矩阵 $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{kl})_{s \times t}$ 的转置矩阵为

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{B}_{lk})_{t \times s},$$

其中 $\mathbf{B}_{lk} = \mathbf{A}_{kl}$.

例

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T \\ \mathbf{A}_{13}^T & \mathbf{A}_{23}^T \end{pmatrix}$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的转置) 分块矩阵 $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{kl})_{s \times t}$ 的转置矩阵为

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{B}_{lk})_{t \times s},$$

其中 $\mathbf{B}_{lk} = \mathbf{A}_{kl}$.

例

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T \\ \mathbf{A}_{13}^T & \mathbf{A}_{23}^T \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\text{按行分块}} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^T = (\mathbf{b}_1^T \quad \mathbf{b}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{b}_m^T)$$

矩阵分块

定义 (可逆分块矩阵的逆矩阵) 对角块矩阵 (准对角矩阵)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix}$$

的行列式为 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1| |\mathbf{A}_2| \cdots |\mathbf{A}_m|$, 因此, \mathbf{A} 可逆的充分必要条
件为

$$|\mathbf{A}_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

其逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m^{-1} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

分块矩阵的作用：

- ▶ 用分块矩阵求逆矩阵，可将高阶矩阵的求逆转化为低阶矩阵的求逆。
- ▶ 一个 2×2 的分块矩阵求逆，可以根据逆矩阵的定义，用解矩阵方程的方法解得。

矩阵分块

例 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$, 其中 \mathbf{B}, \mathbf{D} 皆为可逆矩阵, 证明 \mathbf{A} 可逆并求 \mathbf{A}^{-1} .

矩阵分块

解 因 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}||\mathbf{D}| \neq 0$, 故 \mathbf{A} 可逆。

矩阵分块

解 因 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}||\mathbf{D}| \neq 0$, 故 \mathbf{A} 可逆。设 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{BX} & \mathbf{BY} \\ \mathbf{CX} + \mathbf{DZ} & \mathbf{CY} + \mathbf{DT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

解 因 $|A| = |B||D| \neq 0$, 故 A 可逆。设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

由此可知

$$BX = I \quad \Rightarrow \quad X = B^{-1}$$

$$BY = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = 0$$

$$CX + DZ = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = -D^{-1}CB^{-1}$$

$$CY + DT = I \quad \Rightarrow \quad T = D^{-1}$$

矩阵分块

解 因 $|A| = |B||D| \neq 0$, 故 A 可逆。设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

由此可知

$$BX = I \quad \Rightarrow \quad X = B^{-1}$$

$$BY = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = 0$$

$$CX + DZ = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = -D^{-1}CB^{-1}$$

$$CY + DT = I \quad \Rightarrow \quad T = D^{-1}$$

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵) 对于分块矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

同样可以定义它的 3 类初等行变换与列变换, 并相应地定义 3 类分块矩阵:

(i) 分块倍乘矩阵 ($\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ 为可逆阵)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix}$$

(ii) 分块倍加矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{C}_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$$

(iii) 分块对换矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例 设 n 阶矩阵 \mathbf{A} 分块表示为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}$ 为方阵, 且 \mathbf{A} 与 \mathbf{A}_{11} 可逆。证明:
 $\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ 可逆, 并求 \mathbf{A}^{-1} 。

矩阵分块

解 构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式可知

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{P}_1\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11}| \cdot |\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}|$$

故 $\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ 可逆。

矩阵分块

解 (续)

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

解 (续)

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12} \mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

矩阵分块

解 (续)

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12} \mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

解 (续)

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12} \mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12} \mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{12} \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

矩阵分块

例 设 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$, 且 \mathbf{A} 可逆, 证明:

$$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$$

矩阵分块

例 设 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$, 且 \mathbf{A} 可逆, 证明:

$$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}|$$

证明. 构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例 设 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$, 且 \mathbf{A} 可逆, 证明:

$$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}|$$

证明. 构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例 设 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$, 且 \mathbf{A} 可逆, 证明:

$$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}|$$

证明. 构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得

$$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}|.$$



矩阵分块

例 设 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 均为 n 阶分块矩阵, 证明

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{vmatrix} = |\mathbf{A} + \mathbf{B}| |\mathbf{A} - \mathbf{B}|$$

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行, 得

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行, 得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行, 得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列, 得

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行, 得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列, 得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行, 得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列, 得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

总之有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得结论。

