

# 线性代数

## 总复习

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 6 月 20 日

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

## 1. 行列式

- ▶ 行列式的性质
- ▶ 行列式的计算
- ▶ 克莱姆法则

## 2. 矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型

正交变换法

配方法

## 1. 行列式

- ▶ 行列式的性质
- ▶ 行列式的计算
- ▶ 克莱姆法则

## 2. 矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型

性质 1 互换行列式的行与列，值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

性质 2 行列式对任一行按下式展开，其值相等，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

而  $M_{ij}$  为  $a_{ij}$  的余子式， $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式.

### 性质 3 (线性性质)

- 1 行列式的某一行 (列) 中所有的元素都乘以同一个数  $k$ , 等于用数  $k$  乘以此行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2)$$

- 2 若行列式的某一行 (列) 的元素都是两数之和, 如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} + b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3)$$

性质 4 若行列式有两行（列）完全相同，其值为 0.

推论 1 若行列式中有两行（列）元素成比例，则行列式的值为 0.



**性质 5** 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

性质 6 互换行列式的两行（列），行列式变号。

性质 7 行列式某一行的元素乘以另一行对应元素的代数余子式之和等于 0, 即

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j).$$

### 结论 1

- 对行列式  $D$  按行展开, 有

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}D,$$

其中  $\delta_{ij}$  为克罗内克 (Kronecker) 记号, 表示为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

- 对行列式  $D$  按列展开, 有

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}D,$$

## 1. 行列式

- ▶ 行列式的性质
- ▶ 行列式的计算
- ▶ 克莱姆法则

## 2. 矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型

1、有些行列式需要用“后一行减前一行”的处理方式.

例 1 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xrightarrow[i=n, \dots, 2]{r_i - r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \underline{\underline{c_i - c_1}} \\ i=2, \dots, n \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right| \\
\\
\begin{array}{c} \underline{\underline{c_i \div n}} \\ i=2, \dots, n \end{array} n^{n-1} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \dots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right|
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{\underline{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}} n^{n-1} \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
& = n^{n-1} \left[ 1 + \frac{1}{n} \frac{n(n-1)}{2} \right] (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (-1)^{n-1} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.
\end{aligned}$$

类似地, 还有

例 2 计算行列式

$$D_{20} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 18 & 19 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 17 & 18 & 19 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 16 & 17 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 20 & 19 & 18 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

例 3 计算元素为  $a_{ij} = |i-j|$  的  $n$  阶行列式, 即

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



## 2、爪形行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其解法固定，即从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。

类似的方式还可用于求解如下形式的“爪型行列式”

$$\begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{cc} \text{---} & \nearrow \\ & \text{---} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \nearrow & \\ \text{---} & \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \nwarrow & \\ \text{---} & \end{array} \right| \\ \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} \end{array}$$

#### 例 4 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解

$$D \xrightarrow[r_1-r_i]{i=2,\dots,n} \begin{vmatrix} 1 - \sum_{i=2}^n i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (1 - \sum_{i=2}^n i) \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

$$= \left[ 2 - \frac{(n+1)n}{2} \right] n!$$

例 5

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! \left( 1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right)$$

例 6 (★) 设  $a_0 a_1 \cdots a_n \neq 0$ , 证明

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left( a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right).$$

例 6 (★) 设  $a_0 a_1 \cdots a_n \neq 0$ , 证明

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left( a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right).$$

解

$$\text{原式} \xrightarrow[r_1 + r_i \times (-\frac{1}{a_{i-1}})]{i=2,3,\dots,n+1} \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left( a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)$$

### 3、“升阶法”的应用

例 7 计算  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}$$

一些常见形式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

### 例 8

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a}{x_i - a} \right) \prod_{i=1}^n (x_i - a)$$

### 常见形式

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \left( a + \frac{n(n+1)}{2} \right) a^{n-1}$$



### 例 9

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i - a_i} \right) \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)$$

### 常见形式

$$\begin{vmatrix} a_1 + b & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix} = b^{n-1} \left( \sum_{i=1}^n a_i + b \right)$$

#### 4、分块下三角行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

## 5、辐射型行列式的计算

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & c & d & \\ & & & & \ddots \\ c & & & & & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^n.$$

## 6、范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

例 10 设  $a, b, c$  为互不相同的实数, 证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

的充要条件是  $a + b + c = 0$ .

例 11 (★) 解关于  $x$  的方程  $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0.$

例 11 (★) 解关于  $x$  的方程  $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$ .

解 由于  $D(\pm 1) = 0$  和  $D(\pm 2) = 0$ , 而  $D(x)$  中  $x$  的最高次数为 4, 故

$$D(x) = A(x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = 0$$

的解为  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$ .

## 1. 行列式

- ▶ 行列式的性质
- ▶ 行列式的计算
- ▶ 克莱姆法则

## 2. 矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型



定理 1 (克莱姆法则) 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (4)$$

的系数行列式不等于 0, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则该方程组存在唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第  $j$  列

## 1. 行列式

## 2. 矩阵

- ▶ 矩阵的定义
- ▶ 矩阵的加法、数乘及乘法
- ▶ 矩阵的转置
- ▶ 矩阵的逆
- ▶ 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型

正交变换法

配方法

## 1. 行列式

## 2. 矩阵

- ▶ 矩阵的定义
- ▶ 矩阵的加法、数乘及乘法
- ▶ 矩阵的转置
- ▶ 矩阵的逆
- ▶ 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型

对于一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其增广矩阵为

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

对于以上增广矩阵，总是可以经过一系列的变换将其化成

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc|c} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

其中  $c_{ii} = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ )。

对应线性方程组解的情况如下:

1 线性方程组有解  $\Leftrightarrow d_{r+1} = 0$ ;

2 在有解的情况下:

- ▶ 当  $r = n$  时, 有唯一解  $x_1 = d_1, x_2 = d_2, \dots, x_n = d_n$ ;
- ▶ 当  $r < n$  时, 有无穷多解

$$\begin{cases} x_1 &= d_1 - c_{1,r+1}k_1 - \dots - c_{1n}k_{n-r}, \\ x_2 &= d_2 - c_{2,r+1}k_1 - \dots - c_{2n}k_{n-r}, \\ &\vdots \\ x_r &= d_r - c_{r,r+1}k_1 - \dots - c_{rn}k_{n-r}, \\ x_{r+1} &= k_1, \\ &\vdots \\ x_n &= k_{n-r}, \end{cases}$$

其中  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  为任意常数。



## 1. 行列式

## 2. 矩阵

- ▶ 矩阵的定义
- ▶ 矩阵的加法、数乘及乘法
- ▶ 矩阵的转置
- ▶ 矩阵的逆
- ▶ 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型

**定义 1 (矩阵的加法)** 设有两个  $m \times n$  矩阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  和  $\mathbf{B} = (b_{ij})$ , 则矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  之和记为  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , 规定为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

**注** 只有当两个矩阵同型时才能进行加法运算。

定义 2 (矩阵的数乘) 数  $k$  与矩阵  $\mathbf{A}$  的乘积记作  $k\mathbf{A}$  或  $\mathbf{A}k$ , 规定为

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

注 用数  $k$  乘一个矩阵, 需要把数  $k$  乘矩阵的每一个元素, 这与行列式的数乘性质不同。

**定义 3 (矩阵乘法)** 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times s$  矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

则  $A$  与  $B$  之乘积  $AB$  (记为  $C = (c_{ij})$ ) 为  $m \times s$  矩阵, 且

$$c_{ij} = c_{i1}b_{1j} + c_{i2}b_{2j} + \cdots + c_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

**注** 两个矩阵  $A$  与  $B$  相乘有意义的前提是  **$A$  的列数等于  $B$  的行数。**

例 12 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n)$$

计算  $\mathbf{AB}$  与  $\mathbf{BA}$ .

解

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

矩阵乘法不满足交换律。

- ▶ 若  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ ，则称  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  不可交换。
- ▶ 若  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ，则称  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  可交换。

例 13 (★) 已知矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  可交换。试求

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$



例 13 (★) 已知矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  可交换。试求

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

解 由两矩阵可交换知  $a_2 = b_3 = 1, b_1 = a_3 = 2, a_1 = b_2 = 3$ . 于是所求行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18.$$

#### 定义 4 (单位矩阵与数量矩阵)

- 1 主对角元全为 1, 其余元素全为零的  $n$  阶方阵, 称为  $n$  阶**单位矩阵**, 记为  $\mathbf{I}_n, \mathbf{I}, \mathbf{E}$

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- 2 主对角元全为非零数  $k$ , 其余元素全为零的  $n$  阶方阵, 称为  $n$  阶**数量矩阵**, 记为  $k\mathbf{I}_n, k\mathbf{I}, k\mathbf{E}$

$$k\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} (k \neq 0)$$

**定义 5 (对角矩阵)** 非对角元皆为零的  $n$  阶方阵称为  $n$  阶**对角矩阵**, 记作  $\mathbf{\Lambda}$ , 即

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

或记作  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

## 注

- 1 用对角阵  $\Lambda$  左乘  $A$ , 就是用  $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$  乘  $A$  中第  $i$  行的每个元素;

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 2 用对角阵  $\Lambda$  右乘  $A$ , 就是用  $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$  乘  $A$  中第  $i$  列的每个元素,  
即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

## 定义 6 (三角矩阵)

- 1 主对角线以上的元素全为零的  $n$  阶方阵称为**上三角矩阵** ( $a_{ij} = 0, i > j$ )

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 2 主对角线以下的元素全为零的  $n$  阶方阵称为**下三角矩阵** ( $a_{ij} = 0, i < j$ )

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**结论 2** 两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵；两个下三角矩阵的乘积仍为下三角矩阵。

定理 2 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  是两个  $n$  阶方阵, 则

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

例 14 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ , 求  $|(4E - A)^T(4E - A)|$ .



例 14 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ , 求  $|(4E - A)^T(4E - A)|$ .

解 因  $|(4E - A)^T(4E - A)| = |(4E - A)^T| |(4E - A)| = |4E - A|^2$ , 而

$$|4E - A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

故  $|(4E - A)^T(4E - A)| = 36$ .

**定义 7 (矩阵幂)** 设  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶矩阵,  $k$  个  $\mathbf{A}$  的连乘积称为  $\mathbf{A}$  的  $k$  次幂, 记作  $\mathbf{A}^k$ , 即

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_k$$

矩阵幂的运算律:

1 当  $m, k$  为正整数时,

$$\mathbf{A}^m \mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{m+k}, \quad (\mathbf{A}^m)^k = \mathbf{A}^{mk}.$$

2 当  $\mathbf{AB}$  不可交换时, 一般情况下,

$$(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$$

3 当  $\mathbf{AB}$  可交换时,

$$(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k = \mathbf{B}^k \mathbf{A}^k.$$

**定义 8 (矩阵多项式)** 设  $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  是  $x$  的  $k$  次多项式,  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶矩阵, 则

$$f(\mathbf{A}) = a_k \mathbf{A}^k + a_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}$$

称为矩阵  $\mathbf{A}$  的  $k$  次多项式。

**注**

1 若  $f(x), g(x)$  为多项式,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  皆是  $n$  阶矩阵, 则

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}).$$

2 当  $\mathbf{AB}$  不可交换时, 一般

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{B}) \neq g(\mathbf{B})f(\mathbf{A})$$

## 1. 行列式

## 2. 矩阵

- ▶ 矩阵的定义
- ▶ 矩阵的加法、数乘及乘法
- ▶ 矩阵的转置
- ▶ 矩阵的逆
- ▶ 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型

定义 9 (转置矩阵) 把一个  $m \times n$  矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到的一个  $n \times m$  矩阵, 称之为  $\mathbf{A}$  的转置矩阵, 记为  $\mathbf{A}^T$  或  $\mathbf{A}'$ , 即

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

### 定理 3 (矩阵转置的运算律)

$$(i) \quad (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(ii) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(iii) \quad (k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$$

$$(iv) \quad (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

定义 10 (对称矩阵、反对称矩阵) 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个  $n$  阶矩阵。

1 如果

$$a_{ij} = a_{ji},$$

则称  $\mathbf{A}$  为**对称矩阵**;

2 如果

$$a_{ij} = -a_{ji},$$

则称  $\mathbf{A}$  为**反对称矩阵**。



**注** 关于对称矩阵与反对称矩阵，有如下性质：

1.  $\mathbf{A}$  为对称矩阵的充分必要条件是  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ ；
2.  $\mathbf{A}$  为反对称矩阵的充分必要条件是  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ ；
3. 反对称矩阵的主对角元全为零。
4. 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。
5. 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

设  $\mathbf{A}$  为一  $n$  阶方阵，则

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}$$

容易验证  $\frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2}$  为对称阵， $\frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}$  为反对称阵。

6. 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

若  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  均为对称矩阵，则  $\mathbf{AB}$  对称的充分必要条件是  $\mathbf{AB}$  可交换。

## 1. 行列式

## 2. 矩阵

- ▶ 矩阵的定义
- ▶ 矩阵的加法、数乘及乘法
- ▶ 矩阵的转置
- ▶ 矩阵的逆
- ▶ 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型

定义 11 (逆矩阵) 对于  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$ , 如果有一个  $n$  阶矩阵  $\mathbf{B}$ , 使

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

则称  $\mathbf{A}$  是可逆的, 并把  $\mathbf{B}$  称为  $\mathbf{A}$  的逆矩阵。

定理 4 若  $\mathbf{A}$  可逆, 则  $\mathbf{A}$  的逆阵惟一。

定理 5 若  $\mathbf{A}$  可逆, 则  $|\mathbf{A}| \neq 0$ .

**定义 12** 代数余子式矩阵, 伴随矩阵 设  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ ,  $A_{ij}$  为行列式  $|\mathbf{A}|$  中元素  $a_{ij}$  的代数余子式, 称

$$\text{coef } \mathbf{A} = (A_{ij})_{n \times n}$$

为  $\mathbf{A}$  的代数余子式矩阵, 并称  $\text{coef } \mathbf{A}$  的转置矩阵为  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵, 记为  $\mathbf{A}^*$ , 即

$$\mathbf{A}^* = (\text{coef } \mathbf{A})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 6 若  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , 则  $\mathbf{A}$  可逆, 且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$$

**定义 13 (奇异阵与非奇异阵)** 当  $|\mathbf{A}| = 0$  时,  $\mathbf{A}$  称为**奇异矩阵**, 否则称为**非奇异矩阵**。

**注** 可逆矩阵就是非奇异矩阵。



定理 7 可逆矩阵有如下运算规律:

1 若  $\mathbf{A}$  可逆, 则  $\mathbf{A}^{-1}$  亦可逆, 且  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ .

2 若  $\mathbf{A}$  可逆,  $k \neq 0$ , 则  $k\mathbf{A}$  可逆, 且  $(k\mathbf{A})^{-1} = k^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .

3 若  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为同阶矩阵且均可逆, 则  $\mathbf{AB}$  可逆, 且  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .

若  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$  皆可逆, 则  $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1} \cdots \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$ .

4 若  $\mathbf{A}$  可逆, 则  $\mathbf{A}^T$  亦可逆, 且  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ .

5 若  $\mathbf{A}$  可逆, 则  $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$ .

例 15 (★) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ , 问  $A$  是否可逆? 如可逆求  $A^{-1}$ , 如不可逆, 求  $A$  的伴随矩阵  $A^*$ .

例 15 (★) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ , 问  $A$  是否可逆? 如可逆求  $A^{-1}$ , 如不可逆, 求  $A$  的伴随矩阵  $A^*$ .

解 因

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

故  $A$  不可逆。而

$$A^* = \begin{vmatrix} -14 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ -10 & -5 & 5 \end{vmatrix}.$$

**例 16** 设  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  可交换, 且  $\mathbf{A}$  可逆,  $\mathbf{A}^*$  为  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵, 试证明  $\mathbf{A}^*$  与  $\mathbf{B}$  可交换。

**例 16** 设  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  可交换, 且  $\mathbf{A}$  可逆,  $\mathbf{A}^*$  为  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵, 试证明  $\mathbf{A}^*$  与  $\mathbf{B}$  可交换。

**证明.** 由  $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$  可得  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BA}^{-1}$ , 故  $\mathbf{A}^*\mathbf{B} = \mathbf{BA}^*$ .  $\square$

例 17 设方阵  $\mathbf{A}$  满足方程

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

证明:  $\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$  都可逆, 并求它们的逆矩阵。

例 17 设方阵  $\mathbf{A}$  满足方程

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

证明:  $\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$  都可逆, 并求它们的逆矩阵。

证明.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 10\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A} \left[ \frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \right] = \mathbf{I}$$

故  $\mathbf{A}$  可逆, 且  $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ .

例 17 设方阵  $\mathbf{A}$  满足方程

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

证明:  $\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$  都可逆, 并求它们的逆矩阵。

证明.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 10\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A} \left[ \frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \right] = \mathbf{I}$$

故  $\mathbf{A}$  可逆, 且  $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ .

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = 6\mathbf{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

故  $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$  可逆, 且  $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$ . □



## 1. 行列式

## 2. 矩阵

- ▶ 矩阵的定义
- ▶ 矩阵的加法、数乘及乘法
- ▶ 矩阵的转置
- ▶ 矩阵的逆
- ▶ 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型

**定义 14 (初等矩阵)** 将单位矩阵  $I$  做一次初等变换所得的矩阵称为**初等矩阵**。  
对应于 3 类初等行、列变换，有 3 种类型的初等矩阵。

以下介绍三种初等矩阵：

1. 初等对调矩阵；
2. 初等倍乘矩阵；
3. 初等倍加矩阵。

1、对调  $I$  的两行或两列 (初等对调矩阵)

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

第  $i$  行

第  $j$  行

第  $i$  列      第  $j$  列

a、用  $m$  阶初等矩阵  $E_{ij}$  左乘  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 得

$$E_{ij}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

相当于 把  $A$  的第  $i$  行与第  $j$  行对调 ( $r_i \leftrightarrow r_j$ ) .

b、用  $n$  阶初等矩阵  $E_{ij}$  右乘  $A$ , 得

$$AE_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第  $i$  列    第  $j$  列

相当于把  $A$  的第  $i$  列与第  $j$  列对调 ( $c_i \leftrightarrow c_j$ ) .

2、以非零常数  $k$  乘  $\mathbf{I}$  的某行或某列 (初等倍乘矩阵)

$$\mathbf{E}_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

第  $i$  行

第  $i$  列



a、以  $m$  阶初等矩阵  $\mathbf{E}_i(k)$  左乘  $\mathbf{A}$ ，得

$$\mathbf{E}_i(k)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{第 } i \text{ 行}$$

相当于以数  $k$  乘  $\mathbf{A}$  的第  $i$  行 ( $r_i \times k$ )；

b、以  $n$  阶初等矩阵  $E_i(k)$  右乘  $A$ ，得

$$AE_i(k) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第  $i$  列

相当于以数  $k$  乘  $A$  的第  $i$  列 ( $c_i \times k$ )。

3、将非零常数  $k$  乘  $\mathbf{I}$  的某行再添加到另一行上 (初等倍加矩阵)

$$\mathbf{E}_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

a、以  $m$  阶初等矩阵  $E_{ij}(k)$  左乘  $A$ , 得

$$E_{ij}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

相当于把  $A$  的第  $j$  行乘以数  $k$  加到第  $i$  行上 ( $r_i + r_j \times k$ ) ;

b、以  $n$  阶初等矩阵  $E_{ij}(k)$  右乘  $A$ ，得

$$AE_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} + ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} + ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第  $i$  列

第  $j$  列

相当于把  $A$  的第  $i$  列乘以数  $k$  加到第  $j$  列上 ( $c_j + c_i \times k$ )。

定理 8 设  $\mathbf{A}$  为一个  $m \times n$  矩阵,

- ▶ 对  $\mathbf{A}$  施行一次初等行变换, 相当于在  $\mathbf{A}$  的左边乘以相应的  $m$  阶初等矩阵;
- ▶ 对  $\mathbf{A}$  施行一次初等列变换, 相当于在  $\mathbf{A}$  的右边乘以相应的  $n$  阶初等矩阵。

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换  $r_i \leftrightarrow r_j$  的逆变换为其本身可知

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

(ii) 由变换  $r_i \times k$  的逆变换为  $r_i \div k$  可知

$$E_i(k)^{-1} = E_i(k^{-1})$$

(iii) 由变换  $r_i + r_j \times k$  的逆变换为  $r_i - r_j \times k$  可知

$$E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$$

以上结论也可总结为

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(k^{-1}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$



例 18 (★) 设  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $C =$

$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , 求  $(AB + 2C)E(2, 3)$ , 其中  $E(2, 3)$  是交换单位矩阵的  
2,3 行 (列) 所得的三阶初等方阵。

例 18 (★) 设  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $C =$

$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , 求  $(AB + 2C)E(2, 3)$ , 其中  $E(2, 3)$  是交换单位矩阵的

2,3 行 (列) 所得的三阶初等方阵。

解 经计算

$$AB + 2C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -9 & 6 \\ 4 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

故

$$(AB + 2C)E(2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & -9 \\ 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

**定理 9** 可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

**推论 2** 可逆矩阵  $\mathbf{A}$  可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

**推论 3** 如果对可逆矩阵  $\mathbf{A}$  与同阶单位矩阵  $\mathbf{I}$  做同样的初等行变换，那么当  $\mathbf{A}$  变为单位阵时， $\mathbf{I}$  就变为  $\mathbf{A}^{-1}$ ，即

$$\left( \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left( \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right)$$

同理，

$$\left( \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等列变换}} \left( \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right)$$

**定理 9** 可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

**推论 2** 可逆矩阵  $\mathbf{A}$  可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

**推论 3** 如果对可逆矩阵  $\mathbf{A}$  与同阶单位矩阵  $\mathbf{I}$  做同样的初等行变换，那么当  $\mathbf{A}$  变为单位阵时， $\mathbf{I}$  就变为  $\mathbf{A}^{-1}$ ，即

$$\left( \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left( \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right)$$

同理，

$$\left( \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等列变换}} \left( \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right)$$

**注 1** 该推论给出了求可逆矩阵的逆的一种有效方法，请大家熟练掌握。

例 19 求  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

解

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\&\xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_1 + r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

例 20 已知  $\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I}$ , 求  $\mathbf{B}$ , 其中  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 2\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{A}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

而

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$



推论 4 对于  $n$  个未知数  $n$  个方程的线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , 如果增广矩阵

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \sim (\mathbf{I}, \mathbf{x}),$$

则  $\mathbf{A}$  可逆, 且  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  为惟一解。

例 21 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$  与  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$  的解。

解

$$(\mathbf{A} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_3 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \div 5 \\ r_3 + 3r_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2 + 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例 22 (★) 求解矩阵方程  $\mathbf{AX} = \mathbf{A} + \mathbf{X}$ , 其中  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解 原方程等价于

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}$$

而

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I} \quad \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 + 4r_2 \\ r_3 \div (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_3 + 4r_2 \\ r_3 \div (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例 23 (★) 求解矩阵方程  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} + \mathbf{X}$ , 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

求  $\mathbf{X}$ 。

## 1. 行列式

## 2. 矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

- ▶  $n$  维向量及其线性相关性
- ▶ 向量组的秩及其极大线性无关组
- ▶ 矩阵的秩
- ▶ 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
- ▶ 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型

正交变换法

配方法

## 1. 行列式

## 2. 矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

- ▶  $n$  维向量及其线性相关性
- ▶ 向量组的秩及其极大线性无关组
- ▶ 矩阵的秩
- ▶ 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
- ▶ 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题





**定义 15 (向量空间)** 数域  $\mathbb{R}$  上的  $n$  维向量, 在其中定义了上述加法与数乘运算, 就称之为  $\mathbb{R}$  上的  $n$  维向量空间, 仍记为  $\mathbb{R}^n$ 。

**定义 16 (线性表示)** 设  $\alpha_i \in \mathbb{R}^n, k_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, m)$ , 则向量

$$\sum_{i=1}^m k_i \alpha_i = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m$$

称为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  在数域  $\mathbb{R}$  上的一个**线性组合**。如果记

$$\beta = \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i,$$

则称  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  **线性表示** (或**线性表出**)。

设有线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ，其中  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵。记

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

于是线性方程组可等价的表述为

$$x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{b}$$

**注** 向量  $\mathbf{b}$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 等价于方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = \mathbf{b}$$

有解。

**定义 17 (线性相关与线性无关)** 若对  $m$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}^n$ , 有  $m$  个不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}$ , 使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \mathbf{0} \quad (5)$$

成立, 则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关; 否则, 称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关。

**注** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 指的是

- ▶ 没有不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  使 (5) 成立;
- ▶ 只有当  $k_1, k_2, \dots, k_m$  全为零时, 才使 (5) 成立;
- ▶ 若 (5) 成立, 则  $k_1, k_2, \dots, k_m$  必须全为零。

定理 10 以下两组等价关系成立:

- ▶ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 等价于齐次方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = \mathbf{0}$$

有非零解。

- ▶ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 等价于齐次方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = \mathbf{0}$$

只有零解。



例 24 (★) 下列命题是否正确? 如正确, 请证明, 若不正确请举反例: 向量组  $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$  线性无关的充分必要条件是存在一组不全为零的常数  $k_1, k_2, \dots, k_s$  使得  $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_s a_s \neq 0$ .

例 24 (★) 下列命题是否正确? 如正确, 请证明, 若不正确请举反例: 向量组  $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$  线性无关的充分必要条件是存在一组不全为零的常数  $k_1, k_2, \dots, k_s$  使得  $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_s a_s \neq 0$ .

解 不正确。如  $a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (2, 4, 6)$ , 存在  $k_1 = k_2 = 1 \neq 0$  使得  $k_1 a_1 + k_2 a_2 \neq 0$ , 但  $a_1, a_2$  线性相关。

证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关的基本方法为:

设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

然后说明上式成立, 只能有唯一选择:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0.$$

对于只含一个向量的向量组,

- ▶ 当  $\alpha = \mathbf{0}$  时, 向量组  $\alpha$  线性相关
- ▶ 当  $\alpha \neq \mathbf{0}$  时, 向量组  $\alpha$  线性无关

**定理 11** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$  线性相关的充分必要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中至少有一个向量可由其余  $m-1$  个向量线性表出。

**结论 3** 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关。

**注**

- ▶ 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关，则其中任一部分向量组也线性无关。
- ▶ 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

定理 12 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}^n$ , 其中

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})^T,$$

$$\alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})^T,$$

$$\dots,$$

$$\alpha_r = (a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{nr})^T,$$

则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$Ax = 0 \tag{6}$$

有非零解, 其中

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

结论 4 对于齐次线性方程组, 如果

未知量个数  $>$  方程个数,

则它必有无穷多解, 从而必有非零解。



定理 13 任意  $n+1$  个  $n$  维向量都是线性相关的。

注

- ▶ 向量个数  $>$  向量维数  $\Rightarrow$  向量组必线性相关。
- ▶ 在  $\mathbb{R}^n$  中, 任意一组线性无关的向量最多只能含  $n$  个向量。

**定理 14** 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 而  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关, 则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示, 并且表示法惟一。

**推论 5** 如果  $\mathbb{R}^n$  中的  $n$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关, 则  $\mathbb{R}^n$  中的任一向量  $\alpha$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且表示法惟一。

例 25 设  $\alpha_1 = (1, -1, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 2, 0)$ ,  $\alpha_3 = (1, 0, 3)$ ,  $\alpha_4 = (2, -3, 7)$ .  
问:

(1)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是否线性相关?

(2)  $\alpha_4$  可否由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示? 如能表示求出其表示式。

例 26 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 又  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$ ,  $\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ ,  $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$ , 证明  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性相关。

**例 27** 证明:  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  线性无关的充要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。

**定理 15** 如果一组  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 那么把这些向量各任意添加  $m$  个分量所得的向量 ( $n+m$  维) 组  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_s^*$  也线性无关。亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{ 线性无关 } \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \alpha_{n+1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n+m,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ \alpha_{n+1,s} \\ \vdots \\ \alpha_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{ 线性无关}$$

**定理 16** 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 那么它们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量也线性相关, 亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{ 线性相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{ 线性相关}$$

**推论 6** 设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。

如

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ 0 \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}$$

线性相关性一致。



例 28 考察以下向量组的线性相关性:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例 28 考察以下向量组的线性相关性:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解 去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关, 故原向量组线性无关。

## 1. 行列式

## 2. 矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

- ▶  $n$  维向量及其线性相关性
- ▶ 向量组的秩及其极大线性无关组
- ▶ 矩阵的秩
- ▶ 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
- ▶ 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型

定义 18 (向量组的秩) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中, 若

- ▶ 存在  $r$  个线性无关的向量,
- ▶ 且其中任一向量可由这  $r$  个线性无关的向量线性表示,

则数  $r$  称为向量组的秩 (rank), 记作

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$$

或

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$$

- ▶ 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ ;
- ▶ 只含零向量的向量组的秩为零。
- ▶ 只含一个非零向量的向量组的秩为 1。

**定义 19** 若向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  中每个向量可由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 就称向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示, 则称这两个向量组是等价的。

**例 29** 设向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性表出, 但不能由  $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$  线性表出, 证明: 向量组  $U: \alpha_1, \dots, \alpha_r$  与向量组  $V: \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta$  等价。



**例 29** 设向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性表出, 但不能由  $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$  线性表出, 证明: 向量组  $U: \alpha_1, \dots, \alpha_r$  与向量组  $V: \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta$  等价。

**证明.** 由已知条件知  $V$  可由  $U$  线性表出, 而  $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$  可由  $V$  线性表出, 故只需证明  $\alpha_r$  可由  $V$  线性表出。设

$$\beta = k_1 \alpha_1 + \dots + k_{r-1} \alpha_{r-1} + k_r \alpha_r$$

则  $k_r \neq 0$ . 否则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$  线性表出, 与已知矛盾, 故  $k_r \neq 0$ 。于是

$$\alpha_r = -\frac{1}{k_r}(\beta - k_1 \alpha_1 - \dots - k_{r-1} \alpha_{r-1})$$

即  $\alpha_r$  可由  $V$  线性表出。 □

定理 17 若向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 且  $t > s$ , 则  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性相关。

**定义 20 (向量组的秩的等价定义 & 极大线性无关组)** 设有向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 。如果能从其中选出  $r$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ , 满足

- ▶ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关;
- ▶ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意  $r+1$  个向量都线性相关,

则称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  为原向量组的一个**极大线性无关组**, 简称**极大无关组**。

极大线性无关组所含向量的个数  $r$ , 称为原向量组的**秩**。

## 注 2

- ▶ 秩为  $r$  的向量组中，任一个线性无关的部分组最多含有  $r$  个向量；
- ▶ 一般情况下，极大无关组不惟一；
- ▶ 不同的极大无关组所含向量个数相同；
- ▶ 极大无关组与原向量组是等价的；
- ▶ 极大无关组是原向量组的**全权代表**。

推论 7 设  $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = p$ ,  $R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r$ , 如果向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可由  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 则

$$r \leq p.$$

推论 8 等价向量组的秩相等。

## 1. 行列式

## 2. 矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

- ▶  $n$  维向量及其线性相关性
- ▶ 向量组的秩及其极大线性无关组
- ▶ 矩阵的秩
- ▶ 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
- ▶ 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题

## 6. 二次型



## 定义 21 (行秩 & 列秩)

- ▶ 对于矩阵  $\mathbf{A}$ ，把它的每一行称为  $\mathbf{A}$  的一个行向量。把  $\mathbf{A}$  的行向量组的秩，称为矩阵  $\mathbf{A}$  的行秩。
- ▶ 对于矩阵  $\mathbf{A}$ ，把它的每一列称为  $\mathbf{A}$  的一个列向量。把  $\mathbf{A}$  的列向量组的秩，称为矩阵  $\mathbf{A}$  的列秩。

对于  $m \times n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$ ,

- ▶  $\mathbf{A}$  的行秩  $\leq m$ ;
- ▶  $\mathbf{A}$  的列秩  $\leq n$ 。

定义 22 (阶梯形矩阵) 若矩阵  $\mathbf{A}$  满足

- (1) 零行在最下方;
- (2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增,

则称  $\mathbf{A}$  为阶梯形矩阵。

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**定义 23** 行简化阶梯形矩阵 若矩阵  $\mathbf{A}$  满足

- (1) 它是阶梯形矩阵；
- (2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外，其余元素全为零，

则称  $\mathbf{A}$  为行简化阶梯形矩阵。

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 24 行简化阶梯形矩阵 若矩阵  $\mathbf{A}$  满足

- (1) 它是行简化阶梯形矩阵;
- (2) 非零行首元全为 1,

则称  $\mathbf{A}$  为行最简阶梯形矩阵。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 阶梯形矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中  $a_{11} \neq 0, a_{23} \neq 0, a_{34} \neq 0$ 。验证  $\mathbf{A}$  的行秩 = 3, 列秩 = 3。

**结论 5** 阶梯形矩阵的行秩等于列秩，其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数。

定理 18 初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩。

定理 19 初等变换不改变矩阵的行秩与列秩。

例 30 (★) 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。



解 作矩阵  $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ , 由

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{r_1 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\&\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_4 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\&\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}\end{aligned}$$

将最后一个阶梯矩阵  $\mathbf{B}$  记为  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$

易知  $\beta_1, \beta_2, \beta_4$  为  $B$  的列向量组的一个极大无关组, 故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  也为  $A$  的列向量组的一个极大无关组, 故

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3,$$

且

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4,$$

定理 20 矩阵的行秩等于其列秩。

定义 25 (矩阵的秩) 矩阵的行秩或列秩的数值, 称为**矩阵的秩**。记作

$$R(\mathbf{A}) \text{ 或 } \text{rank}(\mathbf{A})$$

定义 26 (满秩矩阵) 对于  $n$  阶方阵, 若

$$R(\mathbf{A}) = n,$$

则称  $\mathbf{A}$  为**满秩矩阵**。

定理 21 对于  $n$  阶方阵, 下列表述等价:

- (1)  $\mathbf{A}$  为满秩矩阵。
- (2)  $\mathbf{A}$  为可逆矩阵。
- (3)  $\mathbf{A}$  为非奇异矩阵。
- (4)  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ 。

**定义 27 (子式与主子式)** 对矩阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ , 任意挑选  $k$  行  $(i_1, i_2, \dots, i_k$  行) 与  $k$  列  $(j_1, j_2, \dots, j_k$  列), 其交点上的  $k^2$  个元素按原顺序排成的  $k$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \quad (7)$$

称为  $\mathbf{A}$  的  $k$  阶子行列式, 简称  $\mathbf{A}$  的  $k$  阶子式。

- ▶ 当 (7) 等于零时, 称为  $k$  阶零子式;
- ▶ 当 (7) 不等于零时, 称为  $k$  阶非零子式;
- ▶ 当 (7) 的  $j_1 = i_1, j_2 = i_2, \dots, j_k = i_k$ , 称为  $\mathbf{A}$  的  $k$  阶主子式。

注 若  $\mathbf{A}$  存在  $r$  阶非零子式, 而所有  $r+1$  阶子式 (如果有) 都等于零, 则矩阵  $\mathbf{A}$  的非零子式的最高阶数为  $r$ 。

事实上, 由行列式的按行展开可知, 若所有  $r+1$  阶子式都等于零, 可得到所有更高阶的子式都等于零。

定理 22  $R(\mathbf{A}) = r$  的充分必要条件是  $\mathbf{A}$  的非零子式的最高阶数为  $r$ 。

## 关于矩阵的秩的基本结论

- (1)  $R(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ 的行秩 =  $\mathbf{A}$ 的列秩 =  $\mathbf{A}$ 的非零子式的最高阶数
- (2) 初等变换不改变矩阵的秩



性质 8

$$\max\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\} \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}).$$

特别地, 当  $\mathbf{B} = \mathbf{b}$  为非零向量时, 有

$$R(\mathbf{A}) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq R(\mathbf{A}) + 1.$$

$$R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{cases} R(\mathbf{A}) & \iff \mathbf{b} \text{ 可以被 } \mathbf{A} \text{ 的列向量线性表示} \\ R(\mathbf{A}) + 1 & \iff \mathbf{b} \text{ 不能被 } \mathbf{A} \text{ 的列向量线性表示} \end{cases}$$

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 因

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - (c_1 + 2c_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}, \mathbf{0}),$$

故  $R(\mathbf{A}, \mathbf{b}_1) = R(\mathbf{A}, \mathbf{0}) = R(\mathbf{A})$ , 从而  $\mathbf{b}_1$  可由  $\mathbf{A}$  的列向量线性表示。

(2) 因

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故  $R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = R(\mathbf{A}) + 1$ , 从而  $\mathbf{b}$  不能由  $\mathbf{A}$  的列向量线性表示。

## 注

### ► 不等式

$$\min\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\} \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

意味着：在  $\mathbf{A}$  的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当  $\mathbf{B}$  的列向量能被  $\mathbf{A}$  的列向量线性表示时，等号成立。

## 注

### ► 不等式

$$\min\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\} \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

意味着：在  $\mathbf{A}$  的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当  $\mathbf{B}$  的列向量能被  $\mathbf{A}$  的列向量线性表示时，等号成立。

### ► 不等式

$$R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$$

意味着：对  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ，有可能  $\mathbf{A}$  的列向量与  $\mathbf{B}$  的列向量出现线性相关，合并为  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  的秩一般会比  $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$  要小。

### 性质 9

$$R(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}).$$

**注** 将矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  合并、相加，只可能使得秩减小。

### 性质 10

$$R(\mathbf{AB}) \leq \min(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})).$$

该性质告诉我们，对一个向量组进行线性组合，可能会使向量组的秩减小。

性质 11 设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  分别为  $m$  阶、 $n$  阶可逆矩阵, 则

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{PA}) = R(\mathbf{AQ}) = R(\mathbf{PAQ}).$$



例 31 设  $\mathbf{A}$  是  $m \times n$  矩阵, 且  $m < n$ , 证明:  $|\mathbf{A}^T \mathbf{A}| = 0$ .

例 31 设  $\mathbf{A}$  是  $m \times n$  矩阵, 且  $m < n$ , 证明:  $|\mathbf{A}^T \mathbf{A}| = 0$ .

解 由于  $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^T) \leq \min\{m, n\} < n$ , 根据性质 2, 有

$$R(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \leq \min\{R(\mathbf{A}^T), R(\mathbf{A})\} < n,$$

而  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  为  $n$  阶矩阵, 故  $|\mathbf{A}^T \mathbf{A}| = 0$ 。

**定理 23** 若  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵, 且  $R(\mathbf{A}) = r$ , 则一定存在可逆的  $m$  阶矩阵  $\mathbf{P}$  和  $n$  阶矩阵  $\mathbf{Q}$  使得

$$\mathbf{PAQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n} = \mathbf{U}.$$

例 32 (★) 设

$$\alpha_1 = (1, 3, 1, 2), \alpha_2 = (2, 5, 3, 3),$$

$$\alpha_3 = (0, 1, -1, a), \alpha_4 = (3, 10, k, 4),$$

试求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的秩, 并将  $\alpha_4$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

解 将 4 个向量按列排成一个矩阵  $\mathbf{A}$ , 做初等变换将其化为阶梯形矩阵  $\mathbf{U}$ , 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

(1) 当  $a=1$  或  $k=2$  时,  $\mathbf{U}$  只有 3 个非零行, 故

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = R(\mathbf{A}) = 3.$$

(2) 当  $a \neq 1$  且  $k \neq 2$  时,  $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = R(\mathbf{A}) = 4$ .

(3) 当  $k=2$  且  $a \neq 1$  时,  $\alpha_4$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且

$$\alpha_4 = -\frac{1+5a}{1-a}\alpha_1 + \frac{2+a}{1-a}\alpha_2 + \frac{3}{1-a}\alpha_3.$$

(4) 当  $k \neq 2$  或  $a=1$  时,  $\alpha_4$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示。

例 33 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知  $R(\mathbf{A}) = 2$ , 求  $t$ 。

例 33 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知  $R(\mathbf{A}) = 2$ , 求  $t$ 。

解

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

由于  $R(\mathbf{B}) = R(\mathbf{A})$ , 故  $\mathbf{B}$  中第 2、3 行必须成比例, 即

$$\frac{-2}{2+t} = \frac{-4}{6},$$

即得  $t = 1$ 。

## 1. 行列式

## 2. 矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

- ▶  $n$  维向量及其线性相关性
- ▶ 向量组的秩及其极大线性无关组
- ▶ 矩阵的秩
- ▶ 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
- ▶ 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题





设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵, 考察以  $\mathbf{A}$  为系数矩阵的齐次线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

若将  $\mathbf{A}$  按列分块为

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

齐次方程组 (8) 可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}.$$

而齐次方程组 (8) 有非零解的充分必要条件是  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$  线性相关, 即

$$R(\mathbf{A}) = R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) < n.$$

定理 24 设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵, 则

$$\underline{\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ 有非零解}} \iff \underline{R(\mathbf{A}) < n}.$$

定理 25 (定理 1 的等价命题) 设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵, 则

$$\underline{\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ 只有零解}} \iff \underline{R(\mathbf{A}) = n = \mathbf{A} \text{ 的列数}}.$$

**定义 28 (基础解系)** 设  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$  为  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的解向量, 若

- (1)  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$  线性无关;
- (2)  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的任一解向量可由  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$  线性表示。

则称  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$  为  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的一个基础解系。

**注** 关于基础解系，请注意以下几点：

(1) 基础解系即全部解向量的**极大无关组**。

(2) 找到了基础解系，就找到了齐次线性方程组的全部解：

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_p\mathbf{x}_p \quad (k_1, k_2, \cdots, k_p \text{ 为任意常数}).$$

(3) 基础解系**不唯一**。

**定理 26** 设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵, 若  $R(\mathbf{A}) = r < n$ , 则齐次线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  存在基础解系, 且基础解系含  $n - r$  个解向量。

**注** 注意以下两点:

- ▶  $r$  为  $\mathbf{A}$  的秩, 也是  $\mathbf{A}$  的行阶梯形矩阵的非零行行数, 是非自由未知量的个数。
- ▶  $n$  为未知量的个数, 故  $n - r$  为自由未知量的个数。有多少自由未知量, 基础解系里就对应有多少个向量。

例 34 (★) 求齐次线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的基础解系, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & 24 & -8 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_2 \div 4]{r_3 \div 8} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_2 \div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$



基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 35 (★) 求齐次线性方程组

$$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$$

的基础解系。

例 35 (★) 求齐次线性方程组

$$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$$

的基础解系。

解 原方程等价于  $x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}$ , 即

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_{n-1} \\ x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1} \end{cases}$$

基础解系为

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}$$

例 36 设  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  分别为  $m \times n$  和  $n \times s$  矩阵, 且  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 。证明:

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) \leq n.$$

例 36 设  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  分别为  $m \times n$  和  $n \times s$  矩阵, 且  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 。证明:

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) \leq n.$$

证明. 由  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  知,  $\mathbf{B}$  的列向量是  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的解。故  $\mathbf{B}$  的列向量组的秩, 不超过  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的基础解系的秩, 即

$$R(\mathbf{B}) \leq n - R(\mathbf{A}),$$

即

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) \leq n.$$



例 37 设  $n$  元齐次线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  与  $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$  同解, 证明

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}).$$

例 37 设  $n$  元齐次线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  与  $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$  同解, 证明

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}).$$

解  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  与  $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$  同解, 故它们有相同的基础解系, 而基础解系包含的向量个数相等, 即

$$n - R(\mathbf{A}) = n - R(\mathbf{B}),$$

从而

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}).$$

例 38 设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  实矩阵, 证明  $R(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$ 。



例 38 设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  实矩阵, 证明  $R(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$ 。

证明. 只需证明  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  与  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  同解。

(1) 若  $\mathbf{x}$  满足  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , 则有  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^T(\mathbf{Ax}) = \mathbf{0}$ 。

(2) 若  $\mathbf{x}$  满足  $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , 则

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{0},$$

即

$$(\mathbf{Ax})^T \mathbf{Ax} = \mathbf{0},$$

故  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 。



## 1. 行列式

## 2. 矩阵

## 3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

- ▶  $n$  维向量及其线性相关性
- ▶ 向量组的秩及其极大线性无关组
- ▶ 矩阵的秩
- ▶ 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
- ▶ 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

## 4. 向量空间

## 5. 特征值问题



**定理 27** 对于非齐次线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , 以下命题等价:

- (i)  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  有解;
- (ii)  $\mathbf{b}$  可由  $\mathbf{A}$  的列向量组线性表示;
- (iii)  $R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = R(\mathbf{A})$ 。

注  $R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = R(\mathbf{A}) + 1$  会导致矛盾方程的出现。

记  $R(\mathbf{A}) = r$ , 若  $R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = R(\mathbf{A}) + 1$ , 则增广矩阵  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  经过初等行变换所得的行最简阶梯形矩阵形如

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

其中  $d_{r+1} \neq 0$  (否则  $R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r$ )。这意味着出现了矛盾方程

$$0 = d_{r+1}.$$

推论 9

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解  $\iff R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = R(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ 的列数.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

定理 28 若  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  有解，则其通解为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{x}}$$

其中  $\mathbf{x}_0$  是  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  的一个特解，而

$$\tilde{\mathbf{x}} = k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + k_p \mathbf{x}_p$$

为  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的通解。

注 “ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  的通解” = “ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的通解” + “ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  的特解”



例 39 (★) 求非齐次线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  的一般解, 其中增广矩阵为

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

解

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \div 2]{r_1-r_3, r_3+\frac{1}{2}r_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \div 2]{r_1+r_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

同解方程为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

故通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

例 40 (★) 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & x_1 & +(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & x_1 & +x_2 & +(1+\lambda)x_3 & = & \lambda \end{cases}$$

问  $\lambda$  取何值时, 此方程组

- (1) 有唯一解?
- (2) 无解?
- (3) 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解。

解

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2.$$

故当  $\lambda \neq 0$  且  $\lambda \neq -3$  时, 有唯一解。当  $\lambda = 0$  时, 原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组, 故无解。

当  $\lambda = -3$  时, 增广矩阵为

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

例 41 设四元齐次线性方程组

$$(I): \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \quad (II): \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

求

- (1) 方程组 (I) 与 (II) 的基础解系
- (2) 方程组 (I) 与 (II) 的公共解

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

#### 4. 向量空间

- ▶ 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标
- ▶  $\mathbb{R}^n$  中向量的内积，欧式空间
- ▶ 标准正交基
- ▶ 施密特 (Schmidt) 正交化方法
- ▶ 正交矩阵及其性质

#### 5. 特征值问题

#### 6. 二次型

正交变换法

配方法



1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
  - ▶ 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标
  - ▶  $\mathbb{R}^n$  中向量的内积, 欧式空间
  - ▶ 标准正交基
  - ▶ 施密特 (Schmidt) 正交化方法
  - ▶ 正交矩阵及其性质
5. 特征值问题



## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

**定义 29** 设  $V$  是向量空间, 如果

- (1) 在  $V$  中有  $r$  个向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关;
- (2)  $V$  中任一向量  $\alpha$  可由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性表示,

则称  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  是向量空间  $V$  的一组基,  $r$  称为向量空间  $V$  的维数, 并称  $V$  为  $r$  维向量空间。

## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

**注 3** 只含一个零向量的集合  $\{0\}$  也是一个向量空间，该向量空间没有基，规定它的维数为 0，并称之为 0 维向量空间。

**注 4** 如果把向量空间  $V$  看做是一个向量组，则  $V$  的基就是它的一个极大无关组， $V$  的维数就是向量组的秩。于是， $V$  的基不唯一，但它的维数是唯一确定的。设  $V$  是  $r$  维向量空间，则  $V$  中任意  $r$  个线性无关的向量就是  $V$  的一个基。

## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

例 42 在向量空间  $\mathbb{R}^3$  中, 基本单位向量组

$$\epsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \epsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \quad \epsilon_3 = (0, 0, 1)^T$$

线性无关, 且任一向量  $\alpha \in \mathbb{R}^3$  可由  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  表示为

$$\alpha = x_1 \epsilon_1 + x_2 \epsilon_2 + x_3 \epsilon_3.$$

此时,  $\mathbb{R}^3$  可表示为

$$\mathbb{R}^3 = \{x = x_1 \epsilon_1 + x_2 \epsilon_2 + x_3 \epsilon_3 | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

事实上, 在  $\mathbb{R}^3$  中, 任一组向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 只要它们线性无关, 就构成  $\mathbb{R}^3$  的一组基。

## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

事实上, 在  $\mathbb{R}^3$  中, 任一组向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 只要它们线性无关, 就构成  $\mathbb{R}^3$  的一组基。

例如, 在  $\mathbb{R}^3$  中, 向量组

$$\epsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \epsilon_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \epsilon_3 = (1, 1, 1)^T$$

线性无关, 构成  $\mathbb{R}^3$  中的一组基。对任一向量  $\alpha \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\alpha = (x_1 - x_2)\alpha_1 + (x_2 - x_3)\alpha_2 + x_3\alpha_3.$$

此时,  $\mathbb{R}^3$  可表示为

$$\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1 - x_2)\alpha_1 + (x_2 - x_3)\alpha_2 + x_3\alpha_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

**定义 30**  $\mathbb{R}^n$  中任一向量  $\alpha$  均可由线性无关向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  线性表示, 即

$$\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n,$$

称  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  为  $\mathbb{R}^n$  的一组基, 有序数组  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  是向量  $\alpha$  在基  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  下的坐标, 记作

$$\alpha_B = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ 或 } \alpha_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

并称之为  $\alpha$  的坐标向量。



## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

### 注 5

- ▶  $\mathbb{R}^n$  的基不是唯一的
- ▶ 基本向量组

$$\epsilon_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

称为  $\mathbb{R}^n$  的自然基或标准基。

- ▶ 一般来说，对于向量及其坐标，都采用列向量的形式，即

$$\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

例 43 设  $\mathbb{R}^n$  的两组基为自然基  $B_1$  和  $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ , 其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= (1, -1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0)^T, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= (0, 1, -1, 0, \dots, 0, 0, 0)^T, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{n-1} &= (0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, -1)^T, \\ \boldsymbol{\beta}_n &= (0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)^T.\end{aligned}\tag{9}$$

求向量组  $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  分别在两组基下的坐标。

## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

定理 29 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的一组基, 且

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n, \\ \eta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n, \\ \dots\dots\dots \\ \eta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n. \end{cases}$$

则  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  线性无关的充要条件是

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

**定义 31** 设  $\mathbb{R}^n$  的两组基  $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  和  $B_2 = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$  满足关系式

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基  $B_1$  到新基  $B_2$  的过渡矩阵。

## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

**定理 30** 设  $\alpha$  在两组基  $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  与  $B_2 = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$  的坐标分别为

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ 和 } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T,$$

由基  $B_1$  到  $B_2$  的过渡矩阵为  $\mathbf{A}$ , 则

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} \text{ 或 } \mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

例 44 已知  $\mathbb{R}^3$  的一组基为  $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ , 其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 2, 1)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (1, -1, 0)^T, \boldsymbol{\beta}_3 = (1, 0, -1)^T,$$

求自然基  $B_1$  到  $B_2$  的过渡矩阵。

## 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

例 45 已知  $\mathbb{R}^3$  的两组基为  $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  和  $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , 其中

$$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \quad \alpha_3 = (0, 0, 1)^T,$$

$$\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \beta_2 = (0, 1, -1)^T, \quad \beta_3 = (1, 2, 0)^T.$$

(1) 求基  $B_1$  到  $B_2$  的过渡矩阵。

(2) 已知  $\alpha$  在基  $B_1$  的坐标为  $(1, -2, -1)^T$ , 求  $\alpha$  在基  $B_2$  下的坐标。

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
  - ▶ 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标
  - ▶  $\mathbb{R}^n$  中向量的内积, 欧式空间
  - ▶ 标准正交基
  - ▶ 施密特 (Schmidt) 正交化方法
  - ▶ 正交矩阵及其性质
5. 特征值问题





## $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积, 欧式空间

**定义 32** 在  $\mathbb{R}^n$  中, 对于  $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  和  $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ , 规定  $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\boldsymbol{\beta}$  的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

当  $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\boldsymbol{\beta}$  为列向量时,

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}.$$

## $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积, 欧式空间

性质 12 (内积的运算性质) 对于  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$  和  $k \in \mathbb{R}$ ,

- (i)  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
- (ii)  $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
- (iii)  $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$
- (iv)  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ , 等号成立当且仅当  $\alpha = 0$ .

## $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积, 欧式空间

定义 33 (向量长度) 向量  $\alpha$  的长度定义为

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

定理 31 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$$

定义 34 (向量之间的夹角) 向量  $\alpha, \beta$  之间的夹角定义为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}$$

定理 32

$$\alpha \perp \beta \iff (\alpha, \beta) = 0$$

注 6 零向量与任何向量的内积为零, 从而零向量与任何向量正交。

### 定理 33 (三角不等式)

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

注 7 当  $\alpha \perp \beta$  时,  $\|\alpha + \beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$ 。

定义 35 (欧几里得空间) 定义了内积运算的  $n$  维实向量空间, 称为  $n$  维欧几里得空间 (简称欧氏空间), 仍记为  $\mathbb{R}^n$ 。

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
  - ▶ 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标
  - ▶  $\mathbb{R}^n$  中向量的内积，欧式空间
  - ▶ 标准正交基
  - ▶ 施密特 (Schmidt) 正交化方法
  - ▶ 正交矩阵及其性质
5. 特征值问题





## 标准正交基

**定理 34**  $\mathbb{R}^n$  中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）  
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是线性无关的。

## 标准正交基

定义 36 (标准正交基) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ , 若

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

则称  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一组标准正交基。

## 标准正交基

**例 46** 设  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一组标准正交基, 求  $\mathbb{R}^n$  中向量  $\beta$  在基  $B$  下的坐标。

解

$$\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$$

$$\Rightarrow (\beta, \alpha_j) = (x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n, \alpha_j) = x_j (\alpha_j, \alpha_j)$$

$$\Rightarrow x_j = \frac{(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
  - ▶ 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标
  - ▶  $\mathbb{R}^n$  中向量的内积, 欧式空间
  - ▶ 标准正交基
  - ▶ 施密特 (Schmidt) 正交化方法
  - ▶ 正交矩阵及其性质
5. 特征值问题

## 6. 二次型

## 施密特 (Schmidt) 正交化方法

本小节的目标是：从一组线性无关的向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  出发，构造一组标准正交向量组。

## 施密特 (Schmidt) 正交化方法 I

给定  $\mathbb{R}^n$  中的线性无关组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ,

(1) 取  $\beta_1 = \alpha_1$ ;

(2) 令  $\beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$ ,

$$\beta_2 \perp \beta_1$$

$$\Rightarrow (\beta_1, \beta_2) = 0$$

$$\Rightarrow k_{21} = -\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}$$

故

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

## 施密特 (Schmidt) 正交化方法 II

(3) 令  $\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$ ,

$$\beta_3 \perp \beta_i, \quad (i = 1, 2)$$

$$\Rightarrow (\beta_3, \beta_i) = 0, \quad (i = 1, 2)$$

$$\Rightarrow k_{3i} = -\frac{(\alpha_3, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \quad (i = 1, 2)$$

故

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$



## 施密特 (Schmidt) 正交化方法 III

(4) 继续以上步骤, 假设已经求出两两正交的非零向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}$ , 取

$$\beta_j = \alpha_j + k_{j1}\beta_1 + k_{j2}\beta_2 + \dots + k_{j,j-1}\beta_{j-1},$$

$$\beta_j \perp \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$$

$$\Rightarrow (\beta_j, \beta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$$

$$\Rightarrow (\alpha_j + k_{ji}\beta_i, \beta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$$

$$\Rightarrow k_{ji} = -\frac{(\alpha_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}$$

故

$$\beta_j = \alpha_j - \frac{(\alpha_j, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_j, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_j, \beta_{j-1})}{(\beta_{j-1}, \beta_{j-1})}\beta_{j-1}.$$

## 施密特 (Schmidt) 正交化方法 IV

### (5) 单位化

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_m \xrightarrow{\eta_j = \frac{\boldsymbol{\beta}_j}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}} \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_m$$

## 施密特 (Schmidt) 正交化方法 I

例 47 已知  $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  是  $\mathbb{R}^3$  的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, -1, 1)^T.$$

试用施密特正交化方法, 由  $B$  构造  $\mathbb{R}^3$  的一组标准正交基。

## 施密特 (Schmidt) 正交化方法 I

解 1、正交化过程:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 0)^T,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 \\ &= (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(1, -1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)} \boldsymbol{\beta}_2 \\ &= (1, -1, 1)^T - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T - \frac{2}{2}(1, -1, 0)^T = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

2、单位化过程:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right),$$

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
  - ▶ 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标
  - ▶  $\mathbb{R}^n$  中向量的内积, 欧式空间
  - ▶ 标准正交基
  - ▶ 施密特 (Schmidt) 正交化方法
  - ▶ 正交矩阵及其性质
5. 特征值问题



## 正交矩阵及其性质

定义 37 设  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 如果

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

则称  $\mathbf{A}$  为正交矩阵。



## 正交矩阵及其性质

### 定理 35

**$A$** 为正交矩阵  $\iff$   **$A$** 的列向量组为一组标准正交基。

## 正交矩阵及其性质

**定理 36** 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  皆为  $n$  阶正交矩阵, 则

(1)  $|\mathbf{A}| = 1$  或  $-1$

(2)  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

(3)  $\mathbf{A}^T$  也是正交矩阵

(4)  $\mathbf{AB}$  也是正交矩阵

**定理 37** 若列向量  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  在  $n$  阶正交矩阵  $\mathbf{A}$  的作用下变换为  $\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay} \in \mathbb{R}^n$ , 则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变, 即

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$\|\mathbf{Ax}\| = \|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{Ay}\| = \|\mathbf{y}\|,$$

$$\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{Ay} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

例 48 (★) 给正交矩阵  $\mathbf{A}$  的某一行 (或某一系列) 乘以  $-1$  后所得的矩阵  $\mathbf{B}$  是否仍为正交矩阵?

**例 48 (★)** 给正交矩阵  $\mathbf{A}$  的某一行 (或某一列) 乘以  $-1$  后所得的矩阵  $\mathbf{B}$  是否仍为正交矩阵?

**解** 设  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  为正交矩阵, 给第  $i$  行乘以  $-1$  后得

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

因  $a_{k1}^2 + \cdots + a_{kn}^2 = 1 \quad \forall k$ , 故当  $k = i$  时,  $(-a_{i1})^2 + \cdots + (-a_{in})^2 = 1$

因  $a_{k1}a_{p1} + \cdots + a_{kn}a_{pn} = 1 (k \neq p)$ , 故当  $k = i$  时,  
 $(-a_{i1}a_{p1}) + \cdots + (-a_{in}a_{pn}) = 0$ , 于是  $\mathbf{B}$  为正交矩阵.

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
5. 特征值问题
  - ▶ 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵
  - ▶ 相似矩阵
  - ▶ 矩阵可对角化的条件
  - ▶ 实对称矩阵的对角化
6. 二次型

正交变换法

配方法

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
5. 特征值问题
  - ▶ 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵
  - ▶ 相似矩阵
  - ▶ 矩阵可对角化的条件
  - ▶ 实对称矩阵的对角化
6. 二次型

## 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵

**定义 38 (特征值与特征向量)** 设  $\mathbf{A}$  为复数域  $\mathbb{C}$  上的  $n$  阶矩阵, 如果存在数  $\lambda \in \mathbb{C}$  和**非零**的  $n$  维向量  $\mathbf{x}$  使得

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

则称  $\lambda$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值,  $\mathbf{x}$  为  $\mathbf{A}$  的对应于特征值  $\lambda$  的特征向量。

注 8

- (1) 特征向量  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- (2) 特征值问题是对方针而言的。



定义 39 (特征多项式、特征矩阵、特征方程) 设  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ , 则

$$f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵  $\mathbf{A}$  的特征多项式,  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  称为  $\mathbf{A}$  的特征矩阵,  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$  称为  $\mathbf{A}$  的特征方程。

例 49 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0\end{aligned}$$

故  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$  (二重特征值)。

当  $\lambda_1 = 3$  时, 由  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 即

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为  $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)^T$ , 因此  $k_1 \mathbf{x}_1$  ( $k_1$  为非零任意常数) 是  $\mathbf{A}$  对应于  $\lambda_1 = 3$  的全部特征向量。

当  $\lambda_2 = 2$  时, 由  $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为  $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 2)^T$ , 因此  $k_2 \mathbf{x}_2$  ( $k_2$  为非零任意常数) 是  $\mathbf{A}$  对应于  $\lambda_2 = 2$  的全部特征向量。

**定理 38** 若  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  都是  $\mathbf{A}$  的对应于特征值  $\lambda_0$  的特征向量, 则  $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2$  也是  $\mathbf{A}$  的对应于特征值  $\lambda_0$  的特征向量 (其中  $k_1, k_2$  为任意常数, 但  $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 \neq 0$ )。

在  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$  的解空间中, 除零向量以外的全体解向量就是  $\mathbf{A}$  的属于特征值  $\lambda$  的全体特征向量。因此,  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$  的解空间也称为  $\mathbf{A}$  关于特征值  $\lambda$  的特征子空间, 记作  $V_\lambda$ 。 $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  的特征子空间就是  $n$  维向量空间的子空间, 其维数为

$$\dim V_\lambda = n - \text{rank}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}).$$

**定理 39** 设  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  的  $n$  个特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 则

$$(1) \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii};$$

$$(2) \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(\mathbf{A}),$$

其中  $\sum_{i=1}^n a_{ii}$  是  $\mathbf{A}$  的主对角元之和, 称为  $\mathbf{A}$  的迹 (trace), 记为  $tr(\mathbf{A})$ 。

例 50 (★) 设矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$  的全部特征值之积为 24.

1. 求  $a$  的值;
2. 讨论  $\mathbf{A}$  能否对角化, 若能, 求一个可逆矩阵  $\mathbf{P}$  使  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$  为对角阵.



例 50 (★) 设矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$  的全部特征值之积为 24.

1. 求  $a$  的值;
2. 讨论  $\mathbf{A}$  能否对角化, 若能, 求一个可逆矩阵  $\mathbf{P}$  使  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$  为对角阵.

解

1. 因  $|\mathbf{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 24$ , 故  $a = -2$ ;

例 50 (★) 设矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$  的全部特征值之积为 24.

1. 求  $a$  的值;
2. 讨论  $\mathbf{A}$  能否对角化, 若能, 求一个可逆矩阵  $\mathbf{P}$  使  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$  为对角阵.

解

1. 因  $|\mathbf{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 24$ , 故  $a = -2$ ;

2. 由  $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ -1 & 4-\lambda & -3 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-6)$ , 故特征值为

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$ . 当  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  时,  $R(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 1$ , 这说明  $\mathbf{A}$  由 3 个线性无关的特征向量, 故  $\mathbf{A}$  可对角化.

当  $\lambda = 2$  时, 解方程组  $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ , 得基础解系

$$\mathbf{x}_1 = (2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (-3, 0, 1)^T,$$

当  $\lambda = 6$  时, 解方程组  $(\mathbf{A} - 6\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ , 得基础解系

$$\mathbf{x}_3 = (1, 1, -1)^T,$$

取可逆矩阵  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ , 使  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(2, 2, 6)$  为对角阵.

定理 40 一个特征向量不能属于不同的特征值。

**性质 13** 若  $\lambda$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值,  $\mathbf{x}$  是  $\mathbf{A}$  属于  $\lambda$  的特征向量, 则

- (i)  $k\lambda$  是  $k\mathbf{A}$  的特征值;
- (ii)  $\lambda^m$  是  $\mathbf{A}^m$  的特征值;
- (iii) 当  $\mathbf{A}$  可逆时,  $\lambda^{-1}$  是  $\mathbf{A}^{-1}$  的特征值;

且  $\mathbf{x}$  仍是矩阵  $k\mathbf{A}, \mathbf{A}^m, \mathbf{A}^{-1}$  分别对应于  $k\lambda, \lambda^m, \lambda^{-1}$  的特征向量。

**注** 若  $\lambda$  是  $\mathbf{A}$  的特征值, 则  $\varphi(\lambda)$  是  $\varphi(\mathbf{A})$  的特征值, 其中

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m, \\ \varphi(\mathbf{A}) &= a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_m\mathbf{A}^m.\end{aligned}$$

例 51 设 3 阶矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为  $1, -1, 2$ , 求  $|\mathbf{A}^* + 3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}|$ .

**例 51** 设 3 阶矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为 1, -1, 2, 求  $|\mathbf{A}^* + 3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}|$ .

**解** 因  $\mathbf{A}$  的特征值全不为零, 故  $\mathbf{A}$  可逆, 从而  $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ . 又因  $|\mathbf{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$ , 故

$$\mathbf{A}^* + 3\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = -2\mathbf{A}^{-1} + 3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}.$$

令  $\varphi(\lambda) = -\frac{2}{\lambda} + 3\lambda - 2$ , 则  $\varphi(\lambda)$  为上述矩阵的特征值, 分别为  $\varphi(1) = -1, \varphi(-1) = -3, \varphi(2) = 3$ , 于是

$$|\mathbf{A}^* + 3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}| = (-1) \cdot (-3) \cdot 3 = 9.$$



性质 14 矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{A}^T$  的特征值相同。

例 52 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- (i) 求  $\mathbf{A}$  的特征值与特征向量
- (ii) 求可逆矩阵  $\mathbf{P}$ , 使得  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  为对角阵。

解 由

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -3 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[(\lambda-1)(\lambda+3)+3] = -\lambda^2(\lambda+2), \end{aligned}$$

知  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  和  $\lambda_3 = -2$ .

当  $\lambda_{1,2} = 0$  时, 由  $(\mathbf{A} - 0\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ , 即  $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  得基础解系

$$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (-1, 0, 1)^T,$$

故  $\mathbf{A}$  对应于  $\lambda_{1,2} = 0$  的全体特征向量为

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 = k_1(1, 1, 0)^T + k_2(-1, 0, 1)^T,$$

其中  $k_1, k_2$  为不全为零的任意常数。

当  $\lambda_3 = -2$  时, 由  $(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ , 即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\mathbf{x}_3 = (-1, -2, 1)^T,$$

故  $\mathbf{A}$  对应于  $\lambda_3 = -2$  的全体特征向量为

$$k_3 \mathbf{x}_3 = k_3 (-1, -2, 1)^T,$$

其中  $k_3$  为非零的任意常数。

将  $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i (i = 1, 2, 3)$  表示成

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

取

$$\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{pmatrix},$$

则  $\mathbf{AP} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$ , 且  $|\mathbf{P}| = 2 \neq 0$ , 故得

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda}$$

为对角阵。

**定理 41** 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  是方阵  $\mathbf{A}$  的  $m$  个特征值,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$  依次是与之对应的特征向量, 若  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  互不相等, 则  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$  线性无关。

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
5. 特征值问题
  - ▶ 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵
  - ▶ 相似矩阵
  - ▶ 矩阵可对角化的条件
  - ▶ 实对称矩阵的对角化
6. 二次型

**定义 40** 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 若存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称  $B$  是  $A$  的相似矩阵, 或  $A$  与  $B$  相似, 记为  $A \sim B$ 。对  $A$  进行运算  $P^{-1}AP$  称为对  $A$  进行相似变化, 可逆矩阵  $P$  称为把  $A$  变成  $B$  的相似变换矩阵。



## 相似矩阵

**定理 42** 若  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ , 则  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的特征多项式相同, 从而  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的特征值相同。

**推论 10** 若  $\mathbf{A}$  与对角阵

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似, 则  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $\mathbf{A}$  的  $n$  个特征值。

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
5. 特征值问题
  - ▶ 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵
  - ▶ 相似矩阵
  - ▶ 矩阵可对角化的条件
  - ▶ 实对称矩阵的对角化
6. 二次型

## 矩阵可对角化的条件

矩阵可对角化，即矩阵与对角阵相似。

**定理 43** 矩阵可对角化  $\iff n$  阶矩阵有  $n$  个线性无关的特征向量

## 矩阵可对角化的条件

**定理 44**  $\mathbf{A}$  的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

**推论 11** 若  $\mathbf{A}$  有  $n$  个互不相同的特征值，则  $\mathbf{A}$  与对角阵相似。

## 矩阵可对角化的条件

例 53 设实对称矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

问  $\mathbf{A}$  是否可对角化？若可对角化，求对角阵  $\mathbf{\Lambda}$  及可逆矩阵  $\mathbf{P}$  使得  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ ，再求  $\mathbf{A}^k$ 。

## 矩阵可对角化的条件 I

解 由

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 2)^3, \end{aligned}$$

故  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = -2$  (单根),  $\lambda_2 = 2$  (三重根)。

## 矩阵可对角化的条件 II

由  $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ , 即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得  $\lambda_1$  对应的特征向量为  $\{k_1 \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, 1)^T, k_1 \neq 0\}$ 。

由  $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ , 即

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系:

$$\mathbf{x}_{21} = (1, -1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{x}_{22} = (1, 0, -1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_{23} = (1, 0, 0, -1)^T.$$

## 矩阵可对角化的条件 III

因  $\mathbf{A}$  有 4 个线性无关的特征向量, 故  $\mathbf{A} \sim \mathbf{\Lambda}$ 。

取

$$\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda}.$$



## 矩阵可对角化的条件 IV

再由  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$  得

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1})^k = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^k & & & \\ & 2^k & & \\ & & 2^k & \\ & & & 2^k \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{cases} 2^k \mathbf{I}_4, & k \text{ even,} \\ 2^{k-1} \mathbf{A}, & k \text{ odd.} \end{cases}$$

例 54 (★) 设  $\mathbf{A}$  的特征值为  $1, 2, -3$ , 矩阵  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^3 - 7\mathbf{A} + 5\mathbf{E}$ , 求  $\mathbf{B}$ .

例 54 (★) 设  $\mathbf{A}$  的特征值为  $1, 2, -3$ , 矩阵  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^3 - 7\mathbf{A} + 5\mathbf{E}$ , 求  $\mathbf{B}$ .

解 因  $\mathbf{A}$  的特征值互不相同, 故存在可逆阵  $\mathbf{P}$  使得

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}. \text{ 而}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}^3 - 7\mathbf{A} + 5\mathbf{E})\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}^3 - 7\mathbf{\Lambda} + 5\mathbf{E} = -\mathbf{E},$$

故  $\mathbf{B} = \mathbf{P}(-\mathbf{E})\mathbf{P}^{-1} = -\mathbf{E}$ .

例 55 (★) 已知三阶矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为  $-1, 1, 2$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 2\mathbf{E}$ , 求  $\mathbf{B}$  的特征值及行列式  $|\mathbf{B}|$ .

**例 55 (★)** 已知三阶矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为  $-1, 1, 2$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 2\mathbf{E}$ , 求  $\mathbf{B}$  的特征值及行列式  $|\mathbf{B}|$ .

**证明.** 设  $\lambda$  为  $\mathbf{A}$  的特征值, 则  $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 2$  为  $\mathbf{B}$  的特征值, 故  $\mathbf{B}$  的特征值分别为  $-4, 2, 8$ , 从而  $|\mathbf{B}| = (-4) \times 2 \times 8 = -64$ . □

## 矩阵可对角化的条件

例 56 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

问  $x$  为何值时, 矩阵  $\mathbf{A}$  可对角化?

## 矩阵可对角化的条件

解 由

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & x \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

即  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 。

对应于单根  $\lambda_1 = -1$ ，可求得线性无关的特征向量恰有 1 个，故  $\mathbf{A}$  可对角化的充分必要条件是对应重根  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ，有 2 个线性无关的特征向量，即  $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$  有两个线性无关的解，亦即  $\mathbf{A} - \mathbf{I}$  的秩  $R(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 1$ 。由

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

欲使  $R(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 1$ ，须有  $x+1=0$ ，即  $x=-1$ 。因此当  $x=-1$  时，矩阵  $\mathbf{A}$  能对角化。

## 矩阵可对角化的条件

**例 57** 设  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  是主对角元全为 2 的上三角矩阵, 且存在  $a_{ij} \neq 0 (i < j)$ , 问  $\mathbf{A}$  是否可对角化?



## 矩阵可对角化的条件

解 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & * & \cdots & * \\ & 2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

其中  $*$  为不全为零的任意常数, 则

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = (2 - \lambda)^n,$$

即  $\lambda = 2$  为  $\mathbf{A}$  的  $n$  重特征根, 而  $R(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \geq 1$ , 故  $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$  的基础解系所含向量个数  $\leq n - 1$  个, 即  $\mathbf{A}$  的线性无关的特征向量的个数  $\leq n - 1$  个, 因此  $\mathbf{A}$  不与对角阵相似。

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
5. 特征值问题
  - ▶ 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵
  - ▶ 相似矩阵
  - ▶ 矩阵可对角化的条件
  - ▶ 实对称矩阵的对角化
6. 二次型

**定理 45** 实对称矩阵  $\mathbf{A}$  的任一特征值都是实数。

**定理 46** 实对称矩阵  $\mathbf{A}$  对应于不同特征值的特征向量是正交的。

**定理 47** 设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶对称阵, 则必有正交阵  $\mathbf{Q}$ , 使得  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ , 其中  $\mathbf{\Lambda}$  是以  $\mathbf{A}$  的  $n$  个特征值为对角元的对角阵。

**推论 12** 设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶对称阵,  $\lambda$  为  $\mathbf{A}$  的特征方程的  $k$  重根, 则矩阵  $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$  的秩  $R(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = n - k$ , 从而对应特征值  $\lambda$  恰有  $k$  个线性无关的特征向量。

### 将对称阵 $\mathbf{A}$ 对角化的步骤:

1. 求出  $\mathbf{A}$  的全部互不相等的特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , 它们的重数依次为  $k_1, \dots, k_s (k_1 + \dots + k_s = n)$ ;
2. 对每个  $k_i$  重特征值  $\lambda_i$ , 求  $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$  的基础解系, 得  $k_i$  个线性无关的特征向量;
3. 再把它们正交化、单位化, 得  $k_i$  个两两正交的单位特征向量。因  $k_1 + \dots + k_s = n$ , 故总共可得  $n$  个两两正交的单位特征向量;
4. 将这  $n$  个两两正交的单位特征向量构成正交阵  $\mathbf{Q}$ , 便有  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ 。

例 58 (★) 设 3 阶实对称矩阵的三个特征值为  $5, 5, -4$ , 属于特征值  $-4$  的特征向量为  $(1, 1, -4)^T$ , 求  $\mathbf{A}$ .

**例 58 (★)** 设 3 阶实对称矩阵的三个特征值为 5, 5, -4, 属于特征值 -4 的特征向量为  $(1, 1, -4)^T$ , 求  $\mathbf{A}$ .

**解** 设  $\mathbf{A}$  属于特征值  $\lambda = 5$  的特征向量为  $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ , 它们必与  $(1, 1, -4)^T$  正交, 即  $x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$ , 可解得  $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, -1, 0)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (2, 2, 1)^T$ . 利用施密特正交化过程得正交矩阵

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & 1 \\ -3 & 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -4 \end{bmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -1 & 9 & 4 \\ 4 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
5. 特征值问题
6. 二次型
  - ▶ 二次型的定义与矩阵表示
  - ▶ 化二次型为标准型
    - 正交变换法
    - 配方法
  - ▶ 正定二次型和正定矩阵

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
5. 特征值问题
6. 二次型
  - ▶ 二次型的定义与矩阵表示
  - ▶ 化二次型为标准型
  - ▶ 正定二次型和正定矩阵



定义 41 (二次型)  $n$  元变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & \dots \dots \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \quad (10)$$

当系数属于数域  $F$  时, 称为数域  $F$  上的一个  $n$  元二次型。

- ▶ 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

其中  $\mathbf{A}$  为对称矩阵。

- ▶ 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

其中  $\mathbf{A}$  为对称矩阵。

- ▶ 若  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为对称矩阵，且

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$$

则必有  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

- ▶ 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

其中  $\mathbf{A}$  为对称矩阵。

- ▶ 若  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为对称矩阵，且

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$$

则必有  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

- ▶ 二次型和它的矩阵是相互唯一确定的，因此研究二次型的性质就转化为研究对称矩阵  $\mathbf{A}$  所具有的性质。

- ▶ 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

其中  $\mathbf{A}$  为对称矩阵。

- ▶ 若  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为对称矩阵，且

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$$

则必有  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

- ▶ 二次型和它的矩阵是相互唯一确定的，因此研究二次型的性质就转化为研究对称矩阵  $\mathbf{A}$  所具有的性质。
- ▶ 对于二次型  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ ，对称阵  $\mathbf{A}$  称为二次型  $f$  的矩阵， $f$  称为对称阵  $\mathbf{A}$  的二次型，而  $\mathbf{A}$  的秩称为二次型  $f$  的秩。

例 59 设  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 5x_4^2$ , 则它的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- ▶ 对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换  $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$  使得

$$f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

这种只含平方项的二次型，称为二次型的标准形。

- ▶ 若标准形的系数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  只在  $1, -1, 0$  中取值，也就是用(??)代入(10)，能使

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

则称上式为二次型的规范形。

定义 42 (矩阵的合同) 对于两个矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$ , 若存在可逆矩阵  $\mathbf{C}$ , 使得

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B},$$

就称  $\mathbf{A}$  合同于  $\mathbf{B}$ .



## 结论 6

经过可逆变换  $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$  后, 二次型  $f$  的矩阵由  $\mathbf{A}$  变为与  $\mathbf{A}$  合同的矩阵  $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ , 且二次型的秩不变。

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
5. 特征值问题
6. 二次型
  - ▶ 二次型的定义与矩阵表示
  - ▶ 化二次型为标准型
    - 正交变换法
    - 配方法

► 正定二次型和正定矩阵

化二次型为标准型，就是对实对称矩阵  $\mathbf{A}$ ，寻找可逆阵  $\mathbf{C}$ ，使  $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$  成为对角矩阵。

# 正交变换法

**结论 7** 对于实对称矩阵  $\mathbf{A}$ , 存在正交阵  $\mathbf{Q}$ , 使得

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda},$$

由于  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ , 故

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}.$$

**定理 48 (主轴定理)** 对于任一个  $n$  元二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x},$$

存在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$  ( $\mathbf{Q}$  为正交阵), 使得

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}) \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $\mathbf{A}$  的  $n$  个特征值,  $\mathbf{Q}$  的  $n$  个列向量  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$  是  $\mathbf{A}$  对应于  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  的标准正交特征向量。

**推论 13** 任给二次型  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 总有可逆变换  $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{z}$ , 使得  $f(\mathbf{C} \mathbf{z})$  为规范形。

例 60 (★) 用正交变换法, 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。



例 60 (★) 用正交变换法, 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解 对应矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

例 60 (★) 用正交变换法, 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解 对应矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$

得特征值  $\lambda_{1,2} = 1$  和  $\lambda_3 = 10$ .

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \mathbf{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (2, 0, 1)^T.$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (2, 0, 1)^T.\end{aligned}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (2, 0, 1)^T.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{x}_3 = (1, 2, -2)^T.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\
 &\Rightarrow \mathbf{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (2, 0, 1)^T.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\
 &\Rightarrow \mathbf{x}_3 = (1, 2, -2)^T.
 \end{aligned}$$

对  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  用施密特正交化方法得

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left( -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0 \right)^T, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \left( \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^T$$

再将  $\mathbf{x}_3$  单位化为

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)^T$$

取正交矩阵

$$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \text{diag}(1, 1, 10).$$



取正交矩阵

$$\mathbf{Q} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 1, 10).$$

在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$  的作用下, 原二次型就化成标准型

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q})\mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2.$$

# 配方法

例 61 用配方法把三元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按  $x_1^2$  和含  $x_1$  的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

例 61 用配方法把三元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按  $x_1^2$  和含  $x_1$  的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按  $x_2^2 - 4x_2x_3$  配成完全平方，得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - 5x_3^2.$$

例 61 用配方法把三元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按  $x_1^2$  和含  $x_1$  的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按  $x_2^2 - 4x_2x_3$  配成完全平方，得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - 5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 &= x_2 - 2x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{cases}$$

例 61 用配方法把三元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按  $x_1^2$  和含  $x_1$  的混合项配成完全平方, 即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按  $x_2^2 - 4x_2x_3$  配成完全平方, 得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - 5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

例 61 用配方法把三元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按  $x_1^2$  和含  $x_1$  的混合项配成完全平方, 即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按  $x_2^2 - 4x_2x_3$  配成完全平方, 得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - 5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2.$$

例 62 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准型。



例 62 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准型。

解 对  $x_1x_2$  利用平方差公式, 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3$$

例 62 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准型。

解 对  $x_1x_2$  利用平方差公式, 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3$$

先对含  $y_1$  的项配完全平方, 得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 4y_2y_3$$

再对含  $y_2$  的项配完全平方, 得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 - y_3)^2$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

坐标变换记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}_1 \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{z}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{z} = \mathbf{C} \mathbf{z}$$

其中

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表:

二次型	对应矩阵
$2x_1x_2 + 4x_1x_3$	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2z_1^2 - 2z_2^2$	$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

易验证

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \text{diag}(2, -2, 0)$$

任何  $n$  元二次型都可用配方法化为标准型，相应的变换矩阵为主对角元为 1 的上三角阵和对角块矩阵，或者是这两类矩阵的乘积。

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
5. 特征值问题
6. 二次型
  - ▶ 二次型的定义与矩阵表示
  - ▶ 化二次型为标准型
  - ▶ 正定二次型和正定矩阵

二次型的标准形是不唯一的，但标准形中所含项数（即二次型的秩）是确定的。不仅如此，在限定变换为实变换时，标准形中正系数的个数是不变的，从而负系数的个数也是不变的。



**定理 49 (惯性定理)** 设有二次型  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 它的秩为  $r$ , 有两个可逆变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{z},$$

使得

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2, \quad k_i \neq 0,$$

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2, \quad \lambda_i \neq 0,$$

则  $k_1, k_2, \cdots, k_r$  中正数的个数与  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$  中正数的个数相等。

二次型的标准形中，正系数的个数称为二次型的**正惯性指数**，负系数的个数称为**负惯性指数**。若二次型  $f$  的正惯性指数为  $p$ ，秩为  $r$ ，则  $f$  的规范形便可确定为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

**定义 43** 如果对于任意的非零向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 恒有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0,$$

就称  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  为**正定二次型**, 称  $\mathbf{A}$  为**正定矩阵**。

**定义 43** 如果对于任意的非零向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 恒有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0,$$

就称  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  为**正定二次型**, 称  $\mathbf{A}$  为**正定矩阵**。

类似地,

- ▶ 若  $\forall \mathbf{x} \neq 0$ , 恒有  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ , 则称  $\mathbf{A}$  为**半正定矩阵**;
- ▶ 若  $\forall \mathbf{x} \neq 0$ , 恒有  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$ , 则称  $\mathbf{A}$  为**负定矩阵**;
- ▶ 若  $\forall \mathbf{x} \neq 0$ , 恒有  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$ , 则称  $\mathbf{A}$  为**半负定矩阵**.

定理 50 若  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶实对称矩阵, 则以下命题等价:

- (1)  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  是正定二次型 ( $\mathbf{A}$  是正定矩阵);
- (2)  $\mathbf{A}$  的正惯性指数为  $n$ , 即  $\mathbf{A}$  合同于单位阵  $\mathbf{E}$ ;
- (3) 存在可逆矩阵  $\mathbf{P}$  使得  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}$ ;
- (4)  $\mathbf{A}$  的  $n$  个特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  全大于零;
- (5)  $\mathbf{A}$  的各阶顺序主子式全大于零.

定理 51

$$\mathbf{A} \text{正定} \implies a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 且 } |\mathbf{A}| > 0$$

例 63 (★) 判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

是否为正定二次型。

解 用特征值或顺序主子式判定.

例 64 (★) 判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

是否为正定二次型。

解 用特征值或顺序主子式判定。



例 65 (★) 判断二次型  $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$  的正定性。

例 65 (★) 判断二次型  $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$  的正定性。

解  $f$  的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

因

$$a_{11} = -5 < 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -80 < 0$$

故  $f$  负定。