线性代数

总复习

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 6 月 21 日

性质 1　互换行列式的行与列，值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

性质 2　行列式对任一行按下式展开，其值相等，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

而 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

性质 3 (线性性质)

1 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

2 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \tag{3}$$

性质 4 若行列式有两行（列）完全相同，其值为 0.

推论 1 若行列式中有两行（列）元素成比例，则行列式的值为 0.

性质 5　把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

性质 6　互换行列式的两行（列），行列式变号。

性质 7 行列式某一行的元素乘以另一行对应元素的代数余子式之和等于 0，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j).$$

结论 1

- 对行列式 D 按行展开，有

$$\sum_{k=1} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}D,$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克（Kronecker）记号，表示为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

- 对行列式 D 按列展开，有

$$\sum_{k=1} a_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}D,$$

1. 行列式
   - 行列式的性质
   - 行列式的计算
   - 克莱姆法则
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
5. 特征值问题
6. 二次型

1、有些行列式需要用”后一行减前一行”的处理方式.

例 1　计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i-c_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i\div n} n^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$
\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} n^{n-1}\begin{vmatrix} 1+\sum_{i-1}^{n-1}\frac{i}{n} & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= n^{n-1}\left[1+\frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right](-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^{n-1} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.
$$

类似地，还有

例 2　计算行列式

$$D_{20}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 18 & 19 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 17 & 18 & 19 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 16 & 17 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 20 & 19 & 18 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

例 3　计算元素为 $a_{ij}=|i-j|$ 的 n 阶行列式，即

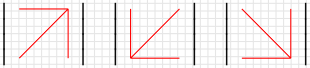
$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2、爪形行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其解法固定，即从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。

类似的方式还可用于求解如下形式的“爪型行列式”



(a) (b) (c)

例 4 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1-r_i} \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=2}^{n} i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (1-\sum_{i=2}^{n} i)\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$$

$$=\left[2-\frac{(n+1)n}{2}\right]n!$$

例 5

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! \left(1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}\right)$$

例 6 (★) 设 $a_0a_1\cdots a_n\neq 0$，证明

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$

例 6 (★) 设 $a_0a_1\cdots a_n \neq 0$，证明

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}).$$

解

$$\text{原式} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_1+r_i\times(-\frac{1}{a_{i-1}})} \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i})$$

3、“升阶法”的应用

例 7　计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a]\,(x-a)^{n-1}$$

一些常见形式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

例 8

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{x_i - a}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a)$$

常见形式

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \left(a + \frac{n(n+1)}{2}\right) a^{n-1}$$

例 9

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)$$

常见形式

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)$$

4、分块下三角行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

5、辐射型行列式的计算

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n.$$

6、范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

例 10　设 a, b, c 为互不相同的实数，证明：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

的充要条件是 $a + b + c = 0$.

例 11 (★)　解关于 x 的方程 $D(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}=0.$

例 11 (★)　解关于 x 的方程 $D(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}=0.$

解　由于 $D(\pm 1)=0$ 和 $D(\pm 2)=0$，而 $D(x)$ 中 x 的最高次数为 4，故

$$D(x)=A(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$$

的解为 $x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-2$.

1. 行列式
   - 行列式的性质
   - 行列式的计算
   - 克莱姆法则
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
5. 特征值问题
6. 二次型

定理 1 (克莱姆法则) 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

的系数行列式不等于 0，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则该方程组存在唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中

$$D_j = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \text{第 } j \text{ 列} \end{array}$$

6. 二次型

对于一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

对于以上增广矩阵，总是可以经过一系列的变换将其化成

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc:c} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中 $c_{ii} = 1\ (i = 1, 2, \cdots, r)$。

对应线性方程组解的情况如下:

1. 线性方程组有解 $\Leftrightarrow d_{r+1} = 0$;
2. 在有解的情况下:
   - 当 $r = n$ 时，有唯一解 $x_1 = d_1$，$x_2 = d_2$，$\cdots$，$x_n = d_n$;
   - 当 $r < n$ 时，有无穷多解

$$\begin{cases} x_1 & = & d_1 - c_{1,r+1}k_1 - \cdots - c_{1n}k_{n-r}, \\ x_2 & = & d_2 - c_{2,r+1}k_1 - \cdots - c_{2n}k_{n-r}, \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & d_r - c_{r,r+1}k_1 - \cdots - c_{rn}k_{n-r}, \\ x_{r+1} & = & k_1, \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & k_{n-r}, \end{cases}$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数。

1. 行列式

2. 矩阵

- 矩阵的定义
- 矩阵的加法、数乘及乘法
- 矩阵的转置
- 矩阵的逆
- 矩阵的初等变换与初等矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

定义 1 (矩阵的加法)　设有两个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

注　只有当两个矩阵同型时才能进行加法运算。

定义 2 (矩阵的数乘)　数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$，规定为

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

注　用数 k 乘一个矩阵，需要把数 k 乘矩阵的每一个元素，这与行列式的数乘性质不同。

定义 3 (矩阵乘法)　设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$ 矩阵，即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

则 A 与 B 之乘积 AB（记为 $C = (c_{ij})$）为 $m \times s$ 矩阵，且

$$c_{ij} = c_{i1}b_{1j} + c_{i2}b_{2j} + \cdots + c_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

注　两个矩阵 A 与 B 相乘有意义的前提是 A 的列数等于 B 的行数。

例 12　设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

计算 AB 与 BA.

解

$$AB=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

矩阵乘法不满足交换律。

- 若 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$，则称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不可交换。
- 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，则称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换。

例 13 (★) 已知矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可交换。试求

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 13 (★) 已知矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可交换。试求

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

解 由两矩阵可交换知 $a_2 = b_3 = 1, b_1 = a_3 = 2, a_1 = b_2 = 3$. 于是所求行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18.$$

定义 4 (单位矩阵与数量矩阵)

1 主对角元全为 1，其余元素全为零的 n 阶方阵，称为 n 阶**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2 主对角元全为非零数 k，其余元素全为零的 n 阶方阵，称为 n 阶**数量矩阵**，记为 $k\boldsymbol{I}_n, k\boldsymbol{I}, k\boldsymbol{E}$

$$k\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$$

定义 5 (对角矩阵)　非对角元皆为零的 n 阶方阵称为 n 阶对角矩阵，记作 $\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

或记作 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

注

1 用对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，就是用 $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$ 乘 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行的每个元素；

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 用对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，就是用 $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$ 乘 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 列的每个元素，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义 6 (三角矩阵)

1 主对角线以上的元素全为零的 n 阶方阵称为上三角矩阵 ($a_{ij}=0,\ i>j$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 主对角线以下的元素全为零的 n 阶方阵称为下三角矩阵 ($a_{ij}=0,\ i<j$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

结论 2 两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵；两个下三角矩阵的乘积仍为下三角矩阵。

定理 2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵，则

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

例 14 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, 求 $|(4E-A)^T(4E-A)|$.

例 14 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$，求 $|(4E-A)^T(4E-A)|$.

解 因 $|(4E-A)^T(4E-A)|=|(4E-A)^T||(4E-A)|=|4E-A|^2$，而

$$|4E-A|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=6,$$

故 $|(4E-A)^T(4E-A)|=36.$

定义 7 (矩阵幂) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，记作 $\boldsymbol{A}^k$，即

$$\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}\,\cdots\,\boldsymbol{A}}_{k}$$

矩阵幂的运算律：

1 当 m, k 为正整数时，

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}^{m+k}, \quad (\boldsymbol{A}^m)^k = \boldsymbol{A}^{mk}.$$

2 当 $\boldsymbol{AB}$ 不可交换时，一般情况下，

$$(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$$

3 当 $\boldsymbol{AB}$ 可交换时，

$$(\boldsymbol{AB})^k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{B}^k\boldsymbol{A}^k.$$

定义 8 (矩阵多项式) 设 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 x 的 k 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次多项式。

注

1 若 $f(x),g(x)$ 为多项式，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆是 n 阶矩阵，则

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A}).$$

2 当 $\boldsymbol{AB}$ 不可交换时，一般

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B})\neq g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A})$$

1. 行列式

2. 矩阵

   - 矩阵的定义
   - 矩阵的加法、数乘及乘法
   - 矩阵的转置
   - 矩阵的逆
   - 矩阵的初等变换与初等矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

定义 9 (转置矩阵)　把一个 $m \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到的一个 $n \times m$ 矩阵，称之为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^T$ 或 $\boldsymbol{A}'$，即

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

定理 3 (矩阵转置的运算律)

(i) $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

(iii) $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$

(iv) $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

定义 10 (对称矩阵、反对称矩阵) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个 n 阶矩阵。

1. 如果
$$a_{ij} = a_{ji},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵;
2. 如果
$$a_{ij} = -a_{ji},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵。

注　关于对称矩阵与反对称矩阵，有如下性质：

1. $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$；
2. $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$；
3. 反对称矩阵的主对角元全为零。
4. 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。
5. 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

   设 $\boldsymbol{A}$ 为一 n 阶方阵，则

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}+\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}$$

   容易验证 $\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}$ 为对称阵，$\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}$ 为反对称阵。
6. 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

   若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 对称的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}$ 可交换。

1. 行列式

2. 矩阵

- 矩阵的定义
- 矩阵的加法、数乘及乘法
- 矩阵的转置
- 矩阵的逆
- 矩阵的初等变换与初等矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

定义 11 (逆矩阵) 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果有一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并把 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。

定理 4　若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵惟一。

定理 5　若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

定义 12 代数余子式矩阵，伴随矩阵 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$ 为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，称

$$\operatorname{coef}\boldsymbol{A}=(A_{ij})_{n\times n}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式矩阵，并称 $\operatorname{coef}\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^*$，即

$$\boldsymbol{A}^*=(\operatorname{coef}\boldsymbol{A})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 6 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

定义 13 (奇异阵与非奇异阵) 当 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为**奇异矩阵**，否则称为**非奇异矩阵**。

注 **可逆矩阵就是非奇异矩阵。**

定理 7 可逆矩阵有如下运算规律:

1 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

2 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$k\neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}A^{-1}$.

3 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵且均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 皆可逆，则 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1}=\boldsymbol{A}_m^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$.

4 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^T$ 亦可逆，且 $(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$.

5 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

例 15 (★) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$，问 A 是否可逆？如可逆求 A^{-1}，如不可逆，求 A 的伴随矩阵 A^*.

例 15 (★) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$，问 A 是否可逆？如可逆求 A^{-1}，如不可逆，求 A 的伴随矩阵 A^*.

解 因

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

故 A 不可逆。而

$$A^*=\begin{vmatrix} -14 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ -10 & -5 & 5 \end{vmatrix}.$$

例 16　设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，试证明 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换。

例 16 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，试证明 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换。

证明. 由 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 可得 $\boldsymbol{A}^{-1}B = \boldsymbol{BA}^{-1}$，故 $\boldsymbol{A}^*B = \boldsymbol{BA}^*$. □

例 17　设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程

$$\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} - 10\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0},$$

证明：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}$ 都可逆，并求它们的逆矩阵。

例 17　设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程

$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0},$$

证明：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明.

$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=10\boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})$.

例 17 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程

$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0},$$

证明：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明.

$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=10\boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})$.

$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})=6\boldsymbol{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$$

故 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 可逆，且$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})^{-1}=\dfrac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$. □

1. 行列式

2. 矩阵

- 矩阵的定义
- 矩阵的加法、数乘及乘法
- 矩阵的转置
- 矩阵的逆
- 矩阵的初等变换与初等矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

定义 14 (初等矩阵) 将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做一次初等变换所得的矩阵称为**初等矩阵**。对应于 3 类初等行、列变换，有 3 种类型的初等矩阵。

以下介绍三种初等矩阵：

1. 初等对调矩阵；
2. 初等倍乘矩阵；
3. 初等倍加矩阵。

1、对调 $\boldsymbol{I}$ 的两行或两列（初等对调矩阵）

$$
\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & 0 & & \cdots & & 1 & & \\
& & & 1 & & & & & \\
& & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
& & & & & 1 & & & \\
& & 1 & & \cdots & & 0 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \text{第 } i \text{ 列} & & & & \text{第 } j \text{ 列} & &
\end{array}
&
\end{array}
$$

a、用 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 左乘 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

相当于 把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对调（$r_i \leftrightarrow r_j$）.

b、用 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第 i 列　第 j 列

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列对调（$c_i \leftrightarrow c_j$）.

2、以非零常数 k 乘 $\boldsymbol{I}$ 的某行或某列（初等倍乘矩阵）

$$\boldsymbol{E}_i(k)=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{第 } i \text{ 列} & \end{array}$$

a、以 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{A} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

相当于以数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行（$r_i \times k$）；

b、以 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_i(k)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \text{第 } i \text{ 列}\end{array}$$

相当于以数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列（$c_i \times k$）。

3、将非零常数 k 乘 $\boldsymbol{I}$ 的某行再加到另一行上（初等倍加矩阵）

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k)=\begin{array}{c@{}l}\left(\begin{matrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

a、以 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以数 k 加到第 i 行上（$r_i + r_j \times k$）；

b、以 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j}+ka_{2i} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj}+ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \text{第 } i \text{ 列} \qquad\qquad \text{第 } j \text{ 列} \end{array}$$

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以数 k 加到第 j 列上（$c_j+c_i\times k$）。

定理 8 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m \times n$ 矩阵，

- 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；
- 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换 $r_i \longleftrightarrow r_j$ 的逆变换为其本身可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$$

(ii) 由变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \div k$可知

$$\boldsymbol{E}_i(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_i(k^{-1})$$

(iii) 由变换 $r_i + r_j \times k$ 的逆变换为 $r_i - r_j \times k$可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}(-k)$$

以上结论也可总结为

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{E}_i(k^{-1})=\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{E}_{ij}(-k)=\boldsymbol{I}.$$

例 18 (★) 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, C=$
$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，求 $(AB+2C)E(2,3)$，其中 $E(2,3)$ 是交换单位矩阵的 2,3 行（列）所得的三阶初等方阵。

例 18 (★) 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，求 $(AB+2C)E(2,3)$，其中 $E(2,3)$ 是交换单位矩阵的 2,3 行（列）所得的三阶初等方阵。

解 经计算

$$AB+2C=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -9 & 6 \\ 4 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

故

$$(AB+2C)E(2,3)=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & -9 \\ 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

定理 9　可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

推论 2　可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

推论 3　如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与同阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换，那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

定理 9 可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

推论 2 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

推论 3 如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与同阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换，那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

注 1 该推论给出了求可逆矩阵的逆的一种有效方法，请大家熟练掌握。

例 19　求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解

$$
\begin{pmatrix} A & \vert & I \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_1 + r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

例 20　已知 $\boldsymbol{ABA}^T = 2\boldsymbol{BA}^T + \boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解

$$\boldsymbol{ABA}^T = 2\boldsymbol{BA}^T + \boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^T = \boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{BA}^T = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}$$

故

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = [\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})]^{-1} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{A}^T)^{-1}$$

而

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

推论 4 对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 如果增广矩阵

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{I},\boldsymbol{x}),$$

则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 为惟一解。

例 21　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_1$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_2$ 的解。

解

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\ r_2\div 5\\ r_3+3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例 22 (★)　求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解　原方程等价于

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$$

而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\overset{r_2-2r_1}{r_2\leftrightarrow r_3}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}\underset{\sim}{\overset{r_3+4r_2}{r_3\div(-1)}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\overset{r_3+4r_2}{r_3\div(-1)}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例 23 (★)　求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{X}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{X}$。

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
   - n 维向量及其线性相关性
   - 向量组的秩及其极大线性无关组
   - 矩阵的秩
   - 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
   - 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型
   - 正交变换法
   - 配方法

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
   - n 维向量及其线性相关性
   - 向量组的秩及其极大线性无关组
   - 矩阵的秩
   - 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
   - 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

定义 15 (向量空间) 数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量，在其中定义了上述加法与数乘运算，就称之为 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量空间，仍记为 $\mathbb{R}^n$。

定义 16 (线性表示) 设 $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^n, k_i \in \mathbb{R}(i = 1, 2, \cdots, m)$，则向量

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{\alpha}_i = k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 在数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性组合。如果记

$$\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{\alpha}_i,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示（或线性表出）。

设有线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵。记

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

于是线性方程组可等价的表述为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b}$$

注　向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，等价于方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b}$$

有解。

定义 17 (线性相关与线性无关) 若对 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^n$，有 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in \mathbb{R}$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \tag{5}$$

成立，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关；否则，称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关。

注 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，指的是

- 没有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使 (5) 成立；
- 只有当 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 全为零时，才使 (5) 成立；
- 若 (5) 成立，则 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 必须全为零。

定理 10　以下两组等价关系成立:

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，等价于齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

  有非零解。
- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，等价于齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

  只有零解。

例 24 (★) 下列命题是否正确？如正确，请证明，若不正确请举反例：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是存在一组不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \neq 0$.

例 24 (★) 下列命题是否正确？如正确，请证明，若不正确请举反例：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是存在一组不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \neq 0$.

解 不正确。如 $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (2, 4, 6)$，存在 $k_1 = k_2 = 1 \neq 0$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \neq 0$，但 α_1, α_2 线性相关。

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的基本方法为:

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

然后说明上式成立，只能有唯一选择:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0.$$

对于只含一个向量的向量组，

- 当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关
- 当 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关

定理 11 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出。

结论 3 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关。

注

- 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则其中任一部分向量组也线性无关。
- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

定理 12　设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r \in \mathbb{R}^n$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (a_{11},\ a_{21},\ \cdots,\ a_{n1})^T,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (a_{12},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{n2})^T,$$
$$\cdots,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_r = (a_{1r},\ a_{2r},\ \cdots,\ a_{nr})^T,$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{6}$$

有非零解，其中

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr}. \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

结论 4　对于齐次线性方程组，如果

$$\text{未知量个数} > \text{方程个数},$$

则它必有无穷多解，从而必有非零解。

定理 13 任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的。

注

- 向量个数 $>$ 向量维数 $\Rightarrow$ 向量组必线性相关。
- 在 $\mathbb{R}^n$ 中，任意一组线性无关的向量最多只能含 n 个向量。

定理 14　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，并且表示法惟一。

推论 5　如果 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则 $\mathbb{R}^n$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示法惟一。

例 25　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$.
问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关？

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？如能表示求出其表示式。

例 26　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

例 27　证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

定理 15 如果一组 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，那么把这些向量各任意添加 m 个分量所得的向量 ($n+m$ 维) 组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$ 也线性无关。亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

定理 16 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，那么它们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量也线性相关，亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性相关}$$

推论 6 设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。

如

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ 0 \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}$$

线性相关性一致。

例 28　考察以下向量组的线性相关性:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例 28 考察以下向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解 去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关，故原向量组线性无关。

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
   - n 维向量及其线性相关性
   - 向量组的秩及其极大线性无关组
   - 矩阵的秩
   - 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
   - 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

定义 18 (向量组的秩) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中，若

- 存在 r 个线性无关的向量，
- 且其中任一向量可由这 r 个线性无关的向量线性表示，

则数 r 称为向量组的秩 (rank)，记作

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$$

或

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$$

- 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = s$；
- 只含零向量的向量组的秩为零。
- 只含一个非零向量的向量组的秩为 1。

定义 19 若向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 中每个向量可由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，就称向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

例 29　设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，但不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表出，证明：向量组 $U: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与向量组 $V: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}$ 等价。

例 29 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，但不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表出，证明：向量组 $U : \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与向量组 $V : \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}$ 等价。

证明. 由已知条件知 V 可由 U 线性表出，而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 可由 V 线性表出，故只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 V 线性表出。设

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1} + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

则 $k_r \neq 0$. 否则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表出，与已知矛盾，故 $k_r \neq 0$。于是

$$\boldsymbol{\alpha}_r = -\frac{1}{k_r}(\boldsymbol{\beta} - k_1\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1})$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 V 线性表出。 $\square$

定理 17 若向量组 B： $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且 $t > s$，则 B： $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关。

定义 20 (向量组的秩的等价定义 & 极大线性无关组) 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$。如果能从其中选出 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，满足

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;
- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关,

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

极大线性无关组所含向量的个数 r，称为原向量组的秩。

注 2

- 秩为 r 的向量组中，任一个线性无关的部分组最多含有 r 个向量；
- 一般情况下，极大无关组不惟一；
- 不同的极大无关组所含向量个数相同；
- 极大无关组与原向量组是等价的；
- 极大无关组是原向量组的全权代表。

推论 7 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = p$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r$，如果向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则

$$r \leq p.$$

推论 8 等价向量组的秩相等。

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
   - n 维向量及其线性相关性
   - 向量组的秩及其极大线性无关组
   - 矩阵的秩
   - 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
   - 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

定义 21 (行秩 & 列秩)

- 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，把它的每一行称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**行向量**。把 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**。
- 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，把它的每一列称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**列向量**。把 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**。

对于 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，

- $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $\leq m$；
- $\boldsymbol{A}$ 的列秩 $\leq n$。

定义 22 (阶梯形矩阵) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 零行在最下方;

(2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增,

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**阶梯形矩阵**。

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 23 行简化阶梯形矩阵 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 它是阶梯形矩阵;

(2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外，其余元素全为零,

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行简化阶梯形矩阵**。

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 24 行简化阶梯形矩阵 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 它是行简化阶梯形矩阵；

(2) 非零行首元全为 1，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行最简阶梯形矩阵**。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $a_{11}\neq 0, a_{23}\neq 0, a_{34}\neq 0$。验证 $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=3$，列秩 $=3$。

结论 5 阶梯形矩阵的行秩等于列秩，其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数。

定理 18 初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩。

定理 19 初等变换不改变矩阵的行秩与列秩。

例 30 (★) 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\6\\4\\-1\end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解　作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$，由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\longleftrightarrow r_4]{r_4\div 3}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&-1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

将最后一个阶梯矩阵 $\boldsymbol{B}$ 记为 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$

易知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组，故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 也为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5) = 3,$$

且

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_5 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_4,$$

定理 20 矩阵的行秩等于其列秩。

定义 25 (矩阵的秩) 矩阵的行秩或列秩的数值，称为**矩阵的秩**。记作

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \quad 或 \quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$$

定义 26 (满秩矩阵) 对于 n 阶方阵，若

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**满秩矩阵**。

定理 21 对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$。

定义 27 (子式与主子式) 对矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，任意挑选 k 行 $(i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行) 与 k 列 $(j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列)，其交点上的 k^2 个元素按原顺序排成的 k 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix} \tag{7}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的k 阶子行列式，简称 $\boldsymbol{A}$ 的k 阶子式。

- 当 (7) 等于零时，称为k 阶零子式;
- 当 (7) 不等于零时，称为k 阶非零子式;
- 当 (7) 的 $j_1=i_1$，$j_2=i_2$，$\cdots$，$j_k=i_k$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的k 阶主子式。

注 若 $\boldsymbol{A}$ 存在 r 阶非零子式，而所有 $r+1$ 阶子式（如果有）都等于零，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

事实上，由行列式的按行展开可知，若所有 $r+1$ 阶子式都等于零，可得到所有更高阶的子式都等于零。

定理 22 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

关于矩阵的秩的基本结论

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$的行秩 $= \boldsymbol{A}$的列秩 $= \boldsymbol{A}$的非零子式的最高阶数

(2) 初等变换不改变矩阵的秩

性质 8

$$\max\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\} \ \le\ \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \ \le\ \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

特别地，当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}$ 为非零向量时，有

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \ \le\ \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}) \ \le\ \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+1.$$

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{cases}\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) & \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{b}\text{可以被}\boldsymbol{A}\text{的列向量线性表示}\\[2ex] \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+1 & \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{b}\text{不能被}\boldsymbol{A}\text{的列向量线性表示}\end{cases}$$

设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(1) 因

$$(A,\ b_1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-(c_1+2c_2)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=(A,\mathbf{0}),$$

故 $\mathrm{R}(A,b_1)=\mathrm{R}(A,\mathbf{0})=\mathrm{R}(A)$，从而 b_1 可由 A 的列向量线性表示。

(2) 因

$$(A,\ b_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故 $\mathrm{R}(A,b)=\mathrm{R}(A)+1$，从而 b 不能由 A 的列向量线性表示。

注

- 不等式

$$\min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}), \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\} \le \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$$

意味着：在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当 $\boldsymbol{B}$ 的列向量能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示时，等号成立。

注

- 不等式

$$\min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\} \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$$

意味着：在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当 $\boldsymbol{B}$ 的列向量能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示时，等号成立。

- 不等式

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$$

意味着：对 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$，有可能 $\boldsymbol{A}$ 的列向量与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量出现线性相关，合并为 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ 的秩一般会比 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 要小。

性质 9

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

注　将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合并、相加，只可能使得秩减小。

性质 10

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leq \min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{R}(\boldsymbol{B})).$$

该性质告诉我们，对一个向量组进行线性组合，可能会使向量组的秩减小。

性质 11 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{PA}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{AQ}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{PAQ}).$$

例 31　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，且 $m < n$，证明：$|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| = 0$.

例 31 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，且 $m < n$，证明：$|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| = 0$.

解 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T) \leq \min\{m, n\} < n$，根据性质 2，有

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) \leq \min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T),\ \mathrm{R}(\boldsymbol{A})\} < n,$$

而 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，故 $|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| = 0$。

定理 23　若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = r$，则一定存在可逆的 m 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m \times n} = \boldsymbol{U}.$$

例 32 (★) 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,2),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,3),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,k,4),$$

试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩，并将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

解 将 4 个向量按列排成一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，做初等变换将其化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{U}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

(1) 当 $a=1$ 或 $k=2$ 时，$\boldsymbol{U}$ 只有 3 个非零行，故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3.$$

(2) 当 $a\neq 1$ 且 $k\neq 2$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=4.$

(3) 当 $k=2$ 且 $a\neq 1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{1+5a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2+a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{3}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(4) 当 $k\neq 2$ 或 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

例 33 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，求 t。

例 33 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，求 t。

解

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$，故 $\boldsymbol{B}$ 中第 2、3 行必须成比例，即

$$\frac{-2}{2+t}=\frac{-4}{6},$$

即得 $t=1$。

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

- n 维向量及其线性相关性
- 向量组的秩及其极大线性无关组
- 矩阵的秩
- 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
- 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，考察以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{8}$$

若将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

齐次方程组 (8) 可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0}.$$

而齐次方程组 (8) 有非零解的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，即

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) < n.$$

定理 24 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则

$$\underline{\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\text{有非零解}} \iff \underline{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) < n}.$$

定理 25 (定理 1 的等价命题) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则

$$\underline{\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\text{只有零解}} \iff \underline{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n = \boldsymbol{A}\text{的列数}}.$$

定义 28 (基础解系) 设 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，若

(1) $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 线性无关；

(2) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解向量可由 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 线性表示。

则称 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

注　关于基础解系，请注意以下几点：

(1) 基础解系即全部解向量的极大无关组。

(2) 找到了基础解系，就找到了齐次线性方程组的全部解：

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{x}_p \quad (k_1, k_2, \cdots, k_p \text{为任意常数}).$$

(3) 基础解系不唯一。

定理 26 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r<n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 存在基础解系，且基础解系含 $n-r$ 个解向量。

注 注意以下两点：

- r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，也是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵的非零行行数，是非自由未知量的个数。
- n 为未知量的个数，故 $n-r$ 为自由未知量的个数。有多少自由未知量，基础解系里就对应有多少个向量。

例 34 (★)　求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & 24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div 4]{r_3\div 8} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 35 (★) 求齐次线性方程组

$$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$$

的基础解系。

例 35 (★)　求齐次线性方程组

$$nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$$

的基础解系。

解　原方程等价于 $x_n=-nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}$，即

$$\begin{cases} x_1 &= & x_1 & & & \\ x_2 &= & & x_2 & & \\ & \vdots & & & & \\ x_{n-1} &= & & & & x_{n-1} \\ x_n &= & -nx_1 & -(n-1)x_2 & \cdots & -2x_{n-1} \end{cases}$$

基础解系为

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}$$

例 36　设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$。证明：

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B}) \le n.$$

例 36 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$。证明：

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B}) \leq n.$$

证明. 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ 知，$\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解。故 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩，不超过 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系的秩，即

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{B}) \leq n - \mathrm{R}(\boldsymbol{A}),$$

即

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B}) \leq n.$$

□

例 37　设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，证明

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

例 37　设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，证明

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

解　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，故它们有相同的基础解系，而基础解系包含的向量个数相等，即

$$n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-\mathrm{R}(\boldsymbol{B}),$$

从而

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

例 38　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$。

例 38　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$。

证明.　只需证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 与 $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 同解。

(1) 若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则有 $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$。

(2) 若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

即

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。

□

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
   - n 维向量及其线性相关性
   - 向量组的秩及其极大线性无关组
   - 矩阵的秩
   - 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构
   - 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

定理 27　对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，以下命题等价：

(i) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

(ii) $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示；

(iii) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$。

注　$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + 1$ 会导致矛盾方程的出现。

记 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = r$，若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + 1$，则增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 经过初等行变换所得的行最简阶梯形矩阵形如

$$\left(\begin{array}{cccccc:c}
1 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \color{red}{d_{r+1}} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

其中 $d_{r+1} \neq 0$（否则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r$）。这意味着出现了矛盾方程

$$0 = \color{red}{d_{r+1}}.$$

推论 9

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{有唯一解} \iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\text{的列数}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & \cdots & 0 & d_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & d_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

定理 28 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则其通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\tilde{\boldsymbol{x}}$$

其中 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，而

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{x}_p$$

为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解。

注 “$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解” $=$ “$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解” $+$ “$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解”

例 39 (★)　求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一般解，其中增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div 2]{r_1-r_3,r_3+\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div 2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

故通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

例 40 (★) 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +(1+\lambda)x_3 & = & \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组

(1) 有唯一解？

(2) 无解？

(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

解

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2.$$

故当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时，有唯一解。当 $\lambda = 0$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

当 $\lambda = -3$ 时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

例 41　设四元齐次线性方程组

$$(I):\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0; \end{cases} \qquad (II):\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$$

求

(1) 方程组 (I) 与 (II) 的基础解系

(2) 方程组 (I) 与 (II) 的公共解

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间
    - 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标
    - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
    - 标准正交基
    - 施密特（Schmidt）正交化方法
    - 正交矩阵及其性质

5. 特征值问题

6. 二次型

正交变换法

配方法

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间

    - 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标
    - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
    - 标准正交基
    - 施密特（Schmidt）正交化方法
    - 正交矩阵及其性质

5. 特征值问题

6. 二次型

定义 29　设 V 是向量空间，如果

(1) 在 V 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(2) V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一组基，r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间。

注 3 只含一个零向量的集合 $\{0\}$ 也是一个向量空间，该向量空间没有基，规定它的维数为 0，并称之为 0 维向量空间。

注 4 如果把向量空间 V 看做是一个向量组，则 V 的基就是它的一个极大无关组，V 的维数就是向量组的秩。于是，V 的基不唯一，但它的维数是唯一确定的。设 V 是 r 维向量空间，则 V 中任意 r 个线性无关的向量就是 V 的一个基。

例 42　在向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中，基本单位向量组

$$\boldsymbol{\epsilon}_1=(1,0,0)^T,\quad \boldsymbol{\epsilon}_2=(0,1,0)^T,\quad \boldsymbol{\epsilon}_3=(0,0,1)^T$$

线性无关，且任一向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^3$ 可由 $\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3$ 表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\epsilon}_1+x_2\boldsymbol{\epsilon}_2+x_3\boldsymbol{\epsilon}_3.$$

此时，$\mathbb{R}^3$ 可表示为

$$\mathbb{R}^3=\{x=x_1\boldsymbol{\epsilon}_1+x_2\boldsymbol{\epsilon}_2+x_3\boldsymbol{\epsilon}_3|x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}.$$

向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

事实上，在 $\mathbb{R}^3$ 中，任一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，只要它们线性无关，就构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

事实上，在 $\mathbb{R}^3$ 中，任一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，只要它们线性无关，就构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

例如，在 $\mathbb{R}^3$ 中，向量组

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{\epsilon}_3 = (1, 1, 1)^T$$

线性无关，构成 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基。对任一向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$，

$$\boldsymbol{\alpha} = (x_1 - x_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 - x_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

此时，$\mathbb{R}^3$ 可表示为

$$\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1 - x_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 - x_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

定义 30　$\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由线性无关向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\beta}_1 + a_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

称 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标，记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad 或 \quad \boldsymbol{\alpha}_B = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

并称之为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标向量。

注 5

- $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的
- 基本向量组

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基或标准基。

- 一般来说，对于向量及其坐标，都采用列向量的形式，即

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

例 43 设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基为自然基 B_1 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$，其中

$$
\begin{array}{llllllllll}
\boldsymbol{\beta}_1 & =(& 1, & -1, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0)^T, \\
\boldsymbol{\beta}_2 & =(& 0, & 1, & -1, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0)^T, \\
 & \vdots & & & & & & & & \\
\boldsymbol{\beta}_{n-1} & =(& 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 1, & -1)^T, \\
\boldsymbol{\beta}_n & =(& 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 1)^T.
\end{array}
\tag{9}
$$

求向量组 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 分别在两组基下的坐标。

定理 29 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\eta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\eta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关的充要条件是

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

定义 31 设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵。

定理 30 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad 和 \quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T,$$

由基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x} \quad 或 \quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

例 44　已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基为 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 2, 1)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (1, -1, 0)^T, \boldsymbol{\beta}_3 = (1, 0, -1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

例 45 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T,$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^T.$$

(1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 α 在基 B_1 的坐标为 $(1,-2,-1)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标。

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间
   - 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

5. 特征值问题

6. 二次型

$\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间

定义 32 在 $\mathbb{R}^n$ 中，对于 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为列向量时，

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}.$$

性质 12 (内积的运算性质) 对于 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{R}$，

(i) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

$\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间

定义 33 (向量长度) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$$

定理 31 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

定义 34 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$<\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}> = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理 32

$$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \iff (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

注 6 零向量与任何向量的内积为零，从而零向量与任何向量正交。

定理 33 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

注 7 当 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$ 时，$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2$。

定义 35 (欧几里得空间) 定义了内积运算的 n 维实向量空间，称为 n 维欧几里得空间（简称欧氏空间），仍记为 $\mathbb{R}^n$。

1. 行列式
2. 矩阵
3. 向量的线性相关性及线性方程组的解
4. 向量空间
   - 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质
5. 特征值问题

6. 二次型

标准正交基

定理 34 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的。

定义 36 (标准正交基) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$，若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基。

例 46　设 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基，求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标。

解

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

$$\Longrightarrow\quad(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_j)=x_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)$$

$$\Longrightarrow\quad x_j=\frac{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j).$$

6. 二次型

施密特（Schmidt）正交化方法

本小节的目标是：从一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 出发，构造一组标准正交向量组。

施密特（Schmidt）正交化方法 I

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$；

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i = 1, 2) \\
\Longrightarrow\ & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i = 1, 2) \\
\Longrightarrow\ & k_{3i} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} && (i = 1, 2)
\end{aligned}
$$

故

$$
\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2
$$

施密特（Schmidt）正交化方法 III

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + +k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1}, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}\boldsymbol{\beta}_{j-1}.$$

施密特（Schmidt）正交化方法 IV

(5) 单位化

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m \xrightarrow{\eta_j = \frac{\boldsymbol{\beta}_j}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}} \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$$

施密特（Schmidt）正交化方法 I

例 47　已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

施密特（Schmidt）正交化方法 I

解 1、正交化过程：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-1,0)^T, \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 \\
&= (1,0,1)^T - \frac{1}{2}(1,-1,0)^T = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right), \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 \\
&= (1,-1,1)^T - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T - \frac{2}{2}(1,-1,0)^T = \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

2、单位化过程:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

6. 二次型

正交矩阵及其性质

定义 37 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，如果

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

正交矩阵及其性质

定理 35

$$\boldsymbol{A}\text{为正交矩阵} \iff \boldsymbol{A}\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

正交矩阵及其性质

定理 36　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶正交矩阵，则

(1) $|\boldsymbol{A}| = 1$ 或 -1

(2) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$

(3) $\boldsymbol{A}^T$ 也是正交矩阵

(4) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵

定理 37 若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$，则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变，即

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \quad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|,$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

例 48 (★) 给正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行（或某一列）乘以 -1 后所得的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是否仍为正交矩阵？

例 48 (★) 给正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行（或某一列）乘以 -1 后所得的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是否仍为正交矩阵？

解 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为正交矩阵，给第 i 行乘以 -1 后得

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

因 $a_{k1}^2+\cdots+a_{kn}^2=1 \quad \forall k$，故当 $k=i$ 时，$(-a_{i1})^2+\cdots+(-a_{in})^2=1$

因 $a_{k1}a_{p1}+\cdots+a_{kn}a_{pn}=1(k\neq p)$，故当 $k=i$ 时，
$(-a_{i1}a_{p1})+\cdots+(-a_{in}a_{pn})=0$，于是 $\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵.

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间

5. 特征值问题
   - 矩阵的特征值与特征向量　相似矩阵
   - 相似矩阵
   - 矩阵可对角化的条件
   - 实对称矩阵的对角化

6. 二次型
   - 正交变换法
   - 配方法

定义 38 (特征值与特征向量) 设 $\boldsymbol{A}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶矩阵，如果存在数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零的 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量。

注 8

(1) 特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$；

(2) 特征值问题是对方针而言的。

定义 39 (特征多项式、特征矩阵、特征方程) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵，$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程。

例 49 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$(二重特征值)。

当 $\lambda_1 = 3$ 时，由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,1)^T$，因此 $k_1\boldsymbol{x}_1$（k_1 为非零任意常数）是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量。

当 $\lambda_2 = 2$ 时，由 $(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{x}_2 = (1, 1, 2)^T$，因此 $k_2 \boldsymbol{x}_2$（k_2 为非零任意常数）是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2 = 2$ 的全部特征向量。

定理 38　若 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量（其中 k_1,k_2 为任意常数，但 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2\neq 0$）。

在 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ 的解空间中，除零向量以外的全体解向量就是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的全体特征向量。因此，$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ 的解空间也称为 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ 的特征子空间，记作 V_λ。n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间就是 n 维向量空间的子空间，其维数为

$$dimV_\lambda = n - rank(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}).$$

定理 39 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$;

(2) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(\boldsymbol{A})$,

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和，称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹 (trace)，记为 $tr(\boldsymbol{A})$。

例 50 (★) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的全部特征值之积为 24.

1. 求 a 的值;
2. 讨论 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化，若能，求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

例 50 (★) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的全部特征值之积为 24.

1. 求 a 的值;
2. 讨论 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化，若能，求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

解

1. 因 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=24$，故 $a=-2$;

例 50 (★) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的全部特征值之积为 24.

1. 求 a 的值;
2. 讨论 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化，若能，求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

解

1. 因 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=24$，故 $a=-2$;
2. 由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ -1 & 4-\lambda & -3 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$, 故特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=6$. 当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=1$，这说明 $\boldsymbol{A}$ 由 3 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

当 $\lambda = 2$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$，得基础解系

$$\boldsymbol{x}_1 = (2, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2 = (-3, 0, 1)^T,$$

当 $\lambda = 6$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$，得基础解系

$$\boldsymbol{x}_3 = (1, 1, -1)^T,$$

取可逆矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(2, 2, 6)$ 为对角阵.

定理 40 一个特征向量不能属于不同的特征值。

性质 13 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ 的特征向量，则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值；

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值；

且 $\boldsymbol{x}$ 仍是矩阵 $k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{A}^{-1}$ 分别对应于 $k\lambda, \lambda^m, \lambda^{-1}$ 的特征向量。

注 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值，其中

$$\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m,$$

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m.$$

例 51 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -1, 2$，求 $|\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}|$.

例 51　设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|$.

解　因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为零，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$。又因 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$，故

$$\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=-2\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}.$$

令 $\varphi(\lambda)=-\frac{2}{\lambda}+3\lambda-2$，则 $\varphi(\lambda)$ 为上述矩阵的特征值，分别为 $\varphi(1)=-1,\varphi(-1)=-3,\varphi(2)=3$，于是

$$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=(-1)\cdot(-3)\cdot 3=9.$$

性质 14 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 的特征值相同。

例 52　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(i) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量

(ii) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵。

解 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 2 & -2-\lambda & 2\\ -1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 2 & -\lambda & 2\\ -1 & -\lambda & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 2 & -\lambda & 2\\ -3 & 0 & -3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda[(\lambda-1)(\lambda+3)+3]=-\lambda^2(\lambda+2),$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 和 $\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，由 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 得基础解系

$$\boldsymbol{x}_1=(1,1,0)^T,\quad \boldsymbol{x}_2=(-1,0,1)^T,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_{1,2}=0$ 的全体特征向量为

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2=k_1(1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T,$$

其中 k_1,k_2 为不全为零的任意常数。

当 $\lambda_3=-2$ 时，由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\boldsymbol{x}_3=(-1,-2,1)^T,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_3=-2$ 的全体特征向量为

$$k_3\boldsymbol{x}_3=k_3(-1,-2,1)^T,$$

其中 k_3 为非零的任意常数。

将 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i(i=1,2,3)$ 表示成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

取

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，且 $|\boldsymbol{P}|=2\neq 0$，故得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$$

为对角阵。

定理 41 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个特征值，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 依次是与之对应的特征向量，若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 互不相等，则 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

相似矩阵

定义 40　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B},$$

则称$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变化，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵。

相似矩阵

定理 42　若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同。

推论 10　若 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似，则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值。

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间

5. 特征值问题
   - 矩阵的特征值与特征向量　相似矩阵
   - 相似矩阵
   - 矩阵可对角化的条件
   - 实对称矩阵的对角化

6. 二次型

矩阵可对角化的条件

矩阵可对角化，即矩阵与对角阵相似。

定理 43 矩阵可对角化 $\iff$ n 阶矩阵有 n 个线性无关的特征向量

矩阵可对角化的条件

定理 44 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

推论 11 若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似。

矩阵可对角化的条件

例 53　设实对称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

问 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化？若可对角化，求对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 及可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，再求 $\boldsymbol{A}^k$。

矩阵可对角化的条件 I

解 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)^3,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -2$（单根），$\lambda_2 = 2$（三重根）。

矩阵可对角化的条件 II

由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得 λ_1 对应的特征向量为 $\{k_1\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_1=(1,1,1,1)^T, k_1\neq 0\}$。

由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$，即

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系：

$$\boldsymbol{x}_{21}=(1,-1,0,0)^T,\quad \boldsymbol{x}_{22}=(1,0,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{x}_{23}=(1,0,0,-1)^T.$$

矩阵可对角化的条件 III

因 $\boldsymbol{A}$ 有 4 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$。

取

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_{21}, \boldsymbol{x}_{22}, \boldsymbol{x}_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

再由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^k & & & \\ & 2^k & & \\ & & 2^k & \\ & & & 2^k \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} 2^k \boldsymbol{I}_4, & k \text{ even}, \\ 2^{k-1}\boldsymbol{A}, & k \text{ odd}. \end{cases}$$

例 54 (★)　设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 2, -3$，矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^3 - 7\boldsymbol{A} + 5\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$.

例 54 (★) 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 2, -3$，矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^3 - 7\boldsymbol{A} + 5\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同，故存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$. 而

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^3 - 7\boldsymbol{A} + 5\boldsymbol{E})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}^3 - 7\boldsymbol{\Lambda} + 5\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E},$$

故 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}(-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{E}$.

例 55 (★) 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1, 1, 2, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值及行列式 $|\boldsymbol{B}|$.

例 55 (★) 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1, 1, 2, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值及行列式 $|\boldsymbol{B}|$.

证明. 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 2$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值分别为 $-4, 2, 8$，从而 $|\boldsymbol{B}| = (-4) \times 2 \times 8 = -64$. □

矩阵可对角化的条件

例 56　设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

问 x 为何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化？

解 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & x \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

即 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$。

对应于单根 $\lambda_1=-1$，可求得线性无关的特征向量恰有 1 个，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是对应重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$，有 2 个线性无关的特征向量，即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ 有两个线性无关的解，亦即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 的秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$。由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

欲使 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$，须有 $x+1=0$，即 $x=-1$。因此当 $x=-1$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化。

矩阵可对角化的条件

例 57　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 是主对角元全为 2 的上三角矩阵，且存在 $a_{ij} \neq 0 (i < j)$，问 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化？

矩阵可对角化的条件

解　设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & * & \cdots & * \\ & 2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

其中 $*$ 为不全为零的任意常数，则

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = (2 - \lambda)^n,$$

即 $\lambda = 2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征根，而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) \geq 1$，故 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ 的基础解系所含向量个数 $\leq n - 1$ 个，即 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量的个数 $\leq n - 1$ 个，因此 $\boldsymbol{A}$ 不与对角阵相似。

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间

5. 特征值问题

    - 矩阵的特征值与特征向量　相似矩阵
    - 相似矩阵
    - 矩阵可对角化的条件
    - 实对称矩阵的对角化

6. 二次型

定理 45　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值都是实数。

定理 46　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的。

定理 47　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称阵，则必有正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元的对角阵。

推论 12　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称阵，λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重根，则矩阵 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 的秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=n-k$，从而对应特征值 λ 恰有 k 个 u 线性无关的特征向量。

将对称阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的步骤：

1. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，它们的重数依次为 $k_1, \cdots, k_s (k_1 + \cdots + k_s = n)$；
2. 对每个 k_i 重特征值 λ_i，求 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ 的基础解系，得 k_i 个线性无关的特征向量；
3. 再把它们正交化、单位化，得 k_i 个两两正交的单位特征向量。因 $k_1 + \cdots + k_s = n$，故总共可得 n 个两两正交的单位特征向量；
4. 将这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交阵 $\boldsymbol{Q}$，便有 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$。

例 58 (★)　设 3 阶实对称矩阵的三个特征值为 $5, 5, -4$，属于特征值 -4 的特征向量为 $(1, 1, -4)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

例 58 (★) 设 3 阶实对称矩阵的三个特征值为 $5, 5, -4$，属于特征值 -4 的特征向量为 $(1, 1, -4)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解 设 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda = 5$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$，它们必与 $(1, 1, -4)^T$ 正交，即 $x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$，可解得 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, -1, 0)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (2, 2, 1)^T$. 利用施密特正交化过程得正交矩阵

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & 1 \\ -3 & 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -4 \end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{Q}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -1 & 9 & 4 \\ 4 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

   - 二次型的定义与矩阵表示
   - 化二次型为标准型
     - 正交变换法
     - 配方法
   - 正定二次型和正定矩阵

定义 41 (二次型) n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \;& a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& \cdots \qquad \cdots \\
& + a_{nn}x_n^2
\end{aligned} \tag{10}
$$

当系数属于数域 F 时，称为数域 F 上的一个n 元二次型。

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}$$

则必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}$$

则必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

- 二次型和它的矩阵是相互唯一确定的，因此研究二次型的性质就转化为研究对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所具有的性质。

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

  其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}$$

  则必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

- 二次型和它的矩阵是相互唯一确定的，因此研究二次型的性质就转化为研究对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所具有的性质。

- 对于二次型 $f = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$，对称阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 f 的矩阵，f 称为对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型，而 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 f 的秩。

例 59 设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_4+x_3^2+5x_4^2$，则它的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- 对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 使得

$$f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

  这种只含平方项的二次型，称为二次型的标准形。

- 若标准形的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 只在 $1, -1, 0$ 中取值，也就是用(??)代入(10)，能使

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

  则称上式为二次型的规范形。

定义 42 (矩阵的合同) 对于两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B},$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$.

结论 6

经过可逆变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 后，二次型 f 的矩阵由 $\boldsymbol{A}$ 变为与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，且二次型的秩不变。

- 正定二次型和正定矩阵

化二次型为标准型，就是对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻找可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵。

正交变换法

结论 7　对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda},$$

由于 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{T}$，故

$$\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

定理 48 (主轴定理)　对于任一个 n 元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$($\boldsymbol{Q}$ 为正交阵)，使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，$\boldsymbol{Q}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的标准正交特征向量。

推论 13　任给二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，总有可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$，使得 $f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{z})$ 为规范形。

例 60 (★)　用正交变换法，将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

例 60 (★)　用正交变换法，将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解　对应矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

例 60 (★)　用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解　对应矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

得特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 和 $\lambda_3=10$.

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_3=(1,2,-2)^T.$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_3=(1,2,-2)^T.$$

对 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 用施密特正交化方法得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5},0\right)^T, \quad \boldsymbol{\xi}_2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$$

再将 $\boldsymbol{x}_3$ 单位化为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^T$$

取正交矩阵

$$Q = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \mathrm{diag}(1, 1, 10).$$

取正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(1,1,10).$$

在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 的作用下，原二次型就化成标准型

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

配方法

例 61　用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解　先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

例 61 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

例 61 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} y_1 & = & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ y_2 & = & & & x_2 & - & 2x_3 \\ y_3 & = & & & & & x_3 \end{array}\right.$$

例 61 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

例 61 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2-5y_3^2.$$

例 62　用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准型。

例 62 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$$

为标准型。

解 对 x_1x_2 利用平方差公式，令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$$

例 62 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$$

为标准型。

解 对 x_1x_2 利用平方差公式，令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$$

先对含 y_1 的项配完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-2y_2^2-2y_3^2+4y_2y_3$$

再对含 y_2 的项配完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_3)^2-2(y_2-y_3)^2$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

坐标变换记为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表:

二次型	对应矩阵
$2x_1x_2+4x_1x_3$	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2z_1^2-2z_2^2$	$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

易验证

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(2,-2,0)$$

任何 n 元二次型都可用配方法化为标准型，相应的变换矩阵为主对角元为 1 的上三角阵和对角块矩阵，或者是这两类矩阵的乘积。

1. 行列式

2. 矩阵

3. 向量的线性相关性及线性方程组的解

4. 向量空间

5. 特征值问题

6. 二次型

    - 二次型的定义与矩阵表示
    - 化二次型为标准型
    - 正定二次型和正定矩阵

二次型的标准形是不唯一的，但标准形中所含项数（即二次型的秩）是确定的。不仅如此，在限定变换为实变换时，标准形中正系数的个数是不变的，从而负系数的个数也是不变的。

定理 49 (惯性定理) 设有二次型 $f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，它的秩为 r，有两个可逆变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{z},$$

使得

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ry_r^2, \quad k_i \neq 0,$$

$$f = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ry_r^2, \quad \lambda_i \neq 0,$$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相等。

二次型的标准形中，正系数的个数称为二次型的正惯性指数，负系数的个数称为负惯性指数。若二次型 f 的正惯性指数为 p，秩为 r，则 f 的规范形便可确定为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

定义 43 如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

定义 43 如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j > 0,$$

就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

类似地，

- 若 $\forall \boldsymbol{x} \neq 0$，恒有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵；
- 若 $\forall \boldsymbol{x} \neq 0$，恒有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵；
- 若 $\forall \boldsymbol{x} \neq 0$，恒有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为半负定矩阵.

定理 50　若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则以下命题等价：

(1) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型（$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵）；

(2) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n，即 $\boldsymbol{A}$ 合同于单位阵 $\boldsymbol{E}$；

(3) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$；

(4) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于零；

(5) $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全大于零.

定理 51

$$\boldsymbol{A}\text{正定} \quad \Longrightarrow \quad a_{ii} > 0(i = 1, 2, \cdots, n) \quad \text{且} \quad |\boldsymbol{A}| > 0$$

例 63 (★) 判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$$

是否为正定二次型。

解 用特征值或顺序主子式判定.

例 64 (★)　判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$$

是否为正定二次型。

解　用特征值或顺序主子式判定。

例 65 (★) 判断二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性。

例 65 (★)　判断二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性。

解　f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

因

$$a_{11} = -5 < 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -80 < 0$$

故 f 负定。