线性代数

线性方程组

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 5 月 1 日

1. n 维向量及其线性相关性

1. n 维向量及其线性相关性

考察三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

我们用向量工具给出其几何解释。记

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} = a_{i1}\boldsymbol{i} + a_{i2}\boldsymbol{j} + a_{i3}\boldsymbol{k}, \quad i = 1, 2, 3,$$

且

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$$

定义 1 (向量的内积) 两个向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 的内积定义为

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

定义 2 (向量的垂直) 两个向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 垂直的充分必要条件是

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0.$$

由以上方程组可看出，解向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都垂直。故

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面，只有零向量与三者都垂直，即线性方程组 (1) 只有零解；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共面但不共线，则与该平面垂直的向量都是线性方程组 (1) 的解，故 (1) 有无穷多个彼此平行的解向量；

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共线，则过原点且与该直线垂直的平面上的全体向量都是 (1) 的解向量，此时任一解向量均可表示为

$$\boldsymbol{x} = k_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + k_2 \boldsymbol{x}^{(2)},$$

其中 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}$ 为 (1) 的某两个不共线的非零解向量，k_1, k_2 为任意常数。

定义 3 (n 维向量) 数域 F 上的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的有序数组称为数域 F 上的一个 n 维向量，记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

其中 a_i 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量。

- 形如 (2) 的向量称为**行向量**；
- 形如

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

  的向量称为**列向量**。

数域 F 上全体 n 维向量组成的集合，记作 F^n。设 $\boldsymbol{\alpha} \in F^n$，则

- 当 F 取为 $\mathbb{R}$ 时，$\boldsymbol{\alpha}$ 为实向量；
- 当 F 取为 $\mathbb{C}$ 时，$\boldsymbol{\alpha}$ 为复向量。

定义 4　向量运算 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in F^n$，$k\in F$，定义

(i) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 当且仅当 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$；

(ii) 向量加法

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

(iii) 向量数乘

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

- 在 (iii) 中取 $k=-1$，得

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

右端的向量称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

- 向量的减法定义为

$$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\alpha})$$

定义 5 (向量的 8 条运算规则) 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in F^n, 1, k, l \in F$，则

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$

(3) 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$

(4) 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，存在负向量 $-\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

定义 6 (向量空间) 数域 F 上的 n 维向量，在其中定义了上述加法与数乘运算，就称之为 F 上的 n 维向量空间，仍记为 F^n。当 $F=\mathbb{R}$ 时，叫做 n 维实向量空间，记作 $\mathbb{R}^n$。

定义 7 (线性表示) 设 $\boldsymbol{\alpha}_i \in F^n, k_i \in F(i = 1, 2, \cdots, m)$，则向量

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{\alpha}_i = k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 在数域 F 上的一个线性组合。如果记

$$\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{\alpha}_i,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示（或线性表出）。

设有线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵。记

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}$$

于是线性方程组可等价的表述为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$$

注　向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，等价于方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b}$$

有解。

定义 8 (线性相关与线性无关) 若对 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$，有 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \tag{3}$$

成立，则称$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关；否则，称$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关。

注　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，指的是

- 没有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使 (3) 成立；
- 只有当 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 全为零时，才使 (3) 成立；
- 若 (3) 成立，则 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 必须全为零。

定理 1 以下两组等价关系成立:

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，等价于齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

  有非零解。
- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，等价于齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

  只有零解。

对于只含有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量组，若存在不为零的数 k 使得

$$k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},$$

则

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{k}\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，要使

$$k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},$$

必须 $k=0$.

- 当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关
- 当 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关

定理 2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出。

定理 2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出。

证明. $(\Rightarrow)$ 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

定理 2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出。

证明. $(\Rightarrow)$ 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

不妨设 $k_1 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m$$

必要性得证。

定理 2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出。

证明. $(\Rightarrow)$ 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

不妨设 $k_1 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m$$

必要性得证。

$(\Leftarrow)$ 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

定理 2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出。

证明. $(\Rightarrow)$ 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

不妨设 $k_1 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m$$

必要性得证。

$(\Leftarrow)$ 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - l_2\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - l_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

显然 $1, -l_2, \cdots, -l_m$ 不全为零，故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关。 □

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的基本方法为：说明齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

只有零解。也常常表述为：设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

然后说明上式成立，只能有唯一选择：

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0.$$

例 1　设 n 维向量 $\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$，则 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关。

例 1　设 n 维向量 $\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关。

解　设存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得

$$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{0},$$

即

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\boldsymbol{0},$$

则必有 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关。

注　n 维向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 称为**基本向量**。F^n 中任何向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 都可以由 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n.$$

例 2　包含零向量的向量组是线性相关的。

例 2　包含零向量的向量组是线性相关的。

解　设该向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$。则存在 m 个不全为零的数 $1, 0, \cdots, 0$ 使得

$$1\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

故该向量组线性相关。

注

- 单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 为零向量；
- 单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零向量。

例 3　如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关。

例 3　如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关。

证明.　不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r < m)$ 线性相关，则存在 r 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

从而有 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + 0\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关。 □

注

- 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则其中任一部分向量组也线性无关。
- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

注　该定理不能理解为：线性相关的向量组中，每一个向量都能由其余向量线性表示。

如 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 1)$， $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -2)$， $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1)$ 线性相关 (因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关)，但 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示。

定理 3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r \in F^n$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (a_{11},\ a_{21},\ \cdots,\ a_{n1})^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (a_{12},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{n2})^T,$$
$$\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r = (a_{1r},\ a_{2r},\ \cdots,\ a_{nr})^T,$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

有非零解，其中

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr}. \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

证明. 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}, \tag{5}$$

即

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_r\begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

此即齐次线性方程组 (4)。

($\Rightarrow$) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则必有不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 使得 (5) 成立，即齐次线性方程组 (4) 有非零解。

($\Leftarrow$) 若方程组 (4) 有非零解，就是说有不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 使得 (5) 成立，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关。

□

结论 1　对于齐次线性方程组，如果

$$\text{未知量个数} > \text{方程个数},$$

则它必有无穷多解，从而必有非零解。

定理 4 任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的。

定理 4 任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的。

证明. 对向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \in F^n$，设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n + x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0},$$

注意到此齐次线性方程组中，未知量个数为 $n+1$，而方程个数为 n，故方程组一定有无穷多个解，从而必有非零解。得证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性相关。 □

注

- 向量个数 $>$ 向量维数 $\Rightarrow$ 向量组必线性相关。
- 在 $\mathbb{R}^n$ 中，任意一组线性无关的向量最多只能含 n 个向量。

定理 5 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，并且表示法惟一。

证明. 因为 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，故存在不全为零的数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

其中 $k \neq 0$ (若 $k = 0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关可知 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 全为零，这与 $k, k_1, k_2, \cdots, k_r$ 不全为零矛盾)。于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示为

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

证明. 因为 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，故存在不全为零的数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

其中 $k \neq 0$ (若 $k = 0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关可知 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 全为零，这与 $k, k_1, k_2, \cdots, k_r$ 不全为零矛盾)。于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示为

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

再证唯一性 设有两种表示法

$$\boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_r\boldsymbol{\alpha}_r, \quad \boldsymbol{\beta} = h_1\boldsymbol{\alpha}_1 + h_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + h_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

于是

$$(l_1 - h_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (l_2 - h_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (l_r - h_r)\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关可知 $l_i - h_i = 0$, 即$l_i = h_i$. 故 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示的表示法惟一。 □

推论 1　如果 F^n 中的 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则 F^n 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示法惟一。

推论 1　如果 F^n 中的 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则 F^n 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示法惟一。

证明.　由" 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关" 知，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，由前述定理可得结论成立。 □

例 4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关？

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？如能表示求出其表示式。

例 4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0), \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3), \boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关？

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？如能表示求出其表示式。

解

(1) 考察 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T, \boldsymbol{\alpha}_2^T, \boldsymbol{\alpha}_3^T)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 由 $|\boldsymbol{A}|=7$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

例 4　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0), \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3), \boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关？

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？如能表示求出其表示式。

解

(1) 考察 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T, \boldsymbol{\alpha}_2^T, \boldsymbol{\alpha}_3^T)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.　由 $|\boldsymbol{A}|=7$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，

故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

(2) 根据推论，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法惟一。设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4 \Rightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1^T+x_2\boldsymbol{\alpha}_2^T+x_3\boldsymbol{\alpha}_3^T=\boldsymbol{\alpha}_4^T$$

即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T & \boldsymbol{\alpha}_2^T & \boldsymbol{\alpha}_3^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解此方程组得惟一解 $x_1=1, x_2=-1, x_3=2$，故 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

例 5　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

例 5　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

解　设有数 x_1, x_2, x_3 使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0} \tag{6}$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2) + x_3(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$$

亦即

$$(x_1 + x_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_1 - 2x_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (x_1 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

求解该方程组可得非零解 $(-1, -1, 2)$。因此，有不全为零的数 x_1, x_2, x_3 使得 (6) 成立，从而 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

例 6 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

证明. ($\Rightarrow$) 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则有不全为零的数 $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1$ 使得

$$(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_3+x_1)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

例 6 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

证明. ($\Rightarrow$) 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则有不全为零的数 $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1$ 使得

$$(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_3+x_1)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

($\Leftarrow$) 设有 x_1, x_2, x_3 使得

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0} \tag{7}$$

即

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

$$x_1+x_3=0, \quad x_1+x_2=0, \quad x_2+x_3=0,$$

该方程组只有零解。这说明若使 (7)，必有 $x_1=x_2=x_3=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关。 □

定理 6 如果一组 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，那么把这些向量各任意添加 m 个分量所得的向量 ($n+m$ 维) 组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$ 也线性无关。亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

定理 7 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，那么它们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量也线性相关，亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \color{red}{a_{n+1,1}} \\ \vdots \\ \color{red}{a_{n+m,1}} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ \color{red}{a_{n+1,s}} \\ \vdots \\ \color{red}{a_{n+m,s}} \end{pmatrix} \text{线性相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性相关}$$

证明. 以上两定理互为逆否命题，故只需证明第一个。设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

只有零解。设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})^T$， $i = 1, 2, \cdots, s$，即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & = & 0, \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ns}x_s & = & 0. \end{array}\right. \tag{8}$$

只有零解。

不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}, a_{n+1,i})^T, \quad ii = 1, 2, \cdots, s.$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s^* = \mathbf{0}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ns}x_s = 0, \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,s}x_s = 0. \end{cases} \tag{9}$$

方程组 (9) 的解全是方程组 (8) 的解。而方程组 (8) 只有零解，故方程组 (9) 也只有零解。故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$ 线性无关。 □

推论 2 设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

推论 2 设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

证明. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，把这些向量各任意添加 m 个全为零的分量，所得到的新向量组记为 $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$。此时方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

与方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s^* = \mathbf{0}$$

完全相同。所以新向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$ 也线性相关。 □

对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。

如

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ 0 \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}$$

线性相关性一致。

例 7　考察以下向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例 7 考察以下向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解 去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关，故原向量组线性无关。