行列式

2017 年 10 月 19 日

目录

1　矩阵的定义

定义 1. 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

这 $m\times n$ 个数称为 $\boldsymbol{A}$ 的元素，数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列，称为矩阵的 (i,j) 元。可简记为(a_{ij})、$(a_{ij})_{m\times n}$或$\boldsymbol{A}_{m\times n}$。

注 1. 对矩阵的定义，需做以下几点说明：

- 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵；
- 行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_n$；
- 只有一行的矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$
称为行矩阵，又称行向量，也记为
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{pmatrix};$$
- 只有一列的矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
称为列矩阵，又称列向量。
- 两行矩阵的行数相等、列数也相等时，称它们为同型矩阵。
- 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\mathbf{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，且它们的对应元素相等，即
$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$
则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相等，记作
$$\boldsymbol{A}=\mathbf{B}.$$
- 元素都为 0 的矩阵称为零矩阵，记作$\mathbf{O}$。注意不同型的零矩阵是不同的。

接下来我们举几个例子介绍矩阵的应用。

$$
\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}
\\ \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3} \\ \text{产品 4}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{商店 1} & \text{商店 2} & \text{商店 3} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{B}=\begin{array}{c}
\\ \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3} \\ \text{产品 4}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \text{单价} & \text{单件重量} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} \\
b_{21} & b_{22} \\
b_{31} & b_{32} \\
b_{41} & b_{42}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

例 1.1. 某厂向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

其中 a_{ij} 为工厂向第 j 店发送第 i 种产品的数量。这四种产品的单价及单件重量也可列成矩阵

其中 b_{i1} 为第 i 种产品的单价，b_{i2} 为第 i 种产品的单件重量。

例 1.2. 四个城市间的单向航线如图所示

若令

$$
a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有 1 条单向航线,} \\ 0, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线,} \end{cases}
$$

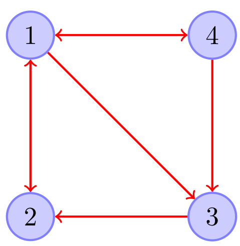
则该航线图可用矩阵表示为

例 1.3. 设变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 满足：

$$
\begin{cases}
y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\
y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\
\qquad\vdots \\
y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n
\end{cases} \tag{1}
$$

它表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换，其系数 a_{ij} 构成矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$。

- 给定了线性变换 (1)，其系数矩阵也就确定。
- 反之，若给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定。
- 从这个意义上讲，线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系。



$$
\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ \text{城市 1} \\ \text{城市 2} \\ \text{城市 3} \\ \text{城市 4} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{城市 1} & \text{城市 2} & \text{城市 3} & \text{城市 4} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

(1)、线性变换

$$
\left\{\begin{array}{l} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n \end{array}\right.
$$

称为恒等变换，它对应 n 阶方阵

$$
\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.
$$

该方阵称为 n 阶单位矩阵，简称单位阵。其 (i,j) 元为

$$
\delta_{ij}=\left\{\begin{array}{ll} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{array}\right.
$$

(2)、线性变换

$$
\left\{\begin{array}{l} y_1 = \lambda_1 x_1, \\ y_2 = \lambda_2 x_2, \\ \quad\vdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{array}\right.
$$

对应于 n 阶方阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},
$$

这种方阵称为对角矩阵，简称对角阵，记作

$$
\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).
$$

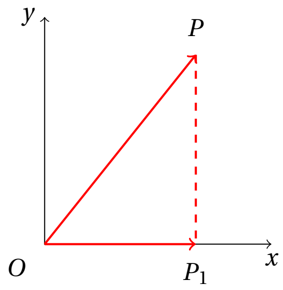
(3)、矩阵

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

所对应的线性变换为

$$
\left\{\begin{array}{l} x_1 = x, \\ y_1 = 0 \end{array}\right.
$$

是一个投影变换。



(4)、矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

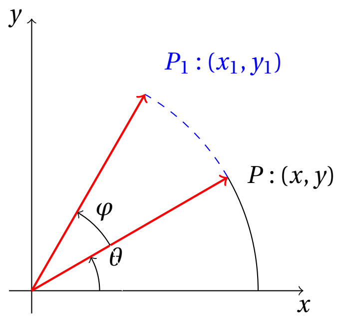
对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$x_1 = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta+\varphi),$$

$$y_1 = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = r\sin(\theta+\varphi),$$



这表明经过上述变换，将向量 OP 逆时针旋转 φ 角得到向量 OP_1.

例 1.4. 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2 \end{cases}$$

解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ - x_4 = 0 \\ - 3x_3 + 9x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_3 + 9x_4 = 3 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

如此形状的方程组称为阶梯形线性方程组. 该方程组可写成矩阵形式 求解过程可表示为

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & b \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array}\right)$$

图 1: 增广矩阵

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & b \end{pmatrix} \xlongequal{r_1 \div 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[\substack{r_3 + (-3) \times r_1 \\ r_4 + (-5) \times r_1}]{r_2 + (-2) \times r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_3 \div (-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

例 1.5. 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$$

解. 其增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

求解过程可表示为：

$$\left(\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right) \xlongequal[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3+(-2)\times r_2]{r_3+(-2)\times r_2} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div(-3)} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

该矩阵称为行简化阶梯矩阵，对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\ x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

注 2. 该方程组有 5 个未知量，其中 x_1, x_3, x_4 为基本未知量，x_2, x_5 为自由未知量。

任取 $x_2 = k_1, x_5 = k_2$，可得线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 = 1 + k_1 - 7k_2, \\ x_2 = k_1, \\ x_3 = 2 - 4k_2, \\ x_4 = -1 + 3k_2, \\ x_5 = k_2. \end{cases}$$

例 1.6. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \xlongequal[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right) \xlongequal{r_3+(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

解. 由第三行可以看出，该线性方程组无解。

- 含有矛盾方程而无解的方程组称为不相容方程组；
- 有解的方程组称为相容方程组；
- 多余方程。

对于一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其增广矩阵为 对于以上增广矩阵，总是可以经过一系列的变换将其化成 其中 $c_{ii}=1$ $(i=1,2,\cdots,r)$。

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc:c} c_1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

对应线性方程组解的情况如下：

1 线性方程组有解 $\Leftrightarrow d_{r+1}=0$；

2 在有解的情况下：

   – 当 $r=n$ 时，有唯一解 $x_1=d_1$，$x_2=d_2$，$\cdots$，$x_n=d_n$；

– 当 $r<n$ 时，有无穷多解

$$\begin{cases} x_1 &= d_1 - c_{1,r+1}k_1 - \cdots - c_{1n}k_{n-r}, \\ x_2 &= d_2 - c_{2,r+1}k_1 - \cdots - c_{2n}k_{n-r}, \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_r &= d_r - c_{r,r+1}k_1 - \cdots - c_{rn}k_{n-r}, \\ x_{r+1} &= k_1, \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_n &= k_{n-r}. \end{cases}$$

2 矩阵的计算

2.1 矩阵的加法

定义 2 (矩阵的加法)**.** 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

注 3. 只有当两个矩阵同型时才能进行加法运算。

矩阵加法的运算律：

(i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，称

$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij}),$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}.$$

由此规定矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

2.2 矩阵的数乘

定义 3 (矩阵的数乘)**.** 数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$，规定为

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

注 4. 用数 k 乘一个矩阵，需要把数 k 乘矩阵的每一个元素，这与行列式的数乘性质不同。

矩阵数乘的运算律：

(i) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$;

(ii) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(iii) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

矩阵加法与矩阵数乘统称为矩阵的线性运算

2.3 矩阵的乘法

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1=b_{11}t_1+b_{12}t_2, \\ x_2=b_{21}t_1+b_{22}t_2, \\ x_3=b_{31}t_1+b_{32}t_2, \end{cases} \tag{3}$$

若想求从 t_1,t_2 到 y_1,y_2 的线性变换，可将 (3) 代入 (2)，便得

$$\begin{cases} y_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})t_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})t_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})t_2. \end{cases} \tag{4}$$

线性变换 (4) 可看成是先作线性变换 (3) 再作线性变换 (2) 的结果。把线性变换（4）叫做线性变换（2）和（3）的乘积，相应地把线性变换（4）对应的矩阵定义为线性变换（2）与（3）所对应矩阵的乘积，即

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

定义 4 (矩阵乘法). 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

则 A 与 B 之乘积 AB（记为 $C=(c_{ij})$）为 $m\times s$ 矩阵，且

$$c_{ij}=c_{i1}b_{1j}+c_{i2}b_{2j}+\cdots+c_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

注 5. 两个矩阵 A 与 B 相乘有意义的前提是 A 的列数等于 B 的行数。

例 2.1. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$

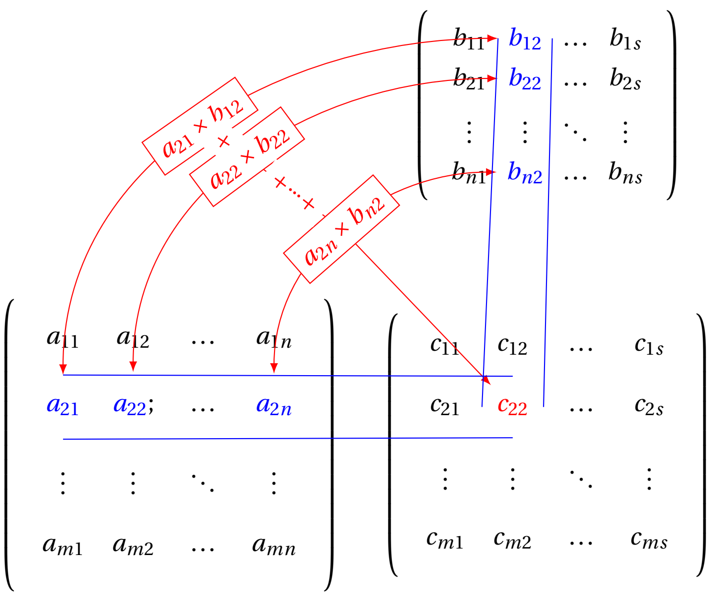


图 2: 矩阵乘法示意图

解.

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1\times5+2\times(-5)+(-1)\times6 & 1\times6+2\times(-6)+(-1)\times0\\(-1)\times5+3\times(-5)+4\times6 & (-1)\times6+3\times(-6)+4\times0\\1\times5+1\times(-5)+1\times6 & 1\times6+1\times(-6)+1\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & -6\\4 & -24\\6 & 0\end{pmatrix}$$

例 2.2. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解.

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

例 2.3. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & a\\-a & -a\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b & -b\\-b & b\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解.

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ -2ab & -2ab \end{pmatrix}$$

由以上例题可以看出一些结论:

1 矩阵乘法不满足交换律。

若 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$，则称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不可交换。

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，则称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换。

2 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0} \nRightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$且$\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0} \xRightarrow{\text{有可能}} \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$

3 矩阵乘法不满足消去律，即当 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ 时，

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \nRightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，即 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}; \quad \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}.$$

矩阵乘法的运算律:

(i) 结合律

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

(ii) 数乘结合律

$$k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$$

(iii) 左结合律

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$$

右结合律

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$$

2.4 一些特殊矩阵及其运算

定义 5 (单位矩阵与数量矩阵). *1* 主对角元全为 *1*，其余元素全为零的 n 阶方阵，称为 n 阶单位矩阵，记为 $\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2 主对角元全为非零数 k，其余元素全为零的 n 阶方阵，称为 n 阶数量矩阵，记为 $k\boldsymbol{I}_n, k\boldsymbol{I}, k\boldsymbol{E}$

$$k\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$$

注 6. 1 单位阵在矩阵乘法中的作用相当于数 1 在数的乘法中的作用。

2 一些等式：

$$(k\boldsymbol{I})\boldsymbol{A} = k(\boldsymbol{IA}) = k\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{I}) = k(\boldsymbol{AI}) = k\boldsymbol{A}.$$

定义 6 (对角矩阵)**.** 非对角元皆为零的 n 阶方阵称为 n 阶对角矩阵，记作 $\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

或记作 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

注 7. 1 用对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，就是用 $\lambda_i (i = 1, \cdots, n)$ 乘 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行的每个元素；

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 用对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，就是用 $\lambda_i (i = 1, \cdots, n)$ 乘 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 列的每个元素，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义 7 (三角矩阵)**.** 1 主对角线以上的元素全为零的 n 阶方阵称为上三角矩阵（$a_{ij} = 0,\ i > j$）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 主对角线以下的元素全为零的 n 阶方阵称为下三角矩阵（$a_{ij} = 0,\ i < j$）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例 2.4. 证明：两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵。

证明. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令 $C=AB=(c_{ij})$，则当 $i>j$ 时，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}\underbrace{a_{ik}}_{\Downarrow\atop 0}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\underbrace{b_{kj}}_{\Downarrow\atop 0}=0.$$

□

注 8. 两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{2n}x_n=b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

第 i 个方程可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

因此上述线性方程组可表示为

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b},\quad Ax=b.$$

定理 1. 设 A,B 是两个 n 阶方阵，则

$$|AB|=|A||B|.$$

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$, 则

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_1+a_{1i}r_{n+i}}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

仿照上述步骤，可将行列式的左上角元素全消为零，即得

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{I} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n|\boldsymbol{AB}||-\boldsymbol{I}_n| = (-1)^n|\boldsymbol{AB}|(-1)^n \\ &= |\boldsymbol{AB}|. \end{aligned}$$

□

例 2.5. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式。证明：当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证明. 设 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}|\boldsymbol{A}|$$

于是

$$\boldsymbol{AA}^*=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & & & \\ & |\boldsymbol{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_n,$$

因此，

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{AA}^*|=|\boldsymbol{A}|^n,$$

由于 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. □

定义 8 (矩阵幂). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，记作 $\boldsymbol{A}^k$，即

$$\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{A}\ \cdots\ \boldsymbol{A}}_{k}$$

矩阵幂的运算律：

1 当 m,k 为正整数时，

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}^{m+k}, \quad (\boldsymbol{A}^m)^k = \boldsymbol{A}^{mk}.$$

2 当 $\boldsymbol{AB}$ 不可交换时，一般情况下，

$$(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$$

3 当 $\boldsymbol{AB}$ 可交换时，

$$(\boldsymbol{AB})^k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{B}^k\boldsymbol{A}^k.$$

定义 9 (矩阵多项式). 设 $f(x) = a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 是 x 的 k 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$f(\boldsymbol{A}) = a_k\boldsymbol{A}^k + a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{I}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次多项式。

注 9. *1* 若 $f(x), g(x)$ 为多项式，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆是 n 阶矩阵，则

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A}).$$

2 当 $\boldsymbol{AB}$ 不可交换时，一般

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B}) \neq g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A})$$

3 矩阵的转置、对称矩阵

定义 10 (转置矩阵). 把一个 $m \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到的一个 $n \times m$ 矩阵，称之为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^T$ 或 $\boldsymbol{A}'$，即

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

定理 2 (矩阵转置的运算律). *(i)* $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

(iii) $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$

(iv) $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

证明. 只证 (iv)。设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s},\boldsymbol{A}^T=(a^T_{ij})_{n\times m},\boldsymbol{B}^T=(b^T_{ij})_{s\times n}$，注意到

$$a_{ij}=a^T_{ji},b_{ij}=b^T_{ji},$$

有

$$(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T)_{ji}=\sum_{k=1}^{n}b^T_{jk}a^T_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=(\boldsymbol{AB})_{ij}=(\boldsymbol{AB})^T_{ji},$$

于是 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$. □

定义 11 (对称矩阵、反对称矩阵). 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个 n 阶矩阵。

1 如果

$$a_{ij}=a_{ji},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵;

2 如果

$$a_{ij}=-a_{ji},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵。

注 10. 关于对称矩阵与反对称矩阵，有如下性质:

1. $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$;
2. $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$;
3. 反对称矩阵的主对角元全为零。
4. 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。
5. 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

   设 $\boldsymbol{A}$ 为一 n 阶方阵，则

   $$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}+\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}$$

   容易验证 $\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}$ 为对称阵，$\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}$ 为反对称阵。
6. 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

   若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 对称的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}$ 可交换。

例 3.1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ 都是对称矩阵。

证明.

$$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^T=\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A},\quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^T=(\boldsymbol{A}^T)^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$$

□

例 3.2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 为 n 阶反对称矩阵。

证明.

$$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^T=(\boldsymbol{AB})^T+(\boldsymbol{BA})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A})+(-\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}).$$

□

4 逆矩阵

给定一个从 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{y}$ 的线性变换

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 左乘 (5)，得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}.$$

当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，有

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}.$$

记

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,$$

则上式可记为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}, \tag{6}$$

它表示一个从 $\boldsymbol{y}$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的线性变换，称为线性变换 (5) 的逆变换。

注 11. *$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系：*

1. *将 (6) 代入 (5)*

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{y}$$

可见 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为恒等变换对应的矩阵，故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}.$$

2. *将 (5) 代入 (6)*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

可见 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 为恒等变换对应的矩阵，故

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

定义 12 (逆矩阵)**.** *对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果有一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并把 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。

注 12. *1. 可逆矩阵与其逆矩阵为同阶方阵。*

2. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 地位相等，也可称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵。

定理 3. *若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵惟一。*

证明. □

$\boldsymbol{A}$ 的矩阵记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

定理 4. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

证明. □

定义 13. 代数余子式矩阵，伴随矩阵 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$ 为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，称

$$\mathrm{coef}\boldsymbol{A}=(A_{ij})_{n\times n}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式矩阵，并称 $\mathrm{coef}\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^*$，即

$$\boldsymbol{A}^*=(\mathrm{coef}\boldsymbol{A})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

之前已证

$$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$$

同理可证

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$$

定理 5. 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

证明. □

该定理提供了求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的一种方法。

推论 1. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$（或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$），则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

证明. □

该推论告诉我们，判断 $\boldsymbol{B}$ 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的逆，只需验证 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$ 的一个等式成立即可。

定义 14 (奇异阵与非奇异阵)**.** 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵。

注 13. 可逆矩阵就是非奇异矩阵。

定理 6. 可逆矩阵有如下运算规律：

1 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}.$$

2 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$k\neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}A^{-1}.$$

3 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵且均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

若 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 皆可逆，则

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1} = \boldsymbol{A}_m^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$$

4 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^T$ 亦可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T.$$

5 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}.$$

例 4.1. 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解.

$$|\boldsymbol{A}| = ad - bc, \quad |\boldsymbol{A}^*| = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1 当 $|\boldsymbol{A}| = ad - bc = 0$ 时，逆阵不存在；

2 当 $|\boldsymbol{A}| = ad - bc \neq 0$ 时，

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例 4.2. 求方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆阵。

解. $|\boldsymbol{A}| = 2$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。计算 $\boldsymbol{A}$ 的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11} = 2 & M_{12} = 3 & M_{13} = 2 \\ M_{21} = -6 & M_{22} = -6 & M_{23} = -2 \\ M_{31} = -4 & M_{32} = -5 & M_{33} = -2 \end{array}$$

$$\mathrm{coef}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 4.3. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程

$$\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} - 10\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0},$$

证明：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}$ 都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明.

$$A^2-3A-10I=0 \Rightarrow A(A-3I)=10I \Rightarrow A\left[\frac{1}{10}(A-3I)\right]=I$$

故 A 可逆，且$A^{-1}=\dfrac{1}{10}(A-3I)$.

$$A^2-3A-10I=0 \Rightarrow (A+I)(A-4I)=6I \Rightarrow \frac{1}{6}(A+I)(A-4I)=I$$

故 $A-4I$ 可逆，且$(A-4I)^{-1}=\dfrac{1}{6}(A+I)$.

□

例 4.4. 证明：可逆对称矩阵的逆矩阵仍为对称矩阵；可逆反对称矩阵的逆矩阵仍为反对称矩阵。

例 4.5. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为非零实矩阵，证明：若 $A^*=A^T$，则 A 可逆。

证明. 欲证 A 可逆，只需证 $|A|\neq 0$。

由 $A^*=A^T$ 及 A^* 的定义可知，A 的元素 a_{ij} 等于自身的代数余子式 A_{ij}。

再根据行列式的按行展开定义，有

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

由于 A 为非零实矩阵，故 $|A|\neq 0$，即 A 可逆。 □

例 4.6. 设 A 可逆，且 $A^*B=A^{-1}+B$，证明 B 可逆，当 $A=\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}$ 时，求 B.

解.

$$A^*B=A^{-1}+B \Rightarrow (A^*-I)B=A^{-1} \Rightarrow |A^*-I|\cdot|B|=|A^{-1}|\neq 0$$

故 B 与 A^*-I 可逆。

$$B=(A^*-I)^{-1}A^{-1}=[A(A^*-I)]^{-1}=(AA^*-A)^{-1}=(|A|I-A)^{-1}.$$

其中

$$|A|I-A=\begin{pmatrix}8&&\\&8&\\&&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

易算得

$$B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例 4.7. 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵，证明：

(1). $(AB)^*=B^*A^*$

(2). $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

证明. (1) 由 $|AB|=|A||B|\neq 0$ 可知 AB 可逆，且有 $(AB)(AB)^*=|AB|I$。故

$$\begin{aligned}(AB)^* &=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}\\ &=|B|B^{-1}|A|A^{-1}=B^*A^*.\end{aligned}$$

(2) 由 $(\boldsymbol{A}^*)^*\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{I}$，得

$$(\boldsymbol{A}^*)^*|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = |\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{I}$$

两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

□

例 4.8. 设 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\Lambda}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解.

$$|\boldsymbol{P}| = 2, \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}, \quad \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1} = \boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{P}^{-1}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}.$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^n = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.$$

结论 1. 令

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m.$$

(i) 若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，从而

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A}) &= a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m \\ &= \boldsymbol{P}a_0\boldsymbol{IP}^{-1} + \boldsymbol{P}a_1\boldsymbol{\Lambda P}^{-1} + \cdots + \boldsymbol{P}a_m\boldsymbol{\Lambda}^m\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}.\end{aligned}$$

(ii) 若 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为对角阵，则 $\boldsymbol{\Lambda}^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$，从而

$$\begin{aligned}&\varphi(\boldsymbol{\Lambda}) = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{\Lambda} + \cdots + a_m\boldsymbol{\Lambda}^m \\ &= a_0\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} + \cdots + a_m\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

5 矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行；

(ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，分别称为

(i) 对换变换 $r_i \leftrightarrow r_j$；

(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$；

(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$。

对应的还有初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

三种初等变换都是可逆的，

初等变换	逆变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	$r_i \div k$
$r_i + r_j \times k$	$r_i - r_j \times k$

表 1: 初等变换及其逆变换

定义 15 (矩阵的等价). *(i) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价，记为 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$；*

(ii) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价，记为 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$；

(iii) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。

性质 1. *矩阵的等价满足以下三条性质：*

(i) 反身性：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$；

(ii) 对称性：若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$；

(iii) 传递性：若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$。

定义 16 (初等矩阵). *将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵。对应于 3 类初等行、列变换，有 3 种类型的初等矩阵。*

以下介绍三种初等矩阵：

1. 初等对调矩阵；
2. 初等倍乘矩阵；
3. 初等倍加矩阵。

1、对调 $\boldsymbol{I}$ 的两行或两列（初等对调矩阵）
a、用 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 左乘 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，得 相当于 把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对调（$r_i \leftrightarrow r_j$）.
b、用 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得
相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列对调（$c_i \leftrightarrow c_j$）.
2、以非零常数 k 乘 $\boldsymbol{I}$ 的某行或某列（初等倍乘矩阵）
a、以 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，得 相当于以数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行（$r_i \times k$）；
b、以 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得
相当于以数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列（$c_i \times k$）。

$$
E_{ij} = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 0 & \cdots & 1 & & \\
& & & 1 & & & \\
& & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
& & & 1 & & & \\
& & 1 & \cdots & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{matrix}
\\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\
\end{matrix}
\\
\quad \text{第 } i \text{ 列} \qquad \text{第 } j \text{ 列} &
\end{array}
$$

$$
E_{ij}A = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
&
\begin{matrix}
\\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\
\end{matrix}
\end{array}
$$

$$
AE_{ij} = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\\
\text{第 } i \text{ 列} \quad \text{第 } j \text{ 列}
\end{array}
$$

$$
E_i(k) = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & k & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{matrix}
\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{matrix}
\\
\text{第 } i \text{ 列} &
\end{array}
$$

$$
E_i(k)A = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
&
\begin{matrix}
\\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\
\end{matrix}
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{AE}_i(k)=\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{jn}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{m1} & \cdots & ka_{mi} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}\\
\text{第 } i \text{ 列}
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{E}_{ij}(k)=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & k & & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{AE}_{ij}=\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+ka_{1i} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j}+ka_{2i} & \cdots & a_{jn}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj}+ka_{mi} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}\\
\text{第 } i \text{ 列} \qquad \text{第 } j \text{ 列}
\end{array}
$$

3、将非零常数 k 乘 $\boldsymbol{I}$ 的某行再加到另一行上（初等倍加矩阵）

a、以 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，得 相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以数 k 加到第 i 行上（$r_i + r_j \times k$）；

b、以 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以数 k 加到第 j 列上（$c_j + c_i \times k$）。

定理 7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m \times n$ 矩阵，

- 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；
- 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

练习 1. 请自行补充以下变换的具体含义：

$\boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_i(k)$:

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k)$:

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$:

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换为其本身可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$$

(ii) 由变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \div k$可知

$$\boldsymbol{E}_i(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_i(k^{-1})$$

(iii) 由变换 $r_i + r_j \times k$ 的逆变换为 $r_i - r_j \times k$可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}(-k)$$

以上结论也可总结为

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{E}_i(k^{-1}) = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{E}_{ij}(-k) = \boldsymbol{I}.$$

例 5.1. 设初等矩阵

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)^{-1}$

解.

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解 (续)**.** 因

$$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)^{-1} = \boldsymbol{P}_3^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}$$

而

$$\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_1,\quad \boldsymbol{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_3^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

例 5.2. 将三对角矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 分解成主对角元为 1 的下三角矩阵 $\mathbf{L}$ 和上三角阵 $\mathbf{U}$ 的乘积 $\boldsymbol{A} = \mathbf{LU}$（称为矩阵的 LU 分解）。

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

解 (续)**.** 将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\boldsymbol{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{LU},$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc:c} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1} \\ &= \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

定理 8. 可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明. 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵，即其中 $c_{ii} = 1\ (i = 1, 2, \cdots, r)$。 □

续. 因此，对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \mathbf{U}.$$

当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而 $\mathbf{U}$ 必为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$. □

推论 2. 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明. 由上述定理，必存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1)^{-1} = \boldsymbol{P}_1^{-1} \boldsymbol{P}_2^{-1} \cdots \boldsymbol{P}_s^{-1},$$

亦即

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

□

推论 3. 如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与同阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换，那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

注 14. 该推论给出了求可逆矩阵的逆的一种有效方法，请大家熟练掌握。

例 5.3. 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解.

$$\left(A \,\middle|\, I \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_1 + r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例 5.4. 已知 $ABA^T = 2BA^T + I$，求 B，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解.

$$ABA^T = 2BA^T + I \quad \Rightarrow \quad (A - 2I)BA^T = I \quad \Rightarrow \quad BA^T = (A - 2I)^{-1}$$

故

$$B = (A - 2I)^{-1}(A^T)^{-1} = [A^T(A - 2I)]^{-1} = (A^TA - 2A^T)^{-1}$$

而

$$A^TA - 2A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

推论 4. 对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组 $Ax = b$，如果增广矩阵

$$(A,\ b) \overset{r}{\sim} (I, x),$$

则 A 可逆，且 $x = A^{-1}b$ 为惟一解。

例 5.5. 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad b_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求 $Ax=b_1$ 与 $Ax=b_2$ 的解。

解.

$$(A\quad b_1\quad b_2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\ r_2\div 5\\ r_3+3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例 5.6. 求解矩阵方程 $AX=A+X$，其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解. 原方程等价于

$$(A-I)X=A$$

而

$$(A-I\quad A)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}\overset{\substack{r_3+4r_2\\ r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\ r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例 5.7. 当 a,b 满足什么条件时，矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 不可逆。

解.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{r_2+r_1\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\times(-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知 $\boldsymbol{A}$ 不可逆的条件是 $(a-1)b=0$。

6 矩阵分块

矩阵 可记为

$$\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{A}_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

定义 17 (矩阵的按行分块).

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in})$$

定义 18 (矩阵的按列分块).

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1, & \boldsymbol{b}_2, & \cdots, & \boldsymbol{b}_s \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc:ccc:c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

其中

$$\boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

当 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中非零元素都集中在主对角线附近，有时可分块成如下对角块矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 r_i 阶方阵 $(i=1,2,\cdots,m)$，且

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n.$$

如

定义 19 (分块矩阵的加法)**.** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 为同型矩阵，则

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

定义 20 (分块矩阵的数乘)**.**

$$\lambda \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}$$

定义 21 (分块矩阵的乘法)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n \times s$ 矩阵,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{is}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{sj}$ 的行数，则

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rt} \end{pmatrix},$$

其中

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj}.$$

例 6.1. 用分块矩阵的乘法计算 AB，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\-1&2&1&0&0\\1&1&0&1&0\\-2&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&2&0&1&0\\1&3&0&0&1\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\hline -1&2&1&0&0\\1&1&0&1&0\\-2&0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}I_2&0_{2\times3}\\A_1&I_3\end{pmatrix}$$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|cc}3&2&0&1&0\\1&3&0&0&1\\\hline -1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_1&I_2\\-I_3&0_{3\times2}\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}I_2&0\\A_1&I_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&I_2\\-I_3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1&I_2\\A_1B_1-I_3&A_1\end{pmatrix}$$

其中

$$A_1B_1-I_3=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&0\\1&3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&0\\4&4&0\\-6&-4&-1\end{pmatrix}$$

例 6.2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，B 按列分块成 $1\times s$ 分块矩阵，将 A 看成 1×1 分块矩阵，则

$$AB=A(b_1,b_2,\cdots,b_s)=(Ab_1,Ab_2,\cdots,Ab_s)$$

若已知 $AB=0$，则显然

$$Ab_j=0,\quad j=1,2,\cdots,s.$$

因此，B 的每一列 b_j 都是线性方程组 $Ax=0$ 的解。

例 6.3. 设 $A^TA=0$，证明 $A=0$.

证明. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，把 A 用列向量表示为 $A=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$，则

$$A^TA=\begin{pmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\cdots\\a_n^T\end{pmatrix}(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=\begin{pmatrix}a_1^Ta_1&a_1^Ta_2&\cdots&a_1^Ta_n\\a_2^Ta_1&a_2^Ta_2&\cdots&a_2^Ta_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n^Ta_1&a_n^Ta_2&\cdots&a_n^Ta_n\end{pmatrix}$$

因为 $A^TA=\mathbf{0}$，故

$$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{a}_j=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{a}_j=0,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0\ \Rightarrow\ a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}=\mathbf{0}.$$

□

例 6.4. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 可以分块成同型对角块矩阵，即

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1&&&\\&\boldsymbol{C}_2&&\\&&\cdots&\\&&&\boldsymbol{C}_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_1&&&\\&\boldsymbol{D}_2&&\\&&\cdots&\\&&&\boldsymbol{D}_m\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}_i$ 和 $\boldsymbol{D}_i$ 为同阶方阵（$i=1,2,\cdots,m$），则

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{D}_1&&&\\&\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{D}_2&&\\&&\cdots&\\&&&\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{D}_m\end{pmatrix}$$

例 6.5. 证明：若方阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的上三角阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为上三角阵。

证明. 对阶数 n 用数学归纳法。

1 当 $n=1$ 时，$(a)^{-1}=(\frac{1}{a})$，结论成立。

2 假设命题对 $n-1$ 阶可逆上三角矩阵成立，考虑 n 阶情况，设

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:cccc}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\ \hdashline 0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\cdots&a_{nn}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}a_{11}&\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0}&\boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为 $n-1$ 阶可逆上三角阵。

□

续. 设 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}&\boldsymbol{B}_1\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_{12}\\ \vdots\\ b_{1n}\end{pmatrix}^T,\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}b_{21}\\ \vdots\\ b_{n1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}b_{22}&\cdots&b_{2n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix},$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & B_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\gamma} & a_{11}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}B_1 \\ A_1\boldsymbol{\gamma} & A_1B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

□

续. 于是

$$A_1\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0},$$

$$A_1B_1 = I_1 \Rightarrow B_1 = A_1^{-1}.$$

由归纳假设，B_1 为 $n-1$ 阶上三角矩阵，因此

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} & B_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。 □

定义 22 (分块矩阵的转置). 分块矩阵 $A = (A_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵为

$$A^T = (B_{lk})_{t\times s},$$

其中 $B_{lk} = A_{kl}$.

例 6.6.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$$

$$B \xlongequal{\text{按行分块}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^T & \boldsymbol{b}_2^T & \cdots & \boldsymbol{b}_m^T \end{pmatrix}$$

定义 23 (可逆分块矩阵的逆矩阵). 对角块矩阵（准对角矩阵）

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

的行列式为 $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_m|$，因此，$A$ 可逆的充分必要条件为

$$|A_i| \neq 0, \quad i = 1,2,\cdots,m.$$

其逆矩阵为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{-1} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的作用：

- 用分块矩阵求逆矩阵，可将高阶矩阵的求逆转化为低阶矩阵的求逆。
- 一个 2×2 的分块矩阵求逆，可以根据逆矩阵的定义，用解矩阵方程的方法解得。

例 6.7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 皆为可逆矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解. 因 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{D}|\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。设 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{BX} & \boldsymbol{BY} \\ \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DT} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{I} && \Rightarrow\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^{-1} \\ &\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0} && \Rightarrow\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0} \\ &\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DZ}=\boldsymbol{0} && \Rightarrow\ \boldsymbol{Z}=-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1} \\ &\boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DT}=\boldsymbol{I} && \Rightarrow\ \boldsymbol{T}=\boldsymbol{D}^{-1} \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

定义 24 (分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵)**.** 对于分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

同样可以定义它的 *3* 类初等行变换与列变换，并相应地定义 *3* 类分块矩阵：

(i) 分块倍乘矩阵（$\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2$ 为可逆阵）

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2 \end{pmatrix}$$

(ii) 分块倍加矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{C}_4 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$$

(iii) 分块对换矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

例 6.8. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{22}$ 为方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆。证明：$\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解. 构造分块倍加矩阵

$$P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$$

则

$$P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式可知

$$|A| = |P_1 A| = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

故 $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 可逆。

解 (续)**.**

$$P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} \xlongequal{Q = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$P_2 = \begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

则

$$P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 + A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{12}Q^{-1} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1} \\ -Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 6.9. 设 $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，且 A 可逆，证明：

$$|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$$

证明. 构造分块倍加矩阵

$$P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -CA^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$$

则

$$P_1 Q = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得

$$|Q| = |P_1 Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

□

例 6.10. 设 A 与 B 均为 n 阶分块矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| \; |A - B|$$

证明. 将分块矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

总之有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得结论。 □