线性代数

行列式

▷▷

张晓平

武汉大学数学与统计学院

◁◁

2017 年 10 月 10 日

目录

行列式出现于线性方程组的求解，它最早是一种速记的表达式，现在已经是数学中一种非常有用的工具。

- 行列式是由莱布尼茨和日本数学家关孝和分别发明的。
  - 1683 年，日本数学家关孝和在其著作《解伏题之法》中也提出了行列式的概念与算法。《解伏题之法》的意思就是“解行列式问题的方法”，书里对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述。
  - 1693 年 4 月，莱布尼茨在写给洛比达的一封信中使用并给出了行列式，并给出方程组的系数行列式为零的条件。
- 1750 年，瑞士数学家克莱姆在其著作《线性代数分析导引》中，对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述，并给出了现在我们所称的解线性方程组的克莱姆法则。

- 在行列式的发展史上，第一个对行列式理论做出连贯的逻辑的阐述，即把行列式理论与线性方程组求解相分离的人，是法国数学家范德蒙。他给出了用二阶子式和它们的余子式来展开行列式的法则，就对行列式本身这一点来说，他是这门理论的奠基人。

  范德蒙自幼在父亲的指导下学习音乐，但对数学有深厚的兴趣，后来终于成为法兰西科学院院士。

- 1772 年，拉普拉斯在一篇论文中证明了范德蒙提出的一些规则，推广了他的展开行列式的方法。

- 继范德蒙之后，在行列式的理论方面，又一位做出贡献的就是另一位法国大数学家柯西。1815 年，柯西在一篇论文中给出了行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理。其中主要结果之一是行列式的乘法定理。另外，他第一个把行列式的元素排成方阵，采用双足标记法；引进了行列式特征方程的术语；给出了相似行列式的概念；改进了拉普拉斯的行列式展开定理并给出了一个证明等。

1. 行列式简介
2. 行列式的定义
   - 二阶行列式
   - 三阶行列式
   - n 阶行列式的定义
3. 行列式的性质
4. 行列式的计算
5. 克莱姆法则

例 3.1　用消元法求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

例 3.1 用消元法求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

解 消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{11}.$$

例 3.1 用消元法求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

解 消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{11}.$$

若 $\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0}$，则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

定义 1 (二阶行列式) 由 $2^2=4$ 个数，按下列形式排成 2 行 2 列的方形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

其被定义成一个数

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \equiv D,$$

该数称为由这四个数构成的二阶行列式。其中，

- a_{ij} 表示行列式的元素。
- i 为行标，表明该元素位于第 i 行；
- j 为列标，表明该元素位于第 j 列。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图: 对角线法则

类似地，

$$b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \equiv D_1$$

$$b_2 a_{11} - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \equiv D_2$$

则上述方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 3.2　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

例 3.2 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

因此,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -3.$$

定义 2 (三阶行列式) 由 $3^2=9$ 个数组成的 3 行 3 列的三阶行列式，则按如下形式定义一个数

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

定义 2 (三阶行列式) 由 $3^2=9$ 个数组成的 3 行 3 列的三阶行列式，则按如下形式定义一个数

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

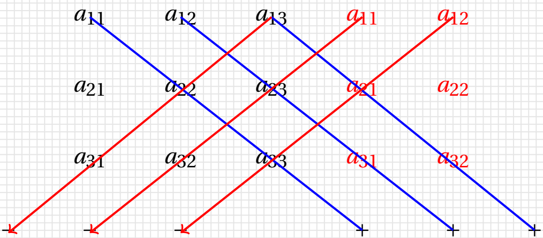

图: 沙路法

例 3.3 计算

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

例 3.3 计算

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解 由沙路法可知，

$$\begin{aligned} D_3 \quad &= 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-2) \times 4 \times (-4) \\ &-2 \times (-2) \times (-2) - (-4) \times 2 \times (-3) + 1 \times 1 \times 4 \\ &= -14. \end{aligned}$$

例 3.4　求方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

例 3.4 求方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

解 行列式

$$D = 3x^2 + 18 + 4x - 2x^2 - 12 - 9x = x^2 - 5x + 6$$

由此可知 $x = 2$ 或 3。

如果三元一次方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{aligned}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

则用消元法求解可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

从二、三阶行列式的展开式中可发现:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{33} \\ a_{23} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{11}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{13}}$$

这里，M_{11}, M_{12}, M_{13} 分别称为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的余子式，并称

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}$$

分别称为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式。于是，D 可表示为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{11}A_{13} + a_{13}A_{13}.$$

同样地，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

其中

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = a_{22}, \quad A_{11} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -a_{21}.$$

注意这里的 $|a_{22}|$, $|a_{21}|$ 是一阶行列式，而不是绝对值。我们把一阶行列式 $|a|$ 定义为 a。

定义 3 (n 阶行列式) 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

是一个数。

- 当 $n=1$ 时，定义 $D=|a_{11}|=a_{11}$；
- 当 $n\geq 2$ 时，定义

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \tag{2}$$

其中

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

而 M_{1j} 是 D 中划去第 1 行第 j 列后，按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

并称 M_{1j} 为 a_{1j} 的余子式，A_{1j} 为 a_{1j} 的代数余子式.

注 1　需注意以下两点：

1 在 D 中，$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的主对角线，$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为主对角元。

2 行列式 D 是由 n^2 个元素构成的 n 次齐次多项式：

- 二阶行列式的展开式有 $2!$ 项；
- 三阶行列式的展开式有 $3!$ 项；
- n 阶行列式的展开式有 $n!$ 项，其中每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积，带正号的项与带负号的项各占一半。

由行列式的定义可知，一个 n 阶行列式可以展开成 n 个 n 阶行列式之和，即

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ \cdots \\
&+ \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

例 3.5 证明：n 阶下三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明. 用数学归纳法证明。

1. 当 $n = 2$ 时，结论成立。

证明. 用数学归纳法证明。

1. 当 $n=2$ 时，结论成立。
2. 假设结论对 $n-1$ 阶下三角阵成立，则由定义

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}).\end{aligned}$$

综上所述，结论成立。 □

同理可证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 3.6 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix}$$

解　由行列式定义,

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} a_n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1}.
\end{aligned}
$$

解 由行列式定义,

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} a_n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1}.$$

同理递推,

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} = (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} \\ &\quad \cdots\cdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1. \end{aligned}$$

解 由行列式定义，

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} a_n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1}.$$

同理递推，

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} = (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} \\ &\cdots\cdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1. \end{aligned}$$

例如，

$$D_2 = -a_1 a_2, \quad D_3 = -a_1 a_2 a_3, \quad D_4 = a_1 a_2 a_3 a_4, \quad D_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5.$$

性质 1　互换行列式的行与列，值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

证明. 将等式两端的行列式分别记为 D 和 D'，对阶数 n 用归纳法。

证明. 将等式两端的行列式分别记为 D 和 D'，对阶数 n 用归纳法。

(1) 当 $n=2$ 时，$D=D'$ 显然成立。

证明. 将等式两端的行列式分别记为 D 和 D'，对阶数 n 用归纳法。

(1) 当 $n=2$ 时，$D=D'$ 显然成立。

(2) 假设结论对于阶数小于 n 的行列式都成立，以下考虑阶数为 n 的情况。由定义可知，

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

$$D' = a_{11}A'_{11} + a_{21}A'_{21} + \cdots + a_{n1}A'_{n1}$$

显然，$A_{11} = A'_{11}$。

于是

$$D' = a_{11}A_{11} + (-1)^{1+2}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{42} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{1+n}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n-1,2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

对上式中的 $n-1$ 个行列式按第一行展开，并将含 a_{12} 的项进行合并，可得

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{1+2}a_{21}a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{31}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\qquad + \cdots + (-1)^{1+n}a_{n1}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \\
&= -a_{12}\left((-1)^{1+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{31}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right. \\
&\qquad \left. + \cdots + (-1)^{1+n-1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2,n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}\right) \\
&= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -a_{12}M'_{12} = a_{12}A'_{12} = a_{12}A_{12}.
\end{aligned}
$$

同理，含 a_{13} 的项合并后其值等于 $a_{13}A_{13}$，$\cdots$，含 a_{1n} 的项合并后其值等于 $a_{1n}A_{1n}$. 因此，$D=D'$. $\square$

注 2　有了这个性质，行列式对行成立的性质都适用于列。

性质 2 行列式对任一行按下式展开，其值相等，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

而 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

证明. 对 n 用归纳法证明。

证明. 对 n 用归纳法证明。

(1) 当 $n=2$ 时，结论显然成立。

证明. 对 n 用归纳法证明。

(1) 当 $n=2$ 时，结论显然成立。

(2) 假设结论对阶数 $\leq n-1$ 的行列式成立，以下考虑阶数为 n 的情况。

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

由归纳假设，按第 i 行展开后合并含 a_{i1} 的项得，

$$(-1)^{(i-1)+1}a_{i1}\left((-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right.$$

$$+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$\left.+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n-1} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}\right)$$

即

$$(-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} = a_{i1}A_{i1}.$$

同理可证，含 a_{i2} 的项合并后其值为 $a_{i2}A_{i2}$，$\cdots$，含 a_{in} 的项合并后其值为 $a_{in}A_{in}$.

性质 3 (线性性质)

1 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

2 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，如

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

注 3 一些记号:

- $r_i \times k$ ($c_i \times k$): 第 i 行（列）乘以 k
- $r_i \div k$ ($c_i \div k$): 第 i 行（列）提取公因子 k

定义 4 (反对称行列式) 如果行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 的元素满足

$$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

就称 D 是**反对称行列式**。其中

$$a_{ii}=-a_{ii}\Rightarrow a_{ii}=0.$$

例 4.1 证明：奇数阶反对称行列式的值为 0.

例 4.1　证明：奇数阶反对称行列式的值为 0.

证明.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 1}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{将每行提取公因子 } -1]{\text{性质 3-1}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D.$$

由于 n 为奇数，故 $D=-D$，从而 $D=0$. □

推论 1 若行列式的某行元素全为 0，其值为 0.

推论 1　若行列式的某行元素全为 0，其值为 0.

例 4.2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 4 若行列式有两行（列）完全相同，其值为 0.

性质 4 若行列式有两行（列）完全相同，其值为 0.

例 4.3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

证明. 不妨设 D 的第 i 和 j 行元素全部相等，即对

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有 $a_{il} = a_{jl}(i \neq j, l = 1, 2, \cdots, n)$. 对阶数 n 用数学归纳法。

证明. 不妨设 D 的第 i 和 j 行元素全部相等，即对

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有 $a_{il} = a_{jl}(i \neq j, l = 1, 2, \cdots, n)$. 对阶数 n 用数学归纳法。

- 当 $n = 2$ 时，结论显然成立。

证明. 不妨设 D 的第 i 和 j 行元素全部相等，即对

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有 $a_{il} = a_{jl} (i \neq j, l = 1, 2, \cdots, n)$. 对阶数 n 用数学归纳法。

- 当 $n = 2$ 时，结论显然成立。
- 假设结论对阶数为 $n-1$ 的行列式成立，在 n 阶的情况下，对第 $k (k \neq i, j)$ 行展开，有

$$D = a_{k1} A_{k1} + a_{k2} A_{k2} + \cdots + a_{kn} A_{kn}.$$

证明. 不妨设 D 的第 i 和 j 行元素全部相等，即对

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有 $a_{il} = a_{jl} (i \neq j, l = 1, 2, \cdots, n)$. 对阶数 n 用数学归纳法。

- 当 $n = 2$ 时，结论显然成立。
- 假设结论对阶数为 $n-1$ 的行列式成立，在 n 阶的情况下，对第 $k (k \neq i, j)$ 行展开，有

  $$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}.$$

  注意到余子式 $M_{kl} (l = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $n-1$ 阶行列式，且其中有两行元素相同，故

  $$A_{kl} = (-1)^{k+l} M_{kl} = 0 \quad (l = 1, 2, \cdots, n),$$

  从而 $D = 0$.

□

推论 2 若行列式中有两行（列）元素成比例，则行列式的值为 0.

推论 2　若行列式中有两行（列）元素成比例，则行列式的值为 0.

例 4.4

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 5　把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

性质 5　把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

证明.　将数 k 乘以第 j 行加到第 i 行，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5　把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

证明.　将数 k 乘以第 j 行加到第 i 行，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 3-2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

证明. 将数 k 乘以第 j 行加到第 i 行，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{性质 3-2}}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{推论 2}}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

□

注 4 一些记号：

- $r_i + r_j \times k$：将第 j 行乘以 k 加到第 i 行；
- $c_i + c_j \times k$：将第 j 列乘以 k 加到第 i 列。

性质 6 互换行列式的两行（列），行列式变号。

性质 6 互换行列式的两行（列），行列式变号。

证明.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_i+r_j]{\text{性质 5}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_j-r_i]{\text{性质 5}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_i+r_j]{\text{性质 5}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 3-1}} -D.$$

□

注 5 一些记号:

- $r_i \leftrightarrow r_j$: 互换第 i, j 行
- $c_i \leftrightarrow c_j$: 互换第 i, j 列

例 4.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

性质 7　行列式某一行的元素乘以另一行对应元素的代数余子式之和等于 0，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j).$$

证明. 由性质 2，对 D 的第 j 行展开得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}.$$

证明. 由性质 2，对 D 的第 j 行展开得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}.$$

因此，将 D 中第 j 行的元素 $a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}$ 换成 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 后所得的行列式，其展开式就是 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 4}} 0.$$

$\square$

结论 1

- 对行列式 D 按行展开，有

$$\sum_{k=1} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} D,$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克（Kronecker）记号，表示为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

- 对行列式 D 按列展开，有

$$\sum_{k=1} a_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} D,$$

例:

计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

例:

计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

例:

计算

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

例:

计算

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

例:

计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i\div n} n^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} n^{n-1} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i-1}^{n-1}\frac{i}{n} & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n^{n-1}\left[1+\frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right](-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^{n-1} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

例:

计算行列式

$$D_{20}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 18 & 19 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 17 & 18 & 19 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 16 & 17 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 20 & 19 & 18 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

例:

计算行列式

$$D_{20}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 18 & 19 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 17 & 18 & 19 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 16 & 17 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 20 & 19 & 18 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_{20} \xlongequal[i=19,\cdots,1]{c_{i+1}-c_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 20 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,20]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 21 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 21\times(-1)^{20+1}\times 2^{18} = -21\times 2^{18}.$$

例:

计算元素为 $a_{ij} = |i - j|$ 的 n 阶行列式。

例:

计算元素为 $a_{ij}=|i-j|$ 的 n 阶行列式。

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n-1,\cdots,1]{c_{i+1}-c_i}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i+r_1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

例:

计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots\vdots & & & \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

例:

计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解

$$D \overset{r_1-r_i}{\underset{i=2,\cdots,n}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=2}^{n} i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \left(1-\sum_{i=2}^{n} i\right)\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n = \left[2-\frac{(n+1)n}{2}\right] n!$$

如何计算“爪形”行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其解法固定，即从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。

请自行验证以下行列式（假定 $a_i \neq 0$）

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right) a_1 a_2 \cdots a_n .$$

类似的方式还可用于求解如下形式的“爪型行列式”

(a) (b) (c)

例:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! \left(1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}\right)$$

例:

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解法 1

$$D_n \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1 \div [x+(n-1)a]} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

解法 2:

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\,(x-a)^{n-1}.$$

解法 3

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{n+1} \xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{n+1}$$

- 若 $x = a$，则 $D_n = 0$。
- 若 $x \neq a$，则

$$D_n \xlongequal[j=2,\cdots,n+1]{c_1 + \frac{1}{x-a} c_j} \begin{vmatrix} 1 + \frac{a}{x-a} n & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

解法 4:

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ 0 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}.$$

于是

$$\begin{cases} D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1} \\ (x-a)D_{n-1} = (x-a)^2 D_{n-2} + a(x-a)^{n-1} \\ \cdots \\ (x-a)^{n-4}D_4 = (x-a)^{n-3}D_3 + a(x-a)^{n-1} \\ (x-a)^{n-3}D_3 = (x-a)^{n-2}D_2 + a(x-a)^{n-1} \end{cases}$$

因此

$$D_n = (x-a)^{n-2}(x^2-a^2) + (n-2)a(x-a)^{n-1} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

该行列式经常以不同方式出现，如

- $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$$

- $$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+n)\lambda^{n-1}$$

升阶法适用于求以下形式的行列式:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{x_i - a}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a)$$

或

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i - a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i).$$

注 6　几种常见形式:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \left[a + \frac{n(n+1)}{2}\right] a^{n-1}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = b^{n-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i + b)$$

例:

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明： $D=D_1D_2$.

证明. 对 D_1 做运算 $r_i+\lambda r_j$ 将它转化成下三角行列式，设为

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}.$$

对 D_2 做运算 $c_i+\lambda c_j$ 将它转化成下三角行列式，设为

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}.$$

于是，对 D 的前 k 行做运算 $r_i+\lambda r_j$，对其后 n 列做运算 $c_i+\lambda c_j$，把 D 转化为

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$$

故 $D=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2.$ □

例:

计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$$

解 把 D_{2n} 中的第 $2n$ 行依次与第 $2n-1$ 行、...、第 2 行对调（共 $2n-2$ 次相邻对换），在把第 $2n$ 列依次与第 $2n-1$ 列、...、第 2 列对调，得

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & b & 0 & & & & & 0 \\ c & d & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & c & & & & & d \end{vmatrix}$$

故

$$\begin{aligned} D_{2n} &= D_2 D_{2(n-1)} \\ &= (ad-bc)D_{2(n-1)} \\ &= (ad-bc)^2 D_{2(n-2)} \\ &= \cdots \\ &= (ad-bc)^{n-1} D_2 \\ &= (ad-bc)^n. \end{aligned}$$

例:

证明：范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

证明. 用数学归纳法证明。当 $n=2$ 时,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j),$$

结论成立。

证明. 用数学归纳法证明。当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j),$$

结论成立。现假设结论对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，以下证明结论对 n 阶范德蒙德行列式也成立。

$$D_n \xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i-x_1 r_{i-1}} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

证明. 用数学归纳法证明。当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j),$$

结论成立。现假设结论对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，以下证明结论对 n 阶范德蒙德行列式也成立。

$$D_n\xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i-x_1r_{i-1}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，并把每列的公因子 (x_i-x_1) 提出，就有

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

证明. 用数学归纳法证明。当 $n=2$ 时，

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2\geq i>j\geq 1} (x_i - x_j),$$

结论成立。现假设结论对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，以下证明结论对 n 阶范德蒙德行列式也成立。

$$D_n \xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i - x_1 r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，并把每列的公因子 $(x_i - x_1)$ 提出，就有

$$D_n = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

上式右端的行列式为 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，按归纳法假设，它等于所有 $(x_i - x_j)$ 因子的乘积 $(n \geq i \geq j \geq 2)$。故

$$D_n = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \prod_{n\geq i>j\geq 2} (x_i - x_j) = \prod_{n\geq i>j\geq 1} (x_i - x_j).$$

□

例:

设 a,b,c 为互不相同的实数，证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

的充要条件是 $a+b+c=0$.

证明. 考察范德蒙德行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & y \\ a^2 & b^2 & c^2 & y^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & y^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)(a-y)(b-y)(c-y)$$

注意到行列式 D 可看成是关于 y 的多项式，比较包含 y^2 的项:

$$\cdots - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} y^2 + \cdots = \cdots - (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)y^2 + \cdots$$

于是

$$(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

而 a, b, c 互不相同，故 $a+b+c=0$. □

例:

计算三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}$$

解　对 D_n 按第一行展开

$$D_n = aD_{n-1} + (-1)^{1+2} b \begin{vmatrix} c & b & & & & \\ 0 & a & b & & & \\ 0 & c & a & b & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix} = aD_{n-1} - bcD_{n-2},$$

其中 $D_1 = a,\quad D_2 = a^2 - bc.$ 将

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

改写成

$$D_n - kD_{n-1} = l(D_{n-1} - kD_{n-2})$$

这里

$$k + l = a, \quad kl = bc.$$

令 $\Delta_n = D_n - kD_{n-1}$，它满足

$$\begin{cases} \Delta_n = l\Delta_{n-1}, \\ \Delta_2 = D_2 - kD_1 = a^2 - bc - ka = (a-k)a - kl = la - lk = l^2. \end{cases}$$

由此可知

$$\Delta_n = l^{n-2}\Delta_2 = l^2,$$

即

$$\begin{aligned} D_n &= l^n + kD_{n-1} = l^n + k(l^{n-1} + kD_{n-2}) = l^n + kl^{n-1} + k^2 D_{n-2} \\ &= l^n + kl^{n-1} + k^2(l^{n-2} + kD_{n-3}) = l^n + kl^{n-1} + k^2 l^{n-2} + k^3 D_{n-3} \\ &= \cdots = l^n + kl^{n-1} + k^2 l^{n-2} + \cdots + k^{n-2} l^2 + k^{n-1} D_1 \end{aligned}$$

而 $D_1 = a = k + l$，故

$$D_n = l^n + kl^{n-1} + k^2 l^{n-2} + \cdots + k^{n-2} l^2 + k^{n-1} l + k^n.$$

考察 n 元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{6}$$

与二、三元线性方程组相类似，它的解可以用 n 阶行列式表示。

定理 1 (克莱姆法则)　如果线性方程组 (6) 的系数行列式不等于 0，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组 (6) 存在唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 j 列

证明. **先证存在性**: 将 $x_i = \frac{D_i}{D}$ 代入第 i 个方程，则有

$$
\begin{aligned}
& a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n \\
&= \frac{1}{D}(a_{i1}D_1 + \cdots + a_{ii}D_i + \cdots + a_{in}D_n) \\
&= \frac{1}{D}\big[a_{i1}(b_1A_{11} + \cdots + b_nA_{n1}) + \cdots + a_{ii}(b_1A_{1i} + \cdots + b_nA_{ni}) \\
&\qquad + \cdots + a_{in}(b_1A_{1n} + \cdots + b_nA_{nn})\big] \\
&= \frac{1}{D}\big[b_1(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} \cdots + a_{in}A_{1n}) + \cdots + b_i(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} \cdots + a_{in}A_{in}) \\
&\qquad + \cdots + b_n(a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} \cdots + a_{in}A_{nn})\big] \\
&= \frac{1}{D}b_iD = b_i.
\end{aligned}
$$

再证唯一性：设还有一组解 $y_i, i=1,2,\cdots,n$，以下证明 $y_i = D_i/D$。现构造一个新行列式

$$y_1 D = \begin{vmatrix} a_{11}y_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}y_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}y_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_1+y_2c_2+\cdots+y_nc_n}} \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}y_k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}y_k & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}y_k & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1$$

所以 $y_1 = D_1/D$。同理可证 $y_i = D_i/D, i=2,\cdots,n$。

例 6.1

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

例 6.1

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} - \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27.$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27$$

于是得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-4,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-1,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=1.$$

例 6.2　**设曲线** $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ **通过四点** $(1,3),(2,4),(3,3),(4,-3)$，**求系数** a_0, a_1, a_2, a_3。

例 6.2 **设曲线 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 通过四点 $(1,3),(2,4),(3,3),(4,-3)$，求系数 a_0,a_1,a_2,a_3。**

解 **依题意可得线性方程组**

$$\begin{cases} a_0+\ \ a_1+\ \ \ a_2+\ \ \ a_3=3,\\ a_0+2a_1+\ 4a_2+\ 8a_3=4,\\ a_0+3a_1+\ 9a_3+27a_3=3,\\ a_0+4a_1+16a_4+64a_3=3, \end{cases}$$

其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

是一个范德蒙德行列式，其值为

$$D=1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot1=12.$$

而

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 9 & 27 \\ -3 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 36, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 27 \\ 1 & -3 & 16 & 64 \end{vmatrix} = -18,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 27 \\ 1 & 4 & -3 & 64 \end{vmatrix} = 24, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 16 & -3 \end{vmatrix} = -6.$$

于是得

$$a_0 = \frac{D_1}{D} = 3, \quad a_1 = \frac{D_2}{D} = -3/2, \quad a_2 = \frac{D_3}{D} = 2, \quad a_3 = \frac{D_4}{D} = -1/2.$$

即曲线方程为

$$y = 3 - \frac{3}{2}x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^3.$$