二次型

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 12 月 15 日

目录

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法

3. 正定二次型和正定矩阵

定义 1 (二次型) n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & & & & & & & & & \\
& & a_{11}x_1^2 & + & 2a_{12}x_1x_2 & + & 2a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & 2a_{1n}x_1x_n \\
& & & + & a_{22}x_2^2 & + & 2a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & 2a_{2n}x_2x_n \\
& & & & & & \cdots & & \cdots & & \\
& & & & & & & & & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}
$$

当系数属于数域 F 时，称为数域 F 上的一个n 元二次型。

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\multicolumn{11}{l}{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) =} \\
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}
$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} x_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j
$$

$$
= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = & & & & & & & & & & \\
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}
$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} x_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j
$$

$$
= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}
$$

$$
= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

  其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}$$

  则必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式
$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$
其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。
- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且
$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$
则必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。
- 二次型和它的矩阵式相互唯一确定的，因此研究二次型的性质就转化为研究 $\boldsymbol{A}$ 所具有的性质。

例 2.1　设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_4+x_3^2+5x_4^2$，则它的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

一个二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 可看成是 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一个函数，即

$$f(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的一组基下的坐标向量，故二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 n 个坐标的二次齐次函数。因此二次型作为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的函数，其矩阵是与一组基相联系的。

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 下的坐标向量分别为

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

又

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n)\boldsymbol{C}$$

故

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

从而

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 下的坐标向量分别为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

又

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n)\boldsymbol{C}$$

故

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

从而

$$f(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$$

二次型 $f(\boldsymbol{\alpha})$ 在两组基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 下所对应的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

例 2.2 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2\}$ 下的坐标 $(x_1, x_2)^T$ 满足方程

$$5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 = 4. \tag{1}$$

将 $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ 逆时针旋转 $\pi/4$ 变为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$

例 2.2 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2\}$ 下的坐标 $(x_1,x_2)^T$ 满足方程

$$5x_1^2+5x_2^2-6x_1x_2=4. \tag{1}$$

将 $\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2$ 逆时针旋转 $\pi/4$ 变为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=(\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2)\begin{pmatrix}\cos\pi/4 & -\sin\pi/4\\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2\}$ 下的坐标 $(y_1,y_2)^T$ 满足

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\pi/4 & -\sin\pi/4\\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

例 2.2 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2\}$ 下的坐标 $(x_1, x_2)^T$ 满足方程

$$5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 = 4. \tag{1}$$

将 $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ 逆时针旋转 $\pi/4$ 变为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) = (\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2)\begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2\}$ 下的坐标 $(y_1, y_2)^T$ 满足

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

(1) 的矩阵形式为

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \\
&= (y_1, y_2)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= (y_1, y_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= 2y_1^2 + 8y_2^2 = 4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \\
&= (y_1, y_2)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= (y_1, y_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= 2y_1^2 + 8y_2^2 = 4.
\end{aligned}
$$

此时，方程 (1) 化成了在基 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2\}$ 的坐标系下的标准方程，其图形是一个椭圆。

把一般的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的纯平方项之代数和的基本方法是做坐标变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{C}\ \text{为可逆矩阵})$$

使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2.$$

把一般的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的纯平方项之代数和的基本方法是做坐标变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}\qquad(\boldsymbol{C}\text{ 为可逆矩阵})$$

使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2.$$

从矩阵的角度来说，就是对于一个实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻找一个可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 称为对角形。

定义 2 (矩阵的合同) 对于两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B},$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$，记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$。

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
    - 正交变换法
    - 配方法
    - 初等变换法

3. 正定二次型和正定矩阵

- 含平方项而不含混合项的二次型称为标准二次型。
- 化二次型为标准型，就是对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻找可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵。

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
    - 正交变换法
    - 配方法
    - 初等变换法

3. 正定二次型和正定矩阵

回顾

对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda},$$

由于 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{T}$，故

$$\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

定义 3 (主轴定理) 对于任一个 n 元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$($\boldsymbol{Q}$ 为正交阵)，使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，$\boldsymbol{Q}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的标准正交特征向量。

例 3.1 用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

例 3.1 用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 对应方程为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

例 3.1　用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解　对应方程为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

得特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 和 $\lambda_3=10$.

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2 = (2, 0, 1)^T.$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2 = (2, 0, 1)^T.$$

$$(\lambda_3 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\lambda_3 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_3=(1,2,-2)^T.$$

对 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 用施密特正交化方法得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5},0\right)^T, \quad \boldsymbol{\xi}_2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$$

再将 $\boldsymbol{x}_3$ 单位化为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^T$$

取正交矩阵

$$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1} A Q = Q^T A Q = \mathrm{diag}(1, 1, 10).$$

取正交矩阵

$$Q=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix} -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{15} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{4\sqrt{5}}{15} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(1,1,10).$$

令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$，做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，原二次型就化成标准型

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = 1$$

对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = 1$$

若将坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 变换为另一直角坐标系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$$

若将坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 变换为另一直角坐标系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt{5}}{15}\\ \dfrac{4\sqrt{5}}{15}\\ \dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{2}{3}\\ -\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$$

即

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{15} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{4\sqrt{5}}{15} & \dfrac{2}{3}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$$

对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$$

若将坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 变换为另一直角坐标系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

即

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则在坐标系 $\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\}$ 下，曲面方程为

$$y_1^2+y_2^2+10y_3^2=1.$$

例 3.2　将一般二次曲面方程

$$x^2-2y^2+10z^2+28xy-8yz+20zx-26x+32y+28z-38=0$$

化为标准方程。

例 3.2 将一般二次曲面方程

$$x^2-2y^2+10z^2+28xy-8yz+20zx-26x+32y+28z-38=0$$

化为标准方程。

解 二次型部分 $x^2-2y^2+10z^2+28xy-8yz+20zx$ 对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 14 & -2 & -4 \\ 10 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

同前例，可得正交阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(9,18,-18).$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$，$\boldsymbol{y}=(x',y',z')^T$，可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9x'^2+18y'^2-18z'^2$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$, $\boldsymbol{y}=(x',y',z')^T$, 可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9x'^2+18y'^2-18z'^2$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$$x'^2+2y'^2-2z'^2-\frac{2}{3}x'+\frac{4}{3}y'-\frac{16}{3}z'-\frac{28}{9}=0$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$，$\boldsymbol{y}=(x',y',z')^T$，可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9x'^2+18y'^2-18z'^2$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$$x'^2+2y'^2-2z'^2-\frac{2}{3}x'+\frac{4}{3}y'-\frac{16}{3}z'-\frac{28}{9}=0$$

配方得

$$\left(x'-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(y'+\frac{1}{3}\right)^2-2\left(z'+\frac{4}{3}\right)^2=1$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$, $\boldsymbol{y}=(x',y',z')^T$, 可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9x'^2+18y'^2-18z'^2$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$$x'^2+2y'^2-2z'^2-\frac{2}{3}x'+\frac{4}{3}y'-\frac{16}{3}z'-\frac{28}{9}=0$$

配方得

$$\left(x'-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(y'+\frac{1}{3}\right)^2-2\left(z'+\frac{4}{3}\right)^2=1$$

再令

$$x''=x'-\frac{1}{3},\quad y''=y'+\frac{1}{3},\quad z''=z'+\frac{4}{3},$$

代入上式得标准方程

$$x''^2+2y''^2-2z''^2=1$$

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法

3. 正定二次型和正定矩阵

例 3.3 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

例 3.3 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

例 3.3 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

例 3.3　用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解　先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} y_1 & = & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ y_2 & = & & & x_2 & - & 2x_3 \\ y_3 & = & & & & & x_3 \end{array}\right.$$

例 3.3 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} y_1 &=& x_1 &+& x_2 &-& x_3 \\ y_2 &=& & & x_2 &-& 2x_3 \\ y_3 &=& & & & & x_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

例 3.3　用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解　先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1 &=& x_1+x_2-x_3 \\ y_2 &=& x_2-2x_3 \\ y_3 &=& x_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2-5y_3^2.$$

例 3.4　用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准型。

例 3.4 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$$

为标准型。

解 对 x_1x_2 利用平方差公式，令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$$

例 3.4 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$$

为标准型。

解 对 x_1x_2 利用平方差公式，令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$$

先对含 y_1 的项配完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-2y_2^2-2y_3^2+4y_2y_3$$

再对含 y_2 的项配完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_3)^2-2(y_2-y_3)^2$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

坐标变换记为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{z} = \boldsymbol{C} \boldsymbol{z}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表:

二次型	对应矩阵
$2x_1x_2+4x_1x_3$	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2z_1^2-2z_2^2$	$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

易验证

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(2,-2,0)$$

任何 n 元二次型都可用配方法化为标准型，相应的变换矩阵为主对角元为 1 的上三角阵和对角块矩阵，或者是这两类矩阵的乘积。

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵
2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法
3. 正定二次型和正定矩阵

对于实对称矩阵，可通过一系列相同类型的初等行、列变换将其化为合同标准型。所谓相同类型的初等行、列变换，指的是

(1)

$$A \xrightarrow{c_i + kc_j} AE_{ij}(k) \xrightarrow{r_i + kr_j} E_{ij}(k)^T AE_{ij}(k)$$

$E_{ij}(k)^T AE_{ij}(k)$ 仍为对称矩阵。

(2)

$$A \xrightarrow{c_i \times k} AE_i(k) \xrightarrow{r_i \times k} E_i(k)^T AE_i(k)$$

$E_i(k)^T AE_i(k)$ 仍为对称矩阵。

(2)

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AE_{ij} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E_{ij}^T AE_{ij}$$

$E_{ij}(k)^T AE_{ij}(k)$ 仍为对称矩阵。

定理 1 对于任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，都存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{I}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k$$

这说明，将施加于 $\boldsymbol{A}$ 的列变换同时施加于单位阵 $\boldsymbol{I}$，当 $\boldsymbol{A}$ 变为对角阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为变换矩阵 $\boldsymbol{C}$。

例 3.5　用初等变换法将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

化为标准型，并求坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$。

解

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 + c_1}]{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 + c_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + \frac{2}{3} r_2]{c_3 + \frac{2}{3} c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + \frac{2}{3} r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}$$

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法

3. 正定二次型和正定矩阵

定义 4　如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0,$$

就称 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

定义 4　如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

注：正定矩阵是针对对称矩阵而言的。

结论 1 二次型 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 正定

$\Longleftrightarrow \quad d_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$

结论 1 二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 正定 $\iff$ $d_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

证明.

$\Leftarrow$ 显然

结论 1 二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 正定 $\iff$ $d_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

证明.

$\Leftarrow$ 显然

$\Rightarrow$ 设 $d_i \le 0$，取 $y_i = 1, y_j = 0 (j \ne i)$，代入二次型，得

$$f(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) = d_i \le 0$$

这与二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 正定矛盾。

□

结论 2 一个二次型 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$，经过非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(C^T AC)\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \quad \overset{\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{y}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{y}^T(C^T AC)\boldsymbol{y} \quad (C\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

结论 2　一个二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，经过非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

证明.　$\forall \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{C}\text{可逆})$，则 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$。若 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定，则 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$。从而有：$\forall \boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，

$$\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$$

故 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$ 是正定二次型。

结论 2 一个二次型 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$，经过非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(C^TAC)\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \xLeftrightarrow{\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{y}} \boldsymbol{y}^T(C^TAC)\boldsymbol{y} \quad (C\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

证明. $\forall \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{y}(C\text{可逆})$，则 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$。若 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$ 正定，则 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}>0$。从而有：$\forall\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，

$$\boldsymbol{y}^T(C^TAC)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}>0$$

故 $\boldsymbol{y}^T(C^TAC)\boldsymbol{y}$ 是正定二次型。反之亦然。 □

定理 2 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则以下命题等价：

(1) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型（$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵）；
(2) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n，即 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{I}$；
(3) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$；
(4) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于零。

例 4.1 $\boldsymbol{A}$正定 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{-1}$正定

例 4.2 判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$$

是否为正定二次型。

例 4.3　判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$$

是否为正定二次型。

定理 3

$$\boldsymbol{A}\text{正定} \implies a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \cdots, n) \quad \text{且} \quad |\boldsymbol{A}| > 0$$

定理 4

$$\boldsymbol{A}\text{正定} \iff \boldsymbol{A}\text{的 } n \text{ 个顺序主子式全大于零。}$$