线性代数

矩阵的初等变换与初等矩阵

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 4 月 26 日

1. 矩阵的初等变换与初等矩阵

1. 矩阵的初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行；

(ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行；

(ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，分别称为

(i) 对换变换 $r_i \leftrightarrow r_j$；

(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$；

(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$。

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行；

(ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，分别称为

(i) 对换变换 $r_i \longleftrightarrow r_j$；

(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$；

(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$。

对应的还有初等列变换。

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行；

(ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，分别称为

(i) 对换变换 $r_i \longleftrightarrow r_j$；

(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$；

(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$。

对应的还有初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

矩阵的初等变换与初等矩阵

三种初等变换都是可逆的，

初等变换	逆变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	$r_i \div k$
$r_i + r_j \times k$	$r_i - r_j \times k$

Table: 初等变换及其逆变换

矩阵的初等变换与初等矩阵

定义 (矩阵的等价)

(i) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价，记为 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$；

(ii) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价，记为 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$；

(iii) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。

性质　矩阵的等价满足以下三条性质：

(i) 反身性：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$；

(ii) 对称性：若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$；

(iii) 传递性：若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$。

定义 (初等矩阵)　将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵。对应于 3 类初等行、列变换，有 3 种类型的初等矩阵。

矩阵的初等变换与初等矩阵

以下介绍三种初等矩阵：

1. 初等对调矩阵；
2. 初等倍乘矩阵；
3. 初等倍加矩阵。

矩阵的初等变换与初等矩阵

1、对调 $\boldsymbol{I}$ 的两行或两列（初等对调矩阵）

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{第 } i \text{ 列} \qquad \text{第 } j \text{ 列} & \end{array}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

a、用 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 左乘 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$
\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{array}\right)\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\
\end{array}
$$

相当于 把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对调（$r_i \longleftrightarrow r_j$）.

b、用 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \quad\quad 第\ i\ 列 & 第\ j\ 列 \end{array} \end{array}$$

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列对调（$c_i \longleftrightarrow c_j$）.

矩阵的初等变换与初等矩阵

2、以非零常数 k 乘 $\boldsymbol{I}$ 的某行或某列（初等倍乘矩阵）

$$\boldsymbol{E}_i(k)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \text{第 } i \text{ 列} & \end{array}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

a、以 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

相当于以数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行（$r_i \times k$）；

矩阵的初等变换与初等矩阵

b、以 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{AE}_i(k) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第 i 列

相当于以数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列（$c_i \times k$）。

3、将非零常数 k 乘 $\boldsymbol{I}$ 的某行再加到另一行上（初等倍加矩阵）

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k)=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

a、以 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以数 k 加到第 i 行上（$r_i+r_j\times k$）；

矩阵的初等变换与初等矩阵

b、以 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j}+ka_{2i} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj}+ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第 i 列　　　第 j 列

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以数 k 加到第 j 列上（$c_j + c_i \times k$）。

矩阵的初等变换与初等矩阵

定理　设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m \times n$ 矩阵，

- 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；
- 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

练习　请自行补充以下变换的具体含义：

$\boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{A}$：

$\boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{A}$：

$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$：

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_i(k)$：

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k)$：

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$：

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换为其本身可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$$

(ii) 由变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \div k$可知

$$\boldsymbol{E}_i(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_i(k^{-1})$$

(iii) 由变换 $r_i + r_j \times k$ 的逆变换为 $r_i - r_j \times k$可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}(-k)$$

以上结论也可总结为

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{E}_i(k^{-1})=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{E}_{ij}(-k)=\boldsymbol{I}.$$

例　设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ 及 $(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

解

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解 (续)　因

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

解 (续) 因

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

而

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

解 (续) 因

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

而

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

例　将三对角矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 分解成主对角元为 1 的下三角矩阵 $\mathbf{L}$ 和上三角阵 $\mathbf{U}$ 的乘积 $\boldsymbol{A} = \mathbf{LU}$（称为矩阵的 LU 分解）。

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_2}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

解 (续)　将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\boldsymbol{A} = \mathbf{U}$$

解 (续)　将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\boldsymbol{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U},$$

解 (续)　将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\boldsymbol{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U},$$

其中

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}$$

$$= \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1}$$

解 (续) 将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\boldsymbol{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U},$$

其中

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}$$

$$= \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

解 (续)　将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\boldsymbol{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U},$$

其中

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}$$

$$= \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

定理　可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明. 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵，即

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc:c} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中 $c_{ii} = 1\ (i = 1, 2, \cdots, r)$。 □

续.

因此，对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \boldsymbol{A} = \mathbf{U}.$$

续.

因此，对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \boldsymbol{A} = \mathbf{U}.$$

当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而 $\mathbf{U}$ 必为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$. □

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论　可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

推论　可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明.　由上述定理，必存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

推论 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明. 由上述定理，必存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1)^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1},$$

亦即

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1.$$

□

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论　如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与同阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换，那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论　如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与同阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换，那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

注　该推论给出了求可逆矩阵的逆的一种有效方法，请大家熟练掌握。

矩阵的初等变换与初等矩阵

例　求 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

解

$$\left(\, A \,\middle|\, I \,\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

解

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \big| & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

解

$$
\left(\, A \,\middle|\, I \,\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

解

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_1 + r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例　已知 $\boldsymbol{ABA}^T = 2\boldsymbol{BA}^T + \boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}$$

解

$$\boldsymbol{ABA}^T = 2\boldsymbol{BA}^T + \boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^T = \boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{BA}^T = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}$$

故

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = [\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})]^{-1} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{A}^T)^{-1}$$

解

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}$$

故

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = [\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})]^{-1} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{A}^T)^{-1}$$

而

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

解

$$\boldsymbol{ABA}^T = 2\boldsymbol{BA}^T + \boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^T = \boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{BA}^T = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}$$

故

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = [\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})]^{-1} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{A}^T)^{-1}$$

而

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

推论　对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$, 如果增广矩阵

$$(\boldsymbol{A},\ \mathbf{b}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{I},\mathbf{x}),$$

则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\mathbf{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{b}$ 为惟一解。

例 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ 与 $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ 的解。

解

$$(\boldsymbol{A} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

解

$$(\boldsymbol{A}\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

解

$$(\boldsymbol{A}\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \div 5 \\ r_3 + 3r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

解

$$(\boldsymbol{A}\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\ r_2\div 5\\ r_3+3r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例　求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解 原方程等价于

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\mathbf{X}=\boldsymbol{A}$$

解　原方程等价于

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\mathbf{X}=\boldsymbol{A}$$

而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解　原方程等价于

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\mathbf{X}=\boldsymbol{A}$$

而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

解　原方程等价于

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\mathbf{X}=\boldsymbol{A}$$

而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2\leftrightarrow r_3}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}\underset{r_3\div(-1)}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

解　原方程等价于

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\mathbf{X}=\boldsymbol{A}$$

而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3+4r_2\\ r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\ r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

例　当 a, b 满足什么条件时，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 不可逆。

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_1 \times (-2)]{r_2 + r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{r_2+r_1\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\times(-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_1 \times (-2)]{r_2 + r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_2 \times (-1)]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知 $\boldsymbol{A}$ 不可逆的条件是 $(a-1)b = 0$。