线性代数

二次型

张晓平

数学与统计学院

Email: xpzhang.math@whu.edu.cn

Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

1 正定二次型和正定矩阵

定义

如果对于任意的非零向量$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

就称$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$为正定二次型，称$\mathbf{A}$为正定矩阵。

定义

如果对于任意的非零向量$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

就称$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$为正定二次型，称$\mathbf{A}$为正定矩阵。

注：正定矩阵是针对对称矩阵而言的。

结论1

二次型$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$正定
$\Longleftrightarrow \quad d_i > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

结论1

二次型$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$正定
$\Longleftrightarrow \quad d_i > 0 \ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

证明:

$\Leftarrow$ 显然

结论1

二次型$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$正定 $\Longleftrightarrow \quad d_i > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

证明:

$\Leftarrow$ 显然

$\Rightarrow$ 设$d_i \leq 0$，取$y_i = 1, y_j = 0 (j \neq i)$，代入二次型，得

$$f(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) = d_i \leq 0$$

这与二次型$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$正定矛盾。

结论2

一个二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，经过非退化线性变换$\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}$，化为$\mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \xLeftrightarrow{\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}} \mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y} \quad (\mathbf{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

结论2

一个二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，经过非退化线性变换$\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}$，化为$\mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \xLeftrightarrow{\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}} \mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y} \quad (\mathbf{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

证明: $\forall \mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq \mathbf{0}$，由于$\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}(\mathbf{C}\text{可逆})$，则$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$。若$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$正定，则$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}>0$。从而有：$\forall\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$，

$$\mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y}=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}>0$$

故$\mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y}$是正定二次型。

结论2

一个二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，经过非退化线性变换$\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}$，化为$\mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \xLeftrightarrow{\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}} \mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y} \quad (\mathbf{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

证明: $\forall \mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq\mathbf{0}$，由于$\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}$($\mathbf{C}$可逆)，则$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$。若$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$正定，则$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}>0$。从而有：$\forall \mathbf{y}\neq\mathbf{0}$，

$$\mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y}=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}>0$$

故$\mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y}$是正定二次型。反之亦然。

定理

若$\mathbf{A}$是n阶实对称矩阵，则以下命题等价：

(1) $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$是正定二次型（$\mathbf{A}$是正定矩阵）；

(2) $\mathbf{A}$的正惯性指数为n，即$\mathbf{A} \simeq \mathbf{I}$；

(3) 存在可逆矩阵$\mathbf{P}$使得$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{P}$；

(4) $\mathbf{A}$的n个特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$全大于零。

例

$\mathbf{A}$正定 $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}^{-1}$正定

例2

判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

是否为正定二次型。

例3

判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

是否为正定二次型。

定理

$$\mathbf{A}\text{正定} \implies a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \cdots, n) \text{ 且 } |\mathbf{A}| > 0$$

定理

$\mathbf{A}$正定 $\iff$ $\mathbf{A}$的n个顺序主子式全大于零。