线性代数

特征值与特征向量

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 6 月 7 日

1. 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵

2. 相似矩阵

3. 矩阵可对角化的条件

4. 实对称矩阵的对角化

1. 矩阵的特征值与特征向量　相似矩阵

1.1　特征值与特征向量

特征值与特征向量

定义 1 (特征值与特征向量) 设 $\boldsymbol{A}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶矩阵，如果存在数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零的 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量。

特征值与特征向量

(1) 特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$;

(2) 特征值问题是对方针而言的。

特征值与特征向量

由定义，n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，就是使齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

有非零解的 λ 值，即满足方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

的 λ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

特征值与特征向量

由定义，n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，就是使齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

有非零解的 λ 值，即满足方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

的 λ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

结论 1　特征值 λ 是关于 λ 的多项式 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$ 的根。

特征值与特征向量

定义 2 (特征多项式、特征矩阵、特征方程)　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵，$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程。

注

(1) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 λ 的 n 次多项式。

(2) 特征多项式的 k 重根称为 k 重特征值。

特征值与特征向量

例 1　求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$(二重特征值)。

当 $\lambda_1 = 3$ 时，由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

特征值与特征向量 II

得其基础解系为 $\boldsymbol{x}_1=(1,1,1)^T$，因此 $k_1\boldsymbol{x}_1$（k_1 为非零任意常数）是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1=3$ 的全部特征向量。

当 $\lambda_2=2$ 时，由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{x}_2=(1,1,2)^T$，因此 $k_2\boldsymbol{x}_2$（k_2 为非零任意常数）是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2=2$ 的全部特征向量。

例 2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的特征多项式为

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})$$

故其 n 个特征值为 n 个对角元。

1.2　特征值与特征值的性质

特征值与特征值的性质

定理 1　若 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量（其中 k_1, k_2 为任意常数，但 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 \neq 0$）。

特征值与特征值的性质

证明. 由于 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 是齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$$

的解，因此 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是上式的解，故当 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2\neq 0$ 时，是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量。 □

特征值与特征值的性质

在 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ 的解空间中，除零向量以外的全体解向量就是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的全体特征向量。因此，$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ 的解空间也称为 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ 的特征子空间，记作 V_λ。n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间就是 n 维向量空间的子空间，其维数为

$$dimV_\lambda = n - rank(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}).$$

特征值与特征值的性质

需要注意的是，n 维实矩阵的特征值可能是复数，所以特征子空间一般是 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的子空间。

上例中，矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 的两个特征子空间为

$$V_{\lambda_1} = \{k\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} = (1,1,1)^T, k \in \mathbb{C}\},$$
$$V_{\lambda_2} = \{k\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} = (1,1,2)^T, k \in \mathbb{C}\}.$$

特征值与特征值的性质

定理 2　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$;

(2) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(\boldsymbol{A})$,

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和，称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹 (trace)，记为 $tr(\boldsymbol{A})$。

证明. 设

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n,$$

展开后含 λ^{n-1} 项的行列式有下面 n 个

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & -\lambda & & & \\ a_{31} & & -\lambda & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & -\lambda \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & & & \\ & a_{22} & & & \\ & a_{32} & -\lambda & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & a_{n2} & & & -\lambda \end{vmatrix},$$

特征值与特征值的性质 II

$$\cdots, \begin{vmatrix} -\lambda & & & & a_{1n} \\ & -\lambda & & & a_{2n} \\ & & -\lambda & & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它们之和等于

$$(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \lambda^{n-1},$$

即 $c_1 = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$。

展开后常数项为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{A}),$$

特征值与特征值的性质 III

即 $c_n = \det(\boldsymbol{A})$。

假设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，根据 n 次多项式的根与系数的关系，得

$$(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = c_1 = (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ii},$$

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = c_n = \det(\boldsymbol{A}),$$

故

$$\det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

□

特征值与特征值的性质

注

- 当 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵时，其特征值全为非零数；
- 奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个零特征值。

特征值与特征值的性质

定理 3 一个特征向量不能属于不同的特征值。

特征值与特征值的性质

定理 3 一个特征向量不能属于不同的特征值。

证明.

若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 的特征向量，即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

这与 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 矛盾。 $\square$

特征值与特征值的性质

性质 1 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ 的特征向量，则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值；

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值；

且 $\boldsymbol{x}$ 仍是矩阵 $k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{A}^{-1}$ 分别对应于 $k\lambda, \lambda^m, \lambda^{-1}$ 的特征向量。

特征值与特征值的性质

证明.

(i) 自行完成；

(ii) 自行完成；

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\lambda \neq 0$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ 可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x},$$

因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x},$$

故 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，且 $\boldsymbol{x}$ 也是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 对应于 λ^{-1} 的特征向量。

□

特征值与特征值的性质

注　若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值，其中

$$\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m,$$

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m.$$

特征值与特征值的性质

例 3　设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -1, 2$，求 $|\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}|$.

特征值与特征值的性质

例 3　设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|$.

解　因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为零，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$。又因 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$，故

$$\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=-2\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}.$$

令 $\varphi(\lambda)=-\frac{2}{\lambda}+3\lambda-2$，则 $\varphi(\lambda)$ 为上述矩阵的特征值，分别为 $\varphi(1)=-1,\varphi(-1)=-3,\varphi(2)=3$，于是

$$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=(-1)\cdot(-3)\cdot 3=9.$$

特征值与特征值的性质

性质 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 的特征值相同。

特征值与特征值的性质

性质 2　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 的特征值相同。

证明.　因 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^T=\boldsymbol{A}^T-(\lambda\boldsymbol{I})^T=\boldsymbol{A}^T-\lambda\boldsymbol{I}$，故

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\det(\boldsymbol{A}^T-\lambda\boldsymbol{I}),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 有完全相同的特征值。 □

特征值与特征值的性质

例 4 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(i) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量

(ii) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵。

解 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -3 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[(\lambda-1)(\lambda+3)+3] = -\lambda^2(\lambda+2),$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 和 $\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，由 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 得基础解系

$$\boldsymbol{x}_1=(1,1,0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2=(-1,0,1)^T,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_{1,2}=0$ 的全体特征向量为

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2=k_1(1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T,$$

特征值与特征值的性质 II

其中 k_1, k_2 为不全为零的任意常数。

当 $\lambda_3 = -2$ 时，由 $(\boldsymbol{A} - \lambda_3 \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\boldsymbol{x}_3 = (-1, -2, 1)^T,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_3 = -2$ 的全体特征向量为

$$k_3 \boldsymbol{x}_3 = k_3(-1, -2, 1)^T,$$

其中 k_3 为非零的任意常数。

将 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i (i = 1, 2, 3)$ 表示成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

特征值与特征值的性质 III

取

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，且 $|\boldsymbol{P}|=2\neq 0$，故得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$$

为对角阵。

特征值与特征值的性质

定理 4 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个特征值，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 依次是与之对应的特征向量，若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 互不相等，则 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

证明. 设有常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{x}_m = 0,$$

则 $\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{x}_m) = 0$，即

$$\lambda_1 k_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_m k_m\boldsymbol{x}_m = 0,$$

以此类推，有

$$\lambda_1^l k_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2^l k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_m^l k_m\boldsymbol{x}_m = 0, \quad l = 1, 2, \cdots, m-1.$$

写成矩阵形式即为

$$(k_1\boldsymbol{x}_1, k_2\boldsymbol{x}_2, \cdots, k_m\boldsymbol{x}_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (0, 0, \cdots, 0).$$

特征值与特征值的性质 II

上式左边的第二个矩阵的行列式为范德蒙德行列式，当 λ_i 互不相等时该行列式不为零，从而该矩阵可逆。于是有

$$(k_1\boldsymbol{x}_1, k_2\boldsymbol{x}_2, \cdots, k_m\boldsymbol{x}_m) = (0, 0, \cdots, 0),$$

即 $k_j\boldsymbol{x}_j = 0,\ \ j = 1, 2, \cdots, m$。但 $\boldsymbol{x}_j \neq 0$，故 $k_j = 0,\ \ j = 1, 2, \cdots, m$，从而 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 线性无关。 □

特征值与特征值的性质

例 5　设 λ_1 和 λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同特征值，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$，证明 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

特征值与特征值的性质

证明. 按题设，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = k_1\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = k_2\boldsymbol{x}_2$，故

$$A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2.$$

（反证法）假设 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则应存在 λ 使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$，于是

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2,$$

即

$$(\lambda_1 - \lambda)\boldsymbol{x}_1 + (\lambda_2 - \lambda)\boldsymbol{x}_2 = 0.$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，由上述定理知 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 线性无关，从而有

$$\lambda_1 - \lambda = \lambda_2 - \lambda,$$

即 $\lambda_1 = \lambda_2$，与题设矛盾，从而 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。 □

2. 相似矩阵

相似矩阵

定义 3　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B},$$

则称$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变化，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵。

相似矩阵

定理 5 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 u 特征多项式相同，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同。

相似矩阵

证明. 因 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，即有可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$。故

$$|B - \lambda \boldsymbol{I}| = |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}(\lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}||\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|.$$

□

相似矩阵

推论 1　若 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值。

3. 矩阵可对角化的条件

矩阵可对角化的条件

矩阵可对角化，即矩阵与对角阵相似。

矩阵可对角化的条件

定理 6 矩阵可对角化 $\iff$ n 阶矩阵有 n 个线性无关的特征向量

矩阵可对角化的条件

证明.

$(\Rightarrow)$ 设

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda} \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$$

将 $\boldsymbol{P}$ 按列分块，即 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

故 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 分别对应于 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ 的特征向量。由于 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以它们是线性无关的。

$(\Leftarrow)$ 上述步骤显然可逆，故充分性也成立。

□

矩阵可对角化的条件

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，则 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角元都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。若不计 λ_k 的排列次序，则 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是唯一的，称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准型。

矩阵可对角化的条件

定理 7　$\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

矩阵可对角化的条件 I

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$. 对 m 做数学归纳法。

1^o 当 $m = 1$ 时，结论显然成立。

2^o 设 k 个不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_k$。下面考虑 $k+1$ 个不同特征值的特征向量。

设

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \qquad (1)$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) = \boldsymbol{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \quad (2)$$

$$\Longrightarrow \quad a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

$$\Longrightarrow \quad a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

$$\Longrightarrow \quad a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad a_{k+1} = 0$$

矩阵可对角化的条件 II

□

矩阵可对角化的条件

推论 2　若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似。

矩阵可对角化的条件

例 6　设实对称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

问 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化？若可对角化，求对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 及可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，再求 $\boldsymbol{A}^k$。

矩阵可对角化的条件 I

解 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1-\lambda & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-2)^3,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2$（单根），$\lambda_2=2$（三重根）。

矩阵可对角化的条件 II

由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得 λ_1 对应的特征向量为 $\{k_1\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_1=(1,1,1,1)^T, k_1\neq 0\}$。

由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$，即

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系：

$$\boldsymbol{x}_{21}=(1,-1,0,0)^T,\quad \boldsymbol{x}_{22}=(1,0,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{x}_{23}=(1,0,0,-1)^T.$$

矩阵可对角化的条件 III

因 $\boldsymbol{A}$ 有 4 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$。

取

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_{21}, \boldsymbol{x}_{22}, \boldsymbol{x}_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

矩阵可对角化的条件 IV

再由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^k = \boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^k & & & \\ & 2^k & & \\ & & 2^k & \\ & & & 2^k \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} 2^k\boldsymbol{I}_4, & k \text{ even}, \\ 2^{k-1}\boldsymbol{A}, & k \text{ odd}. \end{cases}$$

矩阵可对角化的条件

例 7　设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

问 x 为何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化？

矩阵可对角化的条件

解 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ 1 & 1-\lambda & x\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

即 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$。

对应于单根 $\lambda_1=-1$，可求得线性无关的特征向量恰有 1 个，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是对应重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$，有 2 个线性无关的特征向量，即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ 有两个线性无关的解，亦即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 的秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$。由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & x\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & x+1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

欲使 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$，须有 $x+1=0$，即 $x=-1$。因此当 $x=-1$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化。

矩阵可对角化的条件

例 8　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 是主对角元全为 2 的上三角矩阵，且存在 $a_{ij} \neq 0(i < j)$，问 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化?

矩阵可对角化的条件

解　设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & * & \cdots & * \\ & 2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

其中 $*$ 为不全为零的任意常数，则

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = (2 - \lambda)^n,$$

即 $\lambda = 2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征根，而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) \geq 1$，故 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ 的基础解系所含向量个数 $\leq n - 1$ 个，即 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量的个数 $\leq n - 1$ 个，因此 $\boldsymbol{A}$ 不与对角阵相似。

4. 实对称矩阵的对角化

例 9　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值都是实数。

证明.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x} \quad & \Longrightarrow \quad \overline{(\boldsymbol{Ax})}^T = \overline{\lambda\boldsymbol{x}}^T \\
& \Longrightarrow \quad \overline{\boldsymbol{x}}^T\ \overline{\boldsymbol{A}}^T\ \boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\ \overline{\boldsymbol{x}}^T\ \boldsymbol{x} \\
& \Longrightarrow \quad \overline{\boldsymbol{x}}^T\ \boldsymbol{A}^T\ \boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\ \overline{\boldsymbol{x}}^T\ \boldsymbol{x} \\
& \Longrightarrow \quad \lambda\overline{\boldsymbol{x}}^T\ \boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\ \overline{\boldsymbol{x}}^T\ \boldsymbol{x} \\
& \Longrightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda}
\end{aligned}$$

$\square$

例 10 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的。

证明. 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$，$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$，则

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2)^T \boldsymbol{x}_1 = (\lambda_2 \boldsymbol{x}_2)^T \boldsymbol{x}_1 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_1$$

例 10 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的。

证明. 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$，$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$，则

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2)^T \boldsymbol{x}_1 = (\lambda_2 \boldsymbol{x}_2)^T \boldsymbol{x}_1 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_1$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以

$$\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_1 = 0.$$

□

定理 8　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称阵，则必有正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元的对角阵。

推论 3　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称阵，λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重根，则矩阵 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 的秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=n-k$，从而对应特征值 λ 恰有 k 个 u 线性无关的特征向量。

推论 3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称阵，λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重根，则矩阵 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 的秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=n-k$，从而对应特征值 λ 恰有 k 个 u 线性无关的特征向量。

证明.

由上述定理知，对称阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 相似，从而 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}-\lambda\boldsymbol{I}=\mathrm{diag}(\lambda_1-\lambda,\cdots,\lambda_n-\lambda)$ 相似。当 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征根时，对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}-\lambda\boldsymbol{I}$ 的对角元恰有 k 个等于 0，于是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\Lambda}-\lambda\boldsymbol{I})=n-k$。而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\mathrm{R}(\boldsymbol{\Lambda}-\lambda\boldsymbol{I})$，故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=n-k$。 □

将对称阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的步骤：

1. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，它们的重数依次为 $k_1, \cdots, k_s(k_1 + \cdots + k_s = n)$；
2. 对每个 k_i 重特征值 λ_i，求 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ 的基础解系，得 k_i 个线性无关的特征向量；
3. 再把它们正交化、单位化，得 k_i 个两两正交的单位特征向量。因 $k_1 + \cdots + k_s = n$，故总共可得 n 个两两正交的单位特征向量；
4. 将这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交阵 $\boldsymbol{Q}$，便有 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$。