线性代数

向量空间与线性变换

张晓平

数学与统计学院

Email: xpzhang.math@whu.edu.cn

Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

1. $\mathbb{R}^n$中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - 标准正交基

定理

$\mathbb{R}^n$中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$是线性无关的。

定理

$\mathbb{R}^n$中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$是线性无关的。

证明: 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0,$$

则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$

即

$$k_j(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

由于$(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) > 0$，故

$$k_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关。

定义（标准正交基）

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$，若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$是$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基。

例1

设$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基，求$\mathbb{R}^n$中向量$\beta$在基$B$下的坐标。

例1

设$B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$是$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基，求$\mathbb{R}^n$中向量$\boldsymbol{\beta}$在基$B$下的坐标。

解: 设

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$