第一讲、行列式

October 2, 2017

1 行列式的定义

1.1 二阶行列式

例 1. 用消元法求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

消去x_2得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

消去x_1得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{11}.$$

若$\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0}$，则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

定义 1 (二阶行列式)**.** 由$2^2 = 4$个数，按下列形式排成*2*行*2*列的方形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

其被定义成一个数

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \equiv D,$$

该数称为由这四个数构成的二阶行列式。

a_{ij}表示行列式的元素。i为行标，表明该元素位于第i行；j为列标，表明该元素位于第j列。

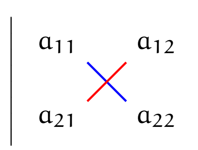

图 1: 对角线法则

类似地，

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \equiv D_1$$

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \equiv D_2$$

则上述方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 2. 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解：因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

因此，

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -3.$$

1.2 三阶行列式

定义 2 (三阶行列式). 由$3^2 = 9$个数组成的*3*行*3*列的三阶行列式，则按如下形式定义一个数

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

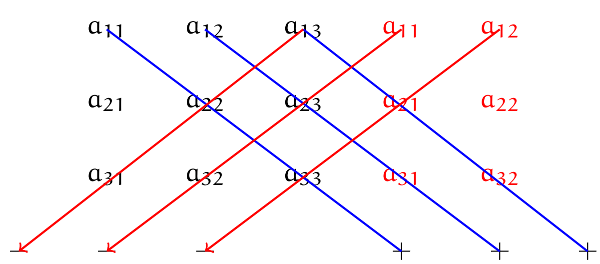

图 2: 沙路法

例 3. 计算

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解. 由沙路法可知，

$$\begin{aligned} D_3 &= 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-2) \times 4 \times (-4) \\ &\quad -2 \times (-2) \times (-2) - (-4) \times 2 \times (-3) + 1 \times 1 \times 4 \\ &= -14. \end{aligned}$$

例 4. 求方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

解. 行列式

$$D = 3x^2 + 18 + 4x - 2x^2 - 12 - 9x = x^2 - 5x + 6$$

由此可知$x = 2$或3。

如果三元一次方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{aligned}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

则用消元法求解可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

从二、三阶行列式的展开式中可发现：

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{33} \\ a_{23} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{11}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{13}} \end{aligned}$$

这里，M_{11}, M_{12}, M_{13}分别称为a_{11}, a_{12}, a_{13}的余子式，并称

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}$$

分别称为a_{11}, a_{12}, a_{13}的代数余子式。这样，D可表示为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{11}A_{13} + a_{13}A_{13}.$$

同样地，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

其中

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = a_{22}, \quad A_{11} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -a_{21}.$$

注意这里的$|a_{22}|$, $|a_{21}|$是一阶行列式，而不是绝对值。我们把一阶行列式$|a|$定义为a。

1.3 n阶行列式的定义

定义 3 (n阶行列式). 由n^2个数$a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$组成的$n$阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

是一个数。

- 当$n=1$时，定义$D=|a_{11}|=a_{11}$；
- 当$n\geqslant 2$时，定义

  $$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \tag{2}$$

  其中

  $$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

  而M_{1j}是D中划去第1行第j列后，按原顺序排成的$n-1$阶行列式，即

  $$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

  并称M_{1j}为a_{1j}的余子式，A_{1j}为a_{1j}的代数余子式.

注 1. 需注意以下两点：

1 在D中，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$所在的对角线称为行列式的主对角线，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$称为主对角元。

2 行列式D是由n^2个元素构成的n次齐次多项式：

- 二阶行列式的展开式有2!项；
- 三阶行列式的展开式有3!项；
- n阶行列式的展开式有n!项，其中每一项都是不同行不同列的n个元素的乘积，带正号的项与带负号的项各占一半。

由行列式的定义可知，一个n阶行列式可以展开成n个n阶行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

例 5. 证明：n阶下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明. 用数学归纳法证明。

1. 当$n=2$时，结论成立。
2. 假设结论对$n-1$阶下三角阵成立，则由定义

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}). \qquad \square \end{aligned}$$

综上所述，结论成立。 □

同理可证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 6. 计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix}$$

解. 由行列式定义，

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}a_n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1}a_n D_{n-1}. \end{aligned}$$

同理递推，

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1}a_n D_{n-1} = (-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-2}a_{n-1}D_{n-2} \\ & \cdots\cdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1. \end{aligned}$$

例如，

$$D_2 = -a_1a_2, \quad D_3 = -a_1a_2a_3, \quad D_4 = a_1a_2a_3a_4, \quad D_5 = a_1a_2a_3a_4a_5.$$

2 行列式的性质

性质 1. 互换行列式的行与列，值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

证明. 将等式两端的行列式分别记为D和D'，对阶数n用归纳法。

1. 当$n = 2$时，$D = D'$显然成立。
2. 假设结论对于阶数小于n的行列式都成立，以下考虑阶数为n的情况。由定义可知，

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$
$$D' = a_{11}A'_{11} + a_{21}A'_{21} + \cdots + a_{n1}A'_{n1}$$

显然，$A_{11}=A'_{11}$。于是

$$D' = a_{11}A_{11} + (-1)^{1+2}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{42} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$+ \cdots + (-1)^{1+n}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n-1,2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

对上式中的$n-1$个行列式按第一行展开，并将含a_{12}的项进行合并，可得

$$\begin{aligned}
&(-1)^{1+2}a_{21}a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{31}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\qquad + \cdots + (-1)^{1+n}a_{n1}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \\
=&(-1)^{1+2}a_{12}\left((-1)^{1+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{31}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right. \\
&\qquad \left. + \cdots + (-1)^{1+n-1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2,n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}\right) \\
=&(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (-1)^{1+2}a_{12}M'_{12} = a_{12}A'_{12} = a_{12}A_{12}.
\end{aligned}$$

同理，含a_{13}的项合并后其值等于$a_{13}A_{13}$，$\cdots$， 含a_{1n}的项合并后其值等于$a_{1n}A_{1n}$. 因此，$D=D'$.

□

注 2. 有了这个性质，行列式对行成立的性质都适用于列。

性质 2. 行列式对任一行按下式展开，其值相等，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

而M_{ij}为a_{ij}的余子式，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式.

证明. 对n用归纳法证明。

1. 当$n=2$时，结论显然成立。

2. 假设结论对阶数$\leqslant n-1$的行列式成立，以下考虑阶数为n的情况。

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{24} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

由归纳假设，按第i行展开后合并含a_{i1}的项得，

$$(-1)^{(i-1)+1}a_{i1}\left((-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n-1} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}\right)$$

即

$$(-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}=a_{i1}A_{i1}.$$

同理可证，含a_{i2}的项合并后其值为$a_{i2}A_{i2}$，$\ldots$，含a_{in}的项合并后其值为$a_{in}A_{in}$.

□

性质 3 (线性性质). *1* 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个数k，等于用数k乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

2 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

注 3. 一些记号：

- $r_i \times k$（$c_i \times k$）：第i行（列）乘以k
- $r_i \div k$（$c_i \div k$）：第i行（列）提取公因子k

定义 4 (反对称行列式)**.** 如果行列式$D = |a_{ij}|_n$的元素$a_{ij} = -a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，就称$D$是反对称行列式（其中$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0, i = 1, 2, \cdots, n$）.

例 7. 证明：奇数阶反对称行列式的值为0.

证明.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{性质1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{将每行提取公因子}-1}{\overset{\text{性质3-1}}{=\!=\!=\!=\!=}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D.$$

由于n为奇数，故$D = -D$，从而$D = 0$. □

推论 1. 若行列式的某行元素全为*0*，其值为*0*.

例 8.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 4. 若行列式有两行（列）完全相同，其值为0.

证明. 不妨设D的第i和j行元素全部相等，即对

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有$a_{il} = a_{jl}(i \neq j, l = 1, 2, \cdots, n)$. 对阶数$n$用数学归纳法。

- 当$n = 2$时，结论显然成立。

- 假设结论对阶数为$n-1$的行列式成立，在n阶的情况下，对第$k(k \neq i,j)$行展开，有

$$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}.$$

注意到余子式$M_{kl}(l = 1,2,\cdots,n)$是$n-1$阶行列式，且其中有两行元素相同，故

$$A_{kl} = (-1)^{k+l}M_{kl} = 0 \quad (l = 1,2,\cdots,n),$$

从而$D = 0$.

□

例 9.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

推论 2. 若行列式中有两行（列）元素成比例，则行列式的值为0.

例 10.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 5. 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

证明. 将数k乘以第j行加到第i行，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质3-2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{推论2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

□

注 4. 一些记号：

- $r_i + r_j \times k$：将第j行乘以k加到第i行；
- $c_i + c_j \times k$：将第j列乘以k加到第i列。

性质 6. 互换行列式的两行（列），行列式变号。

证明.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_i+r_j]{\text{性质}5} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_j-r_i]{\text{性质}5} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_i+r_j]{\text{性质}5} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质}3\text{-}1} -D.$$

□

注 5. 一些记号:

- $r_i \leftrightarrow r_j$：互换第i,j行

- $c_i \leftrightarrow c_j$：互换第i,j列

例 11.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

性质 7. 行列式某一行的元素乘以另一行对应元素的代数余子式之和等于0，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j).$$

证明. 由性质2，对D的第j行展开得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}$$

因此，将D中第j行的元素$a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}$换成$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$后所得的行列式，其展开式就是$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质4}} 0.$$

□

结论 1.

- 对行列式D按行展开，有
$$\sum_{k=1} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}D,$$
其中δ_{ij}为克罗内克（*Kronecker*）记号，表示为
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$
- 对行列式D按列展开，有
$$\sum_{k=1} a_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}D,$$

3 行列式的计算

例 12. 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解.

$$\begin{aligned} D & \xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40. \end{aligned}$$

例 13. 计算

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解.

$$D \xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

例 14. 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解.

$$D_n \xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i\div n} n^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} n^{n-1} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n} & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n^{n-1}\left[1+\frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right](-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^{n-1} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

例 15. 计算行列式

$$D_{20} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 18 & 19 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 17 & 18 & 19 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 16 & 17 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 20 & 19 & 18 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解.

$$D_{20}\xlongequal[i=19,\cdots,1]{c_{i+1}-c_i}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1&1\\2&-1&1&\cdots&1&1&1\\3&-1&-1&\cdots&1&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots\\20&-1&-1&\cdots&-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,20]{r_i+r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1&1\\3&0&2&\cdots&2&2&2\\4&0&0&\cdots&2&2&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots\\21&0&0&\cdots&0&0&0\end{vmatrix}=21\times(-1)^{20+1}\times 2^{18}=-21\times 2^{18}.$$

例 16. 计算元素为$a_{ij}=|i-j|$的n阶行列式。

解.

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&0&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-2&n-3&n-4&\cdots&0&1\\n-1&n-2&n-3&\cdots&1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n-1,\cdots,1]{c_{i+1}-c_i}\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&-1&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-2&-1&-1&\cdots&-1&1\\n-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i+r_1}\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&2&\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-2&0&0&\cdots&0&2\\n-1&0&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

例 17. 计算

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&2&0&\cdots&0\\3&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\\n&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

解.

$$D\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1-r_i}\begin{vmatrix}1-\sum_{i=2}^n i&0&0&\cdots&0\\2&2&0&\cdots&0\\3&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=(1-\sum_{i=2}^n i)\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n=\left[2-\frac{(n+1)n}{2}\right]n!$$

如何计算“爪形”行列式 其解法固定，即从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。请自行验证以下行列式（假定$a_i\neq 0$）

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}=(a_0-\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n.$$

类似的方式还可用于求解如下形式的“爪型行列式”

例 18.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! \left(1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}\right)$$

例 19. 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解. *解法1*：

$$D_n \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1 \div [x+(n-1)a]} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

解法2：

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1 + c_i} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

解法3：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{n+1} \xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{n+1}$$

- 若$x=a$，则$D_n=0$。

- 若$x \neq a$，则

$$
\begin{aligned}
D_n \quad & \xlongequal[j=2,\cdots,n+1]{c_1+\frac{1}{x-a}c_j} \begin{vmatrix} 1+\frac{a}{x-a}n & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{n+1} \\
& = \quad [x+(n-1)a]\,(x-a)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

解法4：

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ 0 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\
&= (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{cases}
D_n &= (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1} \\
(x-a)D_{n-1} &= (x-a)^2 D_{n-2} + a(x-a)^{n-1} \\
\cdots & \\
(x-a)^{n-4}D_4 &= (x-a)^{n-3}D_3 + a(x-a)^{n-1} \\
(x-a)^{n-3}D_3 &= (x-a)^{n-2}D_2 + a(x-a)^{n-1}
\end{cases}
$$

因此

$$D_n = (x-a)^{n-2}(x^2-a^2) + (n-2)a(x-a)^{n-1} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

注 6. 该行列式经常以不同方式出现，如

- $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$$

- $$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+n)\lambda^{n-1}$$

升阶法适用于求形如

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

或

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

的行列式。

例 20.

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a})\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i})\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)$$

注 7. 几种常见形式：

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \left[a+\frac{n(n+1)}{2}\right]a^{n-1}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = b^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i+b)$$

例 21. 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明：$D = D_1D_2$.

证明. 对D_1做运算$r_i+\lambda r_j$将它转化成下三角行列式，设为

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11}\cdots p_{kk}.$$

对D_2做运算$c_i+\lambda c_j$将它转化成下三角行列式，设为

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}.$$

于是，对D的前k行做运算$r_i+\lambda r_j$，对其后n列做运算$c_i+\lambda c_j$，把D转化为

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$$

故$D=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2$. □

例 22. 计算$2n$阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$$

解. 把D_{2n}中的第$2n$行依次与第$2n-1$行、...、第2行对调（共$2n-2$次相邻对换）， 在把第$2n$列依次与第$2n-1$列、...、第2列对调，得

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & b & 0 & & & & & 0 \\ c & d & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & c & & & & & d \end{vmatrix}$$

故

$$D_{2n}=D_2D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^n.$$

例 23. 证明范德蒙德*(Vandermonde)*行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

证明. 用数学归纳法证明。当$n=2$时，

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j),$$

结论成立。现假设结论对$n-1$阶范德蒙德行列式成立，以下证明结论对n阶范德蒙德行列式也成立。

$$D_n \xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i-x_1r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开，并把每列的公因子(x_i-x_1)提出，就有

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

上式右端的行列式为$n-1$阶范德蒙德行列式，按归纳法假设，它等于所有(x_i-x_j)因子的乘积$(n\geqslant i\geqslant j\geqslant 2)$。故

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 2}(x_i-x_j)=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

□

例 24. 设a,b,c为互不相同的实数，证明：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$$

的充要条件是$a+b+c=0$.

证明. 考察范德蒙德行列式

$$D \quad = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & y \\ a^2 & b^2 & c^2 & y^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & y^3 \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(b-c)(a-y)(b-y)(c-y)$$

注意到行列式D可看成是关于y的多项式，比较包含y^2的项：

$$\cdots-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}y^2+\cdots=\cdots-(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)y^2+\cdots$$

于是

$$(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$$

而a,b,c互不相同，故$a+b+c=0$. □

例 25. 计算三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}$$

解. 对D_n按第一行展开

$$D_n = aD_{n-1} + (-1)^{1+2}b\begin{vmatrix} c & b & & & & \\ 0 & a & b & & & \\ 0 & c & a & b & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix} = aD_{n-1} - bcD_{n-2},$$

其中$D_1 = a, \quad D_2 = a^2 - bc$. 将

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

改写成

$$D_n - kD_{n-1} = l(D_{n-1} - kD_{n-2})$$

这里

$$k + l = a, \quad kl = bc.$$

令$\Delta_n = D_n - kD_{n-1}$，它满足

$$\begin{cases} \Delta_n = l\Delta_{n-1}, \\ \Delta_2 = D_2 - kD_1 = a^2 - bc - ka = (a-k)a - kl = la - lk = l^2. \end{cases}$$

由此可知

$$\Delta_n = l^{n-2}\Delta_2 = l^2,$$

即

$$\begin{aligned} D_n &= l^n + kD_{n-1} = l^n + k(l^{n-1} + kD_{n-2}) = l^n + kl^{n-1} + k^2D_{n-2} \\ &= l^n + kl^{n-1} + k^2(l^{n-2} + kD_{n-3}) = l^n + kl^{n-1} + k^2l^{n-2} + k^3D_{n-3} \\ &= \cdots = l^n + kl^{n-1} + k^2l^{n-2} + \cdots + k^{n-2}l^2 + k^{n-1}D_1 \end{aligned}$$

而$D_1 = a = k + l$，故

$$D_n = l^n + kl^{n-1} + k^2l^{n-2} + \cdots + k^{n-2}l^2 + k^{n-1}l + k^n.$$

4 克莱姆法则

考察n元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{6}$$

与二、三元线性方程组相类似，它的解可以用n阶行列式表示。

定理 1 (克莱姆法则). *如果线性方程组(6)的系数行列式不等于0，即*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(6)存在唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \ x_2 = \frac{D_2}{D}, \ \cdots, \ x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中

$$D_j = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \text{第}j\text{列} \end{array}$$

证明. 先证存在性：将$x_i = \frac{D_i}{D}$代入第i个方程，则有

$$\begin{aligned}
& a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n \\
&= \frac{1}{D}(a_{i1}D_1 + \cdots + a_{ii}D_i + \cdots + a_{in}D_n) \\
&= \frac{1}{D}[a_{i1}(b_1A_{11} + \cdots + b_nA_{n1}) + \cdots + a_{ii}(b_1A_{1i} + \cdots + b_nA_{ni}) \\
&\quad + \cdots + a_{in}(b_1A_{1n} + \cdots + b_nA_{nn})] \\
&= \frac{1}{D}[b_1(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} \cdots + a_{in}A_{1n}) + \cdots + b_i(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} \cdots + a_{in}A_{in}) \\
&\quad + \cdots + b_n(a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} \cdots + a_{in}A_{nn})] \\
&= \frac{1}{D}b_iD = b_i.
\end{aligned}$$

再证唯一性：设还有一组解$y_i, i = 1, 2, \cdots, n$，以下证明$y_i = D_i/D$。现构造一个新行列式

$$\begin{aligned}
y_1D &= \begin{vmatrix} a_{11}y_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}y_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}y_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{c_1+y_2c_2+\cdots+y_nc_n} \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}y_k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}y_k & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}y_k & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1
\end{aligned}$$

所以$y_1 = D_1/D$。同理可证$y_i = D_i/D, i = 2, \cdots, n$。 □

例 26.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解.

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}\overset{r_1-2r_2}{\underset{r_4-r_2}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0&7&-5&13\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\0&7&-7&12\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}7&-5&13\\2&-1&2\\7&-7&12\end{vmatrix}\overset{c_1+2c_2}{\underset{c_3+2c_2}{=\!=\!=}}-\begin{vmatrix}-3&-5&3\\0&-1&0\\-7&-7&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-3&3\\-7&-2\end{vmatrix}=27.$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27$$

于是得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-4,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-1,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=1.$$

例 27. 设曲线$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$通过四点$(1,3),(2,4),(3,3),(4,-3)$，求系数a_0,a_1,a_2,a_3。

解. 依题意可得线性方程组

$$\begin{cases}a_0+\ a_1+\ a_2+\ a_3=3,\\a_0+2a_1+\ 4a_2+\ 8a_3=4,\\a_0+3a_1+\ 9a_3+27a_3=3,\\a_0+4a_1+16a_4+64a_3=3,\end{cases}$$

其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{vmatrix}$$

是一个范德蒙德行列式，其值为

$$D=1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot1=12.$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\4&2&4&8\\3&3&9&27\\-3&4&16&64\end{vmatrix}=36,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&3&1&1\\1&4&4&8\\1&3&8&27\\1&-3&16&64\end{vmatrix}=-18,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&3&1\\1&2&4&8\\1&3&3&27\\1&4&-3&64\end{vmatrix}=24,\quad D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&3\\1&2&4&4\\1&3&9&3\\1&4&16&-3\end{vmatrix}=-6.$$

于是得

$$a_0=\frac{D_1}{D}=3,\quad a_1=\frac{D_2}{D}=-3/2,\quad a_2=\frac{D_3}{D}=2,\quad a_3=\frac{D_4}{D}=-1/2.$$

即曲线方程为

$$y = 3 - \frac{3}{2}x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^3.$$