线性代数

总复习

张晓平

数学与统计学院
Email: xpzhang.math@whu.edu.cn
Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

1. 第一章 行列式
   - 知识点
   - 往年试题
2. 第二章 矩阵及其运算
   - 往年试题
3. 第三章 向量组 矩阵的秩
   - 知识点
   - 典型例题1 （线性相关性）
   - 典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）
   - 典型题型3 （非齐次线性方程组）
4. 第四章 向量空间与线性变换
   - 往年试题
5. 第五章 特征值问题
   - 知识点
   - 往年试题
6. 第六章 二次型
   - 知识点

1 第一章 行列式
- 知识点
- 往年试题

2 第二章 矩阵及其运算
- 往年试题

3 第三章 向量组 矩阵的秩
- 知识点
- 典型例题1 （线性相关性）
- 典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）
- 典型题型3 （非齐次线性方程组）

4 第四章 向量空间与线性变换
- 往年试题

5 第五章 特征值问题
- 知识点
- 往年试题

6 第六章 二次型
- 知识点

- 典型例题

1 第一章 行列式
- 知识点
- 往年试题

2 第二章 矩阵及其运算

3 第三章 向量组 矩阵的秩

4 第四章 向量空间与线性变换

5 第五章 特征值问题

6 第六章 二次型

- 行列式的定义

  余子式、代数余子式、行列式的按行（列）展开

- 行列式的性质
    - 互换行与列，行列式不变
    - 某行全为零，行列式为零
    - 两行相等，行列式为零
    - 两行成比例，行列式为零
    - 行倍加，行列式不变
    - 行倍乘，行列式倍乘
    - 交换两行，行列式反号
    - $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}|\mathbf{A}|$$

- 行列式的计算
  - 通过初等行变换化为上三角行列式
  - 降阶法（使某行（列）只有一个非零元）
  - 升阶法（加边法），适用于

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

或

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

一些特殊的行列式

- 奇数阶反对称矩阵的行列式等于零
- 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ * & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- 斜三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & & a_n \\ & & & a_{n-1} & * \\ & & & \vdots & \vdots \\ & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$$

- 对角块行列式

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_n \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_1|\,|\mathbf{A}_2|\,\cdots\,|\mathbf{A}_n|$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$$

- 爪形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 爪形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

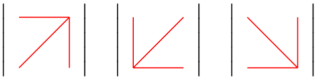
其解法固定，即从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。

- 爪形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其解法固定，即从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。

类似的方式还可用于求解如下形式的“爪型行列式”



(g) (h) (i)

- 发散型行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n$$

- 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geq i>j\geq 1} (x_i - x_j).$$

常见题型

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

1 第一章 行列式
- 知识点
- 往年试题

2 第二章 矩阵及其运算

3 第三章 向量组 矩阵的秩

4 第四章 向量空间与线性变换

5 第五章 特征值问题

6 第六章 二次型

例1 2005－2006第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，求$|\mathbf{A}\mathbf{A}^T|$。

例1 2005 - 2006第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$，求$|\mathbf{A}\mathbf{A}^T|$。

解: 因 $|\mathbf{A}\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}|^2$，而

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -4 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -6 & 11 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & 4 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ -6 & 11 & 7\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ -6 & 5 & 7\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=50$$

故

$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^T|=2500$$

例2 2009－2010第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$，求$|\mathbf{A}\mathbf{A}^T|$。

例2 2009－2010第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$，求$|\mathbf{A}\mathbf{A}^T|$。

解: 因$\mathrm{r}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\le \mathrm{r}(\mathbf{A})\le 3$，故$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$为降秩矩阵，从而$|\mathbf{A}\mathbf{A}^T|=0$。

例3　2006 - 2007第一学期

设$\mathbf{A} = (a_{ij})$为2007阶方阵，其中$a_{ij} = i - j$，求$|\mathbf{A}|$

例3 2006 – 2007第一学期

设$\mathbf{A}=(a_{ij})$为2007阶方阵，其中$a_{ij}=i-j$，求$|\mathbf{A}|$

解: 注意到

$$a_{ij}=i-j=-(j-i)=-a_{ji},$$

故$\mathbf{A}$为反对称矩阵，由奇数阶反对称矩阵的行列式为零可知，

$$|\mathbf{A}|=0.$$

例4 2006 - 2007第二学期

计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} \quad (n\geq 1)$$

例4 2006－2007第二学期

计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} \quad (n \geq 1)$$

解:

$$D \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n!$$

例5　2006－2007第二学期

计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

例5 2006－2007第二学期

计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

解:

$$D \xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例6 2007－2008第一学期，2010－2011第二学期，2011－2012第一学期

计算 $D = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$

例6 2007－2008第一学期，2010－2011第二学期，2011－2012第一学期

计算 $D = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$

解: （加边法）

- 当$x=0$时，$D=0$
- 当$x\neq 0$时，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-\frac{a_1}{x}r_2-\cdots-\frac{a_n}{x}r_{n+1}} \begin{vmatrix} 1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{x} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = x^{n-1}(x+\sum_{i=1}^{n} a_i)$$

例7 2008－2009第一学期

$$计算D=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

例8 2011－2012第二学期

计算 $D=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & x \end{vmatrix}$

例8 2011－2012第二学期

计算 $D=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & x \end{vmatrix}$

解:

$$D=(x+45)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & x \end{vmatrix}=(x+45)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & x-8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x-9 \end{vmatrix}$$

$$=(x+45)\begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x-8 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x-9 \end{vmatrix}=(x+45)(x-1)(x-2)\cdots(x-9)$$

例9 2012－2013第二学期

计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

例9 2012－2013第二学期

计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解: 可用加边法

例10 2007－2008第一学期，2010－2011第一学期

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$都是四维列向量，且四阶行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1| = m, \quad |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = n,$$

求四阶行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2|$

例10 2007－2008第一学期，2010－2011第一学期

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$都是四维列向量，且四阶行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1| = m,\ \ |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = n,$$

求四阶行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$

解:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2| &= |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1| + |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2| \\ &= |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1| - |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = m-n\end{aligned}$$

例11 2007－2008第二学期

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都是三维列向量，记三阶矩阵

$$\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \mathbf{B}=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3),$$

已知$|\mathbf{A}|=1$，求$|\mathbf{B}|$。

例11 2007－2008第二学期

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都是三维列向量，记三阶矩阵

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\ \ \mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

已知$|\mathbf{A}|=1$，求$|\mathbf{B}|$。

解: 因

$$\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$$

而

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&3&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&2\end{vmatrix}=2$$

故

$$|\mathbf{B}|=2|\mathbf{A}|=2.$$

例12 2008 − 2009第一学期

计算 $D = \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -cf \end{vmatrix}$

例12 2008－2009第一学期

计算 $D = \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -cf \end{vmatrix}$

解:

$$D = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -c \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ 0 & 0 & 2e \\ 0 & 2c & e-c \end{vmatrix}$$

$$= -adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ 0 & 2c & e-c \\ 0 & 0 & 2e \end{vmatrix} = -adf \cdot (-b) \cdot 2c \cdot 2e = 4abcdef$$

例13 2012－2013第二学期

计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

例13 2012－2013第二学期

计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

解:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot 10=30$$

例14 2013－2014第一学期

在n阶行列式D中，如果把第一列移到最后一列，而其余各列保持原来次序各向左移动了一列，得到行列式Δ，问Δ与D有何关系？

例14 2013－2014第一学期

在n阶行列式D中，如果把第一列移到最后一列，而其余各列保持原来次序各向左移动了一列，得到行列式Δ，问Δ与D有何关系？

解:

$$\Delta = (-1)^{n-1} D$$

1 第一章 行列式
- 知识点
- 往年试题

2 第二章 矩阵及其运算
- 往年试题

3 第三章 向量组 矩阵的秩
- 知识点
- 典型例题1 （线性相关性）
- 典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）
- 典型题型3 （非齐次线性方程组）

4 第四章 向量空间与线性变换
- 往年试题

5 第五章 特征值问题
- 知识点
- 往年试题

6 第六章 二次型
- 知识点

- 典型例题

1 第一章 行列式

2 第二章 矩阵及其运算
- 往年试题

3 第三章 向量组 矩阵的秩

4 第四章 向量空间与线性变换

5 第五章 特征值问题

6 第六章 二次型

2005-2006第一学期

已知$\mathbf{A}$为$n(n \geq 2)$矩阵，且$\mathbf{A}$非奇异，求$(\mathbf{A}^*)^*$。

2005-2006第一学期

已知$\mathbf{A}$为$n(n \geq 2)$矩阵，且$\mathbf{A}$非奇异，求$(\mathbf{A}^*)^*$。

解: 由$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*/|\mathbf{A}|$，可知$\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$，从而$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$。而

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}^*|(\mathbf{A}^*)^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}(|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1})^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

2005-2006第一学期, 2009-2010第一学期, 2010-2011第一学期, 2011-2012第一学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&6&a\end{pmatrix}$，且$\mathrm{r}(\mathbf{A})=2$，$\mathbf{X}$满足$\mathbf{AX}+\mathbf{I}=\mathbf{A}^2+\mathbf{X}$，求$a$和$\mathbf{X}$。

2005-2006第一学期, 2009-2010第一学期, 2010-2011第一学期, 2011-2012第一学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&6&a\end{pmatrix}$，且$\mathrm{r}(\mathbf{A})=2$，$\mathbf{X}$满足$\mathbf{AX}+\mathbf{I}=\mathbf{A}^2+\mathbf{X}$，求$a$和$\mathbf{X}$。

解: 因$\mathbf{A}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&a-1\end{pmatrix}$, 由$\mathrm{r}(\mathbf{A})=2$知$a=1$,故$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&6&1\end{pmatrix}$.

$$\mathbf{AX}+\mathbf{I}=\mathbf{A}^2+\mathbf{X}\quad\Rightarrow\quad(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}^2-\mathbf{I}=(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+\mathbf{I})$$

因$\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&6&0\end{pmatrix}$可逆，故

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&6&2\end{pmatrix}$$

2005-2006第一学期

设$\mathbf{A}$为n阶实矩阵，

(1) 当n为奇数且$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{I}$及$|\mathbf{A}|=1$时，证明$|\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$；

(2) 当m为任意给定正整数且$(\mathbf{A}+\mathbf{I})^m=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}$可逆。

2005-2006第一学期

设$\mathbf{A}$为n阶实矩阵，

(1) 当n为奇数且$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{I}$及$|\mathbf{A}|=1$时，证明$|\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$；

(2) 当m为任意给定正整数且$(\mathbf{A}+\mathbf{I})^m=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}$可逆。

证明:

(1) 由$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{I}$知$A^T=\mathbf{A}^{-1}$。又$\mathbf{I}-\mathbf{A}=(\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{I})\mathbf{A}=(\mathbf{A}^T-\mathbf{I})\mathbf{A}$，故

$$|\mathbf{I}-\mathbf{A}|=|\mathbf{A}^T-\mathbf{I}||\mathbf{A}|=|\mathbf{A}-\mathbf{I}|=(-1)^n=|\mathbf{I}-\mathbf{A}|$$

而n为奇数，于是 $|\mathbf{I}-\mathbf{A}|=-|\mathbf{I}-\mathbf{A}|$，即$|\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$。

2005-2006第一学期

设$\mathbf{A}$为n阶实矩阵，

(1) 当n为奇数且$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{I}$及$|\mathbf{A}|=1$时，证明$|\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$；

(2) 当m为任意给定正整数且$(\mathbf{A}+\mathbf{I})^m=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}$可逆。

证明:

(1) 由$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{I}$知$A^T=\mathbf{A}^{-1}$。又$\mathbf{I}-\mathbf{A}=(\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{I})\mathbf{A}=(\mathbf{A}^T-\mathbf{I})\mathbf{A}$，故

$$|\mathbf{I}-\mathbf{A}|=|\mathbf{A}^T-\mathbf{I}||\mathbf{A}|=|\mathbf{A}-\mathbf{I}|=(-1)^n=|\mathbf{I}-\mathbf{A}|$$

而n为奇数，于是 $|\mathbf{I}-\mathbf{A}|=-|\mathbf{I}-\mathbf{A}|$，即$|\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$。

(2) 由$(\mathbf{A}+\mathbf{I})^m=\mathbf{0}$，即$\mathbf{A}^m+C_m^{m-1}\mathbf{A}^{m-1}+\cdots++C_m^1\mathbf{A}+\mathbf{I}=\mathbf{0}$可知，

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{m-1}+C_m^{m-1}\mathbf{A}^{m-2}+\cdots+C_m^1\mathbf{I})=-\mathbf{I}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=-(\mathbf{A}^{m-1}+C_m^{m-1}\mathbf{A}^{m-2}+\cdots+C_m^1\mathbf{I}).$$

2005-2006第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，且$\mathbf{A}^2-\mathbf{AB}=\mathbf{I}$，

(1) 求$\mathbf{B}$；

(2) 令$\mathbf{C}=4\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2-2\mathbf{BA}+2\mathbf{AB}$，计算$\mathbf{C}^*$。

2005-2006第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，且$\mathbf{A}^2-\mathbf{AB}=\mathbf{I}$，

(1) 求$\mathbf{B}$；

(2) 令$\mathbf{C}=4\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2-2\mathbf{BA}+2\mathbf{AB}$，计算$\mathbf{C}^*$。

解:

(1) 由$\mathbf{A}^2-\mathbf{AB}=\mathbf{I}$知$\mathbf{AB}=\mathbf{A}^2-\mathbf{I}$。利用如下过程可求得$\mathbf{B}$:

$$\boxed{(\mathbf{A},\ \mathbf{A}^2-\mathbf{I})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\mathbf{I},\ \mathbf{B})}$$

易求得$\mathbf{A}^2-\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&0&2&1\\0&1&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&2&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) 易求得

$$\mathbf{C}=(2\mathbf{A}-\mathbf{B})(2\mathbf{A}+\mathbf{B})=\begin{pmatrix}4&8&4\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{C}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad |\mathbf{C}|=64.$$

故

$$\mathbf{C}^{*}=|\mathbf{C}|\mathbf{C}^{-1}=16\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2006-2007第一学期

设三阶方阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$，

(1) 若$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$且$\mathbf{A}^2=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}=\mathbf{0}$；并由反例说明一般情况下$\mathbf{A}^2=\mathbf{0}$得不出$\mathbf{A}=\mathbf{0}$；

(2) 若$\mathbf{A}$可逆，将其第二行的2倍加到第三行的矩阵为$\mathbf{B}$，问$\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$是否可逆？

2006-2007第一学期

设三阶方阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$，

(1) 若$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$且$\mathbf{A}^2=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}=\mathbf{0}$；并由反例说明一般情况下$\mathbf{A}^2=\mathbf{0}$得不出$\mathbf{A}=\mathbf{0}$；

(2) 若$\mathbf{A}$可逆，将其第二行的2倍加到第三行的矩阵为$\mathbf{B}$，问$\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$是否可逆？

解:

(1) 由条件知$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，而$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{ii}=a_{1i}^2+a_{2i}^2+\cdots+a_{ni}^2=0$，故$a_{ij}=0$，即$\mathbf{A}=\mathbf{0}$。

反例：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$，但$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2006-2007第一学期

设三阶方阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$，

(1) 若$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$且$\mathbf{A}^2=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}=\mathbf{0}$；并由反例说明一般情况下$\mathbf{A}^2=\mathbf{0}$得不出$\mathbf{A}=\mathbf{0}$；

(2) 若$\mathbf{A}$可逆，将其第二行的2倍加到第三行的矩阵为$\mathbf{B}$，问$\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$是否可逆？

解:

(1) 由条件知$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，而$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{ii}=a_{1i}^2+a_{2i}^2+\cdots+a_{ni}^2=0$，故$a_{ij}=0$，即$\mathbf{A}=\mathbf{0}$。

反例：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$，但$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

(2) 由题意知$\mathbf{B}=\mathbf{P}\mathbf{A}$，其中$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\0&3&1\end{pmatrix}$. 故

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}&=\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}-\mathbf{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\0&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\0&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\0&0&\\0&6&0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

显然不可逆。

2006-2007第二学期

设$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

(1) 求$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 - (\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2)$；

(2) 求$\mathbf{A}^{-1}$。

2006-2007第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

(1) 求$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2-(\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2)$；

(2) 求$\mathbf{A}^{-1}$。

解:

(1) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2-(\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2)=\mathbf{BA}-\mathbf{AB}=$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\8&6&6\\0&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&7&3\\-2&5&2\\-2&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-8&-3\\10&1&4\\2&-5&-2\end{pmatrix}$$

2006-2007第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

(1) 求$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2-(\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2)$；

(2) 求$\mathbf{A}^{-1}$。

解:

(1) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2-(\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2)=\mathbf{BA}-\mathbf{AB}=$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\8&6&6\\0&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&7&3\\-2&5&2\\-2&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-8&-3\\10&1&4\\2&-5&-2\end{pmatrix}$$

(2)

$$(\mathbf{A},\ \mathbf{I})=\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&-3&-1&-2&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&1&-1&1&0&-1\\0&0&-4&1&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

2006-2007第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，

(1) 求$4\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2-2\mathbf{BA}+2\mathbf{AB}$；

(2) 求$|\mathbf{A}^*|$。

2006-2007第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，

(1) 求$4\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2-2\mathbf{BA}+2\mathbf{AB}$；

(2) 求$|\mathbf{A}^*|$。

解:

(1) $4\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2-2\mathbf{BA}+2\mathbf{AB}=(2\mathbf{A}-\mathbf{B})(2\mathbf{A}+\mathbf{B})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -44 & -24 & -60 \\ -5 & -25 & 11 \end{pmatrix}$

2006-2007第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 4\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$，

(1) 求$4\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2-2\mathbf{BA}+2\mathbf{AB}$；

(2) 求$|\mathbf{A}^*|$。

解:

(1) $4\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2-2\mathbf{BA}+2\mathbf{AB}=(2\mathbf{A}-\mathbf{B})(2\mathbf{A}+\mathbf{B})=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -44 & -24 & -60\\ -5 & -25 & 11\end{pmatrix}$

(2) 因$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^2$，而 $|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & -5 & 3\\ 0 & 5 & -3\end{vmatrix}=0$， 故$|\mathbf{A}^*|=0$。

2007-2008第一学期

证明

(1) 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，证明：若$|\mathbf{A}|=0$，则$|\mathbf{A}^*|=0$；

(2) 设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为n阶方阵，且满足$\mathbf{A}^2=\mathbf{A},\mathbf{B}^2=\mathbf{B},\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{I})=n$，证明：$\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{B})$。

2007-2008第一学期

证明

(1) 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，证明：若$|\mathbf{A}|=0$，则$|\mathbf{A}^*|=0$；

(2) 设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为n阶方阵，且满足$\mathbf{A}^2=\mathbf{A},\mathbf{B}^2=\mathbf{B},\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{I})=n$，证明：$\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{B})$。

证明:

(1) $|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}=0$；

2007-2008第一学期

证明

(1) 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，证明：若$|\mathbf{A}|=0$，则$|\mathbf{A}^*|=0$；

(2) 设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为n阶方阵，且满足$\mathbf{A}^2=\mathbf{A},\mathbf{B}^2=\mathbf{B},\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{I})=n$，证明：$\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{B})$。

证明:

(1) $|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}=0$；

(2) 由$\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{I})=n$知$\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{I}$可逆。故

$$\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{A}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{I}))=\mathrm{r}(\mathbf{AB})$$

$$\mathrm{r}(\mathbf{B})=\mathrm{r}((\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{I})\mathbf{B})=\mathrm{r}(\mathbf{AB})$$

于是$\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{B})$。

2007-2008第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{AC}-\mathbf{I}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$，求$\mathbf{C}$。

2007-2008第二学期

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&0\\2&1&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\2&-1&4\\0&-1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{AC}-\mathbf{I}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$，求$\mathbf{C}$。

解: 由题意可知$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{C}=\mathbf{B}+\mathbf{I}$,

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I},\mathbf{B}+\mathbf{I})=\begin{pmatrix}1&-1&1&1&2&-3\\1&1&0&2&0&4\\2&1&1&0&-1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&1&2&-3\\0&2&-1&1&-2&7\\0&3&-1&-2&-5&11\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1&1&2&-3\\0&2&-1&1&-2&7\\0&0&1&-7&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&8&6&-4\\0&1&0&-3&-3&4\\0&0&1&-7&-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&8&6&-4\\0&1&0&-3&-3&4\\0&0&1&-7&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&5&3&0\\0&1&0&-3&-3&4\\0&0&1&-7&-4&1\end{pmatrix}$$

2008-2009第一学期

设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$为三阶方阵，满足$\mathbf{AB} + \mathbf{I} = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}$，且$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$\mathbf{B}$及$\mathbf{B}^*$。

2008-2009第一学期

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为三阶方阵，满足$\mathbf{AB}+\mathbf{I}=\mathbf{A}^2+\mathbf{B}$，且$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求$\mathbf{B}$及$\mathbf{B}^*$。

解: 依题意可知

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{B}=\mathbf{A}^2-\mathbf{I}=(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+\mathbf{I}),$$

而$\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$非奇异，故

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

2009-2010第一学期

计算下列各题：

(1) 已知$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}^{2010}$；

(2) 设$n(n\geq 2)$阶方阵$\mathbf{A}$非奇异，求$(\mathbf{A}^*)^*$。

2009-2010第一学期

计算下列各题：

(1) 已知$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}^{2010}$；

(2) 设$n(n\geq 2)$阶方阵$\mathbf{A}$非奇异，求$(\mathbf{A}^*)^*$。

解:

(1) 由$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=(a+b+c-\lambda)\lambda^2=0$知，特征值为$\lambda_{1,2}=0$与$\lambda_3=a+b+c$。

- $\lambda_{1,2}=0$，方程为$x+y+z=0$，基础解系为$\boxed{\mathbf{x}_1=(-1,1,0)^T,\mathbf{x}_2=(-1,0,1)^T}$。
- $\lambda_3=a+b+c$，方程为$\begin{pmatrix} -b-c & a & a \\ b & -a-c & b \\ c & c & -a-b \end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$，基础解系为$\boxed{\mathbf{x}_3=(a,b,c)^T}$。

故

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & a+b+c\end{pmatrix}$$

从而

$$\mathbf{A}^{2010}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & a+b+c\end{pmatrix}^{2010}\mathbf{P}^{-1}$$

其中

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & a\\ 1 & 0 & b\\ 0 & 1 & c\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{a+b+c}\begin{pmatrix}-b & a+c & -b\\ -c & -c & a+b\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{2010}=(a+b+c)^{2009}\begin{pmatrix}a & a & a\\ b & b & b\\ c & c & c\end{pmatrix}$$

2009-2010第一学期，2011-2012第二学期

设三阶方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{AX} = \mathbf{A} + 2\mathbf{X}$，且$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求$\mathbf{X}$。

2009-2010第一学期，2011-2012第二学期

设三阶方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{AX}=\mathbf{A}+2\mathbf{X}$，且$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，求$\mathbf{X}$。

解: 依题意可知$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}$，解此矩阵方程即可求得$\mathbf{X}$。

2009-2010第一学期，2011-2012第二学期

设三阶方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{AX}=\mathbf{A}+2\mathbf{X}$，且$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，求$\mathbf{X}$。

解: 依题意可知$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}$，解此矩阵方程即可求得$\mathbf{X}$。

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I},\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&2&0&1&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}$$

2009-2010第二学期

已知矩阵方程满足$(2\mathbf{I}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{A}^T=\mathbf{C}^{-1}$，求$\mathbf{A}$，其中

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

2009-2010第二学期

已知矩阵方程满足$(2\mathbf{I}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{A}^T=\mathbf{C}^{-1}$，求$\mathbf{A}$，其中

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

解: 依题意知$\mathbf{A}^T=(2\mathbf{I}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}^{-1}=(\mathbf{C}(2\mathbf{I}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}))^{-1}=(2\mathbf{C}-\mathbf{B})^{-1}$

$$(2\mathbf{C}-\mathbf{B},\ \mathbf{I})=\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&0&1&0&0&-4\\0&1&2&0&0&1&0&-3\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0&-3&2\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

2012-2013第二学期

已知$\mathbf{A}$为三阶矩阵，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，且满足$2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{B}-4\mathbf{I}$，$\mathbf{I}$为三阶单位矩阵，求矩阵$\mathbf{A}$。

2012-2013第二学期

已知$\mathbf{A}$为三阶矩阵，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，且满足$2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{B}-4\mathbf{I}$，$\mathbf{I}$为三阶单位矩阵，求矩阵$\mathbf{A}$。

解: 依题意$\mathbf{A}(\mathbf{B}-4\mathbf{I})=2\mathbf{B}$，可用$\boxed{\begin{pmatrix}\mathbf{B}-4\mathbf{I}\\ 2\mathbf{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}\mathbf{I}\\ \mathbf{A}\end{pmatrix}}$求$\mathbf{A}$。

$$\begin{pmatrix}\mathbf{B}-4\mathbf{I}\\ 2\mathbf{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 2 & -4 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

2012-2013第二学期

设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵$\mathbf{B}$满足$\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{A}=2\mathbf{B}\mathbf{A}-9\mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$。

2012-2013第二学期

设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵$\mathbf{B}$满足$\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{A}=2\mathbf{B}\mathbf{A}-9\mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$。

解: 易知$|\mathbf{A}|=-1$，即$\mathbf{A}$可逆，由$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{I}=-\mathbf{I}$可得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{A}=2\mathbf{B}\mathbf{A}-9\mathbf{I} \ \Rightarrow \ \mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{A}=\mathbf{A}(2\mathbf{B}\mathbf{A}-9\mathbf{I})$$

$$\Rightarrow \ -\mathbf{B}\mathbf{A}=2\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}-9\mathbf{A} \ \Rightarrow \ -\mathbf{B}=2\mathbf{A}\mathbf{B}-9\mathbf{I} \ \Rightarrow \ (2\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{B}=9\mathbf{I}$$

$$(2\mathbf{A}+\mathbf{I},9\mathbf{I})=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2012-2013第二学期

设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，

(1) 求$\mathbf{A}^n$；

(2) 设$\mathbf{A}^2+\mathbf{AB}-\mathbf{A}=\mathbf{I}$，求$|\mathbf{B}|$。

2012-2013第二学期

设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求$\mathbf{A}^n$;

(2) 设$\mathbf{A}^2+\mathbf{AB}-\mathbf{A}=\mathbf{I}$，求$|\mathbf{B}|$。

解:

(1) 求矩阵的特征值与特征向量。

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$$

- 当$\lambda_{1,2,3}=2$时，$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$

基础解系为

$$\mathbf{x}_1=(-1,1,0,0)^T,\ \ \mathbf{x}_2=(-1,0,1,0)^T,\ \ \mathbf{x}_3=(-1,0,0,1)^T.$$

故对应于$\lambda_{1,2,3}=2$的特征向量为$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2+k_3\mathbf{x}_3,(k_1,k_2,k_3$不全为零);

- 当$\lambda_4=-2$时，$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应方程为

$$\begin{cases} x_1=x_4 \\ x_2=x_4 \\ x_3=x_4 \\ x_4=x_4 \end{cases}$$

基础解系为

$$\mathbf{x}_3=(1,1,1,1)^T$$

取

$$\mathbf{P}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

则 $\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，即

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},$$

从而

$$\mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}=2^n\mathbf{P}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&(-1)^n\end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

当n为偶数时，$\mathbf{A}^n=2^n\mathbf{I}$ 当n为奇数时，$\mathbf{A}^n=2^n\mathbf{P}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$ 而

$\mathbf{A}=2\mathbf{P}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$ 故 $\mathbf{A}^n=2^{n-1}\mathbf{A}$。

(2) 依题意，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \mathbf{I} - \mathbf{A} + 4\mathbf{I} = -\mathbf{A} + 5\mathbf{I}$$

故

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |-\mathbf{A} + 5\mathbf{I}|$$

即

$$-16|\mathbf{B}| = |\mathbf{A} - 5\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 189$$

故

$$|\mathbf{B}| = -\frac{189}{16}.$$

1 第一章 行列式
- 知识点
- 往年试题

2 第二章 矩阵及其运算
- 往年试题

3 第三章 向量组 矩阵的秩
- 知识点
- 典型例题1 （线性相关性）
- 典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）
- 典型题型3 （非齐次线性方程组）

4 第四章 向量空间与线性变换
- 往年试题

5 第五章 特征值问题
- 知识点
- 往年试题

6 第六章 二次型
- 知识点

- 典型例题

1 第一章 行列式

2 第二章 矩阵及其运算

3 第三章 向量组 矩阵的秩
- 知识点
- 典型例题1 （线性相关性）
- 典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）
- 典型题型3 （非齐次线性方程组）

4 第四章 向量空间与线性变换

5 第五章 特征值问题

6 第六章 二次型

线性相关性

设$m \times n$矩阵$\mathbf{A}$按列分块为

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

其中$\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$为$m$维列向量，则线性组合

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

可表示为矩阵形式

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

线性相关性与齐次线性方程组的解

重要结论1

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性相关，等价于齐次方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

有非零解，也等价于

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) < n = \text{矩阵}\mathbf{A}\text{的列数}.$$

线性相关性与齐次线性方程组的解

重要结论2

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，等价于齐次方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

只有零解，也等价于

$$\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n=\text{矩阵}\mathbf{A}\text{的列数}.$$

线性表示与非齐次线性方程组的解

重要结论3

向量$\mathbf{b}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，等价于方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

有解，也等价于

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}).$$

线性表示与非齐次线性方程组的解

重要结论4

向量$\mathbf{b}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$惟一地线性表示，等价于方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

有惟一解，也等价于

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\text{的列数}.$$

线性相关性

重要结论5

关于向量组的线性相关性，有如下结论：

- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。
-

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{相关}$$

向量组和矩阵的秩

向量组的秩

设有向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$。如果能从其中选出$r$个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，满足

- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关；
- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任意$r+1$个向量都线性相关，

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

极大线性无关组所含向量的个数r，称为原向量组的秩。

矩阵的秩

矩阵的行秩或列秩的数值，称为矩阵的秩。

向量组的秩

重要结论6

设

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = p, \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r,$$

如果向量组B: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由$A$: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，则

$$r \leq p.$$

以上结论中，向量组B: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可看作是向量组$A$: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$的一个线性组合。由此可知

★★★★★

对向量组进行线性组合，秩不变或减少。

矩阵的秩

性质1

$$\max\{\mathrm{r}(\mathbf{A}),\ \mathrm{r}(\mathbf{B})\} \ \le\ \mathrm{r}(\mathbf{A},\ \mathbf{B}) \ \le\ \mathrm{r}(\mathbf{A})+\mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) \ \le\ \mathrm{r}(\mathbf{A},\ \mathbf{b}) \ \le\ \mathrm{r}(\mathbf{A})+1.$$

设$\mathrm{r}(\mathbf{A})=p$, $\mathrm{r}(\mathbf{B})=q$， $\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$的列向量组可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$线性表示。

矩阵的秩

注

- $$\min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\} \le r(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$
  意味着：在**A**的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当**B**的列向量能被**A**的列向量线性表示时，等号成立。

- $$r(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \le r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$$
  意味着：对$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$，有可能**A**的列向量与**B**的列向量出现线性相关，合并为$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$的秩一般会比$r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$要小。

矩阵的秩

性质2

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A})+\mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

设$\mathrm{r}(\mathbf{A})=p$, $\mathrm{r}(\mathbf{B})=q$， $\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

矩阵的秩

性质2

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A})+\mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

设$\mathrm{r}(\mathbf{A})=p$, $\mathrm{r}(\mathbf{B})=q$， $\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然$\mathbf{A}+\mathbf{B}$的列向量组可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$线性表示。

注

将矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$合并、相加，秩不变或减小。

矩阵的秩

性质3

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \leq \min(\mathrm{r}(\mathbf{A}),\ \mathrm{r}(\mathbf{B})).$$

矩阵的秩

性质3

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \le \min(\mathrm{r}(\mathbf{A}), \ \mathrm{r}(\mathbf{B})).$$

证明： 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$分别为$m \times n, n \times s$矩阵，将$\mathbf{A}$按列分块，则

$$\mathbf{AB} = (\alpha_1, \ \cdots, \ \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\mathbf{AB}$的列向量组可由$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \cdots, \ \alpha_n$线性表示，故

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) = \mathbf{AB}\text{的列秩} \le \mathbf{A}\text{的列秩} = \mathrm{r}(\mathbf{A}).$$

矩阵的秩

性质3

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \le \min(\mathrm{r}(\mathbf{A}),\ \mathrm{r}(\mathbf{B})).$$

证明: 设$\mathbf{A},\mathbf{B}$分别为$m\times n, n\times s$矩阵，将$\mathbf{A}$按列分块，则

$$\mathbf{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\mathbf{AB}$的列向量组可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，故

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) = \mathbf{AB}\text{的列秩} \le \mathbf{A}\text{的列秩} = \mathrm{r}(\mathbf{A}).$$

类似地，将$\mathbf{B}$按行分块，可得

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \le \mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

矩阵的秩

性质4

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$分别为m阶、n阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{PA}) = \mathrm{r}(\mathbf{AQ}) = \mathrm{r}(\mathbf{PAQ}).$$

齐次线性方程组解的结构

定义(基础解系)

设$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$为$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$的解向量，若

(1) $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$线性无关

(2) $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$的任一解向量可由$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$线性表示。

则称$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$为$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$的一个基础解系。

★★★★★

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，若$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r<n$，则齐次线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$存在基础解系， 且基础解系含$n-r$个解向量。

齐次线性方程组的全部解可由基础解系给出：

$$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2+\cdots+k_p\mathbf{x}_p \quad (k_1,k_2,\cdots,k_p\text{为任意常数}).$$

非齐次线性方程组

非齐次线性方程组解的结构

“$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的通解” $=$ “$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的通解” $+$ “$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的特解”

几类重要的矩阵

阶梯形矩阵

若矩阵$\mathbf{A}$满足

(1) 零行在最下方；

(2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增，

则称$\mathbf{A}$为阶梯形矩阵。

几类重要的矩阵

阶梯形矩阵

若矩阵$\mathbf{A}$满足

(1) 零行在最下方；

(2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增，

则称$\mathbf{A}$为阶梯形矩阵。

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

几类重要的矩阵

行简化阶梯形矩阵

若矩阵$\mathbf{A}$满足

(1) 它是阶梯形矩阵；

(2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外，其余元素全为零，

则称$\mathbf{A}$为行简化阶梯形矩阵。

几类重要的矩阵

行简化阶梯形矩阵

若矩阵$\mathbf{A}$满足

(1) 它是阶梯形矩阵；

(2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外，其余元素全为零，

则称$\mathbf{A}$为行简化阶梯形矩阵。

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 第一章 行列式
2. 第二章 矩阵及其运算
3. 第三章 向量组 矩阵的秩
   - 知识点
   - 典型例题1 （线性相关性）
   - 典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）
   - 典型题型3 （非齐次线性方程组）
4. 第四章 向量空间与线性变换
5. 第五章 特征值问题
6. 第六章 二次型

典型例题1 （线性相关性）

例1 2007-2008第一学期，2010-2011第一学期

若有不全为零的数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$使得$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m + \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\beta}_m = \mathbf{0}$ 成立，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$也线性相关。试讨论该结论是否正确?

典型例题1 （线性相关性）

例1 2007-2008第一学期，2010-2011第一学期

若有不全为零的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$使得$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$ 成立，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$也线性相关。试讨论该结论是否正确?

该题可转换为：

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}\text{有非零解} \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}\text{和}\mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{0}\text{都有非零解}$$

典型例题1 （线性相关性）

例2 2007-2008第二学期

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{B}$为$n\times m$矩阵，$\mathbf{I}$为单位矩阵，易知$\mathbf{BA}=\mathbf{I}$，试判断$\mathbf{A}$的列向量组是否线性相关？为什么？

典型例题1 （线性相关性）

例2 2007-2008第二学期

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{B}$为$n\times m$矩阵，$\mathbf{I}$为单位矩阵，易知$\mathbf{BA}=\mathbf{I}$，试判断$\mathbf{A}$的列向量组是否线性相关？为什么？

解: 一方面

$$\mathrm{r}(\mathbf{A})\geq \mathrm{r}(\mathbf{BA})=n,$$

另一方面

$$\mathrm{r}(\mathbf{A})\leq n$$

故$\mathrm{r}(\mathbf{A})=n$，于是$\mathbf{A}$的列向量组线性无关。

典型例题1 （线性相关性）

例2 2007-2008第二学期

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{B}$为$n\times m$矩阵，$\mathbf{I}$为单位矩阵，易知$\mathbf{BA}=\mathbf{I}$，试判断$\mathbf{A}$的列向量组是否线性相关？为什么？

解: 一方面

$$\mathrm{r}(\mathbf{A})\geq \mathrm{r}(\mathbf{BA})=n,$$

另一方面

$$\mathrm{r}(\mathbf{A})\leq n$$

故$\mathrm{r}(\mathbf{A})=n$，于是$\mathbf{A}$的列向量组线性无关。

例3 2012-2013第二学期

设$\mathbf{A}$为$n\times m$矩阵，$\mathbf{B}$为$m\times n$矩阵，$n<m$且$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$，证明$\mathbf{B}$的列向量组线性无关。

典型例题1 （线性相关性）

例4 2008-2009第一学期

证明：与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系。

典型例题1 （线性相关性）

例4 2008-2009第一学期

证明：与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系。

证明: 设$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为基础解系，$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是$A$的等价组，且线性无关。由于$B$等价于$A$，故$A,B$可以互相线性表示。因$A$为基础解系，齐次线性方程组的全部解能由$A$线性表示，而$A$可由$B$线性表示，故齐次线性方程组的全部解能由$B$线性表示。注意到$r(A)=r$和$r(B=s)$，而$A$与$B$等价，故$r(A)=r(B)$，即$r=s$。综上所述，$B$也为基础解系。

典型例题1 （线性相关性）

例5 2009-2010第一学期

已知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，

1 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是否线性无关，并说明理由。

2 常数l, m满足何种条件时，$l\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, m\alpha_3 + \alpha_1$线性无关，并说明理由。

典型例题1 （线性相关性）

例5 2009-2010第一学期

已知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，

1. 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是否线性无关，并说明理由。
2. 常数l, m满足何种条件时，$l\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, m\alpha_3 + \alpha_1$线性无关，并说明理由。

证明:

1. 整体无关，则部分无关。
2. 设$x_1(l\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + x_3(m\alpha_3 + \alpha_1) = \mathbf{0}$ 即

$$(lx_1 + x_3)\alpha_1 + (x_1 + x_2)\alpha_2 + (x_2 + mx_3)\alpha_3 = \mathbf{0}$$

由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，故

$$\begin{cases} lx_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + mx_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解。

1 第一章 行列式

2 第二章 矩阵及其运算

3 第三章 向量组 矩阵的秩
- 知识点
- 典型例题1 （线性相关性）
- 典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）
- 典型题型3 （非齐次线性方程组）

4 第四章 向量空间与线性变换

5 第五章 特征值问题

6 第六章 二次型

典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）

★★★★★

设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}2\\6\\4\\-1\end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）

★★★★★

设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}2\\6\\4\\-1\end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解： 作矩阵$\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，由

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div 3}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&-1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\mathbf{B}$$

将最后一个阶梯矩阵$\mathbf{B}$记为$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$

典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

将最后一个阶梯矩阵$\mathbf{B}$记为$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4, \boldsymbol{\beta}_5)$

易知$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_4$为$\mathbf{B}$的列向量组的一个极大无关组，故$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$也为$\mathbf{A}$的列向量组的一个极大无关组，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5) = 3,$$

且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \\ \boldsymbol{\alpha}_5 &= \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_4, \end{aligned}$$

★★★★★

设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,k,4)$， 试求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的秩，并将$\boldsymbol{\alpha}_4$用$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

★★★★★

设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,k,4)$， 试求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的秩， 并将$\boldsymbol{\alpha}_4$用$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

解: 将4个向量按列排成一个矩阵$\mathbf{A}$，对$\mathbf{A}$进行初等变换，将其化为阶梯形矩阵$\mathbf{U}$，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}=\mathbf{U}$$

★★★★★

设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,k,4)$， 试求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的秩， 并将$\boldsymbol{\alpha}_4$用$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

解: 将4个向量按列排成一个矩阵$\mathbf{A}$，对$\mathbf{A}$进行初等变换，将其化为阶梯形矩阵$\mathbf{U}$，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}=\mathbf{U}$$

(1) 当$a=1$或$k=2$时，$\mathbf{U}$只有3个非零行，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{r}(\mathbf{A})=3.$$

★★★★★

设$\alpha_1=(1,3,1,2)$，$\alpha_2=(2,5,3,3)$，$\alpha_3=(0,1,-1,a)$，$\alpha_4=(3,10,k,4)$， 试求向量组α_1，α_2，α_3，α_4的秩， 并将α_4用α_1，α_2，α_3线性表示。

解: 将4个向量按列排成一个矩阵$\mathbf{A}$，对$\mathbf{A}$进行初等变换，将其化为阶梯形矩阵$\mathbf{U}$，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}=\mathbf{U}$$

(1) 当$a=1$或$k=2$时，$\mathbf{U}$只有3个非零行，故

$$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\mathrm{r}(\mathbf{A})=3.$$

(2) 当$a\neq 1$且$k\neq 2$时，

$$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\mathrm{r}(\mathbf{A})=4.$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

- 当$k=2$且$a\neq 1$时，$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示， 且

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{1+5a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2+a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{3}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

- 当$k=2$且$a\neq 1$时，$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示， 且

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{1+5a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2+a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{3}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

- 当$k\neq 2$或$a=1$时，$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

★★★★★

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知$\mathrm{r}(\mathbf{A})=2$，求t。

★★★★★

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2$，求$t$。

解:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

★★★★★

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&-2\\-1&t&5\\1&0&-3\end{pmatrix}$$

已知$\mathrm{r}(\mathbf{A})=2$，求t。

解:

$$\mathbf{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-2&-4\\0&2+t&6\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathbf{B}$$

由于$\mathrm{r}(\mathbf{B})=\mathrm{r}(\mathbf{A})$，故$\mathbf{B}$中第2、3行必须成比例，即

$$\frac{-2}{2+t}=\frac{-4}{6},$$

即得$t=1$。

典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）

例1 2005-2006第二学期

设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 2, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, 1, -1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, 0, 1), \boldsymbol{\alpha}_4 = (4, 1, 3, 1),$$

求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$的秩和一个极大无关组。

例2 2006-2007第二学期

计算向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -2, 3, -1, 2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 2, -2, -3)^T,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (5, 0, 7, -5, -4)^T, \boldsymbol{\alpha}_4 = (3, -1, 5, -3, -1)^T$$

的秩和一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）

例3 2007-2008第二学期

计算向量组

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(-8,4,8)^T,\boldsymbol{\xi}_3=(2,-1,-2)^T,\boldsymbol{\xi}_4=(10,5,6)^T$$

的秩和一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

例4 2008-2009第一学期

计算向量组

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,2,1)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(2,0,1,-1)^T,\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,0,1)^T,\boldsymbol{\xi}_4=(4,1,3,1)^T$$

的秩和一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）

例5 2008-2009第一学期

计算向量组

$$\xi_1=(1,1,0)^T,\xi_2=(0,1,1)^T,\xi_3=(1,1,1)^T,\xi_4=(1,2,1)^T$$

的秩和一个极大无关组，并给出向量组中不能由其余向量线性表示的向量。

例6 2009-2010第一学期

已知线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$存在两个不同的解，其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}.$$

1 求λ, a.

2 求其通解。

典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）

例7 2009-2010第一学期

设有向量组

$$\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T,\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T,\beta=(1,3,-3)^T,$$

讨论当a,b为何值时，

1. β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；
2. β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$惟一地线性表示，并求出表示式；
3. β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）

例8 2012-2013第二学期

已知$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix}$问$a,b$为何值时，

1. $\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；
2. $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$惟一地线性表示，并求出表示式；
3. $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式；
4. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，并在此时求它的秩和一个最大无关组，且用该最大无关组表示其余向量。

1 第一章 行列式

2 第二章 矩阵及其运算

3 第三章 向量组 矩阵的秩
- 知识点
- 典型例题1 （线性相关性）
- 典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）
- 典型题型3 （非齐次线性方程组）

4 第四章 向量空间与线性变换

5 第五章 特征值问题

6 第六章 二次型

典型题型3 （非齐次线性方程组）

★★★★★

设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +(1+\lambda)x_3 & = & \lambda \end{cases}$$

问λ取何值时，此方程组

(1) 有唯一解?

(2) 无解?

(3) 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解。

典型题型3 （非齐次线性方程组）

★★★★★

设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +(1+\lambda)x_3 & = & \lambda \end{cases}$$

问λ取何值时，此方程组

(1) 有唯一解？

(2) 无解？

(3) 有无穷多解？ 并在有无穷多解时求其通解。

解:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2.$$

故当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq -3$时，有唯一解。

典型题型3 （非齐次线性方程组）

当$\lambda = 0$时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

典型题型3 （非齐次线性方程组）

当$\lambda=0$时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

当$\lambda=-3$时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

典型题型3 (非齐次线性方程组)

当$\lambda=0$时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

当$\lambda=-3$时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_3-1 \\ x_2=x_3-2 \\ x_3=x_3 \end{cases}$$

典型题型3 （非齐次线性方程组）

当$\lambda=0$时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

当$\lambda=-3$时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_3-1 \\ x_2=x_3-2 \\ x_3=x_3 \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c\in\mathbb{R}$$

典型题型3 （非齐次线性方程组）

例1（2005-2006第一学期）

已知$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix}$，问$\lambda$为何值时，该方程组有唯一解、无解或无穷多解？并在有无穷多解时求其解。

例2（2005-2006第二学期；2006-2007第二学期）

设线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+\lambda_2+x_3 &= 3 \\ x_1+x_2+x_3 &= \lambda-1 \end{cases}$，问$\lambda$为何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在无穷多解时求出其通解。

典型题型3 （非齐次线性方程组）

例3（2006-2007第一学期）

当a,b为何值时，方程组$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & a+8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b+7 \end{pmatrix}$有唯一解、无解或无穷多解？在有解时，给出方程组的解。

例4（2007-2008第一学期，2010-2011第二学期）

设线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3 & = & \lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3 & = & -2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3 & = & -2 \end{cases}$，问$\lambda$为何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在无穷多解时求出其通解。

典型题型3 （非齐次线性方程组）

例5（2008-2009第一学期）

设线性方程组$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$，问$\lambda$为何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在无穷多解时求出其通解。

例6（2009-2010第一学期）

设线性方程组$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix}$，问$\lambda$为何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在无穷多解时求出其通解。

典型题型3 （非齐次线性方程组）

例7（2009-2010第一学期）

设线性方程组$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$，问$a, b$为何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在无穷多解时求出其通解。

例8（2011-2012第一学期）

已知线性方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$存在两个不同的解，其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形，对λ进行讨论，并在无穷多解时求其通解。

典型题型3 （非齐次线性方程组）

例9（2011-2012第二学期）

已知线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & a & 7 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$. 就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形，对a,b进行讨论，并在无穷多解时求其通解。

例10（2012-2013第二学期）

已知线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & \lambda-5 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 2-\lambda & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} \lambda+1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形，对λ进行讨论，并在无穷多解时求其通解。

典型题型3 （非齐次线性方程组）

例11（2013-2014第一学期）

已知线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2b \end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2b \end{pmatrix}.$$

就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形，对a,b进行讨论，并在无穷多解时求其通解。

1 第一章 行列式
- 知识点
- 往年试题

2 第二章 矩阵及其运算
- 往年试题

3 第三章 向量组 矩阵的秩
- 知识点
- 典型例题1 （线性相关性）
- 典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）
- 典型题型3 （非齐次线性方程组）

4 第四章 向量空间与线性变换
- 往年试题

5 第五章 特征值问题
- 知识点
- 往年试题

6 第六章 二次型
- 知识点

- 典型例题

基与坐标

定义（$\mathbb{R}^n$的基与向量关于基的坐标）

设有序向量组$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\subset\mathbb{R}^n$，如果$B$线性无关，则$\mathbb{R}^n$中任一向量$\boldsymbol{\alpha}$均可由$B$线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

称B为$\mathbb{R}^n$的一组基，有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是向量$\boldsymbol{\alpha}$在基B下的坐标，记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\ \text{或}\ \boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

并称之为$\boldsymbol{\alpha}$的坐标向量。

基与坐标

注

- $\mathbb{R}^n$的基不是唯一的
- 基本向量组
$$\boldsymbol{\epsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
称为$\mathbb{R}^n$的自然基或标准基。
- 本书对于向量及其坐标，采用列向量的形式，即
$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

基与坐标

定理

设$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是$\mathbb{R}^n$的一组基，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\eta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\eta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases}$$

则$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$线性无关的充要条件是

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

基与坐标

设$\mathbb{R}^n$的两组基$B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$和$B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基B_1到新基B_2的过渡矩阵。

基与坐标

定理

设$\boldsymbol{\alpha}$在两组基$B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$与$B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$的坐标分别为

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad 和 \quad \mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

基B_1到B_2的过渡矩阵为$\mathbf{A}$，则

$$\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{x} \quad 或 \quad \mathbf{y}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

基与坐标

例1

已知$\mathbb{R}^3$的一组基为$B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T,$$

求自然基B_1到B_2的过渡矩阵。

基与坐标

例2

已知$\mathbb{R}^3$的两组基为$B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$和$B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$， 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^T.$$

(1) 求基B_1到B_2的过渡矩阵。

(2) 已知α在基B_1的坐标为$(1,-2,-1)^T$，求$\boldsymbol{\alpha}$在基B_2下的坐标。

内积

定义（内积）

在$\mathbb{R}^n$中，对于$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$和$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，规定$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

当$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$为列向量时，

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}.$$

内积

内积的运算性质

对于$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$和$k \in \mathbb{R}$，

(i) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$， 等号成立当且仅当$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

内积

内积的运算性质

对于$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$和$k \in \mathbb{R}$，

(i) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$， 等号成立当且仅当$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

定义（向量长度）

向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$$

内积

定理（柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式）

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

定义（向量之间的夹角）

向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$之间的夹角定义为

$$< \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} >= \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理

$$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \iff (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

定理（三角不等式）

$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|.$$

标准正交基

定理

$\mathbb{R}^n$中两两正交且不含零向量的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是线性无关的。

定义（标准正交基）

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in\mathbb{R}^n$，若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}\qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

则称$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基。

标准正交基

例1

设$B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$是$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基，求$\mathbb{R}^n$中向量$\boldsymbol{\beta}$在基$B$下的坐标。

解:

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n \\
\Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_j)=x_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j) \\
\Longrightarrow\quad & x_j=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)
\end{aligned}
$$

施密特正交化过程

目标

从线性无关的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$出发，构造标准正交向量组。

施密特正交化过程

施密特（Schmidt）正交化过程

给定$\mathbb{R}^n$中的线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

施密特正交化过程

施密特（Schmidt）正交化过程

给定$\mathbb{R}^n$中的线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1)
$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$$

(2)
$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

(3)
$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

(4)
$$\cdots\cdots$$

(5)
$$\boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_m - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_{m-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{m-1}, \boldsymbol{\beta}_{m-1})}\boldsymbol{\beta}_{m-1}.$$

则$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$两两正交。

施密特正交化过程

施密特（Schmidt）正交化过程

(5) 单位化

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m \xrightarrow{\eta_j = \frac{\boldsymbol{\beta}_j}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}} \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$$

施密特正交化过程

例

已知$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

施密特正交化过程

例

已知$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解:

$$\boldsymbol{\beta}_1 \quad =\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,$$

施密特正交化过程

例

已知$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\end{aligned}$$

施密特正交化过程

例

已知$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\ &= (1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\end{aligned}$$

施密特正交化过程

例

已知$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\ \ \alpha_2=(1,0,1)^T,\ \ \alpha_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1=(1,-1,0)^T,\\
\beta_2 &= \alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\\
&=(1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\beta_3 &= \alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2
\end{aligned}$$

施密特正交化过程

例

已知$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&=(1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\
&=(1,-1,1)^T-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T-\frac{2}{2}(1,-1,0)^T=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

施密特正交化过程

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

正交矩阵

定义

设$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，如果

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

则称$\mathbf{A}$为正交矩阵。

定理

$\mathbf{A}$为正交矩阵 $\iff$ $\mathbf{A}$的列向量组为一组标准正交基。

正交矩阵

定理

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$皆为n阶正交矩阵，则

(1) $|\mathbf{A}|=1$ 或 -1

(2) $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$

(3) $\mathbf{A}^T$也是正交矩阵

(4) $\mathbf{AB}$也是正交矩阵

定理

若列向量$\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$在$n$阶正交矩阵$\mathbf{A}$的作用下变换为$\mathbf{Ax},\mathbf{Ay}\in\mathbb{R}^n$，则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变.

1 第一章 行列式

2 第二章 矩阵及其运算

3 第三章 向量组 矩阵的秩

4 第四章 向量空间与线性变换
- 往年试题

5 第五章 特征值问题

6 第六章 二次型

13-14上

在R^4中，已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2-a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

1. 求a使得$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$为$\mathrm{R}^4$的基；
2. 求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵$\mathbf{P}$.

1 第一章 行列式
- 知识点
- 往年试题

2 第二章 矩阵及其运算
- 往年试题

3 第三章 向量组 矩阵的秩
- 知识点
- 典型例题1 （线性相关性）
- 典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）
- 典型题型3 （非齐次线性方程组）

4 第四章 向量空间与线性变换
- 往年试题

5 第五章 特征值问题
- 知识点
- 往年试题

6 第六章 二次型
- 知识点

- 典型例题

1 第一章 行列式

2 第二章 矩阵及其运算

3 第三章 向量组 矩阵的秩

4 第四章 向量空间与线性变换

5 第五章 特征值问题
- 知识点
- 往年试题

6 第六章 二次型

特征值与特征向量

定义（特征值与特征向量）

设$\mathbf{A}$为复数域$\mathbb{C}$上的n阶矩阵，如果存在数$\lambda \in \mathbb{C}$和非零的n维向量$\mathbf{x}$使得

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

则称λ为矩阵$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{x}$为$\mathbf{A}$的对应于特征值λ的特征向量。

(1) 特征向量$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$；

(2) 特征值问题是对方针而言的。

特征值与特征向量

由定义，n阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值，就是使齐次线性方程组

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

有非零解的λ值，即满足方程

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$$

的λ都是矩阵$\mathbf{A}$的特征值。

特征值与特征向量

由定义，n阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值，就是使齐次线性方程组

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

有非零解的λ值，即满足方程

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$$

的λ都是矩阵$\mathbf{A}$的特征值。

特征值与特征向量

定义（特征多项式、特征矩阵、特征方程）

设n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式，$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$称为$\mathbf{A}$的特征矩阵，$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$称为$\mathbf{A}$的特征方程。

特征值与特征向量

例1

求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

特征值与特征向量

例1

求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-2)^2 = 0$$

故特征值为$\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = 2$（二重特征值）。

特征值与特征向量

- 对于特征值$\lambda_1 = 3$，齐次线性方程组$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)^T$，因此$k_1\mathbf{x}_1 (k_1 \neq 0)$是$\mathbf{A}$对应于$\lambda_1 = 3$的全部特征向量。

- 对于特征值$\lambda_{2,3} = 2$，齐次线性方程组$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为$\mathbf{x}_2 = (1, 1, 2)^T$，因此$k_2\mathbf{x}_2 (k_2 \neq 0)$是$\mathbf{A}$对应于$\lambda_{2,3} = 2$的全部特征向量。

特征值与特征向量的性质

定理

设n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

(2) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(\mathbf{A})$

- 当$\det(\mathbf{A})\neq 0$，即$\mathbf{A}$为可逆矩阵时，其特征值全为非零数；
- 奇异矩阵$\mathbf{A}$至少有一个零特征值。

特征值与特征向量的性质

定理

一个特征向量不能属于不同的特征值。

特征值与特征向量的性质

性质1

Table: 特征值与特征向量

	特征值	特征向量
$\mathbf{A}$	λ	$\mathbf{x}$
$k\mathbf{A}$	$k\lambda$	$\mathbf{x}$
$\mathbf{A}^m$	λ^m	$\mathbf{x}$
$\mathbf{A}^{-1}$	λ^{-1}	$\mathbf{x}$

性质2

矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{A}^T$的特征值相同。

特征值与特征向量的性质

例

对于下列矩阵$\mathbf{A}$的特征值，能做怎样的断言？

(1) $\det(\mathbf{I}-\mathbf{A}^2)=0$

(2) $\mathbf{A}^k=0$

(3) $\mathbf{A}=k\mathbf{I}-\mathbf{B}$（$\lambda_0$为$\mathbf{B}$的特征值）

相似矩阵

定义（相似矩阵）

对于方阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$，若存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B},$$

就称$\mathbf{A}$相似于$\mathbf{B}$，记作$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$.

定理

相似矩阵的特征值相同。

矩阵可对角化的条件

矩阵可对角化，即矩阵与对角阵相似。

定理

矩阵可对角化 $\Longleftrightarrow$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

推论

若$\mathbf{A}$有n个互不相同的特征值，则$\mathbf{A}$与对角阵相似。

矩阵可对角化的条件

例

设实对称矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

问$\mathbf{A}$是否可对角化？若可对角化，求对角阵$\mathbf{\Lambda}$及可逆矩阵$\mathbf{P}$使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$，再求$\mathbf{A}^k$。

矩阵可对角化的条件

例

设实对称矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

问$\mathbf{A}$是否可对角化？若可对角化，求对角阵$\mathbf{\Lambda}$及可逆矩阵$\mathbf{P}$使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$，再求$\mathbf{A}^k$。

证明:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$$

故特征值为$\lambda_1=-2$，$\lambda_{2,3,4}=2$

矩阵可对角化的条件

- 对于特征值$\lambda_1 = -2$，齐次线性方程组$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为

$$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, 1)^T,$$

故对应于$\lambda_1 = -2$的全部特征向量为 $k_1\mathbf{x}_1 (k_1 \neq 0)$.

矩阵可对角化的条件

- 对于特征值$\lambda_1 = -2$，齐次线性方程组$(\mathbf{A}+2\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为

$$\mathbf{x}_1 = (1,1,1,1)^T,$$

故对应于$\lambda_1 = -2$的全部特征向量为 $k_1\mathbf{x}_1(k_1 \neq 0)$.

- 对于特征值$\lambda_{2,3,4} = 2$，齐次线性方程组$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$为

$$(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为

$$\mathbf{x}_2 = (1,-1,0,0)^T, \ \mathbf{x}_3 = (1,0,-1,0)^T, \ \mathbf{x}_4 = (1,0,-1,0)^T,$$

故对应于$\lambda_2 = 2$的全部特征向量为 $k_2\mathbf{x}_2 + k_3\mathbf{x}_3 + k_4\mathbf{x}_4(k_2, k_3, k_4$不全为零$)$

矩阵可对角化的条件

由特征值问题定义可知

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4\end{pmatrix}}$$

取

$$\mathbf{P}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

则$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，注意到$\det(\mathbf{P})\neq 0$，于是

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}.$$

矩阵可对角化的条件

例2

设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$是主对角元全为2的上三角矩阵，且存在$a_{ij} \neq 0 (i < j)$，问$\mathbf{A}$是否可对角化?

矩阵可对角化的条件

例2

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是主对角元全为2的上三角矩阵，且存在$a_{ij}\neq 0(i<j)$，问$\mathbf{A}$是否可对角化?

证明:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & * & \cdots & * \\ 0 & 2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(2-\lambda)^n \implies \lambda=2\text{为}\mathbf{A}\text{的}n\text{重特征值}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(2\mathbf{I}-\mathbf{A})\geq 1 \quad &\implies (2\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}\text{的基础解系所含向量个数}\leq n-1 \\ &\implies \mathbf{A}\text{的线性无关的特征向量的个数}\leq n-1 \\ &\implies \mathbf{A}\text{不与对角阵相似。} \end{aligned}$$

实对称矩阵的对角化

定理

实对称矩阵$\mathbf{A}$的任一特征值都是实数。

定理

实对称矩阵$\mathbf{A}$对应于不同特征值的特征向量正交。

实对称矩阵的对角化

定理

对于n阶实对称矩阵$\mathbf{A}$，存在n阶正交矩阵$\mathbf{T}$，使得

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda}$$

实对称矩阵的对角化

例

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

求正交阵$\mathbf{T}$，使$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$为对角阵。

实对称矩阵的对角化

例

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

求正交阵$\mathbf{T}$，使$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$为对角阵。

解:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

特征值为$\lambda_{1,2}=2$（二重）和$\lambda_3=-7$。

实对称矩阵的对角化

- 对于特征值$\lambda_{1,2}=2$，齐次线性方程组$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$为

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量$\mathbf{x}_1=(2,-1,0)^T$，$\mathbf{x}_2=(2,0,1)^T$。

- 对于特征值$\lambda_2=-7$，齐次线性方程组$(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$为

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量$\mathbf{x}_3=(1,2,-2)^T$。

实对称矩阵的对角化

- 对特征向量$\mathbf{x}_1 = (2, -1, 0)^T$，$\mathbf{x}_2 = (2, 0, 1)^T$，先用施密特正交化过程正交化，然后单位化。

  先正交化得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \mathbf{x}_1, \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

实对称矩阵的对角化

- 对特征向量$\mathbf{x}_1=(2,-1,0)^T$，$\mathbf{x}_2=(2,0,1)^T$，先用施密特正交化过程正交化，然后单位化。

  先正交化得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \mathbf{x}_1, \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \mathbf{x}_2-\frac{(\mathbf{x}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 \\
&= \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

  再单位化得

$$
\mathbf{y}_1=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)^T,\quad \mathbf{y}_2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{15},-\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T
$$

- 对特征向量$\mathbf{x}_3=(1,2,-2)^T$单位化，得$\mathbf{y}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^T$。

实对称矩阵的对角化

取正交矩阵

$$\mathbf{T} = (\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2,\ \mathbf{y}_3) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathrm{diag}(2, 2, -7).$$

实对称矩阵的对角化

例

设实对称矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$是相似矩阵，证明：存在正交矩阵$\mathbf{P}$，使$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$。

实对称矩阵的对角化

例

设实对称矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$是相似矩阵，证明：存在正交矩阵$\mathbf{P}$，使$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$。

证明:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\sim\mathbf{B}\quad&\Longrightarrow\quad \mathbf{A},\ \mathbf{B}\text{有相同的特征值}\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\\&\Longrightarrow\quad \exists\text{正交阵}\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\ s.t.\ \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_2\\&\Longrightarrow\quad \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^{-1}=\mathbf{B}\end{aligned}$$

取$\mathbf{P}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^{-1}$，则$\mathbf{P}$为正交阵，且

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$$

实对称矩阵的对角化

例

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$都是n阶实对称矩阵，若存在正交矩阵$\mathbf{T}$使$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$，$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}$都是对角阵，则$\mathbf{A}\mathbf{B}$是实对称矩阵。

实对称矩阵的对角化

例

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$都是n阶实对称矩阵，若存在正交矩阵$\mathbf{T}$使$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$，$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}$都是对角阵，则$\mathbf{AB}$是实对称矩阵。

证明:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{\Lambda}_1\\ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}=\mathbf{\Lambda}_2\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T})=\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2=\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{\Lambda}_1=(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})$$

$$\Longrightarrow \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ABT}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{BAT}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{AB}=\mathbf{BA}$$

$$\Longrightarrow (\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T=\mathbf{BA}=\mathbf{AB}$$

实对称矩阵的对角化

例★★★

三阶实对称矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=1$，对应于$\lambda_1=-1$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^T$，求$\mathbf{A}$。

实对称矩阵的对角化

例★★★

三阶实对称矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于$\lambda_1=-1$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^T$，求$\mathbf{A}$。

证明:

$$\mathbf{A}\sim \mathrm{diag}(-1,\ 1,\ 1)$$

注意不同特征值对应的特征向量正交，在与$\boldsymbol{\alpha}_1$正交的平面上取两个线性无关的向量，如$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1)^T$，则

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

注意到$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$正交，单位化即得标准正交向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T,\ \ \boldsymbol{\beta}_2=(1,0,0)^T,\ \ \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T.$$

令$\mathbf{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$，则

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

1 第一章 行列式

2 第二章 矩阵及其运算

3 第三章 向量组 矩阵的秩

4 第四章 向量空间与线性变换

5 第五章 特征值问题
- 知识点
- 往年试题

6 第六章 二次型

05-06上

设二阶方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=\mathbf{0}$，求$\mathbf{A}$所有可能的特征值。

05-06下

设三阶方阵$\mathbf{A}$有三个实特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，且$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，如果$\lambda_1$对应两个线性无关的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\lambda_3$对应一个特征向量$\boldsymbol{\alpha}_3$，证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关。

05-06下

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&-1\\x^2&0&0\end{pmatrix}$，$x$为实数，试讨论$x$为何值时，$\mathbf{A}$可与对角阵相似?

06-07上，08-09上

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

- 当$k=1$时，是否存在正交矩阵$\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}$为对角阵？如果存在，是否唯一？
- 当$k=0$时，$\mathbf{A}$能否与对角阵相似？

07-08上

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

- 求$\mathbf{A}$的特征值和特征向量；
- 求$\mathbf{A}^k$及其特征值和特征向量；

07-08下

已知$1,1,-1$是三阶实对称矩阵$\mathbf{A}$的三个特征值，向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,1)^T$是$\mathbf{A}$的对应于$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量。

(1) 能否求出$\mathbf{A}$的属于$\lambda_3=-1$的特征向量？如能，试求出该特征向量，若不能，请说明理由；

(2) 能否由此求得$\mathbf{A}$?若能，试求之，若不能请说明理由。

08-09上

已知$\mathbf{A}$是三阶方阵，且$\mathbf{A}^2\neq\mathbf{0},\mathbf{A}^3=\mathbf{0}$。

(1) 能否求出$\mathbf{A}$的特征值？如能，试求出该特征值，若不能，请说明理由；

(2) $\mathbf{A}$能否对角化?若能，试求之，若不能请说明理由。

(3) 已知$\mathbf{B}=\mathbf{A}^3-5\mathbf{A}^2+3\mathbf{I}$，能否求得$\det(\mathbf{B})$，若能，试求之，若不能请说明理由。

09-10下

设$\boldsymbol{\alpha}$是n维非零实列向量，$\mathbf{A}=\mathbf{I}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，

(1) 计算$\mathbf{A}^T$，并回答$k\mathbf{I}-\mathbf{A}$能否对角化？请说明理由，其中k为常数；

(2) 计算$\mathbf{A}^2$，并回答$k\mathbf{I}-\mathbf{A}$是否可逆？请说明理由，其中$k\neq\pm1$为常数；

(3) 给出$\mathbf{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$为正交矩阵的充分必要条件。

08-09上

已知$\mathbf{A}$是三阶方阵，且$\mathbf{A}^2\neq\mathbf{0},\mathbf{A}^3=\mathbf{0}$。

(1) 能否求出$\mathbf{A}$的特征值？如能，试求出该特征值，若不能，请说明理由；

(2) $\mathbf{A}$能否对角化?若能，试求之，若不能请说明理由。

(3) 已知$\mathbf{B}=\mathbf{A}^3-5\mathbf{A}^2+3\mathbf{I}$，能否求得$\det(\mathbf{B})$，若能，试求之，若不能请说明理由。

12-13下

已知$\mathbf{A}$是三阶实对称阵，且$\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}=\mathbf{0}$，已知$\mathrm{r}(\mathbf{A})=2$。

(1) 求$\mathbf{A}$的全部特征值?

(2) 计算$\det(\mathbf{A}+4\mathbf{I})$

(3) 当k为何值时，$\mathbf{A}+k\mathbf{I}$正定。

12-13下

已知三阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$1,2,3$，求$\det(\mathbf{A}^3-5\mathbf{A}^2+7\mathbf{A})$

12-13下

证明：设$\mathbf{A}$为n阶非零实对称矩阵，则存在n维列向量$\mathbf{x}$使得$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\neq 0$.

13-14上

设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^T,\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^T$，且$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2,\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，

(1) 求$\mathbf{A}$的特征值；

(2) 求可逆阵$\mathbf{P}$及对角阵$\mathbf{\Lambda}$使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$。

1 第一章 行列式
- 知识点
- 往年试题

2 第二章 矩阵及其运算
- 往年试题

3 第三章 向量组 矩阵的秩
- 知识点
- 典型例题1 （线性相关性）
- 典型例题2 （极大无关组与向量组的秩）
- 典型题型3 （非齐次线性方程组）

4 第四章 向量空间与线性变换
- 往年试题

5 第五章 特征值问题
- 知识点
- 往年试题

6 第六章 二次型
- 知识点

- 典型例题

1 第一章 行列式

2 第二章 矩阵及其运算

3 第三章 向量组 矩阵的秩

4 第四章 向量空间与线性变换

5 第五章 特征值问题

6 第六章 二次型
- 知识点
- 典型例题

二次型的定义和矩阵表示

定义1(二次型)

n元变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \; & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& \cdots \quad \cdots \\
& + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

其矩阵形式为

$$
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}
$$

二次型的定义和矩阵表示

例

设$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_4+x_3^2+5x_4^2$，则它的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

二次型的定义和矩阵表示

设α在两组基$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n\}$和$\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$下的坐标向量分别为

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \quad \text{和} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

又

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)\mathbf{C}$$

故

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$$

从而

$$f(\alpha) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y}$$

二次型的定义和矩阵表示

设α在两组基$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n\}$和$\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$下的坐标向量分别为

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \text{ 和 } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

又

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)\mathbf{C}$$

故

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$$

从而

$$f(\alpha) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y}$$

二次型$f(\alpha)$在两组基$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n\}$和$\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$下所对应的矩阵分别为

$$\mathbf{A} \text{ 和 } \mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}$$

矩阵的合同

定义2(矩阵的合同)

对于两个矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$，若存在可逆矩阵$\mathbf{C}$，使得

$$\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{B},$$

就称$\mathbf{A}$合同于$\mathbf{B}$，记作$\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$。

用正交变换法将二次型化为标准型

- 含平方项而不含混合项的二次型称为标准二次型。
- 化二次型为标准型，就是对实对称矩阵$\mathbf{A}$，寻找可逆阵$\mathbf{C}$，使$\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}$成为对角矩阵。

用正交变换法将二次型化为标准型

定理1(主轴定理)

对于任一个n元二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x},$$

存在正交变换$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ ($\mathbf{Q}$为正交阵)，使得

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q})\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$\mathbf{A}$的$n$个特征值， $\mathbf{Q}$的n个列向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是$\mathbf{A}$对应于$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的标准正交特征向量。

用正交变换法将二次型化为标准型

例★★★★★

用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

用正交变换法将二次型化为标准型

例★★★★★

用正交变换法，将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解: 对应方程为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

用正交变换法将二次型化为标准型

例★★★★★

用正交变换法，将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解: 对应方程为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$

得特征值$\lambda_{1,2} = 1$和$\lambda_3 = 10$.

用正交变换法将二次型化为标准型

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \mathbf{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\mathbf{A}-10\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}_3=(1,2,-2)^T.$$

用正交变换法将二次型化为标准型

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \mathbf{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\mathbf{A}-10\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}_3=(1,2,-2)^T.$$

对$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$用施密特正交化过程先正交化，再单位化，得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5},0\right)^T, \quad \boldsymbol{\xi}_2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$$

对$\mathbf{x}_3$单位化，得

$$\boldsymbol{\xi}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^T$$

用正交变换法将二次型化为标准型

取正交矩阵

$$\mathbf{Q}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(1,1,10).$$

用正交变换法将二次型化为标准型

取正交矩阵

$$\mathbf{Q}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(1,1,10).$$

令$\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^T,\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$，做正交变换$\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{y}$，原二次型就化成标准型

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q})\mathbf{y}=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

惯性定理和二次型的规范形

惯性定理

对于一个n元二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，不论做怎样的坐标变换使之化为标准形，其中正平方项的项数p和负平方项的项数q都是唯一确定的。或者说，对一个n阶实对称矩阵$\mathbf{A}$，不论取怎样的可逆矩阵$\mathbf{C}$，只要使

$$\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & d_p & & & & & & \\ & & & -d_{p+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -d_{p+q} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中$d_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, p+q), p+q \le n$成立，则$p$和$q$是由$\mathbf{A}$唯一确定的。

惯性定理和二次型的规范形

定义

二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$的标准形中，

- 正平方项的项数（与$\mathbf{A}$合同的对角阵中正对角元的个数），称为二次型（或$\mathbf{A}$）的正惯性指数；
- 负平方项的项数（与$\mathbf{A}$合同的对角阵中负对角元的个数），称为二次型（或$\mathbf{A}$）的负惯性指数；
- 正、负惯性指数的差称为符号差；
- 矩阵$\mathbf{A}$的秩也成为二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$的秩。

惯性定理和二次型的规范形

定义

二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$的标准形中，

- 正平方项的项数（与$\mathbf{A}$合同的对角阵中正对角元的个数），称为二次型（或$\mathbf{A}$）的正惯性指数；
- 负平方项的项数（与$\mathbf{A}$合同的对角阵中负对角元的个数），称为二次型（或$\mathbf{A}$）的负惯性指数；
- 正、负惯性指数的差称为符号差；
- 矩阵$\mathbf{A}$的秩也成为二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$的秩。

设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$，正惯性指数为$p$，则

- 负惯性指数为$q = r - p$
- 符号差为$p - q = 2p - r$
- 与$\mathbf{A}$合同的对角阵的零对角元个数为$n - r$。

惯性定理和二次型的规范形

推论

设$\mathbf{A}$为n阶实对称矩阵，若$\mathbf{A}$的正、负惯性指数分别为p和q，则

$$\underbrace{\mathbf{A} \simeq \mathrm{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{p\text{个}},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{q\text{个}},\underbrace{0,\cdots,0}_{n-p-q\text{个}})}_{\mathbf{A}\text{的合同规范形}}$$

惯性定理和二次型的规范形

推论

设$\mathbf{A}$为n阶实对称矩阵，若$\mathbf{A}$的正、负惯性指数分别为p和q，则

$$\underbrace{\mathbf{A} \simeq \operatorname{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{p\text{个}},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{q\text{个}},\underbrace{0,\cdots,0}_{n-p-q\text{个}})}_{\mathbf{A}\text{的合同规范形}}$$

或者说，对于二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，存在坐标变换$\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}$，使得

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\underbrace{y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2}_{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\text{的规范形}}.$$

正定二次型和正定矩阵

定义

如果对于任意的非零向量$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，恒有

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j > 0,$$

就称$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$为正定二次型，称$\mathbf{A}$为正定矩阵。

正定二次型和正定矩阵

定义

如果对于任意的非零向量$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

就称$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$为正定二次型，称$\mathbf{A}$为正定矩阵。

注：正定矩阵是针对对称矩阵而言的。

结论1

二次型$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$正定 $\iff$ $d_i > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

结论2

一个二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，经过非退化线性变换$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$，化为$\mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \xLeftrightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}} \mathbf{y}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{y} \quad (\mathbf{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

定理

若$\mathbf{A}$是n阶实对称矩阵，则以下命题等价：

(1) $\mathbf{A}$正定；

(2) $\mathbf{A}$的正惯性指数为n，即$\mathbf{A} \simeq \mathbf{I}$；

(3) 存在可逆矩阵$\mathbf{P}$使得$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{P}$；

(4) $\mathbf{A}$的n个特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$全大于零。

(5) $\mathbf{A}$的n个顺序主子式全大于零。

定理

$$\mathbf{A}\text{正定} \implies a_{ii} > 0(i = 1, 2, \cdots, n) \text{ 且 } \det(\mathbf{A}) > 0$$

例

$\mathbf{A}$正定 $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}^{-1}$正定

例

判断二次型
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$
是否为正定二次型。

例

判断二次型
$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$
是否为正定二次型。

1 第一章 行列式

2 第二章 矩阵及其运算

3 第三章 向量组 矩阵的秩

4 第四章 向量空间与线性变换

5 第五章 特征值问题

6 第六章 二次型

- 知识点
- 典型例题

2005-2006第一学期

求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩。

2005-2006第一学期

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1$,

(1) 求二次型f的矩阵$\mathbf{A}$的全部特征值;

(2) 求可逆矩阵$\mathbf{P}$,使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$为对角阵;

(3) 计算$\det(\mathbf{A}^m)$.

2005-2006第二学期

判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_2+6x_2x_3$ 的正定性。

2006-2007第一学期

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，试求该二次型的矩阵，并指出$\lambda$取何值时，$f$正定？

2006-2007第二学期

判断二次型 $f(x,y,z)=3x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz$

(1) 用正交变换化二次型f为标准型，并写出相应的正交阵；

(2) 求$f(x,y,z)$在单位球面$x^2+y^2+z^2=1$上的最大值和最小值。

2006-2007第二学期

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+2x_1x_3-2x_2x_3$,

(1) 写出二次型f的矩阵$\mathbf{A}$；

(2) 求出$\mathbf{A}$的全部特征值和特征向量；

(3) 化f为标准型；

(4) 判断f是否正定.

2007-2008第一学期，2009-2010第一学期

对于二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$,其中二次型的矩阵$\mathbf{A}$的特征值之和为1，特征值之积为$-12$.

(1) 求a,b；

(2) 化f为标准型，并写出所用的正交变换和正交矩阵。

2007-2008第二学期

设二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a,b,c为常数，则

(1) 写出二次型f的具体形式；

(2) 求出$\mathbf{A}$的全部特征值和特征向量；

(3) 求正交变换$\mathbf{x}=\mathbf{Py}$，化f为标准型；

(4) 在$\|\mathbf{x}\|=1$的条件下，求f的最大值和最小值.

2008-2009第一学期

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$,经正交变换$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$化为标准型$f=y_2^2+2y_3^2$，试求$a,b$。

2008-2009第一学期

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1$,

(1) 求出$\mathbf{A}$的全部特征值和特征向量；

(2) 求正交变换$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，化$f$为标准型；

(3) 计算$\det(\mathbf{A}^m)$

2009-2010第二学期

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+x_2^2$，

(1) 求出$\mathbf{A}$的全部特征值和特征向量；

(2) 求正交变换$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，化$f$为标准型。

2010-2011第一学期

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$，

(1) 写出$\mathbf{A}$；

(2) 求正交变换$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，化$f$为标准型。

2010-2011第二学期

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$的矩阵是奇异阵，

(1) 写出$\mathbf{A}$并求t的值；

(2) 根据所求t的值，求一个可逆矩阵$\mathbf{P}$和一个对角阵$\mathbf{\Lambda}$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{\Lambda}$;

(3) 求$\mathbf{A}^n(n\geq 2)$.

2011-2012第二学期

在正交变换$\mathbf{x}=\mathbf{Qy}$将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$化为标准型。

2012-2013第二学期

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的秩为2，

(1) 求a；

(2) 求正交变换$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，将$f$化为标准型.

2012-2013第二学期

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$的秩为2，

(1) 把f写成$f=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$的形式；

(2) 求$\mathbf{A}$的特征值和特征向量；

(3) 求正交变换$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，将$f$化为标准型.

2013-2014第一学期

用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$为标准型.