二次型

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 12 月 19 日

目录

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法

3. 惯性定理与二次型的规范形

4. 正定二次型和正定矩阵

5. 其他有定二次型

6. 往年试题

定义 1 (二次型) n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & & & & & & & & & \\
& & a_{11}x_1^2 & + & 2a_{12}x_1x_2 & + & 2a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & 2a_{1n}x_1x_n \\
& & & + & a_{22}x_2^2 & + & 2a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & 2a_{2n}x_2x_n \\
& & & & & & \cdots & & \cdots & & \\
& & & & & & & & & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}
$$

当系数属于数域 F 时，称为数域 F 上的一个n 元二次型。

$$
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) =
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = & & & & & & & & & & \\
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}
$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} x_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j
$$

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & \\
& a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\
& \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
+ & a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_2x_3 + \cdots + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} x_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j
$$

$$
= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)= \\
&\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array} \\
&=\sum_{i=1}^{n} x_i(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

  其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

  则必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

  其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

  则必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

- 二次型和它的矩阵式相互唯一确定的，因此研究二次型的性质就转化为研究 $\boldsymbol{A}$ 所具有的性质。

例 2.1 设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_4+x_3^2+5x_4^2$，则它的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

一个二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 可看成是 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一个函数，即

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的一组基下的坐标向量，故二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 n 个坐标的二次齐次函数。因此二次型作为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的函数，其矩阵是与一组基相联系的。

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 下的坐标向量分别为

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

又

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\epsilon}_n)\boldsymbol{C}$$

故

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

从而

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 下的坐标向量分别为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad 和 \quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

又

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n)\boldsymbol{C}$$

故

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

从而

$$f(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$$

二次型 $f(\boldsymbol{\alpha})$ 在两组基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 下所对应的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} \quad 和 \quad \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

例 2.2　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2\}$ 下的坐标 $(x_1, x_2)^T$ 满足方程

$$5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1 x_2 = 4. \tag{1}$$

将 $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ 逆时针旋转 $\pi/4$ 变为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$

例 2.2　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2\}$ 下的坐标 $(x_1,x_2)^T$ 满足方程

$$5x_1^2+5x_2^2-6x_1x_2=4. \tag{1}$$

将 $\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2$ 逆时针旋转 $\pi/4$ 变为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=(\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2)\begin{pmatrix}\cos\pi/4 & -\sin\pi/4\\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2\}$ 下的坐标 $(y_1,y_2)^T$ 满足

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\pi/4 & -\sin\pi/4\\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

例 2.2 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2\}$ 下的坐标 $(x_1, x_2)^T$ 满足方程

$$5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 = 4. \tag{1}$$

将 $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ 逆时针旋转 $\pi/4$ 变为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) = (\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2)\begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2\}$ 下的坐标 $(y_1, y_2)^T$ 满足

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

(1) 的矩阵形式为

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \\
&= (y_1, y_2)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= (y_1, y_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= 2y_1^2 + 8y_2^2 = 4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{y}^T C^T A C \boldsymbol{y} \\
&= (y_1, y_2) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= 2y_1^2 + 8y_2^2 = 4.
\end{aligned}
$$

此时，方程 (1) 化成了在基 $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2\}$ 的坐标系下的标准方程，其图形是一个椭圆。

把一般的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的纯平方项之代数和的基本方法是做坐标变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{C} \text{ 为可逆矩阵})$$

使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2.$$

把一般的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的纯平方项之代数和的基本方法是做坐标变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{C}\text{ 为可逆矩阵})$$

使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2.$$

从矩阵的角度来说，就是对于一个实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻找一个可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 称为对角形。

定义 2 (矩阵的合同)　对于两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B},$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$，记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$。

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法

3. 惯性定理与二次型的规范形

4. 正定二次型和正定矩阵

5. 其他有定二次型

6. 往年试题

- 含平方项而不含混合项的二次型称为标准二次型。
- 化二次型为标准型，就是对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻找可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵。

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法

3. 惯性定理与二次型的规范形

4. 正定二次型和正定矩阵

5. 其他有定二次型

6. 往年试题

回顾

对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda},$$

由于 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{T}$，故

$$\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

定义 3 (主轴定理) 对于任一个 n 元二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$($\boldsymbol{Q}$ 为正交阵), 使得

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值, $\boldsymbol{Q}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的标准正交特征向量。

例 3.1 用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

例 3.1　用正交变换法，将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解　对应方程为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

例 3.1 用正交变换法，将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解 对应方程为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$

得特征值 $\lambda_{1,2} = 1$ 和 $\lambda_3 = 10$.

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2 = (2, 0, 1)^T.$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2 = (2, 0, 1)^T.$$

$$(\lambda_3 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2 = (2, 0, 1)^T.$$

$$(\lambda_3 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_3 = (1, 2, -2)^T.$$

对 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 用施密特正交化方法得

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)^T, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$$

再将 $\boldsymbol{x}_3$ 单位化为

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$$

取正交矩阵

$$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \mathrm{diag}(1, 1, 10).$$

取正交矩阵

$$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \mathrm{diag}(1, 1, 10).$$

令 $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T$，做正交变换 $x = Qy$，原二次型就化成标准型

$$x^TAx = y^T(Q^TAQ)y = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2.$$

对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$$

对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = 1$$

若将坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 变换为另一直角坐标系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{5}}{15} \\ \dfrac{4\sqrt{5}}{15} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$$

若将坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 变换为另一直角坐标系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{5}}{15} \\ \dfrac{4\sqrt{5}}{15} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

即

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix} -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{15} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{4\sqrt{5}}{15} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$$

若将坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 变换为另一直角坐标系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt{5}}{15}\\ \dfrac{4\sqrt{5}}{15}\\ \dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{2}{3}\\ -\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$$

即

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{15} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{4\sqrt{5}}{15} & \dfrac{2}{3}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$$

则在坐标系 $\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\}$ 下，曲面方程为

$$y_1^2+y_2^2+10y_3^2=1.$$

例 3.2 将一般二次曲面方程

$$x^2 - 2y^2 + 10z^2 + 28xy - 8yz + 20zx - 26x + 32y + 28z - 38 = 0$$

化为标准方程。

例 3.2 将一般二次曲面方程

$$x^2-2y^2+10z^2+28xy-8yz+20zx-26x+32y+28z-38=0$$

化为标准方程。

解 二次型部分 $x^2-2y^2+10z^2+28xy-8yz+20zx$ 对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 14 & -2 & -4 \\ 10 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

同前例，可得正交阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(9,18,-18).$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$, $\boldsymbol{y}=(x',y',z')^T$, 可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9x'^2+18y'^2-18z'^2$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$, $\boldsymbol{y}=(x',y',z')^T$，可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9x'^2+18y'^2-18z'^2$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$$x'^2+2y'^2-2z'^2-\frac{2}{3}x'+\frac{4}{3}y'-\frac{16}{3}z'-\frac{28}{9}=0$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$， $\boldsymbol{y}=(x',y',z')^T$，可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9x'^2+18y'^2-18z'^2$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$$x'^2+2y'^2-2z'^2-\frac{2}{3}x'+\frac{4}{3}y'-\frac{16}{3}z'-\frac{28}{9}=0$$

配方得

$$\left(x'-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(y'+\frac{1}{3}\right)^2-2\left(z'+\frac{4}{3}\right)^2=1$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$, $\boldsymbol{y}=(x',y',z')^T$，可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9x'^2+18y'^2-18z'^2$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$$x'^2+2y'^2-2z'^2-\frac{2}{3}x'+\frac{4}{3}y'-\frac{16}{3}z'-\frac{28}{9}=0$$

配方得

$$\left(x'-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(y'+\frac{1}{3}\right)^2-2\left(z'+\frac{4}{3}\right)^2=1$$

再令

$$x''=x'-\frac{1}{3},\quad y''=y'+\frac{1}{3},\quad z''=z'+\frac{4}{3},$$

代入上式得标准方程

$$x''^2+2y''^2-2z''^2=1$$

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
    - 正交变换法
    - 配方法
    - 初等变换法

3. 惯性定理与二次型的规范形

4. 正定二次型和正定矩阵

5. 其他有定二次型

6. 往年试题

例 3.3 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

例 3.3 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

例 3.3 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

例 3.3 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

例 3.3 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\left\{\begin{array}{lllllll} y_1 & = & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ y_2 & = & & & x_2 & - & 2x_3 \\ y_3 & = & & & & & x_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

例 3.3 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2-5y_3^2.$$

例 3.4 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准型。

例 3.4 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$$

为标准型。

解 对 x_1x_2 利用平方差公式，令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$$

例 3.4 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$$

为标准型。

解 对 x_1x_2 利用平方差公式，令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$$

先对含 y_1 的项配完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-2y_2^2-2y_3^2+4y_2y_3$$

再对含 y_2 的项配完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_3)^2-2(y_2-y_3)^2$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

坐标变换记为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表:

二次型	对应矩阵
$2x_1x_2+4x_1x_3$	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$
$2z_1^2-2z_2^2$	$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix}$

易验证

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(2,-2,0)$$

任何 n 元二次型都可用配方法化为标准型，相应的变换矩阵为主对角元为 1 的上三角阵和对角块矩阵，或者是这两类矩阵的乘积。

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法

3. 惯性定理与二次型的规范形

4. 正定二次型和正定矩阵

5. 其他有定二次型

6. 往年试题

对于实对称矩阵，可通过一系列相同类型的初等行、列变换将其化为合同标准型。所谓相同类型的初等行、列变换，指的是

(1)

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_i + kc_j} \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k) \xrightarrow{r_i + kr_j} \boldsymbol{E}_{ij}(k)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k)$$

$\boldsymbol{E}_{ij}(k)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 仍为对称矩阵。

(2)

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_i \times k} \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i}(k) \xrightarrow{r_i \times k} \boldsymbol{E}_{i}(k)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i}(k)$$

$\boldsymbol{E}_{i}(k)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i}(k)$ 仍为对称矩阵。

(2)

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \boldsymbol{E}_{ij}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$$

$\boldsymbol{E}_{ij}(k)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 仍为对称矩阵。

定理 1 对于任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，都存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{I}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k$$

这说明，将施加于 $\boldsymbol{A}$ 的列变换同时施加于单位阵 $\boldsymbol{I}$，当 $\boldsymbol{A}$ 变为对角阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为变换矩阵 $\boldsymbol{C}$。

例 3.5 用初等变换法将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

化为标准型，并求坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$。

解

$$
\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 + c_1]{c_2 - c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 + \frac{2}{3} c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_3 + \frac{2}{3} r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}
$$

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法

3. 惯性定理与二次型的规范形

4. 正定二次型和正定矩阵

5. 其他有定二次型

6. 往年试题

定理 2 (惯性定理) 对一个 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，不论做怎样的坐标变换使之化为标准型，其中正平方项的项数 p 与负平方项的项数 q 都是唯一确定的。

或者说，对一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，不论取怎样的可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，只要使

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & d_p & & & & & & \\ & & & -d_{p+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -d_{p+q} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $d_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, p+q, p+q \le n$ 成立，则 p 和 q 是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的。

证明. 因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}) = p + q$，故 $p + q$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的秩唯一确定，因此只需证明 p 由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定。

证明. 因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})=p+q$，故 $p+q$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的秩唯一确定，因此只需证明 p 由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定。

设 $p+q=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$ 都可化为标准型：

$$f = b_1y_1^2+\cdots+b_py_p^2-b_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-b_ry_r^2, \tag{2}$$

$$f = c_1z_1^2+\cdots+c_tz_t^2-c_{t+1}z_{t+1}^2-\cdots-c_rz_r^2. \tag{3}$$

要证正平方项的项数唯一确定，即证 $p=t$。

用反证法。设 $p>t$，则

$$\begin{aligned} f &= b_1 y_1^2+\cdots+b_t y_t^2 \quad +b_{t+1} y_{t+1}^2+\cdots+b_p y_p^2 \quad -b_{p+1} y_{p+1}^2-\cdots-b_r y_r^2 \\ &= c_1 z_1^2+\cdots+c_t z_t^2 \quad -c_{t+1} z_{t+1}^2-\cdots-c_p z_p^2 \quad -c_{p+1} z_{p+1}^2-\cdots-c_r z_r^2 \end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}:=\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}$，可得

$$\left\{\begin{array}{c} z_1=d_{11}y_1+d_{12}y_2+\cdots+d_{1n}y_n, \\ \cdots\cdots \\ z_t=d_{t1}y_1+d_{t2}y_2+\cdots+d_{tn}y_n, \\ \cdots\cdots \\ z_n=d_{n1}y_1+d_{n2}y_2+\cdots+d_{nn}y_n. \end{array}\right. \tag{4}$$

用反证法。设 $p>t$，则

$$\begin{aligned} f &= b_1y_1^2+\cdots+b_ty_t^2 \quad +b_{t+1}y_{t+1}^2+\cdots+b_py_p^2 \quad -b_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-b_ry_r^2 \\ &= c_1z_1^2+\cdots+c_tz_t^2 \quad -c_{t+1}z_{t+1}^2-\cdots-c_pz_p^2 \quad -c_{p+1}z_{p+1}^2-\cdots-c_rz_r^2 \end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}:=\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}$，可得

$$\begin{cases} z_1 = d_{11}y_1+d_{12}y_2+\cdots+d_{1n}y_n, \\ \cdots\cdots \\ z_t = d_{t1}y_1+d_{t2}y_2+\cdots+d_{tn}y_n, \\ \cdots\cdots \\ z_n = d_{n1}y_1+d_{n2}y_2+\cdots+d_{nn}y_n. \end{cases} \tag{4}$$

令 $z_1=\cdots=z_t=0, y_{p+1}=\cdots=y_p=0$，利用上式可得

$$\begin{cases} d_{11}y_1+d_{12}y_2+\cdots+d_{1n}y_n=0, \\ \cdots\cdots \\ d_{t1}y_1+d_{t2}y_2+\cdots+d_{tn}y_n=0, \\ y_{p+1}=0, \\ \cdots\cdots \\ y_n=0. \end{cases} \tag{5}$$

齐次线性方程组(5)有 n 个未知量，但方程个数为 $t+(n-p)=n-(p-t)<n$，故必有非零解。

由于 $y_{p+1}=\cdots=y_n=0$，故 $y_1,\cdots,y_p$ 不全为零，于是

$$f=b_1y_1^2+\cdots+b_py_p^2>0.$$

由于 $y_{p+1}=\cdots=y_n=0$，故 $y_1,\cdots,y_p$ 不全为零，于是

$$f=b_1y_1^2+\cdots+b_py_p^2>0.$$

将(5)的非零解代入(4)得 $z_1,\cdots,z_t,\cdots,z_n$ 的一组值 $(z_1=\cdots=z_t=0)$，于是

$$f=-c_{t+1}z_{t+1}^2-\cdots-c_rz_r^2\leq 0.$$

这导致矛盾，故假设 $p>t$ 不能成立。

由于 $y_{p+1}=\cdots=y_n=0$，故 $y_1,\cdots,y_p$ 不全为零，于是

$$f=b_1y_1^2+\cdots+b_py_p^2>0.$$

将(5)的非零解代入(4)得 $z_1,\cdots,z_t,\cdots,z_n$ 的一组值 $(z_1=\cdots=z_t=0)$，于是

$$f=-c_{t+1}z_{t+1}^2-\cdots-c_rz_r^2\leq 0.$$

这导致矛盾，故假设 $p>t$ 不能成立。

同理可证 $p<t$ 不成立，故 $p=t$。这就证明了二次型的标准型中，正平方项的项数与所做的非退化线性变换无关，它是由二次型本身所确定的。 $\square$

定义 4　二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准型中，

- 正平方项的项数称为二次型（或 $\boldsymbol{A}$）的**正惯性指数**；
- 负平方项的项数称为二次型（或 $\boldsymbol{A}$）的**负惯性指数**；
- 正、负惯性指数的差称为**符号差**；
- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩也称为二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩。

定义 4 二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准型中，

- 正平方项的项数称为二次型（或 $\boldsymbol{A}$）的**正惯性指数**；
- 负平方项的项数称为二次型（或 $\boldsymbol{A}$）的**负惯性指数**；
- 正、负惯性指数的差称为**符号差**；
- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩也称为二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩。

设 n 阶实对称矩阵的秩为 r，正惯性指数为 p，则

- 负惯性指数为 $q = r - p$；
- 符号差为 $p - q = 2p - r$；
- 与 $\boldsymbol{A}$ 合同的对角阵的零对角元个数为 $n - r$。

推论 1 设 A 为 n 阶实对称矩阵，若 A 的正、负惯性指数分别为 p 和 q，则

$$\boldsymbol{A} \simeq \operatorname{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{p\text{个}},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{q\text{个}},0,\cdots,0). \tag{6}$$

或者说，对于二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，存在坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2. \tag{7}$$

把(7)右端的二次型称为$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形；把(6)中的对角阵称为$\boldsymbol{A}$ 的合同规范形。

证明.

$$C_1^T A C_1 = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_p, -d_{p+1}, \cdots, -d_{p+q}, 0, \cdots, 0)$$

证明.

$$\boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_p,-d_{p+1},\cdots,-d_{p+q},0,\cdots,0)$$

取可逆阵

$$\boldsymbol{C}_2=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{d_p}},\frac{1}{\sqrt{d_{p+1}}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{d_{p+q}}},1,\cdots,1\right)$$

则有

$$\boldsymbol{C}_2^T(\boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{C}_2=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0)$$

□

如果两个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同，也称它们对应的二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 合同。

结论 1

- 两个实对称矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 有相同的正惯性指数和负惯性指数；
- 全体 n 阶实对称矩阵，按其合同规范形（不考虑 $+1, -1, 0$ 的排列次序）分类，共有 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类。

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法

3. 惯性定理与二次型的规范形

4. 正定二次型和正定矩阵

5. 其他有定二次型

6. 往年试题

定义 5 如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

定义 5　如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

注：正定矩阵是针对对称矩阵而言的。

结论 2 二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 正定

$\Longleftrightarrow \quad d_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

结论 2 二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 正定 $\iff d_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

证明.

$\Leftarrow$ 显然

结论 2 二次型 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 正定 $\Longleftrightarrow$ $d_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$

证明.

$\Leftarrow$ 显然

$\Rightarrow$ 设 $d_i\le 0$，取 $y_i=1, y_j=0(j\neq i)$，代入二次型，得

$$f(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)=d_i\le 0$$

这与二次型 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 正定矛盾。

□

结论 3 一个二次型 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$，经过非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(C^T AC)\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \xLeftrightarrow{\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{y}} \boldsymbol{y}^T(C^T AC)\boldsymbol{y} \quad (C\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

结论 3 一个二次型 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$，经过非退化线性变换 $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(C^T AC)\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \xLeftrightarrow{\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y}} \boldsymbol{y}^T(C^T AC)\boldsymbol{y} \quad (C\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

证明. $\forall \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq \boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y}(C\text{可逆})$，则 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$。若 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ 正定，则 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0$。从而有：$\forall \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$，

$$\boldsymbol{y}^T(C^T AC)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0$$

故 $\boldsymbol{y}^T(C^T AC)\boldsymbol{y}$ 是正定二次型。

结论 3 一个二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，经过非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

证明. $\forall \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{C}\text{可逆})$，则 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$。若 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定，则 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$。从而有：$\forall \boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，

$$\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$$

故 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$ 是正定二次型。反之亦然。 □

由以上两个结论可知，一个二次型 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ 通过坐标变换 $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y}$，将其化为标准型（或规范形），就容易判断其正定性。

定理 3 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则以下命题等价：

(1) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型（$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵）；

(2) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n，即 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{I}$；

(3) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$；

(4) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于零。

证明 (1)⇒(2)

证明 (1)⇒(2) 对 $\boldsymbol{A}$，存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$ 使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$$

假设 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数 $< n$，则至少存在一个 $d_i \le 0$，做变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，则

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} = d_1y_1^2 + \cdots + d_ny_n^2$$

不恒大于零，与命题 (1) 矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n，从而 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{I}$。

证明 (2)⇒(3)

证明 (2)⇒(3) 由 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$($\boldsymbol{C}$ 可逆)，得 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}^T)^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{C}^{-1})^T\boldsymbol{C}^{-1}$，取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}^{-1}$，则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$。

证明 (2)⇒(3) 由 $C^TAC = I$(C 可逆)，得 $A = (C^T)^{-1}C^{-1} = (C^{-1})^TC^{-1}$，取 $P = C^{-1}$，则有 $A = P^TP$。

(3)⇒(4)

证明 (2)⇒(3) 由 $C^TAC=I$(C 可逆)，得 $A=(C^T)^{-1}C^{-1}=(C^{-1})^TC^{-1}$，取 $P=C^{-1}$，则有 $A=P^TP$。

(3)⇒(4) 设 $Ax=\lambda x$，即 $(P^TP)x=\lambda x$，于是便有

$$x^TP^TPx=\lambda x^Tx,\ 即(Px,Px)=\lambda(x,x)$$

由于特征向量 $x\neq 0$，从而 $Px\neq 0$，故

$$\lambda=\frac{(Px,Px)}{(x,x)}>0.$$

证明 (2)⇒(3) 由 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$($\boldsymbol{C}$ 可逆)，得 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}^T)^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{C}^{-1})^T\boldsymbol{C}^{-1}$，取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}^{-1}$，则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$。

(3)⇒(4) 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，即 $(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，于是便有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}, \text{即}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

由于特征向量 $\boldsymbol{x}\neq 0$，从而 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\neq 0$，故

$$\lambda=\frac{(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}>0.$$

(4)⇒(1)

证明 (2)⇒(3) 由 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$($\boldsymbol{C}$ 可逆)，得 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}^T)^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{C}^{-1})^T\boldsymbol{C}^{-1}$，取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}^{-1}$，则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$。

(3)⇒(4) 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，即 $(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，于是便有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x},\ \text{即}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

由于特征向量 $\boldsymbol{x}\neq 0$，从而 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\neq 0$，故

$$\lambda=\frac{(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}>0.$$

(4)⇒(1) 对 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

因特征值均大于零，故 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定。

例 5.1 $\boldsymbol{A}$正定 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{-1}$正定

例 5.1 $\boldsymbol{A}$正定 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{-1}$正定

证明.

- 方法 1:

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x})\xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

  由于当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 时，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$；又已知 $\forall\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}>0$，因此 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定。

例 5.1 A正定 $\Longrightarrow$ A^{-1}正定

证明.

- 方法 1:

$$x^T A^{-1} x = (x, A^{-1} x) \xlongequal{x=Ay} (Ay, A^{-1} Ay) = (Ay, y) = y^T Ay$$

由于当 $x = Ay$ 时，$x \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$；又已知 $\forall y \neq 0$，恒有 $y^T Ay \neq 0$，故 $\forall x \neq 0$，恒有 $x^T A^{-1} x > 0$，因此 A^{-1} 正定。

- 方法 2：因 A 正定，故存在可逆阵 C 使得 $C^T AC = I$。将 $C^T AC = I$ 两边求逆，得 $C^{-1} A^{-1} (C^{-1})^T = I$，取 $D = (C^{-1})^T$，则 $D^T A^{-1} D = I$，故 A^{-1} 正定。

$\square$

例 5.2　判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$$

是否为正定二次型。

例 5.2 判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$$

是否为正定二次型。

解 用配方法得

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+2x_3^2\geq 0$$

等号成立的充分必要条件是

$$x_1+x_2=0,\quad x_2-x_3=0,\quad x_3=0$$

即 $x_1=x_2=x_3=0$，故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定。

例 5.2 判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$$

是否为正定二次型。

解 用配方法得

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+2x_3^2\geq 0$$

等号成立的充分必要条件是

$$x_1+x_2=0,\quad x_2-x_3=0,\quad x_3=0$$

即 $x_1=x_2=x_3=0$，故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定。

注： 任何二次型都可用配方法判断其正定性。

例 5.3 判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$$

是否为正定二次型。

例 5.3 判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$$

是否为正定二次型。

解 该二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda-3)=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值：$\lambda_1=1,\lambda_2=3+2\sqrt{3},\lambda_3=3-2\sqrt{3}$，故 $\boldsymbol{A}$ 不是正定矩阵，从而二次型也不是正定的。

定理 4

$$\boldsymbol{A}\text{正定} \implies a_{ii} > 0(i = 1, 2, \cdots, n) \quad \text{且} \quad |\boldsymbol{A}| > 0$$

定理 4

$$\boldsymbol{A}\text{正定} \implies a_{ii} > 0(i = 1, 2, \cdots, n) \text{ 且 } |\boldsymbol{A}| > 0$$

证明.

- 因 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 正定，故选 $\boldsymbol{x}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T$，则有 $\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_i = a_{ii} x_i^2 = a_{ii} > 0$。
- 因 $\boldsymbol{A}$ 正定，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{P}$，因此 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{P}^T||\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}|^2 > 0$。

□

定理 5

$$\boldsymbol{A}\text{正定} \iff \boldsymbol{A}\text{的 } n \text{ 个顺序主子式全大于零。}$$

定理 5

$$A\text{正定} \iff A\text{的 } n \text{ 个顺序主子式全大于零。}$$

定义 6 记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶矩阵 A 的 k 阶顺序主子式。当 k 取 $1,2,\cdots,n$ 时，就得 A 的 n 个顺序主子式。

证明 $(\Rightarrow)$ 取 $\boldsymbol{x}_k=(x_1,x_2,\cdots,x_k)^T\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)^T\neq\mathbf{0}$，记 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_k^T,\mathbf{0})^T$，则必有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_k^T,\mathbf{0})\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_k & \star\\ \star & \star\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_k\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}_k^T\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_k>0$$

$\forall\boldsymbol{x}_k\neq\mathbf{0}$ 都成立，故 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的 k 元二次型 $\boldsymbol{x}_k^T\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_k$ 是正定的，从而有 $|\boldsymbol{A}_k|>0$。

证明. ($\Leftarrow$) 对 n 做数学归纳法。

证明. $(\Leftarrow)$ 对 n 做数学归纳法。

- 当 $n = 1$ 时，$a_{11} > 0$，$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = a_{11} x_1^2 > 0 (\forall x_1 \neq 0)$，故充分性成立。

证明. $(\Leftarrow)$ 对 n 做数学归纳法。

- 当 $n=1$ 时，$a_{11}>0$，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=a_{11}x_1^2>0(\forall x_1\neq 0)$，故充分性成立。
- 假设充分性对 $n-1$ 元二次型成立，下证对 n 元二次型也成立。将 $\boldsymbol{A}$ 分块表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

  下证 $\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵。

证明. $(\Leftarrow)$ 对 n 做数学归纳法。

- 当 $n=1$ 时，$a_{11}>0$，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=a_{11}x_1^2>0(\forall x_1\neq 0)$，故充分性成立。
- 假设充分性对 $n-1$ 元二次型成立，下证对 n 元二次型也成立。将 $\boldsymbol{A}$ 分块表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

下证 $\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵。取

$$\boldsymbol{C}_1^T=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & -\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \underbrace{a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}_{a} \end{pmatrix}$$

证明. $(\Leftarrow)$ 对 n 做数学归纳法。

- 当 $n=1$ 时，$a_{11}>0$，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=a_{11}x_1^2>0(\forall x_1\neq 0)$，故充分性成立。
- 假设充分性对 $n-1$ 元二次型成立，下证对 n 元二次型也成立。将 $\boldsymbol{A}$ 分块表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

下证 $\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵。取

$$\boldsymbol{C}_1^T=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & -\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \underbrace{a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}_{a} \end{pmatrix}$$

根据充分性条件 $|\boldsymbol{A}|>0,|\boldsymbol{A}_{n-1}|>0$，由上式易得 $a>0$。由归纳假设 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 正定，故存在 $n-1$ 阶可逆阵 $\boldsymbol{G}$ 使得 $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{I}_{n-1}$。故再取

$$\boldsymbol{C}_2^T=\begin{pmatrix} \boldsymbol{G}^T & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix} \boldsymbol{G} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$$

便可得 $\boldsymbol{C}_2^T(\boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{I}_n$，故 $\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵，从而 $\boldsymbol{A}$ 正定。

例 5.4 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，则存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$。

证明. 因正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且特征值全大于零，故存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Q}^T$$

其中 $\lambda_i>0$。利用 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$，及

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=[\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})]^2$$

于是

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^T]^2$$

记

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^T$$

即得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2.$$

例 5.4 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，则存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$。

证明. 因正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且特征值全大于零，故存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Q}^T$$

其中 $\lambda_i>0$。利用 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$，及

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=[\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})]^2$$

于是

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^T]^2$$

记

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^T$$

即得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2.$$

因 $\sqrt{\lambda_i}>0$，故 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。 □

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法

3. 惯性定理与二次型的规范形

4. 正定二次型和正定矩阵

5. 其他有定二次型

6. 往年试题

定义 7 如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有二次型

- $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0$，但至少存在一个 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$，就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为半正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵；
- $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<0$，称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为负定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵；
- $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq 0$，但至少存在一个 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$，就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为半负定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为半负定矩阵。

定义 7 如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有二次型

- $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0$，但至少存在一个 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$，就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为半正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵；
- $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<0$，称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为负定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵；
- $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq 0$，但至少存在一个 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$，就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为半负定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为半负定矩阵。

正定、半正定、负定、半负定二次型，统称为有定二次型；如果二次型不是有定的，就称为不定二次型。

例 6.1 对于二次型

$$x^T A x = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2,$$

- 当 $d_i < 0, \ i = 1,2,\cdots,n$ 时，是负定的；
- 当 $d_i \geq 0, \ i = 1,2,\cdots,n$ 但至少有一个为零时，是半正定的；
- 当 $d_i \leq 0, \ i = 1,2,\cdots,n$ 但至少有一个为零时，是半负定的。

定理 6 设 A 是 n 阶实对称矩阵，则下列命题等价：

1. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 负定；
2. $\boldsymbol{A}$ 的负惯性指数为 n，即 $\boldsymbol{A} \simeq -\boldsymbol{I}$；
3. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$；
4. $\boldsymbol{A}$ 的特征值全小于零；
5. $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式全小于零，偶数阶顺序主子式全大于零。

定理 7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则下列命题等价：

1. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 半正定；
2. $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数 $= \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r < n$，或 $\boldsymbol{A} \simeq -\mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{r}, 0, \cdots, 0)$；
3. 存在非满秩矩阵 $\boldsymbol{P}(\mathrm{r}(\boldsymbol{P}) < n)$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$；
4. $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于等于零，但至少有一个为零；
5. $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式 ≥ 0，但至少有一个主子式等于零。

例 6.2　判断二次型 $f = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ 是否为有定二次型。

例 6.2 判断二次型 $f = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ 是否为有定二次型。

解

$$
\begin{aligned}
f &= (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{1\le i<j\le n} 2x_i x_j \\
&= \sum_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)^2 \ge 0
\end{aligned}
$$

当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时，等号成立，故原二次型是半正定的。

例 6.2 判断二次型 $f = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ 是否为有定二次型。

解

$$f = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{1\le i<j\le n} 2x_i x_j$$
$$= \sum_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)^2 \ge 0$$

当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时，等号成立，故原二次型是半正定的。

也可通过求特征值来判断。二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = n(n-1$ 重)，故二次型是半正定的。

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

2. 化二次型为标准型
   - 正交变换法
   - 配方法
   - 初等变换法

3. 惯性定理与二次型的规范形

4. 正定二次型和正定矩阵

5. 其他有定二次型

6. 往年试题

例 7.1 (05-06 上)　**求二次型** $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ **的秩。**

例 7.2 (05-06 上) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1$,

1. 求二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;
2. 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵;
3. 计算 $\det(\boldsymbol{A}^m)$

例 7.3 (05-06 下) 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 的正定性。

例 7.4 (06-07 上)　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，试求该二次型的矩阵，并指出 λ 取何值时，f 正定？

例 7.5 (06-07 下)　设二次型 $f(x,y,z)=3x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz$,

1. 用正交变换化二次型 f 为标准型，并写出相应的正交阵；
2. 求 $f(x,y,z)$ 在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值和最小值。

例 7.6 (06-07 下)　设二次型 $f(x,y,z)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，

1. 写出二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$；
2. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量；
3. 化 f 为标准型；
4. 判断 f 是否正定。