线性代数

矩阵

张晓平

数学与统计学院
Email: xpzhang.math@whu.edu.cn
Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

1 习题

28

求与$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$可交换的全体三阶矩阵。

29

已知$\mathbf{A}$是对角元互不相等的n阶对角矩阵，即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

当$i \neq j$时，$a_i \neq a_j$。证明：与$\mathbf{A}$可交换的矩阵必是对角矩阵。

证明： 设与$\mathbf{A}$可交换的矩阵为$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ 由$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，即

$$\begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \cdots & a_1 b_{1n} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} & \cdots & a_n b_{1n} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 b_{n1} & a_2 b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{pmatrix}$$

29

已知$\mathbf{A}$是对角元互不相等的n阶对角矩阵，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

当$i\neq j$时，$a_i\neq a_j$。证明：与$\mathbf{A}$可交换的矩阵必是对角矩阵。

证明: 设与$\mathbf{A}$可交换的矩阵为$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$由$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，即

$$\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

亦即

$$\begin{pmatrix} 0 & (a_1-a_2)b_{12} & \cdots & (a_1-a_n)b_{1n} \\ (a_2-a_1)b_{21} & 0 & \cdots & (a_2-a_n)b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n-a_1)b_{n1} & (a_n-a_2)b_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

因为$a_i \neq a_j (i \neq j)$，故

$$b_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

30

证明：两个n阶下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

31

证明：若$\mathbf{A}$是对角元全为零的上三角矩阵，则$\mathbf{A}^2$也是主对角元全为零的上三角矩阵。

32

证明：对角元全为1的上三角矩阵的乘积，仍是主对角元全为1的上三角矩阵。

33

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

计算$\mathbf{A}\mathbf{B}^T$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, $\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\mathbf{B}^T$。

34

证明：$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^T = \mathbf{A}_k^T\cdots\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_1^T$。

证明：由$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$及数学归纳法容易证明。

34

证明：$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^T=\mathbf{A}_k^T\cdots\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_1^T$。

证明: 由$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$及数学归纳法容易证明。

35

证明：若$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$都是n阶对称矩阵，则$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，$\mathbf{A}-2\mathbf{B}$也是对称矩阵。

证明: 对称矩阵的线性组合仍是对称矩阵。

35

证明：若$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$都是n阶对称矩阵，则$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，$\mathbf{A}-2\mathbf{B}$也是对称矩阵。

证明: 对称矩阵的线性组合仍是对称矩阵。

36

对于任意的n阶矩阵$\mathbf{A}$，证明：

(1) $\mathbf{A}+\mathbf{A}^T$是对称矩阵，$\mathbf{A}-\mathbf{A}^T$是反对称矩阵。

(2) $\mathbf{A}$可表示对称矩阵和反对称矩阵之和。

证明:

$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}+\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$$

36

对于任意的n阶矩阵$\mathbf{A}$，证明：

(1) $\mathbf{A}+\mathbf{A}^T$是对称矩阵，$\mathbf{A}-\mathbf{A}^T$是反对称矩阵。

(2) $\mathbf{A}$可表示对称矩阵和反对称矩阵之和。

证明:

$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}+\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$$

37

证明：若**A**和**B**都是n阶对称矩阵，则**AB**是对称矩阵的充要条件是**A**与**B**可交换。

证明:

$(\Rightarrow)$

$$\mathbf{AB}\text{对称} \Rightarrow \mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{BA}$$

$(\Leftarrow)$

$$\mathbf{AB}\text{可交换} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Rightarrow (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{BA} = \mathbf{AB}$$

37

证明：若$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$都是n阶对称矩阵，则$\mathbf{AB}$是对称矩阵的充要条件是$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$可交换。

证明:

$(\Rightarrow)$

$$\mathbf{AB}\text{对称} \Rightarrow \mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{BA}$$

$(\Leftarrow)$

$$\mathbf{AB}\text{可交换} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Rightarrow (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{BA} = \mathbf{AB}$$

38

设$\mathbf{A}$是实对称矩阵，且$\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$，证明$\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

证明: 因为$\mathbf{A}$实对称，故

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

观察$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的主对角元，

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$$

故

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i, j.$$

38

设$\mathbf{A}$是实对称矩阵，且$\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$，证明$\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

证明： 因为$\mathbf{A}$实对称，故

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

观察$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的主对角元，

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$$

故

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i, j.$$

39

已知$\mathbf{A}$是一个n阶对称矩阵，$\mathbf{B}$是一个n阶反对称矩阵。

(1) 问$\mathbf{A}^k$，$\mathbf{B}^k$是否为对称或反对称矩阵？

(2) 证明：$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$是一个反对称矩阵。

证明：

(1)

$$(\mathbf{A}^k)^T=(\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A})^T=\mathbf{A}^T\cdots\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T=\mathbf{A}\cdots\mathbf{AA}=\mathbf{A}^k \Longrightarrow \mathbf{A}^k\text{对称}$$

$$(\mathbf{B}^k)^T=(-\mathbf{B})\cdots(-\mathbf{B})(-\mathbf{B})=(-1)^k\mathbf{B}^k \Longrightarrow \begin{cases}\mathbf{B}^k\text{对称}, & k\text{为偶数}\\ \mathbf{B}^k\text{反对称}, & k\text{为奇数}\end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})^T &= (\mathbf{AB})^T+(\mathbf{BA})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T+\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T\\ &= -\mathbf{BA}-\mathbf{AB}.\end{aligned}$$

39

已知$\mathbf{A}$是一个n阶对称矩阵，$\mathbf{B}$是一个n阶反对称矩阵。

(1) 问$\mathbf{A}^k$，$\mathbf{B}^k$是否为对称或反对称矩阵?

(2) 证明：$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$是一个反对称矩阵。

证明:

(1)

$$(\mathbf{A}^k)^T=(\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A})^T=\mathbf{A}^T\cdots\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T=\mathbf{A}\cdots\mathbf{AA}=\mathbf{A}^k \Longrightarrow \mathbf{A}^k\text{对称}$$

$$(\mathbf{B}^k)^T=(-\mathbf{B})\cdots(-\mathbf{B})(-\mathbf{B})=(-1)^k\mathbf{B}^k \Longrightarrow \begin{cases}\mathbf{B}^k\text{对称}, & k\text{为偶数}\\ \mathbf{B}^k\text{反对称}, & k\text{为奇数}\end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})^T &= (\mathbf{AB})^T+(\mathbf{BA})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T+\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T\\ &= -\mathbf{BA}-\mathbf{AB}.\end{aligned}$$

40（求逆矩阵）

(1)

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

40（求逆矩阵）

(2)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

40（求逆矩阵）

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

40（求逆矩阵）

(4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

40（求逆矩阵）

(5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

40（求逆矩阵）

(6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

41（解矩阵方程）

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

41（解矩阵方程）

(3)

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

42（解线性方程组）

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ & 2x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & & = & 2 \end{cases}$$

43

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$为同阶方阵，

(1) 问$\mathbf{A}$满足什么条件时，命题$\mathbf{AB}=\mathbf{AC} \Rightarrow \mathbf{B}=\mathbf{C}$成立；

(2) 问：若$\mathbf{B}\neq\mathbf{C}$时，是否必有$\mathbf{AB}\neq\mathbf{AC}$?

(1) 当$\mathbf{A}$可逆时，该命题成立。

(2) 不一定。例如，当$\mathbf{A}=\mathbf{0}$时，不论任何$\mathbf{B},\mathbf{C}$，总有$\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$。

44

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$都是n阶方阵，问：下列命题是否成立？若成立，给出证明；若不成立，举反例说明。

(1) 若$\mathbf{A}, \mathbf{B}$皆不可逆，则$\mathbf{A}+\mathbf{B}$也不可逆；

(2) 若$\mathbf{AB}$可逆，则$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$都可逆；

(3) 若$\mathbf{AB}$不可逆，则$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$都不可逆；

(4) 若$\mathbf{A}$可逆，则$k\mathbf{A}$可逆(k是数)。

(1) 不成立。例如，令$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$皆不可逆，

但$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$可逆；

(2) 成立。$\mathbf{AB}$可逆 $\Rightarrow |\mathbf{A}||\mathbf{B}|=|\mathbf{AB}|\neq 0 \Rightarrow |\mathbf{A}|\neq 0$且$|\mathbf{B}|\neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}$, $\mathbf{B}$都可逆.

(3) 不成立。例如，令$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$不可逆，但$\mathbf{A}$不可逆,但$\mathbf{B}$可逆；

(4) 若$\mathbf{A}$可逆，则$k\mathbf{A}$可逆(k是数)。

45

设方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$，证明：

(1) $\mathbf{A}$和$\mathbf{I} - \mathbf{A}$都可逆，并求它们的逆；

(2) $\mathbf{A} + \mathbf{I}$和$\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$不同时可逆。

46

设方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}+4\mathbf{I}=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}+\mathbf{I}$和$\mathbf{A}-3\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆。

47

试求上（或下）三角矩阵可逆的充要条件，并证明：可逆上（或下）三角矩阵的逆矩阵也是可逆上（或下）三角矩阵。

28

28

28

28

28

28

28

28

28

28

28