线性代数

特征值与特征向量 矩阵的对角化

张晓平

数学与统计学院

Email: xpzhang.math@whu.edu.cn

Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目 录

1. 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵
   - 特征值与特征向量
   - 特征值与特征值的性质

1. 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵
   - 特征值与特征向量
   - 特征值与特征值的性质

定义（特征值与特征向量）

设$\mathbf{A}$为复数域$\mathbb{C}$上的n阶矩阵，如果存在数$\lambda \in \mathbb{C}$和非零的n维向量$\mathbf{x}$使得

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

则称λ为矩阵$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{x}$为$\mathbf{A}$的对应于特征值λ的特征向量。

定义（特征值与特征向量）

设$\mathbf{A}$为复数域$\mathbb{C}$上的n阶矩阵，如果存在数$\lambda \in \mathbb{C}$和非零的n维向量$\mathbf{x}$使得

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

则称λ为矩阵$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{x}$为$\mathbf{A}$的对应于特征值λ的特征向量。

(1) 特征向量$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$；

(2) 特征值问题是对方针而言的。

由定义，n阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值，就是使齐次线性方程组

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

有非零解的λ值，即满足方程

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

的λ都是矩阵$\mathbf{A}$的特征值。

由定义，n阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值，就是使齐次线性方程组

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

有非零解的λ值，即满足方程

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$$

的λ都是矩阵$\mathbf{A}$的特征值。

重要结论

特征值λ是关于λ的多项式$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$的根。

定义（特征多项式、特征矩阵、特征方程）

设n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式，$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$称为$\mathbf{A}$的特征矩阵，$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$称为$\mathbf{A}$的特征方程。

定义（特征多项式、特征矩阵、特征方程）

设n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式，$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$称为$\mathbf{A}$的特征矩阵，$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$称为$\mathbf{A}$的特征方程。

(1) n阶矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式是λ的n次多项式。

定义（特征多项式、特征矩阵、特征方程）

设n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式，$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$称为$\mathbf{A}$的特征矩阵，$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$称为$\mathbf{A}$的特征方程。

(1) n阶矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式是λ的n次多项式。

(2) 特征多项式的k重根称为k重特征值。

例1

求矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

例1

求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 & 1 \\ -3 & \lambda - 1 & 1 \\ -4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 = 0$$

故$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$（二重特征值）。

当$\lambda_1 = 3$时，由$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)^T$，因此$k_1\mathbf{x}_1$（$k_1$为非零任意常数）是$\mathbf{A}$对应于$\lambda_1 = 3$的全部特征向量。

当$\lambda_1 = 3$时，由$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)^T$，因此$k_1\mathbf{x}_1$（$k_1$为非零任意常数）是$\mathbf{A}$对应于$\lambda_1 = 3$的全部特征向量。

当$\lambda_1 = 2$时，由$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为$\mathbf{x}_2 = (1, 1, 2)^T$，因此$k_2\mathbf{x}_2$（$k_1$为非零任意常数）是$\mathbf{A}$对应于$\lambda_1 = 2$的全部特征向量。

例2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的特征多项式为

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})$$

故其n个特征值为n个对角元。

1. 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵
   - 特征值与特征向量
   - 特征值与特征值的性质

定理1

若$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$都是$\mathbf{A}$的对应于特征值λ_0的特征向量，则$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2$也是$\mathbf{A}$的对应于特征值$\lambda_0$的特征向量（其中$k_1, k_2$为任意常数，但$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 \neq 0$）。

定理2

设n阶矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$的n个特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则

(1) $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(2) $$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(\mathbf{A})$$

定理2

设n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

(2) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(\mathbf{A})$

- 当$\det(\mathbf{A})\neq 0$，即$\mathbf{A}$为可逆矩阵时，其特征值全为非零数；
- 奇异矩阵$\mathbf{A}$至少有一个零特征值。

定理3

一个特征向量不能属于不同的特征值。

定理3

一个特征向量不能属于不同的特征值。

证明: 若$\mathbf{x}$是$\mathbf{A}$的属于特征值$\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$的特征向量， 即有

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x},\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_2 \mathbf{x} \ \Rightarrow\ (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \Rightarrow\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

这与$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$矛盾。

性质1

Table: 特征值与特征向量

	特征值	特征向量
$\mathbf{A}$	λ	$\mathbf{x}$
$k\mathbf{A}$	$k\lambda$	$\mathbf{x}$
$\mathbf{A}^m$	λ^m	$\mathbf{x}$
$\mathbf{A}^{-1}$	λ^{-1}	$\mathbf{x}$

性质2

矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{A}^T$的特征值相同。

定理4

设$\mathbf{A} = (a_{ij})$是n阶矩阵,若

$$(1)\quad \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1, \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

有一个成立，则$\mathbf{A}$的所有特征值的模都小于1。

例1

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(i) 求$\mathbf{A}$的特征值与特征向量

(ii) 求可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$为对角阵。