线性代数

二次型

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 6 月 7 日

1. 二次型的定义与矩阵表示　合同矩阵

定义 1 (二次型) n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & \cdots \quad \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{1}$$

当系数属于数域 F 时，称为数域 F 上的一个n 元二次型。

设 $a_{ij} = a_{ji}$，则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}$$

则必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

  其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}$$

  则必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

- 二次型和它的矩阵是相互唯一确定的，因此研究二次型的性质就转化为研究对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所具有的性质。

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$
其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。
- 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$
则必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。
- 二次型和它的矩阵是相互唯一确定的，因此研究二次型的性质就转化为研究对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所具有的性质。
- 对于二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，对称阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 f 的矩阵，f 称为对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型，而 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 f 的秩。

例 1　设 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 5x_4^2$，则它的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{12}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \tag{2}$$

使得二次型只含平方项。也就是用(2)代入(1)，能使

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

这种只含平方项的二次型，称为二次型的标准形。

若标准形的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 只在 $1, -1, 0$ 中取值，也就是用(2)代入(1)，能使

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

则称上式为二次型的规范形。

设 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，则可逆变换(2)可记为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

从而

$$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}.$$

把一般的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 化为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的纯平方项之代数和的基本方法是做坐标变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{C} \text{ 为可逆矩阵})$$

使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = d_1y_1^2 + \cdots + d_ny_n^2.$$

把一般的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的纯平方项之代数和的基本方法是做坐标变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{C}\text{ 为可逆矩阵})$$

使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2.$$

从矩阵的角度来说，就是对于一个实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻找一个可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 称为对角形。

定义 2 (矩阵的合同)　对于两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B},$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$，记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$。

显然，若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 也是对称阵，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$。

显然，若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 也是对称阵，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$。

事实上，

$$\boldsymbol{B}^T=(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^T=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{B}$ 为对称阵。又因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，而 $\boldsymbol{C}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{C}^T$ 也可逆，由矩阵秩的性质可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$。

结论 1

经过可逆变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 后，二次型 f 的矩阵由 $\boldsymbol{A}$ 变为与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，且二次型的秩不变。

2. 化二次型为标准型

- 含平方项而不含混合项的二次型称为标准二次型。
- 化二次型为标准型，就是对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻找可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵。

2.1 正交变换法

结论 2　对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda},$$

由于 $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^{T}$，故

$$\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

定理 1 (主轴定理) 对于任一个 n 元二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x},$$

存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$($\boldsymbol{Q}$ 为正交阵),使得

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}) \boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值,$\boldsymbol{Q}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的标准正交特征向量。

推论 1　任给二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，总有可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$，使得 $f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{z})$ 为规范形。

推论 1 任给二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，总有可逆变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$，使得 $f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{z})$ 为规范形。

证明. 由上述定理可知，

$$f(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

设二次型 f 的秩为 r，则特征值 λ_i 中恰有 r 个不为零，不妨设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 不等于零，$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$，令

$$\boldsymbol{K} = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \cdots, k_n), \quad k_i = \begin{cases} 1/sqrt|\lambda_i|, & i \le r, \\ 1, & i > r, \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{K}$ 可逆，变换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{z}$ 把 $f(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})$ 化为

$$f(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}$$

而

$$\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{K} = \mathrm{diag}(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}, \cdots, \frac{\lambda_r}{|\lambda_r|}, 0, \cdots, 0),$$

记 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}$，即知可逆变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$ 把 f 化为规范形。 $\square$

例 2 用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

例 2　用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解　对应矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

例 2　用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解　对应矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

得特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 和 $\lambda_3=10$.

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2 = (2, 0, 1)^T.$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2 = (2, 0, 1)^T.$$

$$(\lambda_3 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\lambda_3 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_3=(1,2,-2)^T.$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2 = (2, 0, 1)^T.$$

$$(\lambda_3 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_3 = (1, 2, -2)^T.$$

对 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 用施密特正交化方法得

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)^T, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$$

再将 $\boldsymbol{x}_3$ 单位化为

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$$

取正交矩阵

$$Q = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(1, 1, 10).$$

取正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix} -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{15} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{4\sqrt{5}}{15} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(1,1,10).$$

令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$，做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，原二次型就化成标准型

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

例 3 对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = 1$$

例 3　对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = 1$$

若将坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 变换为另一直角坐标系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

例 3　对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = 1$$

若将坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 变换为另一直角坐标系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

即

$$(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

例 3 对在自然坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 下的二次曲面

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = 1$$

若将坐标系 $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ 变换为另一直角坐标系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

即

$$(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则在坐标系 $\{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3\}$ 下，曲面方程为

$$y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2 = 1.$$

例 4　将一般二次曲面方程

$$x^2 - 2y^2 + 10z^2 + 28xy - 8yz + 20zx - 26x + 32y + 28z - 38 = 0$$

化为标准方程。

例 4 将一般二次曲面方程

$$x^2-2y^2+10z^2+28xy-8yz+20zx-26x+32y+28z-38=0$$

化为标准方程。

解 二次型部分 $x^2-2y^2+10z^2+28xy-8yz+20zx$ 对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 14 & -2 & -4 \\ 10 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

同前例，可得正交阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(9,18,-18).$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$， $\boldsymbol{y}=(x',y',z')^T$，可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9x'^2+18y'^2-18z'^2$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$, $\boldsymbol{y}=(x',y',z')^T$, 可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9x'^2+18y'^2-18z'^2$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$$x'^2+2y'^2-2z'^2-\frac{2}{3}x'+\frac{4}{3}y'-\frac{16}{3}z'-\frac{28}{9}=0$$

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$, $\boldsymbol{y}=(x',y',z')^T$, 可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9x'^2+18y'^2-18z'^2$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$$x'^2+2y'^2-2z'^2-\frac{2}{3}x'+\frac{4}{3}y'-\frac{16}{3}z'-\frac{28}{9}=0$$

配方得

$$\left(x'-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(y'+\frac{1}{3}\right)^2-2\left(z'+\frac{4}{3}\right)^2=1$$

做正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$，$\boldsymbol{y} = (x', y', z')^T$，可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} = 9x'^2 + 18y'^2 - 18z'^2$$

将 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$$x'^2 + 2y'^2 - 2z'^2 - \frac{2}{3}x' + \frac{4}{3}y' - \frac{16}{3}z' - \frac{28}{9} = 0$$

配方得

$$\left(x' - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(y' + \frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(z' + \frac{4}{3}\right)^2 = 1$$

再令

$$x'' = x' - \frac{1}{3}, \quad y'' = y' + \frac{1}{3}, \quad z'' = z' + \frac{4}{3},$$

代入上式得标准方程

$$x''^2 + 2y''^2 - 2z''^2 = 1$$

2.2　配方法

例 5 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

例 5　用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解　先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

例 5 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

例 5　用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解　先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1+x_2-x_3 \\ y_2 = x_2-2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

例 5 用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解 先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} y_1 & = & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ y_2 & = & & & x_2 & - & 2x_3 \\ y_3 & = & & & & & x_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2-5y_3^2.$$

例 6 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准型。

例 6 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$$

为标准型。

解 对 x_1x_2 利用平方差公式，令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$$

例 6 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$$

为标准型。

解 对 x_1x_2 利用平方差公式，令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$$

先对含 y_1 的项配完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-2y_2^2-2y_3^2+4y_2y_3$$

再对含 y_2 的项配完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_3)^2-2(y_2-y_3)^2$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

坐标变换记为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表:

二次型	对应矩阵
$2x_1x_2+4x_1x_3$	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$
$2z_1^2-2z_2^2$	$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix}$

易验证

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(2,-2,0)$$

任何 n 元二次型都可用配方法化为标准型，相应的变换矩阵为主对角元为 1 的上三角阵和对角块矩阵，或者是这两类矩阵的乘积。

3. 正定二次型和正定矩阵

二次型的标准形是不唯一的，但标准形中所含项数（即二次型的秩）是确定的。不仅如此，在限定变换为实变换时，标准形中正系数的个数是不变的，从而负系数的个数也是不变的。

定理 2 (惯性定理) 设有二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，它的秩为 r，有两个可逆变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z},$$

使得

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2,\quad k_i\neq 0,$$

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ry_r^2,\quad \lambda_i\neq 0,$$

则 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数相等。

二次型的标准形中，正系数的个数称为二次型的正惯性指数，负系数的个数称为负惯性指数。若二次型 f 的正惯性指数为 p，秩为 r，则 f 的规范形便可确定为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

定义 3 如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

定义 3　如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

注：正定矩阵是针对对称矩阵而言的。

结论 3　二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 正定

$\iff$　$d_i > 0\ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

结论 3 二次型 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 正定
$\Longleftrightarrow \quad d_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$

证明.

$\Leftarrow$ 显然

结论 3 二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 正定 $\Longleftrightarrow \quad d_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

证明.

$\Leftarrow$ 显然

$\Rightarrow$ 设 $d_i \leq 0$，取 $y_i = 1, y_j = 0 (j \neq i)$，代入二次型，得

$$f(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) = d_i \leq 0$$

这与二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 正定矛盾。

$\square$

结论 4　一个二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，经过非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \stackrel{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

结论 4 一个二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，经过非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

证明. $\forall \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{C}\text{可逆})$，则 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$。若 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定，则 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$。从而有：$\forall \boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，

$$\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$$

故 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$ 是正定二次型。

结论 4 一个二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，经过非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。

证明. $\forall \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{C}\text{可逆})$，则 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$。若 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定，则 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$。从而有：$\forall \boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，

$$\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$$

故 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$ 是正定二次型。反之亦然。 □

定理 3 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则以下命题等价:

(1) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型（$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵）;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n，即 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{I}$;

(3) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$;

(4) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于零。

(1)⇒(2).　对 $\boldsymbol{A}$，存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n).$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数 $< n$，则至少存在一个 $d_i \leq 0$。做变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，则

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$$

不恒大于零，与命题 (1) 矛盾。故 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n。 □

(2)⇒(3). 由 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$ 得 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}^T)^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{C}^{-1})^T\boldsymbol{C}^{-1}$，取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}^{-1}$，则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$。 □

(3)⇒(4).　设 $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$，即 $(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P})\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$，于是

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{Px} = \lambda \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$$

即

$$(\boldsymbol{Px}, \boldsymbol{Px}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

因特征向量 $\boldsymbol{x} \neq 0$，从而 $\boldsymbol{Px} \neq 0$，故

$$\lambda = \frac{(\boldsymbol{Px}, \boldsymbol{Px})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} > 0.$$

□

(4)⇒(1). 对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

做正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

由于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 都大于零，故 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定。 $\square$

例 7 $\boldsymbol{A}$正定 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{-1}$正定

例 7 $\boldsymbol{A}$正定 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{-1}$正定

证明. 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，因 $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $\lambda > 0$。而 λ^{-1} 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，显然大于零，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定。 $\square$

例 8 判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$$

是否为正定二次型。

解 用配方法得

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2)+2x_3^2 \\ &= (x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+2x_3^2 \geq 0. \end{aligned}$$

等号成立的充要条件是

$$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_3=0, \\ \qquad x_3=0, \end{cases}$$

即 $x_1=x_2=x_3=0$，故 f 正定。

例 9　判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

是否为正定二次型。

解　任何二次型都可用配方法判断正定性，但此题配方时系数较为复杂，可考虑用特征值判定。

定理 4

$$\boldsymbol{A}\text{正定} \Longrightarrow a_{ii} > 0(i = 1, 2, \cdots, n) \text{ 且 } |\boldsymbol{A}| > 0$$

定理 4

$$\boldsymbol{A}\text{正定} \implies a_{ii} > 0(i = 1, 2, \cdots, n) \ \text{且} \ |\boldsymbol{A}| > 0$$

解 因

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

正定，取 $\boldsymbol{x} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T \neq 0$（其中第 i 个分量 $x_i = 1$），则必有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = a_{ii}x_i^2 = a_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均大于零，即得 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n > 0$。

定义 4 设 $A=(a_{ij})$，则

$$\det \boldsymbol{A}_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子式。当 k 取 $1,2,\cdots,n$ 时，就得 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式。

定理 5

$$\boldsymbol{A}\text{正定} \iff \boldsymbol{A}\text{的各阶顺序主子式全为正。}$$

$$\boldsymbol{A}\text{负定} \iff \boldsymbol{A}\text{的奇数阶顺序主子式全为负，偶数阶顺序主子式全为正。}$$

例 10　判断二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性。

例 10　判断二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性。

解　f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

因

$$a_{11} = -5 < 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -80 < 0$$

故 f 负定。