第2讲、矩阵

April 29, 2017

1 矩阵的定义

定义 1. 由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$排成的$m$行$n$列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列矩阵，简称$m\times n$矩阵，记作

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

这$m\times n$个数称为$\mathbf{A}$的元素，数a_{ij}位于矩阵$\mathbf{A}$的第i行第j列，称为矩阵的(i,j)元。可简记为(a_{ij})、$(a_{ij})_{m\times n}$或$\mathbf{A}_{m\times n}$。

注. 对矩阵的定义，需做以下几点说明：

- 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵；
- 行数与列数都等于n的矩阵称为n阶矩阵或n阶方阵。n阶矩阵$\mathbf{A}$也记作$\mathbf{A}_n$；
- 只有一行的矩阵
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$
称为行矩阵，又称行向量，也记为
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{pmatrix};$$
- 只有一列的矩阵
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
称为列矩阵，又称列向量。
- 两行矩阵的行数相等、列数也相等时，称它们为同型矩阵。
- 如果$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$是同型矩阵，且它们的对应元素相等，即
$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$
则称矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相等，记作
$$\mathbf{A}=\mathbf{B}.$$

- 元素都为*0*的矩阵称为零矩阵，记作$\mathbf{O}$。注意不同型的零矩阵是不同的。

接下来我们举几个例子介绍矩阵的应用。

例 1. 某厂向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

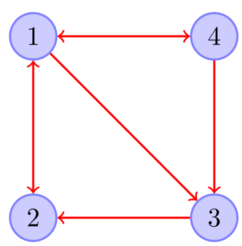
$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \text{产品1} \\ \text{产品2} \\ \text{产品3} \\ \text{产品4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{商店1} & \text{商店2} & \text{商店3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \end{array}$$

其中a_{ij}为工厂向第j店发送第i种产品的数量。这四种产品的单价及单件重量也可列成矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ \text{产品1} \\ \text{产品2} \\ \text{产品3} \\ \text{产品4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{单价} & \text{单件重量} \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \end{array}$$

其中b_{i1}为第i种产品的单价，b_{i2}为第i种产品的单件重量。

例 2. 四个城市间的单向航线如图所示



若令

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从}i\text{市到}j\text{市有1条单向航线}, \\ 0, & \text{从}i\text{市到}j\text{市没有单向航线}, \end{cases}$$

则该航线图可用矩阵表示为

例 3. 设变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$与变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$满足：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad\vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

它表示一个从变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$的线性变换，其系数a_{ij}构成矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$。

$$
\mathbf{A}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc}\text{城市1} & \text{城市2} & \text{城市3} & \text{城市4}\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{城市1}\\ \text{城市2}\\ \text{城市3}\\ \text{城市4}\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 给定了线性变换(1)，其系数矩阵也就确定。
- 反之，若给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定。
- 从这个意义上讲，线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系。

(1)、线性变换

$$
\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n \end{cases}
$$

称为恒等变换， 它对应n阶方阵

$$
\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.
$$

该方阵称为n阶单位矩阵，简称单位阵。其(i,j)元为

$$
\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}
$$

(2)、线性变换

$$
\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1, \\ y_2 = \lambda_2 x_2, \\ \quad\vdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}
$$

对应于n阶方阵

$$
\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},
$$

这种方阵称为对角矩阵，简称对角阵，记作

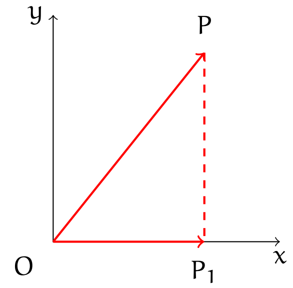
$$
\mathbf{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).
$$

(3)、 矩阵

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

所对应的线性变换为

$$
\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0 \end{cases}
$$



是一个投影变换。

(4)、 矩阵

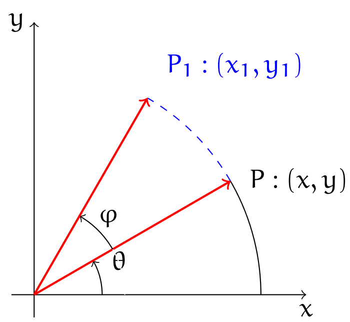
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

设$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$， 则

$$x_1 = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta+\varphi),$$
$$y_1 = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = r\sin(\theta+\varphi),$$



这表明经过上述变换，将向量OP逆时针旋转φ角得到向量OP_1.

例 4. 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2 \end{cases}$$

解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ - x_4 = 0 \\ - 3x_3 + 9x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\qquad + 3x_4 = -1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ \qquad\quad - 3x_3 + 9x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\qquad + 3x_4 = -1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 - 3x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 0 \end{cases}$$

如此形状的方程组称为阶梯形线性方程组. 该方程组可写成矩阵形式 求解过程可表示为

$$\left(A \;\vdots\; b \right) = \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array} \right)$$

图 1: 增广矩阵

$$\left(A \;\vdots\; b \right) \xlongequal{r_1 \div 2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xlongequal[\substack{r_3 + (-3) \times r_1 \\ r_4 + (-5) \times r_1}]{r_2 + (-2) \times r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xlongequal{r_3 \div (-3)} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

例 5. 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \qquad\quad + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$$

解. 其增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

求解过程可表示为：

$$\left(\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right) \xlongequal[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3+(-2)\times r_2]{r_3+(-2)\times r_2} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div(-3)} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

该矩阵称为行简化阶梯矩阵，对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\ x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

注. 该方程组有5个未知量，其中x_1, x_3, x_4为基本未知量，x_2, x_5为自由未知量。

任取$x_2 = k_1, x_5 = k_2$，可得线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 = 1 + k_1 - 7k_2, \\ x_2 = k_1, \\ x_3 = 2 - 4k_2, \\ x_4 = -1 + 3k_2, \\ x_5 = k_2. \end{cases}$$

例 6. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \xlongequal[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right) \xlongequal{r_3+(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

解. 由第三行可以看出，该线性方程组无解。

- 含有矛盾方程而无解的方程组称为不相容方程组；
- 有解的方程组称为相容方程组；
- 多余方程。

对于一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其增广矩阵为 对于以上增广矩阵，总是可以经过一系列的变换将其化成 其中$c_{ii} = 1\ (i = 1, 2, \cdots, r)$。

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc:c} c_1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

对应线性方程组解的情况如下：

1 线性方程组有解$\Leftrightarrow d_{r+1} = 0$；

2 在有解的情况下：

– 当$r = n$时，有唯一解$x_1 = d_1$，$x_2 = d_2$，$\cdots$，$x_n = d_n$；

– 当$r<n$时，有无穷多解

$$\begin{cases} x_1 & = & d_1 - c_{1,r+1}k_1 - \cdots - c_{1n}k_{n-r}, \\ x_2 & = & d_2 - c_{2,r+1}k_1 - \cdots - c_{2n}k_{n-r}, \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & d_r - c_{r,r+1}k_1 - \cdots - c_{rn}k_{n-r}, \\ x_{r+1} & = & k_1, \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & k_{n-r}. \end{cases}$$

2 矩阵的计算

2.1 矩阵的加法

定义 2 (矩阵的加法)**.** 设有两个$m\times n$矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$，则矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$之和记为$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，规定为

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

注. 只有当两个矩阵同型时才能进行加法运算。

矩阵加法的运算律：

(i) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

设$\mathbf{A}=(a_{ij})$，称

$$-\mathbf{A}=(-a_{ij}),$$

为$\mathbf{A}$的负矩阵，显然有

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}.$$

由此规定矩阵的减法为

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}).$$

2.2 矩阵的数乘

定义 3 (矩阵的数乘)**.** 数k与矩阵$\mathbf{A}$的乘积记作$k\mathbf{A}$或$\mathbf{A}k$，规定为

$$k\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

注. 用数k乘一个矩阵，需要把数k乘矩阵的每一个元素，这与行列式的数乘性质不同。

矩阵数乘的运算律：

(i) $(kl)\mathbf{A}=k(l\mathbf{A})$;

(ii) $(k+l)\mathbf{A}=k\mathbf{A}+l\mathbf{A}$;

(iii) $k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$

矩阵加法与矩阵数乘统称为矩阵的线性运算

2.3 矩阵的乘法

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2, \end{cases} \tag{3}$$

若想求从t_1, t_2到y_1, y_2的线性变换，可将(3)代入(2)，便得

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2. \end{cases} \tag{4}$$

线性变换(4)可看成是先作线性变换(3)再作线性变换(2)的结果。把线性变换（4）叫做线性变换（2）和（3）的乘积，相应地把线性变换（4）对应的矩阵定义为线性变换（2）与（3）所对应矩阵的乘积，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

定义 4 (矩阵乘法)**.** 设A为$m \times n$矩阵，B为$n \times s$矩阵，即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

则A与B之乘积AB（记为$C = (c_{ij})$）为$m \times s$矩阵，且

$$c_{ij} = c_{i1}b_{1j} + c_{i2}b_{2j} + \cdots + c_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

注. 两个矩阵A与B相乘有意义的前提是A的列数等于B的行数。

例 7. 求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ 的乘积$\mathbf{AB}$

解.

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times (-5) + (-1) \times 6 & 1 \times 6 + 2 \times (-6) + (-1) \times 0 \\ (-1) \times 5 + 3 \times (-5) + 4 \times 6 & (-1) \times 6 + 3 \times (-6) + 4 \times 0 \\ 1 \times 5 + 1 \times (-5) + 1 \times 6 & 1 \times 6 + 1 \times (-6) + 1 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 4 & -24 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

例 8. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

计算$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$.

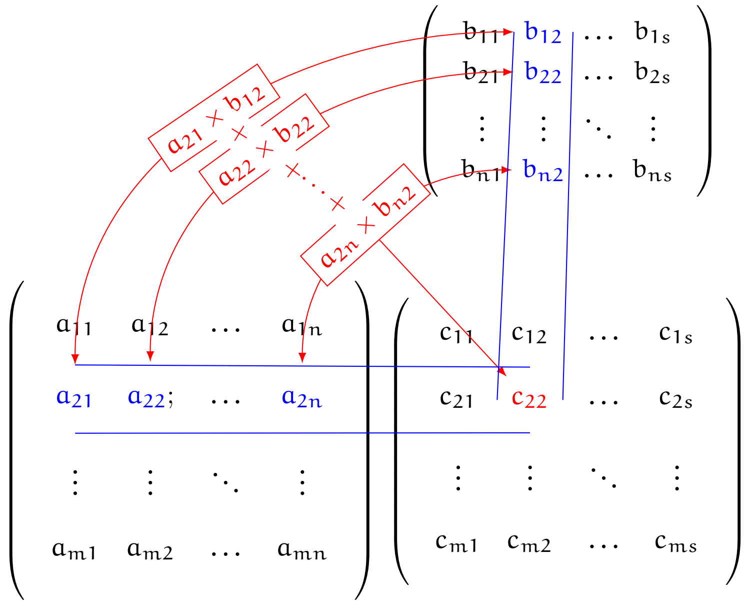


图 2: 矩阵乘法示意图

解.

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

例 9. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

计算$\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$和$\mathbf{BA}$.

解.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ -2ab & -2ab \end{pmatrix}$$

由以上例题可以看出一些结论：

1 矩阵乘法不满足交换律。

若$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$，则称**$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$不可交换**。

若$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，则称**$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$可交换**。

2 $\mathbf{AB} = 0 \ \not\Rightarrow \ \mathbf{A} = 0$或$\mathbf{B} = 0$

$\mathbf{A} \neq 0$且$\mathbf{B} \neq 0 \xRightarrow{\text{有可能}} \mathbf{AB} = 0$

3 矩阵乘法不满足消去律，即当$\mathbf{A}\neq 0$时，

$$\mathbf{AB}=\mathbf{AC} \nRightarrow \mathbf{B}=\mathbf{C}$$

当$\mathbf{A}$为非奇异矩阵，即$|\mathbf{A}|\neq 0$时，

$$\mathbf{AB}=0 \Rightarrow \mathbf{B}=0; \quad \mathbf{AB}=\mathbf{AC} \Rightarrow \mathbf{B}=\mathbf{C}.$$

矩阵乘法的运算律：

(i) 结合律

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

(ii) 数乘结合律

$$k(\mathbf{AB})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

(iii) 左结合律

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$

右结合律

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{CA}$$

2.4 一些特殊矩阵及其运算

定义 5 (单位矩阵与数量矩阵). *1* 主对角元全为*1*，其余元素全为零的n阶方阵，称为n阶单位矩阵，记为$\mathbf{I}_n,\mathbf{I},\mathbf{E}$

$$\mathbf{I}_n=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2 主对角元全为非零数k，其余元素全为零的n阶方阵，称为n阶数量矩阵，记为$k\mathbf{I}_n,k\mathbf{I},k\mathbf{E}$

$$k\mathbf{I}_n=\begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} \quad (k\neq 0)$$

注. *1* 单位阵在矩阵乘法中的作用相当于数1在数的乘法中的作用。

2 一些等式：

$$(k\mathbf{I})\mathbf{A}=k(\mathbf{IA})=k\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}(k\mathbf{I})=k(\mathbf{AI})=k\mathbf{A}.$$

定义 6 (对角矩阵). 非对角元皆为零的n阶方阵称为n阶对角矩阵，记作$\mathbf{\Lambda}$，即

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

或记作$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

注. *1* 用对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$左乘$\mathbf{A}$，就是用$\lambda_i(i=1,\cdots,n)$乘$\mathbf{A}$中第i行的每个元素；

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 用对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$右乘$\mathbf{A}$，就是用$\lambda_i(i=1,\cdots,n)$乘$\mathbf{A}$中第i列的每个元素，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义 7 (三角矩阵). *1* 主对角线以上的元素全为零的n阶方阵称为上三角矩阵（$a_{ij}=0,\ i>j$）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 主对角线以下的元素全为零的n阶方阵称为下三角矩阵（$a_{ij}=0,\ i<j$）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例 10. 证明：两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵。

证明. 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=(c_{ij})$， 则当$i>j$时，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}\underbrace{a_{ik}}_{\Downarrow\atop 0}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\underbrace{b_{kj}}_{\Downarrow\atop 0}=0.$$

□

注. 两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

第i个方程可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此上述线性方程组可表示为

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}, \quad \mathbf{A}x = \mathbf{b}.$$

定理 1. 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$是两个n阶方阵，则

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

证明. 设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，$\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times n}$，则

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1 + a_{1i}r_{n+i}}{\underset{i=1,\cdots,n}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

仿照上述步骤，可将行列式的左上角元素全消为零，即得

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}||\mathbf{B}| &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{AB} & 0 \\ \mathbf{B} & -\mathbf{I} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n|\mathbf{AB}||-\mathbf{I}_n| = (-1)^n|\mathbf{AB}|(-1)^n \\ &= |\mathbf{AB}|. \end{aligned}$$

□

例 11. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}是行列式$|\mathbf{A}|$中元素a_{ij}的代数余子式。 证明：当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

证明. 设$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{C} = (c_{ij})$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij}|\mathbf{A}|$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & & & \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_n,$$

因此，

$$|\mathbf{A}||\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^n,$$

由于$|\mathbf{A}| \neq 0$，故$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$. □

定义 8 (矩阵幂). 设$\mathbf{A}$是n阶矩阵，k个$\mathbf{A}$的连乘积称为$\mathbf{A}$的k次幂，记作$\mathbf{A}^k$，即

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\ \mathbf{A}\ \cdots\ \mathbf{A}}_{k}$$

矩阵幂的运算律：

1 当m, k为正整数时，

$$\mathbf{A}^m\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{m+k}, \quad (\mathbf{A}^m)^k = \mathbf{A}^{mk}.$$

2 当$\mathbf{A}\mathbf{B}$不可交换时，一般情况下，

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^k \neq \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$$

3 当$\mathbf{A}\mathbf{B}$可交换时，

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^k = \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k = \mathbf{B}^k\mathbf{A}^k.$$

定义 9 (矩阵多项式). 设$f(x) = a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0$是$x$的$k$次多项式，$\mathbf{A}$是$n$阶矩阵，则

$$f(\mathbf{A}) = a_k\mathbf{A}^k + a_{k-1}\mathbf{A}^{k-1} + \cdots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的k次多项式。

注. *1* 若$f(x), g(x)$为多项式，$\mathbf{A}, \mathbf{B}$皆是n阶矩阵，则

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}).$$

2 当$\mathbf{A}\mathbf{B}$不可交换时，一般

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{B}) \neq g(\mathbf{B})f(\mathbf{A})$$

3 矩阵的转置、对称矩阵

定义 10 (转置矩阵). 把一个$m \times n$矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到的一个$n \times m$矩阵，称之为$\mathbf{A}$的转置矩阵，记为$\mathbf{A}^T$或$\mathbf{A}'$，即

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

定理 2 (矩阵转置的运算律). *(i)* $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}=\mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathsf{T}}=\mathbf{A}^{\mathsf{T}}+\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$

(iii) $(k\mathbf{A})^{\mathsf{T}}=k\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

(iv) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{\mathsf{T}}=\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

证明. 只证(iv)。 设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n},\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times s},\mathbf{A}^{\mathsf{T}}=(a^{\mathsf{T}}_{ij})_{n\times m},\mathbf{B}^{\mathsf{T}}=(b^{\mathsf{T}}_{ij})_{s\times n}$， 注意到

$$a_{ij}=a^{\mathsf{T}}_{ji},b_{ij}=b^{\mathsf{T}}_{ji},$$

有

$$(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}})_{ji}=\sum_{k=1}^{n}b^{\mathsf{T}}_{jk}a^{\mathsf{T}}_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=(\mathbf{A}\mathbf{B})_{ij}=(\mathbf{A}\mathbf{B})^{\mathsf{T}}_{ji},$$

于是$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{\mathsf{T}}=\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$. □

定义 11 (对称矩阵、反对称矩阵). 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个n阶矩阵。

1 如果

$$a_{ij}=a_{ji},$$

则称$\mathbf{A}$为对称矩阵；

2 如果

$$a_{ij}=-a_{ji},$$

则称$\mathbf{A}$为反对称矩阵。

注. 关于对称矩阵与反对称矩阵，有如下性质：

1. $\mathbf{A}$为对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}=\mathbf{A}$；
2. $\mathbf{A}$为反对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}=-\mathbf{A}$；
3. 反对称矩阵的主对角元全为零。
4. 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。
5. 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

   设$\mathbf{A}$为一n阶方阵，则

   $$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathsf{T}}}{2}+\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathsf{T}}}{2}$$

   容易验证$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathsf{T}}}{2}$为对称阵，$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathsf{T}}}{2}$为反对称阵。
6. 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

   若$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为对称矩阵，则$\mathbf{A}\mathbf{B}$对称的充分必要条件是$\mathbf{A}\mathbf{B}$可交换。

例 12. 设$\mathbf{A}$是一个$m\times n$矩阵，则$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$都是对称矩阵。

证明.

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA, \quad (AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T$$

□

例 13. 设A为n阶反对称矩阵，B为n阶对称矩阵，则$AB+BA$为n阶反对称矩阵。

证明.

$$(AB+BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^TA^T + A^TB^T = B(-A) + (-A^T)B = -(AB+BA).$$

□

4 逆矩阵

给定一个从x到y的线性变换

$$y = Ax \tag{5}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用A的伴随阵A^*左乘(5)，得

$$A^*y = A^*Ax = |A|x.$$

当$|A| \neq 0$时，有

$$x = \frac{1}{|A|}A^*y.$$

记

$$B = \frac{1}{|A|}A^*,$$

则上式可记为

$$x = By, \tag{6}$$

它表示一个从y到x的线性变换，称为线性变换(5)的逆变换。

注. A与B的关系：

1. 将(6)代入(5)

$$y = A(By) = (AB)y$$

   可见AB为恒等变换对应的矩阵，故

$$AB = I.$$

2. 将(5)代入(6)

$$x = B(Ax) = (BA)x$$

   可见BA为恒等变换对应的矩阵，故

$$BA = I.$$

$$AB = BA = I.$$

定义 12 (逆矩阵)**.** 对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使

$$AB = BA = I.$$

则称A是可逆的，并把B称为A的逆矩阵。

注. *1.* 可逆矩阵与其逆矩阵为同阶方阵。

2. $\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$地位相等，也可称$\mathbf{A}$为$\mathbf{B}$的逆矩阵。

定理 3. 若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}$的逆阵惟一。

证明. □

$\mathbf{A}$的矩阵记作$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

定理 4. 若$\mathbf{A}$可逆，则$|\mathbf{A}| \neq 0$.

证明. □

定义 13. 代数余子式矩阵，伴随矩阵 设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$为行列式$|\mathbf{A}|$中元素$a_{ij}$的代数余子式，称

$$\mathrm{coef}\mathbf{A} = (A_{ij})_{n\times n}$$

为$\mathbf{A}$的代数余子式矩阵，并称$\mathrm{coef}\mathbf{A}$的转置矩阵为$\mathbf{A}$的伴随矩阵，记为$\mathbf{A}^*$， 即

$$\mathbf{A}^* = (\mathrm{coef}\mathbf{A})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

之前已证

$$\mathbf{AA}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

同理可证

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

定理 5. 若$|\mathbf{A}| \neq 0$，则$\mathbf{A}$可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$$

证明. □

该定理提供了求$\mathbf{A}^{-1}$的一种方法。

推论 1. 若$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$（或$\mathbf{BA} = \mathbf{I}$），则

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

证明. □

该推论告诉我们，判断$\mathbf{B}$是否为$\mathbf{A}$的逆，只需验证$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$或$\mathbf{BA} = \mathbf{I}$的一个等式成立即可。

定义 14 (奇异阵与非奇异阵)**.** 当$|\mathbf{A}| = 0$时，$\mathbf{A}$称为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵。

注. 可逆矩阵就是非奇异矩阵。

定理 6. 可逆矩阵有如下运算规律：

1 若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}^{-1}$亦可逆，且

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

2 若$\mathbf{A}$可逆，$k \neq 0$，则$k\mathbf{A}$可逆，且

$$(k\mathbf{A})^{-1} = k^{-1}A^{-1}.$$

3 若$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为同阶矩阵且均可逆，则$\mathbf{AB}$可逆，且

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

若$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_m$皆可逆，则

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$

4 若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$亦可逆，且

$$(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}.$$

5 若$\mathbf{A}$可逆，则

$$|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}.$$

例 14. 已知$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}^{-1}$。

解.

$$|\mathbf{A}| = ad - bc, \quad |\mathbf{A}^*| = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1 当$|\mathbf{A}| = ad - bc = 0$时，逆阵不存在；

2 当$|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$时，

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例 15. 求方阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆阵。

解. $|\mathbf{A}| = 2$，故$\mathbf{A}$可逆。 计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11} = 2 & M_{12} = 3 & M_{13} = 2 \\ M_{21} = -6 & M_{22} = -6 & M_{23} = -2 \\ M_{31} = -4 & M_{32} = -5 & M_{33} = -2 \end{array}$$

$$\mathrm{coef}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 16. 设方阵$\mathbf{A}$满足方程

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = 0,$$

证明：$\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明.
$$A^2-3A-10I=0 \Rightarrow A(A-3I)=10I \Rightarrow A\left[\frac{1}{10}(A-3I)\right]=I$$
故A可逆，且$A^{-1}=\frac{1}{10}(A-3I)$.
$$A^2-3A-10I=0 \Rightarrow (A+I)(A-4I)=6I \Rightarrow \frac{1}{6}(A+I)(A-4I)=I$$
故$A-4I$可逆，且$(A-4I)^{-1}=\frac{1}{6}(A+I)$.

□

例 17. 证明：可逆对称矩阵的逆矩阵仍为对称矩阵；可逆反对称矩阵的逆矩阵仍为反对称矩阵。

例 18. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为非零实矩阵，证明：若$A^*=A^T$，则A可逆。

证明. 欲证A可逆，只需证$|A|\neq 0$。

由$A^*=A^T$及A^*的定义可知，A的元素a_{ij}等于自身的代数余子式A_{ij}。

再根据行列式的按行展开定义，有
$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$
由于A为非零实矩阵，故$|A|\neq 0$，即A可逆。 □

例 19. 设A可逆，且$A^*B=A^{-1}+B$，证明B可逆，当$A=\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}$时，求$B$.

解.
$$A^*B=A^{-1}+B \Rightarrow (A^*-I)B=A^{-1} \Rightarrow |A^*-I|\cdot|B|=|A^{-1}|\neq 0$$
故B与A^*-I可逆。
$$B=(A^*-I)^{-1}A^{-1}=[A(A^*-I)]^{-1}=(AA^*-A)^{-1}=(|A|I-A)^{-1}.$$
其中
$$|A|I-A=\begin{pmatrix}8&&\\&8&\\&&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$
易算得
$$B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例 20. 设A, B均为n阶可逆矩阵，证明：

(1). $(AB)^*=B^*A^*$

(2). $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

证明. (1) 由$|AB|=|A||B|\neq 0$可知AB可逆，且有$(AB)(AB)^*=|AB|I$。故
$$\begin{aligned}(AB)^* &=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}\\ &=|B|B^{-1}|A|A^{-1}=B^*A^*.\end{aligned}$$
(2) 由$(A^*)^*A^*=|A^*|I$，得
$$(A^*)^*|A|A^{-1}=|A|^{n-1}I$$
两边同时右乘A得
$$(A^*)^*=|A|^{n-2}A.$$

□

例 21. 设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解.

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

结论 1. 令

$$\varphi(\mathbf{A})=a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{A}+\cdots+a_m\mathbf{A}^m.$$

(i) 若$\mathbf{A}=\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$，则$\mathbf{A}^k=\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}$，从而

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{A})&=a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{A}+\cdots+a_m\mathbf{A}^m\\&=\mathbf{P}a_0\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1}+\mathbf{P}a_1\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}+\cdots+\mathbf{P}a_m\boldsymbol{\Lambda}^m\mathbf{P}^{-1}\\&=\mathbf{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{P}^{-1}.\end{aligned}$$

(ii) 若$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$为对角阵，则$\boldsymbol{\Lambda}^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$，从而

$$\begin{aligned}&\varphi(\boldsymbol{\Lambda})=a_0\mathbf{I}+a_1\boldsymbol{\Lambda}+\cdots+a_m\boldsymbol{\Lambda}^m\\&=a_0\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}+\cdots+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m&&&\\&\lambda_2^m&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^m\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1)&&&\\&\varphi(\lambda_2)&&\\&&\ddots&\\&&&\varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

5 矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行；

(ii) 以非零常数k乘矩阵的某一行；

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数k并加到另一行。

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，其中

(i) 对换变换　$r_i\leftrightarrow r_j$；

(ii) 倍乘变换　$r_i\times k$；

(iii) 倍加变换　$r_i+r_j\times k$。

对应的还有初等列变换。 初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

三种初等变换都是可逆的，

初等变换	逆变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	$r_i \times \frac{1}{k}$
$r_i + r_j \times k$	$r_i - r_j \times k$

Table 1: 初等变换及其逆变换

定义 15 (矩阵的等价). *(i)* 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等行变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$行等价，记为$\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B}$；

(ii) 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等列变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$列等价，记为$\mathbf{A} \overset{c}{\sim} \mathbf{B}$；

(iii) 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$等价，记为$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$。

性质 1. 矩阵的等价满足以下三条性质：

(i) 反身性：$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$；

(ii) 对称性：若$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$，则$\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$；

(iii) 传递性：若$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$，则$\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$。

定义 16 (初等矩阵). 将单位矩阵$\mathbf{I}$做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵。 对应于3类初等行、列变换，有3种类型的初等矩阵。

以下介绍三种初等矩阵：

1、 对调单位矩阵的两行或两列（初等对调矩阵）

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \quad\quad\quad \text{第}i\text{列} & \quad\quad & \text{第}j\text{列} \end{array} & \end{array}$$

a. 用m阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$左乘$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$
\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
\text{第}i\text{行} \\
\\
\text{第}j\text{行} \\
\\
\\
\end{array}
$$

其结果相当于：把$\mathbf{A}$的第i行与第j行对调（$r_i \leftrightarrow r_j$）.

b. 用n阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$右乘$\mathbf{A}$，得

$$
\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}=\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn}
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccc}
\phantom{a_{11}} & & \text{第}i\text{列} & & \text{第}j\text{列} & & \phantom{a_{1n}}
\end{array}
\end{array}
$$

其结果相当于把$\mathbf{A}$的第i列与第j列对调（$c_i \leftrightarrow c_j$）.

2、 以非零常数k乘单位矩阵的某行或某列（初等倍乘矩阵）

$$\mathbf{E}_i(k)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}\\ \\ \\ \text{第}i\text{行}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\\ \text{第}i\text{列} & \end{array}$$

a. 以m阶初等矩阵$\mathbf{E}_i(k)$左乘$\mathbf{A}$，得

$$\mathbf{E}_i(k)\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \text{第}i\text{行}\\ \\ \\ \end{matrix}$$

其结果相当于以数k乘$\mathbf{A}$的第i行（$r_i\times k$）；

b. 以n阶初等矩阵$\mathbf{E}_i(k)$右乘$\mathbf{A}$，得

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_i(k)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&ka_{1i}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&\cdots&ka_{2i}&\cdots&a_{jn}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&ka_{mi}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\\ \text{第}i\text{列}\end{array}$$

其结果相当于以数k乘$\mathbf{A}$的第i列（$c_i\times k$）。

3、以非零常数k乘单位矩阵的某行再加到另一行上（初等倍加矩阵）

$$E_{ij}(k)=\left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & k && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

a. 以m阶初等矩阵$E_{ij}(k)$左乘$\boldsymbol{A}$，得

$$E_{ij}\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

其结果相当于把$\boldsymbol{A}$的第j行乘以数k加到第i行上（$r_i+r_j\times k$）；

b. 以n阶初等矩阵$E_{ij}(k)$右乘$\boldsymbol{A}$，得

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{A}E_{ij}=\left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j}+ka_{2i} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj}+ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \\ \qquad\qquad \text{第}i\text{列} \qquad\qquad \text{第}j\text{列} \end{array}$$

其结果相当于把$\boldsymbol{A}$的第i列乘以数k加到第j列上（$c_j+c_i\times k$）。

定理 7. 设$\boldsymbol{A}$为一个$m\times n$矩阵，

- 对$\boldsymbol{A}$施行一次初等行变换，相当于在$\boldsymbol{A}$的左边乘以相应的m阶初等矩阵；
- 对$\boldsymbol{A}$施行一次初等列变换，相当于在$\boldsymbol{A}$的右边乘以相应的n阶初等矩阵。

练习 1. 请自行补充以下变换的具体含义：

$E_i(k)\boldsymbol{A}$：

$E_{ij}(k)\boldsymbol{A}$：

$E_{ij}\boldsymbol{A}$：

$\mathbf{A}E_i(k)$:

$\mathbf{A}E_{ij}(k)$:

$\mathbf{A}E_{ij}$:

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换$r_i \leftrightarrow r_j$的逆变换为其本身可知

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

(ii) 由变换$r_i \times k$的逆变换为$r_i \times \frac{1}{k}$可知

$$E_i(k)^{-1} = E_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换$r_i + r_j \times k$的逆变换为$r_i - r_j \times k$可知

$$E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$$

$$E_{ij}E_{ij} = \mathbf{I}, \quad E_i(k)E_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad E_{ij}(k)E_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

例 22. 例*1* 设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解.

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

例 23. 将三对角矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 分解成主对角元为1的下三角矩阵$\mathbf{L}$和上三角阵$\mathbf{U}$的乘积$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$（称为矩阵的LU分解）。

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{A}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{A}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{U}$$

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U},$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

定理 8. 可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明. 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做3类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此，对于任何矩阵$\mathbf{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$$

当$\mathbf{A}$为n阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而$\mathbf{U}$必为单位矩阵$\mathbf{I}$. □

推论 2. 可逆矩阵$\mathbf{A}$可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明. 由上述定理，必存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1}$$

□

推论 3. 如果对可逆矩阵$\mathbf{A}$与同阶单位矩阵$\mathbf{I}$做同样的初等行变换，那么当$\mathbf{A}$变为单位阵时，$\mathbf{I}$就变为$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

例 24. 求$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

解.

$$
\begin{aligned}
(\ \mathbf{A} \mid \mathbf{I}\ ) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_1 + r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

例 25. 已知$\mathbf{ABA}^{\mathsf{T}} = 2\mathbf{BA}^{\mathsf{T}} + \mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解.

$$\mathbf{ABA}^{\mathsf{T}} = 2\mathbf{BA}^{\mathsf{T}} + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{BA}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{BA}^{\mathsf{T}} = (\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = [\mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}-2\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1}$$

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}-2\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

推论 4. 对于n个未知数n个方程的线性方程组

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

如果增广矩阵

$$(\mathbf{A},\ \mathbf{b}) \overset{r}{\sim} (\mathbf{I}, x),$$

则$\mathbf{A}$可逆，且$x = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$为惟一解。

例 26. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求$\mathbf{A}x = \mathbf{b}_1$与$\mathbf{A}x = \mathbf{b}_2$的解。

解.

$$(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2)\ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\ r_2\div 5\\ r_3+3r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例 27. 求解矩阵方程$\mathbf{AX}=\mathbf{A}+\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解. 原方程等价于

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I}\ \ \mathbf{A})\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\ r_3\div(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\ r_3\div(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例 28. 当a,b满足什么条件时，矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$不可逆。

解.

$$\mathbf{A} \xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{c_1\leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{r_2+r_1\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\times(-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

6 矩阵分块

$$\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

记为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{A}_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc:ccc:c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

定义 17 (矩阵的按行分块).

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{a}_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in})$$

定义 18 (矩阵的按列分块).

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}=(\ \mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \cdots,\mathbf{b}_s\ )$$

其中

$$\mathbf{b}_j=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

当n阶矩阵$\mathbf{A}$中非零元素都集中在主对角线附近，有时可分块成如下对角块矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_i$为r_i阶方阵$(i=1,2,\cdots,m)$，且

$$\sum_{i=1}^{m} r_i=n.$$

定义 19 (分块矩阵的加法). 设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中$\mathbf{A}_{ij}$与$\mathbf{B}_{ij}$为同型矩阵，则

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r}+\mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1}+\mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}+\mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

定义 20 (分块矩阵的数乘)**.**

$$\lambda\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda\mathbf{A}_{11} & \cdots & \lambda\mathbf{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda\mathbf{A}_{s1} & \cdots & \lambda\mathbf{A}_{sr}\end{pmatrix}$$

定义 21 (分块矩阵的乘法)**.** 设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{B}$为$n\times s$矩阵，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ \mathbf{A}_{r1} & \cdots & \mathbf{A}_{rs}\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{st}\end{pmatrix},$$

其中$\mathbf{A}_{i1},\mathbf{A}_{i2},\cdots,A_{is}$的列数分别等于$\mathbf{B}_{1j},\mathbf{B}_{2j},\cdots,\mathbf{B}_{sj}$的行数，则

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \mathbf{C}_{r1} & \cdots & \mathbf{C}_{rt}\end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{s}\mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}.$$

例 29. 例*1* 用分块矩阵的乘法计算$\mathbf{AB}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\-1&2&1&0&0\\1&1&0&1&0\\-2&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3&2&0&1&0\\1&3&0&0&1\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\hline -1&2&1&0&0\\1&1&0&1&0\\-2&0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_2 & 0_{2\times3}\\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\left(\begin{array}{ccc|cc}3&2&0&1&0\\1&3&0&0&1\\\hline -1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2\\ -\mathbf{I}_3 & 0_{3\times2}\end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_2 & 0\\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2\\ -\mathbf{I}_3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2\\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1-\mathbf{I}_3 & \mathbf{A}_1\end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1-\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&0\\1&3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&0\\4&4&0\\-6&-4&-1\end{pmatrix}$$

例 30. 设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{B}$为$n\times s$矩阵，$\mathbf{B}$按列分块成$1\times s$分块矩阵， 将$\mathbf{A}$看成1×1分块矩阵，则

$$\mathbf{AB}=\mathbf{A}(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_s)=(\mathbf{Ab}_1,\mathbf{Ab}_2,\cdots,\mathbf{Ab}_s)$$

若已知$\mathbf{AB}=0$，则显然

$$\mathbf{Ab}_j=0,\quad j=1,2,\cdots,s.$$

因此，$\mathbf{B}$的每一列$\mathbf{b}_j$都是线性方程组$\mathbf{Ax}=0$的解。

例 31. 设$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=0$，证明$\mathbf{A}=0$.

证明. 设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把$\mathbf{A}$用列向量表示为$\mathbf{A}=(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \cdots,\ \mathbf{a}_n)$，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1^T\\ \mathbf{a}_2^T\\ \cdots\\ \mathbf{a}_n^T\end{pmatrix}(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \cdots,\ \mathbf{a}_n)=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_n\\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

因为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=0$，故

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_j=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\mathbf{a}_j^T\mathbf{a}_j=0,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0\ \Rightarrow\ a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0\ \Rightarrow\ \mathbf{A}=0.$$

□

例 32. 若n阶矩阵$\mathbf{C},\mathbf{D}$可以分块成同型对角块矩阵，即

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_1 & & & \\ & \mathbf{C}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \mathbf{C}_m\end{pmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{D}_1 & & & \\ & \mathbf{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \mathbf{D}_m\end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{C}_i$和$\mathbf{D}_i$为同阶方阵（$i=1,2,\cdots,m$），则

$$\mathbf{CD}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_1\mathbf{D}_1 & & & \\ & \mathbf{C}_2\mathbf{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \mathbf{C}_m\mathbf{D}_m\end{pmatrix}$$

例 33. 证明：若方阵$\mathbf{A}$为可逆的上三角阵，则$\mathbf{A}^{-1}$也为上三角阵。

证明. 对阶数n用数学归纳法。

1 当$n=1$时，$(a)^{-1}=(\frac{1}{a})$，结论成立。

2 假设命题对$n-1$阶可逆上三角矩阵成立，考虑n阶情况，设

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c|ccc}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ \hline 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}a_{11} & \boldsymbol{\alpha}\\ 0 & \mathbf{A}_1\end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_1$为$n-1$阶可逆上三角阵。

设$\mathbf{A}$的逆阵为

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^{T},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_1=\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ 0 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\gamma} & a_{11}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_1\boldsymbol{\gamma} & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}_1\boldsymbol{\gamma}=0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\gamma}=0,$$
$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1=\mathbf{I}_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{B}_1=\mathbf{A}_1^{-1}.$$

由归纳假设，$\mathbf{B}_1$为$n-1$阶上三角矩阵，因此

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ 0 & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。 □

定义 22 (分块矩阵的转置)**.** 分块矩阵$\mathbf{A}=(\mathbf{A}_{kl})_{s\times t}$的转置矩阵为

$$\mathbf{A}^{T}=(\mathbf{B}_{lk})_{t\times s},$$

其中$\mathbf{B}_{lk}=\mathbf{A}_{kl}$.

例 34.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{T} & \mathbf{A}_{21}^{T} \\ \mathbf{A}_{12}^{T} & \mathbf{A}_{22}^{T} \\ \mathbf{A}_{13}^{T} & \mathbf{A}_{23}^{T} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}\;\underline{\underline{\text{按行分块}}}\;\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{B}^{T}=\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^{T} & \mathbf{b}_2^{T} & \cdots & \mathbf{b}_m^{T} \end{pmatrix}$$

定义 23 (可逆分块矩阵的逆矩阵)**.** 对角块矩阵（准对角矩阵）

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix}$$

的行列式为$|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_2|\cdots|\mathbf{A}_m|$，因此，$\mathbf{A}$可逆的充分必要条件为

$$|\mathbf{A}_i|\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

其逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m^{-1} \end{pmatrix}$$

- 用分块矩阵求逆矩阵，可将高阶矩阵的求逆转化为低阶矩阵的求逆。

- 一个2×2的分块矩阵求逆，可以根据逆矩阵的定义，用解矩阵方程的方法解得。

例 35. 设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$，其中$\mathbf{B},\mathbf{D}$皆为可逆矩阵，证明$\mathbf{A}$可逆并求$\mathbf{A}^{-1}$.

解. 因$|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}||\mathbf{D}|\neq 0$，故$\mathbf{A}$可逆。设$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{BX} & \mathbf{BY} \\ \mathbf{CX}+\mathbf{DZ} & \mathbf{CY}+\mathbf{DT} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{aligned} \mathbf{BX}=\mathbf{I} & \quad\Rightarrow\quad \mathbf{X}=\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{BY}=0 & \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Y}=0 \\ \mathbf{CX}+\mathbf{DZ}=0 & \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Z}=-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CB}^{-1} \\ \mathbf{CY}+\mathbf{DT}=\mathbf{I} & \quad\Rightarrow\quad \mathbf{T}=\mathbf{D}^{-1} \end{aligned}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & 0 \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CB}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

定义 24 (分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵)**.** 对于分块矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

同样可以定义它的*3*类初等行变换与列变换，并相应地定义*3*类分块矩阵：

(i) 分块倍乘矩阵（$\mathbf{C}_1,\mathbf{C}_2$为可逆阵）

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix}$$

(ii) 分块倍加矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{C}_4 \\ 0 & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$$

(iii) 分块对换矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_m & 0 \end{pmatrix}$$

例 36. 设n阶矩阵$\mathbf{A}$分块表示为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_{11},\mathbf{A}_{22}$为方阵，且$\mathbf{A}$与$\mathbf{A}_{11}$可逆。证明：$\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$可逆，并求$\mathbf{A}^{-1}$。

解. 构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & 0 \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式可知

$$|\mathbf{A}|=|\mathbf{P}_1\mathbf{A}|=|\mathbf{A}_{11}|\cdot|\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}|$$

故$\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$可逆。

$$P_1A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} \xlongequal{Q=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$P_2=\begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

则

$$P_2P_1A=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1+A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{12}Q^{-1} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1} \\ -Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 37. 设$Q=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，且$A$可逆，证明：

$$|Q|=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|$$

证明. 构造分块倍加矩阵

$$P_1=\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -CA^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$$

则

$$P_1Q=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得

$$|Q|=|P_1Q|=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|.$$

□

例 38. 设A与B均为n阶分块矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=|A+B|\,|A-B|$$

证明. 将分块矩阵$P=\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

总之有

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得结论。 □