线性代数

行列式

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 10 月 13 日

目录

1. 行列式的性质

性质 1　互换行列式的行与列，值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

证明. 将等式两端的行列式分别记为 D 和 D'，对阶数 n 用归纳法。

证明. 将等式两端的行列式分别记为 D 和 D'，对阶数 n 用归纳法。

(1) 当 $n=2$ 时，$D=D'$ 显然成立。

证明. 将等式两端的行列式分别记为 D 和 D'，对阶数 n 用归纳法。

(1) 当 $n=2$ 时，$D=D'$ 显然成立。

(2) 假设结论对于阶数小于 n 的行列式都成立，以下考虑阶数为 n 的情况。由定义可知，

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

$$D' = a_{11}A'_{11} + a_{21}A'_{21} + \cdots + a_{n1}A'_{n1}$$

显然，$A_{11} = A'_{11}$。

于是

$$D' = a_{11}A_{11} + (-1)^{1+2}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{42} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{1+n}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n-1,2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

对上式中的 $n-1$ 个行列式按第一行展开，并将含 a_{12} 的项进行合并，可得

$$(-1)^{1+2}a_{21}a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{31}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{n1}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}\left((-1)^{1+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{31}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^{1+n-1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2,n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}\right)$$

$$=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -a_{12}M'_{12} = a_{12}A'_{12} = a_{12}A_{12}.$$

同理，含 a_{13} 的项合并后其值等于 $a_{13}A_{13}$，$\cdots$，含 a_{1n} 的项合并后其值等于 $a_{1n}A_{1n}$. 因此，$D=D'$. $\square$

注 1　有了这个性质，行列式对行成立的性质都适用于列。

性质 2 行列式对任一行按下式展开，其值相等，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

而 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

证明. 对 n 用归纳法证明。

证明. 对 n 用归纳法证明。

(1) 当 $n=2$ 时，结论显然成立。

证明. 对 n 用归纳法证明。

(1) 当 $n=2$ 时，结论显然成立。

(2) 假设结论对阶数 $\leq n-1$ 的行列式成立，以下考虑阶数为 n 的情况。

$$D=(-1)^2 a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^3 a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n} a_{n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}_{n-1}$$

由归纳假设，将上式中的所有 $n-1$ 阶行列式按第 i 行展开后合并含 a_{i1} 的项得，

$$(-1)^{i+1}a_{i1}\left((-1)^{1+1}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-2}\right.$$

$$+(-1)^{1+2}a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-2} + \cdots$$

$$\left.+(-1)^{1+(n-1)}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n-1} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}_{n-2}\right)$$

即

$$(-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} = a_{i1}A_{i1}.$$

同理可证，含 a_{i2} 的项合并后其值为 $a_{i2}A_{i2}$，$\cdots$，含 a_{in} 的项合并后其值为 $a_{in}A_{in}$.

性质 3 (线性性质)

1 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

2 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，如

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

注 2　一些记号:

- $r_i \times k$ $(c_i \times k)$: 第 i 行（列）乘以 k
- $r_i \div k$ $(c_i \div k)$: 第 i 行（列）提取公因子 k

定义 1 (反对称行列式) 如果行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 的元素满足

$$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

就称 D 是**反对称行列式**。其中

$$a_{ii}=-a_{ii}\Rightarrow a_{ii}=0.$$

例 2.1　证明：奇数阶反对称行列式的值为 0.

例 2.1 证明：奇数阶反对称行列式的值为 0.

证明.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 1}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{将每行提取公因子 } -1]{\text{性质 3-1}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D.$$

由于 n 为奇数，故 $D=-D$，从而 $D=0$. □

推论 1 若行列式的某行元素全为 0，其值为 0.

推论 1 若行列式的某行元素全为 0，其值为 0.

例 2.2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 4 若行列式有两行（列）完全相同，其值为 0.

性质 4 若行列式有两行（列）完全相同，其值为 0.

例 2.3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

证明. 不妨设 D 的第 i 和 j 行元素全部相等，即对

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有 $a_{il}=a_{jl}(i\neq j, l=1,2,\cdots,n)$. 对阶数 n 用数学归纳法。

证明. 不妨设 D 的第 i 和 j 行元素全部相等，即对

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有 $a_{il} = a_{jl} (i \neq j, l = 1, 2, \cdots, n)$. 对阶数 n 用数学归纳法。

- 当 $n = 2$ 时，结论显然成立。

证明. 不妨设 D 的第 i 和 j 行元素全部相等，即对

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有 $a_{il} = a_{jl} (i \neq j, l = 1, 2, \cdots, n)$. 对阶数 n 用数学归纳法。

- 当 $n = 2$ 时，结论显然成立。
- 假设结论对阶数为 $n-1$ 的行列式成立，在 n 阶的情况下，对第 $k(k \neq i, j)$ 行展开，有

$$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}.$$

证明. 不妨设 D 的第 i 和 j 行元素全部相等，即对

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有 $a_{il}=a_{jl}(i\neq j, l=1,2,\cdots,n)$. 对阶数 n 用数学归纳法。

- 当 $n=2$ 时，结论显然成立。
- 假设结论对阶数为 $n-1$ 的行列式成立，在 n 阶的情况下，对第 $k(k\neq i,j)$ 行展开，有

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}.$$

注意到余子式 $M_{kl}(l=1,2,\cdots,n)$ 是 $n-1$ 阶行列式，且其中有两行元素相同，故

$$A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}=0 \quad (l=1,2,\cdots,n),$$

从而 $D=0$.

□

推论 2　若行列式中有两行（列）元素成比例，则行列式的值为 0.

推论 2　若行列式中有两行（列）元素成比例，则行列式的值为 0.

例 2.4

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 5　把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

性质 5 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

证明. 将数 k 乘以第 j 行加到第 i 行，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

证明. 将数 k 乘以第 j 行加到第 i 行，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 3-2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

证明. 将数 k 乘以第 j 行加到第 i 行，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 3-2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{推论 2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

□

注 3　一些记号：

- $r_i + r_j \times k$：将第 j 行乘以 k 加到第 i 行；
- $c_i + c_j \times k$：将第 j 列乘以 k 加到第 i 列。

性质 6　互换行列式的两行（列），行列式变号。

性质 6　互换行列式的两行（列），行列式变号。

证明.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_i+r_j]{\text{性质 5}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_j-r_i]{\text{性质 5}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_i+r_j]{\text{性质 5}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 3-1}} -D.$$

□

注 4　一些记号:

- $r_i \leftrightarrow r_j$: 互换第 i, j 行
- $c_i \leftrightarrow c_j$: 互换第 i, j 列

例 2.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

性质 7 行列式某一行的元素乘以另一行对应元素的代数余子式之和等于 0，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 \quad (i \neq j).$$

证明. 由性质 2，对 D 的第 j 行展开得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}.$$

证明. 由性质 2，对 D 的第 j 行展开得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}.$$

因此，将 D 中第 j 行的元素 $a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}$ 换成 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 后所得的行列式，其展开式就是 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 4}} 0.$$

$\square$

结论 1

- 对行列式 D 按行展开，有

$$\sum_{k=1} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}D,$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克（Kronecker）记号，表示为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

- 对行列式 D 按列展开，有

$$\sum_{k=1} a_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}D,$$