# 线性代数 向量空间与线性变换

# 张晓平



数学与统计学院

Email: xpzhang.math@whu.edu.cn

 $Homepage: \quad http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang\%20Xiaoping$ 

# 目录

- ℝ<sup>n</sup>的基与向量关于基的坐标
- ② ℝ"中向量的内积 标准正交基和正交矩阵
  - ℝ"中向量的内积, 欧式空间
  - 标准正交基
  - 施密特 (Schmidt) 正交化方法
  - 正交矩阵及其性质

■ ℝ<sup>n</sup>的基与向量关于基的坐标

- ② ℝ"中向量的内积 标准正交基和正交矩阵
  - ℝ"中向量的内积, 欧式空间
  - 标准正交基
  - 施密特 (Schmidt) 正交化方法
  - 正交矩阵及其性质

### 定义

设有序向量组 $B=(eta_1,eta_2,\cdots,eta_n)\subset\mathbb{R}^n$ ,如果B线性无关, 则 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量lpha均可由B线性表示,即

$$\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_n\beta_n,$$

称B为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基,有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是向量lpha在基B下的坐标,记作

$$\alpha_B = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \ \ \ \ \ \alpha_B = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

并称之为 $\alpha$ 的坐标向量。

注

- ℝ"的基不是唯一的
- 基本向量组

$$\epsilon_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

称为ℝ"的自然基或标准基。

● 本书对于向量及其坐标,采用列向量的形式,即

$$oldsymbol{lpha} = (oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_2, \cdots, oldsymbol{eta}_n) \left(egin{array}{c} a_1 \ a_2 \ dots \ a_n \end{array}
ight)$$

#### 例1

设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基为自然基 $B_1$ 和 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ , 其中

$$\beta_{1} = ( 1, -1, 0, 0, \cdots, 0, 0, 0)^{T}, 
\beta_{2} = ( 0, 1, -1, 0, \cdots, 0, 0, 0)^{T}, 
\vdots$$
(1)

$$\beta_{n-1} = (0, 0, 0, 0, \cdots, 0, 1, -1)^T,$$
  
 $\beta_n = (0, 0, 0, \cdots, 0, 0, 1)^T.$ 

求向量组 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 分别在两组基下的坐标。

#### 定理

设
$$B = \{ oldsymbol{lpha}_1, oldsymbol{lpha}_2, \cdots, oldsymbol{lpha}_n \}$$
是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基,且 
$$\left\{ egin{array}{l} oldsymbol{\eta}_1 = a_{11} lpha_1 + a_{21} lpha_2 + \cdots + a_{n1} lpha_n, \\ oldsymbol{\eta}_2 = a_{12} lpha_1 + a_{22} lpha_2 + \cdots + a_{n2} lpha_n, \\ \cdots & \cdots \\ oldsymbol{\eta}_n = a_{1n} lpha_1 + a_{2n} lpha_2 + \cdots + a_{nn} lpha_n. \end{array} \right.$$

则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 线性无关的充要条件是

$$\det \! \boldsymbol{A} = \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \neq 0.$$

设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基 $B_1=\{lpha_1,lpha_2,\cdots,lpha_n\}$ 和 $B_2=\{oldsymbol{\eta}_1,oldsymbol{\eta}_2,\cdots,oldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(oldsymbol{\eta}_1,oldsymbol{\eta}_2,\cdots,oldsymbol{\eta}_n)=(oldsymbol{lpha}_1,oldsymbol{lpha}_2,\cdots,oldsymbol{lpha}_n) \left(egin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \ dots & dots & dots & dots \ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}
ight)$$

则矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基B1到新基B2的过渡矩阵。

## 定理

设
$$\alpha$$
在两组基 $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 与 $B_2 = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$ 的坐标分别为

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \quad \stackrel{\text{fr}}{=} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

基 $B_1$ 到 $B_2$ 的过渡矩阵为A,则

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} \ \mathbf{x} \ \mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

### 例2

已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基为 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , 其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 2, 1)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (1, -1, 0)^T, \boldsymbol{\beta}_3 = (1, 0, -1)^T,$$

求自然基B1到B2的过渡矩阵。

## 例3

已知
$$\mathbb{R}^3$$
的两组基为 $B_1 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ 和 $B_2 = \{ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \}$ ,其中 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \quad \alpha_3 = (0, 0, 1)^T,$  $\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \beta_2 = (0, 1, -1)^T, \quad \beta_3 = (1, 2, 0)^T.$ 

- (1) 求基B1到B2的过渡矩阵。
- (2) 已知 $\alpha$ 在基 $B_1$ 的坐标为 $(1,-2,-1)^T$ ,求 $\alpha$ 在基 $B_2$ 下的坐标。

■ ℝ"的基与向量关于基的坐标

- ② ℝ<sup>n</sup>中向量的内积 标准正交基和正交矩阵
  - ℝ"中向量的内积, 欧式空间
  - 标准正交基
  - 施密特 (Schmidt) 正交化方法
  - 正交矩阵及其性质

### 定义

在 $\mathbb{R}^n$ 中,对于 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 和 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ ,规定 $\alpha$ 和 $\beta$ 的内积为

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

当 $\alpha$ 和 $\beta$ 为列向量时,

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha.$$

## 内积的运算性质

对于 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n n k \in \mathbb{R}$ ,

- (i)  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
- (ii)  $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
- (iii)  $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$
- (iv)  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ , 等号成立当且仅当 $\alpha = 0$ .

## 内积的运算性质

对于 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{R}$ ,

- (i)  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
- (ii)  $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
- (iii)  $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$
- (iv)  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ , 等号成立当且仅当 $\alpha = 0$ .

## 定义(向量长度)

向量α的长度定义为

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

线性代数

 $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积,欧式空间 标准正交基 施密特 (Schmidt) 正交化方法 正交矩阵及其性质

# 定理(柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式)

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|$$

## 定理(柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式)

$$|(\boldsymbol{lpha}, \boldsymbol{eta})| \leq \|\boldsymbol{lpha}\| \|\boldsymbol{eta}\|$$

证明:  $\forall t \in \mathbb{R}$ , 有

$$(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) \geq 0$$

即

$$(\beta,\beta)t^2+2(\alpha,\beta)t+(\alpha,\alpha)\geq 0$$

此为关于t的二次函数,由一元二次方程理论可知

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(\alpha, \beta)^2 - 4(\alpha, \alpha)(\beta, \beta) \le 0$$

即

$$(\boldsymbol{lpha}, \boldsymbol{eta})^2 \leq (\boldsymbol{lpha}, \boldsymbol{lpha})(\boldsymbol{eta}, \boldsymbol{eta})$$

亦即

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|$$

## 定义(向量之间的夹角)

向量 $\alpha$ ,  $\beta$ 之间的夹角定义为

$$=rccosrac{(lpha,eta)}{\|lpha\|\|eta\|\|}$$

# 定义(向量之间的夹角)

向量 $\alpha, \beta$ 之间的夹角定义为

$$=rccosrac{(lpha,eta)}{\|lpha\|\|eta\|\|}$$

### 定理

$$\alpha \perp \beta \iff (\alpha, \beta) = 0$$

## 定义(向量之间的夹角)

向量 $\alpha$ ,  $\beta$ 之间的夹角定义为

$$=rccosrac{(lpha,eta)}{\|lpha\|\|eta\|\|}$$

### 定理

$$\alpha \perp \beta \iff (\alpha, \beta) = 0$$

注意:零向量与任何向量的内积为零,从而零向量与任何向量正交。

# 定理 (三角不等式)

$$\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

## 定理 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \le \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|.$$

证明:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta, \alpha + \beta) &= (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \\ &\leq (\alpha, \alpha) + 2|(\alpha, \beta)| + (\beta, \beta) \\ &\leq ||\alpha||^2 + 2||\alpha|||\beta|| + ||\beta||^2 \end{aligned}$$

## 定理 (三角不等式)

$$\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

证明:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\ &\leq (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + 2|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\ &\leq \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + 2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 \end{aligned}$$

注意: 当
$$\alpha \perp \beta$$
时,  $\|\alpha + \beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$ 。

## 定义 (欧几里得空间)

定义了内积运算的n维实向量空间,称为n维欧几里得空间(简称欧氏空间),仍记为 $\mathbb{R}^n$ 。

## 定理

 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组(称为非零正交向量组) $lpha_1,lpha_2,\cdots,lpha_s$ 是线性无关的。

### 定理

 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组(称为非零正交向量组) $lpha_1,lpha_2,\cdots,lpha_s$ 是线性无关的。

#### 证明: 设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

则

$$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s,\alpha_j)=0, \quad j=1,2,\cdots,s,$$

即

$$k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0, \quad j=1,2,\cdots,s.$$

由于 $(\alpha_i, \alpha_i) > 0$ , 故

$$k_j=0, \quad j=1,2,\cdots,s.$$

因此,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关。

## 定义 (标准正交基)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ ,若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \left\{ egin{array}{ll} 1, & i = j, \\ 0, & i 
eq j. \end{array} 
ight. \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基。

例1

设 $B=(lpha_1,lpha_2,\cdots,lpha_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基,求 $\mathbb{R}^n$ 中向量eta在基B下的坐标。

## 例1

设 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基,求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\beta$ 在基B下的坐标。

### 解:

$$\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$$

$$\implies (\beta, \alpha_j) = (x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n, \alpha_j) = x_j (\alpha_j, \alpha_j)$$

$$\implies x_j = \frac{(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$

## 目标

从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 出发,构造一组标准正交向量组。

# 施密特(Schmidt)正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ ,

# 施密特(Schmidt)正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ ,

(1) 
$$\mathbb{R}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$$

# 施密特(Schmidt)正交化过程

- (1)  $\mathbb{R}\beta_1 = \alpha_1$
- $(2) \ \diamondsuit \beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1,$

# 施密特(Schmidt)正交化过程

- (1)  $\mathbb{R}\beta_1 = \alpha_1$
- $(2) \ \diamondsuit \beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1,$

$$\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1$$

# 施密特(Schmidt)正交化过程

- (1)  $\mathbb{R}\beta_1 = \alpha_1$
- (2)  $\diamondsuit \beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$ ,

$$\beta_2 \perp \beta_1$$

$$\implies (\beta_1, \beta_2) = 0$$

## 施密特(Schmidt)正交化过程

- (1)  $\mathbb{R}\beta_1 = \alpha_1$
- $(2) \ \diamondsuit \beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1,$

$$\beta_2 \perp \beta_1$$

$$\Rightarrow (\beta_1, \beta_2) = 0$$

$$\Rightarrow k_{21} = -\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}$$

## 施密特(Schmidt)正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ ,

- (1)  $\mathbb{R}\beta_1 = \alpha_1$
- (2)  $\diamondsuit \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21} \boldsymbol{\beta}_1$

$$eta_2 \perp eta_1 \ \Longrightarrow \quad (eta_1, eta_2) = 0 \ \Longrightarrow \quad k_{21} = -rac{(oldsymbol{lpha}_2, eta_1)}{(eta_1, eta_1)}$$

故

$$oldsymbol{eta}_2 = oldsymbol{lpha}_2 - rac{(oldsymbol{lpha}_2, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1$$

$$(3) \ \diamondsuit \beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2,$$

$$(3) \ \diamondsuit \beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, \qquad (i=1,2)$$

$$(3) \ \diamondsuit \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2,$$

$$\beta_3 \perp \beta_i$$
,  $(i=1,2)$ 

$$\implies$$
  $(\beta_3, \beta_i) = 0,$   $(i = 1, 2)$ 

(3) 
$$\Rightarrow \beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$$
,  
 $\beta_3 \perp \beta_i$ ,  $(i = 1, 2)$   
 $\Rightarrow (\beta_3, \beta_i) = 0$ ,  $(i = 1, 2)$   
 $\Rightarrow k_{3i} = -\frac{(\alpha_3, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}$   $(i = 1, 2)$ 

# 施密特(Schmidt)正交化过程

(3) 
$$\diamondsuit \beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$$
,

$$eta_3 \perp eta_i, \qquad (i = 1, 2)$$
 $\Longrightarrow (eta_3, eta_i) = 0, \qquad (i = 1, 2)$ 

$$\implies k_{3i} = -\frac{(\alpha_3, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} \quad (i = 1, 2)$$

故

$$oldsymbol{eta}_3 = oldsymbol{lpha}_3 - rac{(oldsymbol{lpha}_3, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1 - rac{(oldsymbol{lpha}_3, oldsymbol{eta}_2)}{(oldsymbol{eta}_2, oldsymbol{eta}_2)} oldsymbol{eta}_2$$

## 施密特(Schmidt)正交化过程

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_2, \cdots, oldsymbol{eta}_{i-1},$ 

## 施密特(Schmidt)正交化过程

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_2, \cdots, oldsymbol{eta}_{i-1}$ ,取

$$\boldsymbol{\beta}_{j} = \boldsymbol{\alpha}_{j} + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_{1} + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_{2} + \cdots + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

## 施密特(Schmidt)正交化过程

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $oldsymbol{eta}_1,oldsymbol{eta}_2,\cdots,oldsymbol{eta}_{i-1}$ ,取

$$\boldsymbol{\beta}_{j} = \boldsymbol{\alpha}_{j} + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_{1} + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_{2} + \cdots + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i=1,2,\cdots,j-1)$$

#### 施密特(Schmidt)正交化过程

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1}$ ,取

$$\boldsymbol{\beta}_{j} = \boldsymbol{\alpha}_{j} + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_{1} + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_{2} + \cdots + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i=1,2,\cdots,j-1)$$

$$\implies$$
  $(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0$   $(i = 1, 2, \cdots, j - 1)$ 

限7中向量的内积, 欧式空间 标准正交基 施密特 (Schmidt) 正交化方法 正交矩阵及其性质

## 施密特(Schmidt)正交化过程

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1}$ ,取

$$eta_j = lpha_j + k_{j1}eta_1 + k_{j2}eta_2 + \dots + k_{j,j-1}eta_{j-1},$$
 $eta_j \perp eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$ 
 $\Longrightarrow \quad (eta_j, eta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$ 
 $\Longrightarrow \quad (lpha_i + k_{ii}eta_i, eta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$ 

## 施密特(Schmidt)正交化过程

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $oldsymbol{eta}_1,oldsymbol{eta}_2,\cdots,oldsymbol{eta}_{i-1}$ ,取

$$eta_j = oldsymbol{lpha}_j + k_{j1}eta_1 + k_{j2}eta_2 + \dots + + k_{j,j-1}eta_{j-1},$$
 $eta_j \perp eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$ 
 $\Longrightarrow \quad (eta_j, eta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$ 
 $\Longrightarrow \quad (oldsymbol{lpha}_j + k_{ji}eta_i, eta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$ 
 $\Longrightarrow \quad k_{ji} = -rac{(oldsymbol{lpha}_j, eta_i)}{(eta_i, eta_i)}$ 

#### 施密特(Schmidt)正交化过程

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1}$ , 取

$$eta_j = lpha_j + k_{j1}eta_1 + k_{j2}eta_2 + \dots + k_{j,j-1}eta_{j-1},$$
 $eta_j \perp eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$ 
 $\Longrightarrow \quad (eta_j, eta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$ 
 $\Longrightarrow \quad (lpha_j + k_{ji}eta_i, eta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j-1)$ 
 $\Longrightarrow \quad k_{ji} = -\frac{(lpha_j, eta_i)}{(eta_i, eta_i)}$ 

故

$$eta_j = oldsymbol{lpha}_j - rac{(oldsymbol{lpha}_j,oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1,oldsymbol{eta}_1)}oldsymbol{eta}_1 - rac{(oldsymbol{lpha}_j,oldsymbol{eta}_2)}{(oldsymbol{eta}_2,oldsymbol{eta}_2)}oldsymbol{eta}_2 - \dots - rac{(oldsymbol{lpha}_j,oldsymbol{eta}_{j-1})}{(oldsymbol{eta}_{j-1},oldsymbol{eta}_{j-1})}oldsymbol{eta}_{j-1}.$$

◆ロ → ◆団 → ◆ 差 → ◆ 差 → り へ ○

# 施密特(Schmidt)正交化过程

(5) 单位化

$$\boldsymbol{\beta}_{1}, \boldsymbol{\beta}_{2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{m} \xrightarrow{\boldsymbol{\eta}_{j} = \frac{\boldsymbol{\beta}_{j}}{\|\boldsymbol{\beta}_{j}\|}} \boldsymbol{\eta}_{1}, \boldsymbol{\eta}_{2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{m}$$

例

已知
$$B = \{ lpha_1, lpha_2, lpha_3 \}$$
是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基,其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
,  $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ .

试用施密特正交化方法,由B构造ℝ3的一组标准正交基。

例

已知
$$B = \{ lpha_1, lpha_2, lpha_3 \}$$
是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
,  $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ .

试用施密特正交化方法,由B构造ℝ3的一组标准正交基。

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$

例

已知
$$B = \{ lpha_1, lpha_2, lpha_3 \}$$
是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
,  $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ .

试用施密特正交化方法,由B构造ℝ3的一组标准正交基。

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$

$$oldsymbol{eta}_2 = oldsymbol{lpha}_2 - rac{(oldsymbol{lpha}_2, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1$$

例

已知
$$B = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$$
是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
,  $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ .

试用施密特正交化方法,由B构造ℝ3的一组标准正交基。

$$egin{aligned} eta_1 &= m{lpha}_1 = (1, -1, 0)^T, \ m{eta}_2 &= m{lpha}_2 - rac{(m{lpha}_2, m{eta}_1)}{(m{eta}_1, m{eta}_1)} m{eta}_1 \ &= (1, 0, 1)^T - rac{1}{2}(1, -1, 0)^T = \left(rac{1}{2}, rac{1}{2}, 1
ight), \end{aligned}$$

例

已知
$$B = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$$
是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
,  $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ .

试用施密特正交化方法,由B构造R3的一组标准正交基。

$$\begin{split} \boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 0)^T, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 \\ &= (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2} (1, -1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \\ \boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)} \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)} \boldsymbol{\beta}_2 \end{split}$$

限<sup>n</sup>中向量的内积, 欧式空间 标准正交基 施密特(Schmidt) 正交化方法

例

已知
$$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$
是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基,其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
,  $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ .

试用施密特正交化方法,由B构造ℝ3的一组标准正交基。

$$\begin{split} \boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 0)^T, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 \\ &= (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2} (1, -1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \\ \boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)} \boldsymbol{\beta}_2 \\ &= (1, -1, 1)^T - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T - \frac{2}{2} (1, -1, 0)^T = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right). \end{split}$$

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), 
\eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), 
\eta_3 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

# 定义

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 如果

 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ 

则称A为正交矩阵。

定理

A为正交矩阵 ← A的列向量组为一组标准正交基。

#### 定理

## A为正交矩阵 ⇔ A的列向量组为一组标准正交基。

证明: 将A按列分块为 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ ,则

$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{1}^{T} \\ \boldsymbol{\alpha}_{2}^{T} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n}^{T} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{1}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{1} & \boldsymbol{\alpha}_{1}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{1}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{n} \\ \boldsymbol{\alpha}_{2}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{1} & \boldsymbol{\alpha}_{2}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{2}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{1} & \boldsymbol{\alpha}_{n}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{n}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{n} \end{pmatrix}$$

#### 定理

#### A为正交矩阵 ⇔ A的列向量组为一组标准正交基。

证明: 将A按列分块为 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ ,则

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{1}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_{2}^{\mathsf{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n}^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_{1} & \boldsymbol{\alpha}_{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_{2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_{n} \\ \boldsymbol{\alpha}_{2}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_{1} & \boldsymbol{\alpha}_{2}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_{2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{2}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_{1} & \boldsymbol{\alpha}_{n}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_{2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{n}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_{n} \end{pmatrix}$$

因此

$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \iff \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha}_{i}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{i} = 1, & i = 1, 2, \cdots, n \\ \boldsymbol{\alpha}_{i}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{j} = 0, & j \neq i, i, j = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right.$$

★ A的列向量组为一组标准正交基。

## 定理

设A、B皆为n阶正交矩阵,则

- (1)  $|\mathbf{A}| = 1 \stackrel{.}{\bowtie} -1$
- (2)  $A^{-1} = A^T$
- (3)  $A^T$ 也是正交矩阵
- (4) AB也是正交矩阵

## 定理

若列向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 $\mathbf{n}$ 阶正交矩阵 $\mathbf{A}$ 的作用下变换为 $\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变,即

$$(Ax, Ay) = (x, y),$$
  
 $||Ax|| = ||x||, ||Ay|| = ||y||,$   
 $< Ax, Ay > = < x, y > .$