线性代数

特征值与特征向量 矩阵的对角化

张晓平

数学与统计学院
Email: xpzhang.math@whu.edu.cn
Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

1 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵
- 特征值与特征向量
- 特征值与特征值的性质

2 矩阵可对角化的条件

3 实对称矩阵的对角化

定义（特征值与特征向量）

设$\mathbf{A}$为复数域$\mathbb{C}$上的n阶矩阵，如果存在数$\lambda \in \mathbb{C}$和非零的n维向量$\mathbf{x}$使得

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

则称λ为矩阵$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{x}$为$\mathbf{A}$的对应于特征值λ的特征向量。

定义（特征值与特征向量）

设$\mathbf{A}$为复数域$\mathbb{C}$上的n阶矩阵，如果存在数$\lambda \in \mathbb{C}$和非零的n维向量$\mathbf{x}$使得

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

则称λ为矩阵$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{x}$为$\mathbf{A}$的对应于特征值λ的特征向量。

(1) 特征向量$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$；

(2) 特征值问题是对方针而言的。

由定义，n阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值，就是使齐次线性方程组

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

有非零解的λ值，即满足方程

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

的λ都是矩阵$\mathbf{A}$的特征值。

由定义，n阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值，就是使齐次线性方程组

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

有非零解的λ值，即满足方程

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

的λ都是矩阵$\mathbf{A}$的特征值。

重要结论

特征值λ是关于λ的多项式$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$的根。

定义（特征多项式、特征矩阵、特征方程）

设n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式，$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$称为$\mathbf{A}$的特征矩阵，$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$称为$\mathbf{A}$的特征方程。

定义（特征多项式、特征矩阵、特征方程）

设n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式，$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$称为$\mathbf{A}$的特征矩阵，$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$称为$\mathbf{A}$的特征方程。

(1) n阶矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式是λ的n次多项式。

定义（特征多项式、特征矩阵、特征方程）

设n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式，$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$称为$\mathbf{A}$的特征矩阵，$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$称为$\mathbf{A}$的特征方程。

(1) n阶矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式是λ的n次多项式。

(2) 特征多项式的k重根称为k重特征值。

例1

求矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

例1

求矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\3&1&-1\\4&-2&1\end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解:

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{vmatrix}\lambda-5&1&1\\-3&\lambda-1&1\\-4&2&\lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-2&0\\0&1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)(\lambda-2)^2=0$$

故$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=3,\ \lambda_2=2$（二重特征值）。

当$\lambda_1 = 3$时，由$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)^T$，因此$k_1\mathbf{x}_1$（$k_1$为非零任意常数）是$\mathbf{A}$对应于$\lambda_1 = 3$的全部特征向量。

当$\lambda_1 = 3$时，由$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为$\mathbf{x}_1 = (1,1,1)^T$，因此$k_1\mathbf{x}_1$（k_1为非零任意常数）是$\mathbf{A}$对应于$\lambda_1 = 3$的全部特征向量。

当$\lambda_1 = 2$时，由$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为$\mathbf{x}_2 = (1,1,2)^T$，因此$k_2\mathbf{x}_2$（k_1为非零任意常数）是$\mathbf{A}$对应于$\lambda_1 = 2$的全部特征向量。

例2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的特征多项式为

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})$$

故其n个特征值为n个对角元。

定理1

若$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$都是$\mathbf{A}$的对应于特征值λ_0的特征向量，则$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2$也是$\mathbf{A}$的对应于特征值$\lambda_0$的特征向量（其中$k_1, k_2$为任意常数，但$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2\neq 0$）。

定理2

设n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

(2) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(\mathbf{A})$

定理2

设n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

(2) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(\mathbf{A})$

- 当$\det(\mathbf{A})\neq 0$，即$\mathbf{A}$为可逆矩阵时，其特征值全为非零数；
- 奇异矩阵$\mathbf{A}$至少有一个零特征值。

定理3

一个特征向量不能属于不同的特征值。

定理3

一个特征向量不能属于不同的特征值。

证明: 若$\mathbf{x}$是$\mathbf{A}$的属于特征值$\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1 \neq \lambda_2)$的特征向量，即有

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x},\ \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_2 \mathbf{x} \ \Rightarrow \ (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

这与$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$矛盾。

性质1

Table: 特征值与特征向量

	特征值	特征向量
$\mathbf{A}$	λ	$\mathbf{x}$
$k\mathbf{A}$	$k\lambda$	$\mathbf{x}$
$\mathbf{A}^m$	λ^m	$\mathbf{x}$
$\mathbf{A}^{-1}$	λ^{-1}	$\mathbf{x}$

性质2

矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{A}^T$的特征值相同。

定理4

设$\mathbf{A}=(a_{ij})$是n阶矩阵,若

(1) $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1, \quad (i=1,2,\cdots,n)$

(2) $\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1, \quad (j=1,2,\cdots,n)$

有一个成立，则$\mathbf{A}$的所有特征值的模都小于1。

例1

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(i) 求$\mathbf{A}$的特征值与特征向量

(ii) 求可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$为对角阵。

矩阵可对角化，即矩阵与对角阵相似。

定理

矩阵可对角化 $\Longleftrightarrow$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

定理

矩阵可对角化 $\Longleftrightarrow$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

证明:

$\Rightarrow$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda} \implies \mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$$

定理

矩阵可对角化 $\Longleftrightarrow$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

证明:

$\Rightarrow$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \implies \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$$

将$\mathbf{P}$按列分块，即

$$\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n),$$

则

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

定理

矩阵可对角化 $\Longleftrightarrow$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

证明:

$\Rightarrow$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \implies \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$$

将$\mathbf{P}$按列分块，即

$$\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_n),$$

则

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

定理

矩阵可对角化 $\Longleftrightarrow$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

证明:

$\Rightarrow$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda} \implies \mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$$

将$\mathbf{P}$按列分块，即

$$\mathbf{P}=(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_n),$$

则

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_n)=(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i=\lambda_i\mathbf{x}_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

故$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_n$是$\mathbf{A}$分别对应于$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$的特征向量。

定理

矩阵可对角化 $\iff$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

证明:

$\Rightarrow$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \implies \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$$

将$\mathbf{P}$按列分块，即

$$\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n),$$

则

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

故$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$是$\mathbf{A}$分别对应于$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的特征向量。由于$\mathbf{P}$可逆，所以它们是线性无关的。

若$\mathbf{A}$与$\mathbf{\Lambda}$相似，则$\mathbf{\Lambda}$的主对角元都是$\mathbf{A}$的特征值。若不计λ_k的排列次序，则$\mathbf{\Lambda}$是唯一的，称$\mathbf{\Lambda}$为$\mathbf{A}$的相似标准型。

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k + 1$个不同特征值的特征向量。 设

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1° 当$m = 1$时，结论显然成立。

2° 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。设

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1° 当$m = 1$时，结论显然成立。

2° 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。 设

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。 设

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)-\lambda_{k+1}(1)} \quad a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。 设

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

$$\xRightarrow{(2)-\lambda_{k+1}(1)} \quad a_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明： 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。 设

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)-\lambda_{k+1}(1)} \quad a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

$$\Longrightarrow \quad a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。 设

$$
\begin{aligned}
& a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1) \\
\Longrightarrow \quad & \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow \quad & a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (2) \\
\xRightarrow{(2)-\lambda_{k+1}(1)} \quad & a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow \quad & a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow \quad & a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow \quad & a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = 0
\end{aligned}
$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1° 当$m = 1$时，结论显然成立。

2° 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。 设

$$
\begin{aligned}
& && a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1) \\
&\Longrightarrow && \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \\
&\Longrightarrow && a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (2) \\
&\xRightarrow{(2)-\lambda_{k+1}(1)} && a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \\
&\Longrightarrow && a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
&\Longrightarrow && a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
&\Longrightarrow && a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = 0 \\
&\Longrightarrow && a_{k+1} = 0
\end{aligned}
$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。设

$$
\begin{aligned}
& a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1) \\
\Longrightarrow\ & \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (2) \\
\xRightarrow{(2)-\lambda_{k+1}(1)}\ & a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\ & a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\ & a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = 0 \\
\Longrightarrow\ & a_{k+1} = 0 \\
\Longrightarrow\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}\text{线性无关}
\end{aligned}
$$

推论

若$\mathbf{A}$有n个互不相同的特征值，则$\mathbf{A}$与对角阵相似。

例1

设实对称矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

问$\mathbf{A}$是否可对角化？若可对角化，求对角阵$\mathbf{\Lambda}$及可逆矩阵$\mathbf{P}$使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$，再求$\mathbf{A}^k$。

例2

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是主对角元全为2的上三角矩阵，且存在$a_{ij}\neq 0(i<j)$，问$\mathbf{A}$是否可对角化?

1. 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵
   - 特征值与特征向量
   - 特征值与特征值的性质

2. 矩阵可对角化的条件

3. 实对称矩阵的对角化
   - 实对称矩阵的特征值和特征向量

定义

元素为复数的矩阵和向量，称为复矩阵和复向量。

定义

设a_{ij}为复数，$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，$\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_{ij})_{m\times n}$，$\bar{a}_{ij}$是$a_{ij}$的共轭复数，则称$\bar{\mathbf{A}}$是$\mathbf{A}$的共轭矩阵。

- $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$
- $\overline{\mathbf{A}}^T = \overline{\mathbf{A}^T}$
- 当$\mathbf{A}$为实对称矩阵时，$\overline{\mathbf{A}}^T = \overline{\mathbf{A}^T}$

- $\overline{k\mathbf{A}} = \overline{k}\,\overline{\mathbf{A}}$
- $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$
- $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}}$
- $\overline{(\mathbf{AB})}^T = \overline{\mathbf{B}}^T\overline{\mathbf{A}}^T$
- $\overline{\mathbf{A}^{-1}} = (\overline{\mathbf{A}})^{-1}$
- $\det\bar{\mathbf{A}} = \overline{\det\mathbf{A}}$

1 矩阵的特征值与特征向量 相似矩阵

2 矩阵可对角化的条件

3 实对称矩阵的对角化
- 实对称矩阵的特征值和特征向量

定理

实对称矩阵$\mathbf{A}$的任一特征值都是实数。

定理

实对称矩阵$\mathbf{A}$的任一特征值都是实数。

证明:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad & \Longrightarrow \quad \overline{(\mathbf{A}\mathbf{x})}^T = \overline{\lambda\mathbf{x}}^T \\
& \Longrightarrow \quad \overline{\mathbf{x}}^T\,\overline{\mathbf{A}}^T\,\mathbf{x} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T\,\mathbf{x} \\
& \Longrightarrow \quad \overline{\mathbf{x}}^T\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{x} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T\,\mathbf{x} \\
& \Longrightarrow \quad \lambda\overline{\mathbf{x}}^T\,\mathbf{x} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T\,\mathbf{x} \\
& \Longrightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda}
\end{aligned}$$

定理

实对称矩阵$\mathbf{A}$对应于不同特征值的特征向量是正交的。

定理

实对称矩阵$\mathbf{A}$对应于不同特征值的特征向量是正交的。

证明: 设$\mathbf{A}\mathbf{x}_1=\lambda_1\mathbf{x}_1$，$\mathbf{A}\mathbf{x}_1=\lambda_1\mathbf{x}_1$ $(\lambda_1\neq\lambda_2)$，$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$，则

$$\lambda_1\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2^T\mathbf{A}\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2^T\mathbf{A}^T\mathbf{x}_1=(\mathbf{A}\mathbf{x}_2)^T\mathbf{x}_1=(\lambda_2\mathbf{x}_2)^T\mathbf{x}_1=\lambda_2\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1$$

定理

实对称矩阵$\mathbf{A}$对应于不同特征值的特征向量是正交的。

证明: 设$\mathbf{A}\mathbf{x}_1=\lambda_1\mathbf{x}_1$，$\mathbf{A}\mathbf{x}_1=\lambda_1\mathbf{x}_1$ $(\lambda_1\neq\lambda_2)$，$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$，则

$$\lambda_1\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2^T\mathbf{A}\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2^T\mathbf{A}^T\mathbf{x}_1=(\mathbf{A}\mathbf{x}_2)^T\mathbf{x}_1=(\lambda_2\mathbf{x}_2)^T\mathbf{x}_1=\lambda_2\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1$$

由于$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以

$$\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1=0.$$