线性代数

特征值与特征向量 矩阵的对角化

张晓平

数学与统计学院
Email: xpzhang.math@whu.edu.cn
Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

1 矩阵可对角化的条件

矩阵可对角化，即矩阵与对角阵相似。

定理

矩阵可对角化 $\Longleftrightarrow$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

定理

矩阵可对角化 $\iff$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

证明:

$\Rightarrow$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \implies \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$$

定理

矩阵可对角化 $\Longleftrightarrow$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

证明:

$\Rightarrow$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \implies \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$$

将$\mathbf{P}$按列分块，即

$$\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n),$$

则

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

定理

矩阵可对角化 $\Longleftrightarrow$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

证明:

$\Rightarrow$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \implies \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$$

将$\mathbf{P}$按列分块，即

$$\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n),$$

则

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

定理

矩阵可对角化 $\Longleftrightarrow$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

证明:

$\Rightarrow$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \implies \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$$

将$\mathbf{P}$按列分块，即

$$\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n),$$

则

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

故$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$是$\mathbf{A}$分别对应于$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的特征向量。

定理

矩阵可对角化 $\iff$ n阶矩阵有n个线性无关的特征向量

证明:

$\Rightarrow$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda} \implies \mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$$

将$\mathbf{P}$按列分块，即

$$\mathbf{P}=(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_n),$$

则

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_n)=(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i=\lambda_i\mathbf{x}_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

故$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_n$是$\mathbf{A}$分别对应于λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n的特征向量。由于$\mathbf{P}$可逆，所以它们是线性无关的。

若$\mathbf{A}$与$\mathbf{\Lambda}$相似，则$\mathbf{\Lambda}$的主对角元都是$\mathbf{A}$的特征值。若不计λ_k的排列次序，则$\mathbf{\Lambda}$是唯一的，称$\mathbf{\Lambda}$为$\mathbf{A}$的相似标准型。

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

定理

A的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设**A**的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。设

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$$

定理

A的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设**A**的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。设

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1° 当$m = 1$时，结论显然成立。

2° 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。设

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。设

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。设

$$
\begin{aligned}
& a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k
\end{aligned}
$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m=1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。设

$$
\begin{aligned}
& a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & a_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & a_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\quad & a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k
\end{aligned}
$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。设

$$
\begin{aligned}
& a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\quad & a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\quad & a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\quad & a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = 0
\end{aligned}
$$

定理

$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设$\mathbf{A}$的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。 设

$$
\begin{aligned}
& a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\ & a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\ & a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = 0 \\
\Longrightarrow\ & a_{k+1} = 0
\end{aligned}
$$

定理

A的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明: 设**A**的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量为$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_m$. 对$m$做数学归纳法。

1^o 当$m = 1$时，结论显然成立。

2^o 设k个不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$的特征向量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k$。下面考虑$k+1$个不同特征值的特征向量。设

$$
\begin{aligned}
& a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & \mathbf{A}(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\ & a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\ & a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = 0 \\
\Longrightarrow\ & a_{k+1} = 0 \\
\Longrightarrow\ & \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots,\ \mathbf{x}_k,\ \mathbf{x}_{k+1}\text{线性无关}
\end{aligned}
$$

推论

若$\mathbf{A}$有n个互不相同的特征值，则$\mathbf{A}$与对角阵相似。

例1

设实对称矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

问$\mathbf{A}$是否可对角化？若可对角化，求对角阵$\mathbf{\Lambda}$及可逆矩阵$\mathbf{P}$使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$，再求$\mathbf{A}^k$。

例2

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是主对角元全为2的上三角矩阵，且存在$a_{ij}\neq 0(i<j)$，问$\mathbf{A}$是否可对角化?