第3讲、向量组

May 1, 2017

1 n维向量及其线性相关性

考察三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

我们用向量工具给出其几何解释。记

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} = a_{i1}\mathbf{i} + a_{i2}\mathbf{j} + a_{i3}\mathbf{k}, \quad i = 1, 2, 3,$$

且

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$$

定义 1 (向量的内积). 两个向量$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$的内积定义为

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

定义 2 (向量的垂直). 两个向量$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$垂直的充分必要条件是

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{v}) = 0.$$

由以上方程组可看出，解向量$\mathbf{x}$与$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$都垂直。故

(1) 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$不共面，只有零向量与三者都垂直，即线性方程组(1)只有零解；

(2) 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$共面但不共线，则与该平面垂直的向量都是线性方程组(1)的解，故(1)有无穷多个彼此平行的解向量；

(3) 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$共线，则过原点且与该直线垂直的平面上的全体向量都是(1)的解向量，此时任一解向量均可表示为

$$\mathbf{x} = k_1\mathbf{x}^{(1)} + k_2\mathbf{x}^{(2)},$$

其中$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$为(1)的某两个不共线的非零解向量，$k_1, k_2$为任意常数。

定义 3 (n维向量). 数域F上的n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$构成的有序数组称为数域F上的一个n维向量，记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

其中a_i称为$\boldsymbol{\alpha}$的第i个分量。

- 形如(2)的向量称为行向量；

- 形如
$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$
的向量称为列向量。

数域F上全体n维向量组成的集合，记作F^n。设$\boldsymbol{\alpha}\in F^n$，则

- 当F取为$\mathbb{R}$时，$\boldsymbol{\alpha}$为实向量；
- 当F取为$\mathbb{C}$时，$\boldsymbol{\alpha}$为复向量。

定义 4. 向量运算 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in F^n$，$k\in F$，定义

(i) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$当且仅当$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$；

(ii) 向量加法
$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

(iii) 向量数乘
$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

- 在(iii)中取$k=-1$，得
$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$
右端的向量称为$\boldsymbol{\alpha}$的负向量，记为$-\boldsymbol{\alpha}$.
- 向量的减法定义为
$$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\alpha})$$

定义 5 (向量的8条运算规则)**.** 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in F^n,1,k,l\in F$，则

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$

(3) 对任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，有$\boldsymbol{\alpha}+0=\boldsymbol{\alpha}$

(4) 对任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，存在负向量$-\boldsymbol{\alpha}$，使得$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=0$

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

定义 6 (向量空间)**.** 数域F上的n维向量，在其中定义了上述加法与数乘运算，就称之为F上的n维向量空间，仍记为F^n。当$F=\mathbb{R}$时，叫做n维实向量空间，记作$\mathbb{R}^n$。

定义 7 (线性表示)**.** 设$\boldsymbol{\alpha}_i\in F^n,k_i\in F(i=1,2,\cdots,m)$，则向量
$$\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$
称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$在数域F上的一个线性组合。如果记
$$\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i,$$
则称$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示（或线性表出）。

设有线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$，其中$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵。记

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\mathbf{b}$$

于是线性方程组可等价的表述为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{b}$$

注. 向量$\mathbf{b}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，等价于方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{b}$$

有解。

定义 8 (线性相关与线性无关)**.** 若对m个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in F^n$，有$m$个不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m\in F$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0 \tag{3}$$

成立，则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关； 否则，称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关。

注. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，指的是

- 没有不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使*(3)*成立
- 只有当$k_1,k_2,\cdots,k_m$全为零时，才使*(3)*成立
- 若*(3)*成立，则$k_1,k_2,\cdots,k_m$必须全为零

定理 1. 以下两组等价关系成立*:*

- 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，等价于齐次方程组

  $$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$$

  有非零解。
- 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，等价于齐次方程组

  $$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$$

  只有零解。

对于只含有一个向量$\boldsymbol{\alpha}$的向量组，若存在不为零的数k使得

$$k\boldsymbol{\alpha}=0,$$

则

$$\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{k}0=0$$

若$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，要使

$$k\boldsymbol{\alpha}=0,$$

必须$k=0$.

- 当$\boldsymbol{\alpha}=0$时，向量组$\boldsymbol{\alpha}$线性相关
- 当$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$时，向量组$\boldsymbol{\alpha}$线性无关

定理 2. 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geqslant 2)$线性相关的充分必要条件是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

证明. $(\Rightarrow)$ 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geqslant 2)$线性相关，则必存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0,$$

不妨设$k_1 \neq 0$，则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m \text{fi}$$

必要性得证。

$(\Leftarrow)$ 不妨设α_1可由$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示，即

$$\alpha_1 = l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m$$

于是有

$$\alpha_1 - l_2\alpha_2 - \cdots - l_m\alpha_m = 0,$$

显然$1, -l_2, \cdots, -l_m$不全为零，故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关。

□

证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关的基本方法为：说明齐次方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$$

只有零解。也常常表述为：设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$$

然后说明上式成立，只能有唯一选择：

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0.$$

例 1. 设n维向量$\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$，则$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$线性无关。

解. 设存在$k_1, k_2, \cdots, k_n$使得

$$k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n = 0,$$

即

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) = 0,$$

则必有$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，故$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$线性无关。

注. n维向量$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$称为基本向量。$F^n$中任何向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$都可以由$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$线性表示，即

$$\alpha = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n.$$

例 2. 包含零向量的向量组是线性相关的。

解. 设该向量组为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，其中$\alpha_1 = 0$。则存在$m$个不全为零的数$1, 0, \cdots, 0$使得

$$1\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_m = 0,$$

故该向量组线性相关。

注.
- 单个向量α线性相关，当且仅当α为零向量；
- 单个向量α线性无关，当且仅当α为非零向量。

例 3. 如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关。

证明. 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(r<m)$线性相关，则存在$r$个不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_r$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0,$$

从而有m个不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_r,0,\cdots,0$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+\cdots+0\alpha_m=0,$$

故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关。

□

注.
- 如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，则其中任一部分向量组也线性无关。
- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

注. 该定理不能理解为：线性相关的向量组中，每一个向量都能由其余向量线性表示。

如$\alpha_1=(0,1)$, $\alpha_2=(0,-2)$, $\alpha_3=(1,1)$线性相关(因为α_1, α_2线性相关)，但α_3不能由α_1, α_2线性表示。

定理 3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in F^n$，其中

$$\alpha_1=(a_{11},\ a_{21},\ \cdots,\ a_{n1})^T,\ \alpha_2=(a_{12},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{n2})^T,\ \cdots,\ \alpha_r=(a_{1r},\ a_{2r},\ \cdots,\ a_{nr})^T,$$

则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=0 \tag{4}$$

有非零解，其中

$$\mathbf{A}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr}. \end{pmatrix},\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r \end{pmatrix}$$

证明. 设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=0, \tag{5}$$

即

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{n2} \end{pmatrix}+\cdots+x_r\begin{pmatrix} a_{1r}\\ a_{2r}\\ \vdots\\ a_{nr} \end{pmatrix}=0.$$

此即齐次线性方程组(4)。

($\Rightarrow$) 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，则必有不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_r$使得(5)成立，即齐次线性方程组(4)有非零解。

($\Leftarrow$) 若方程组(4)有非零解，就是说有不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_r$使得(5)成立，故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关。

□

结论 1. 对于齐次线性方程组，如果

$$\text{未知量个数} > \text{方程个数},$$

则它必有无穷多解，从而必有非零解。

定理 4. 任意$n+1$个n维向量都是线性相关的。

证明. 对向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\in F^n$，设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n+x_{n+1}\alpha_{n+1}=0,$$

注意到此齐次线性方程组中，未知量个数为$n+1$，而方程个数为n，故方程组一定有无穷多个解，从而必有非零解。得证$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$线性相关。 □

注.
- 向量个数 $>$ 向量维数 $\Rightarrow$ 向量组必线性相关。
- 在$\mathbb{R}^n$中，任意一组线性无关的向量最多只能含n个向量。

定理 5. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，而$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明. 因为$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，故存在不全为零的数$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$使得

$$k\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0,$$

其中$k\neq 0$ (若$k=0$，则由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关可知$k_1,k_2,\cdots,k_r$全为零，这与$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零矛盾)。于是$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示为

$$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\alpha_r.$$

再证唯一性 设有两种表示法

$$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_r\alpha_r,\quad \beta=h_1\alpha_1+h_2\alpha_2+\cdots+h_r\alpha_r.$$

于是

$$(l_1-h_1)\alpha_1+(l_2-h_2)\alpha_2+\cdots+(l_r-h_r)\alpha_1=0,$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关可知 $l_i-h_i=0$, 即$l_i=h_i$. 故β由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示的表示法惟一。

□

推论 1. 如果F^n中的n个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，则$F^n$中的任一向量$\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，且表示法惟一。

证明. 由"任意$n+1$个n维向量线性相关"知，$\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，由前述定理可得结论成立。 □

例 4. 设$\alpha_1=(1,-1,1),\alpha_2=(1,2,0),\alpha_3=(1,0,3),\alpha_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关？

(2) α_4可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？如能表示求出其表示式。

解. (1) 考察 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 由$|A|=7$可知$A$可逆，故$Ax=0$只有零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

(2) 根据推论，α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法惟一。设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4\Rightarrow x_1\alpha_1^T+x_2\alpha_2^T+x_3\alpha_3^T=\alpha_4^T$$

即

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T&\alpha_2^T&\alpha_3^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$$

解此方程组得惟一解$x_1=1,x_2=-1,x_3=2$，故 $\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$.

例 5. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，又$\beta=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$，证明$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关。

解. 设有数x_1,x_2,x_3使得

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0 \tag{6}$$

即

$$x_1(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)+x_2(\alpha_1-2\alpha_2)+x_3(\alpha_1+\alpha_3)=0$$

亦即

$$(x_1+x_2)\alpha_1+(x_1-2x_2)\alpha_2+(x_1+x_3)\alpha_3=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

求解该方程组可得非零解$(-1,-1,2)$。因此，有不全为零的数x_1,x_2,x_3使得*(6)*成立，从而β_1,β_2,β_3线性相关。

例 6. 证明：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

证明. $(\Rightarrow)$ 假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则有不全为零的数$x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_1$使得

$$(x_1+x_2)\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+(x_3+x_1)\alpha_3=0$$

即

$$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

$(\Leftarrow)$ 设有x_1,x_2,x_3使得

$$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_1)=0 \tag{7}$$

即

$$(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故

$$x_1+x_3=0,\quad x_1+x_2=0,\quad x_2+x_3=0,$$

该方程组只有零解。这说明若使(7)，必有$x_1=x_2=x_3=0$，从而$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

□

定理 6. *(1)* 如果一组n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，那么把这些向量各任意添加$m$个分量所得的向量*($n+m$维)*组$\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_s^*$也线性无关。亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}\cdots,\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}\text{线性无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix}\text{线性无关}$$

(2) 如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，那么它们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量也线性相关，亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix}\text{线性相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}\cdots,\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}\text{线性相关}$$

证明. 两者互为逆否命题，证明第一个即可。向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$$

只有零解。设$\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^T$，$i=1,2,\cdots,s$，即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & = & 0,\\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & = & 0,\\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ns}x_s & = & 0. \end{array}\right. \tag{8}$$

只有零解。不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\alpha_i^*=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni},a_{n+1,i})^T,\quad ii=1,2,\cdots,s.$$

设

$$x_1\alpha_1^*+x_2\alpha_2^*+\cdots+x_s\alpha_s^*=0$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & = & 0,\\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & = & 0,\\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ns}x_s & = & 0,\\ a_{n+1,1}x_1 & + & a_{n+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n+1,s}x_s & = & 0. \end{array}\right. \tag{9}$$

方程组(9)的解全是方程组(8)的解。而方程组(8)只有零解，故方程组(9)也只有零解。故向量组$\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_s^*$线性无关。 □

推论 2. 设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

证明. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，把这些向量各任意添加$m$个全为零的分量，所得到的新向量组记为$\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_s^*$。此时方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$$

与方程组

$$x_1\alpha_1^*+x_2\alpha_2^*+\cdots+x_s\alpha_s^*=0$$

完全相同。所以新向量组$\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_s^*$也线性相关。 □

对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。
如

$$\begin{pmatrix} a_{11}\\0\\a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_{1s}\\0\\a_{2s}\\ \vdots\\ a_{ns}\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} a_{11}\\a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_{1s}\\a_{2s}\\ \vdots\\ a_{ns}\end{pmatrix}$$

线性相关性一致。

例 7. 考察以下向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\6\\9\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\\3\end{pmatrix}$$

解. 去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关，故原向量组线性无关。