向量空间与线性变换

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 12 月 26 日

目录

定义 1 设有序向量组 $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\subset\mathbb{R}^n$，如果 B 线性无关，则 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

称 B 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标，记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\quad\text{或}\quad\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

并称之为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标向量。

注 1

- $\boldsymbol{R}^n$ 的基不是唯一的；
- 基本向量组
$$\boldsymbol{\epsilon}_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0), \quad i = 1,2,\cdots,n$$
称为 $\boldsymbol{R}^n$ 的自然基或标准基；
- 本课程对于向量及其坐标，采用列向量的形式，即
$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

例 2.1 设 $\boldsymbol{R}^n$ 的两组基为自然基 B_1 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$，其中

$$\begin{array}{lcrrrrcrrr}
\boldsymbol{\beta}_1 & =(& 1, & -1, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0)^T, \\
\boldsymbol{\beta}_2 & =(& 0, & 1, & -1, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0)^T, \\
 & \vdots & & & & & & & & \\
\boldsymbol{\beta}_{n-1} & =(& 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 1, & -1)^T, \\
\boldsymbol{\beta}_n & =(& 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 1)^T.
\end{array} \tag{1}$$

求向量组 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 分别在两组基下的坐标。

定理 1 设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一组基，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\eta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\eta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关的充要条件是

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

设 $\boldsymbol{R}^n$ 的两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵。

定理 2 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

例 2.2　已知 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基为 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

例 2.3　已知 $\boldsymbol{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^T.$$

(1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 α 在基 B_1 的坐标为 $(1,-2,-1)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

6. 向量空间的线性变换
   - 线性变化的定义及其性质
   - 线性变换的矩阵表示
   - 线性变换的运算
   - 线性变换的象（值域）与核

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

6. 向量空间的线性变换
   - 线性变化的定义及其性质
   - 线性变换的矩阵表示
   - 线性变换的运算
   - 线性变换的象（值域）与核

定义 2　在 $\boldsymbol{R}^n$ 中，对于 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为列向量时，

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}.$$

性质 1.1 (内积的运算性质)　对于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{R}^n$ 和 $k\in\boldsymbol{R}$,

(i) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

性质 1.1 (内积的运算性质) 对于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{R}^n$ 和 $k\in\boldsymbol{R}$,

(i) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

定义 3 (向量长度) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$$

定理 3 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

定理 3 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

证明 $\forall t \in \boldsymbol{R}$，有

$$(\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}) \ge 0$$

即

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})t^2+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})t+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) \ge 0$$

此为关于 t 的二次函数，由一元二次方程理论可知

$$\Delta = b^2-4ac = 4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2-4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) \le 0$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \le (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$$

亦即

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

定义 4 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定义 4 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$< \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} >= \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理 4

$$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \quad \Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

定义 4 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理 4

$$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta} \quad\Longleftrightarrow\quad (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$$

注意：零向量与任何向量的内积为零，从而零向量与任何向量正交。

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

证明

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
&\leq (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})|+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
&\leq \|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2
\end{aligned}$$

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

证明

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\ &\leq (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})|+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\ &\leq \|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2\end{aligned}$$

注意: 当 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$ 时, $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| = \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$。

定义 5 (欧几里得空间) 定义了内积运算的 n 维实向量空间，称为 n 维欧几里得空间（简称欧氏空间），仍记为 $\boldsymbol{R}^n$。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵

- $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
- 标准正交基
- 施密特（Schmidt）正交化方法
- 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

6. 向量空间的线性变换

- 线性变化的定义及其性质
- 线性变换的矩阵表示
- 线性变换的运算
- 线性变换的象（值域）与核

定理 6 $\boldsymbol{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的。

定理 6 $\boldsymbol{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的。

证明. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0,$$

则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$

即

$$k_j(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

由于 $(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) > 0$，故

$$k_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关。 □

定义 6 (标准正交基) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \boldsymbol{R}^n$，若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一组标准正交基。

例 3.1　设 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一组标准正交基，求 $\boldsymbol{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标。

例 3.1　设 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一组标准正交基，求 $\boldsymbol{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标。

解

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_j)=x_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j) \\ \Longrightarrow\quad & x_j=\frac{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j). \end{aligned}$$

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

6. 向量空间的线性变换
   - 线性变化的定义及其性质
   - 线性变换的矩阵表示
   - 线性变换的运算
   - 线性变换的象（值域）与核

目标

从一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 出发，构造一组标准正交向量组。

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\boldsymbol{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\boldsymbol{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\boldsymbol{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$,

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\boldsymbol{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\boldsymbol{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$,

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\boldsymbol{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$,

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\
\Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \\
\Longrightarrow \quad & k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}
\end{aligned}
$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\boldsymbol{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$,

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \\ \Longrightarrow\quad & k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, \qquad (i = 1, 2)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i = 1,2) \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i = 1,2) \end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow\quad & k_{3i} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} && (i = 1, 2) \end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i=1,2) \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i=1,2) \\ \Longrightarrow\quad & k_{3i} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} && (i=1,2) \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)}$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1}, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}\boldsymbol{\beta}_{j-1}.$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(5) 单位化

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m \xrightarrow{\eta_j = \frac{\boldsymbol{\beta}_j}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}} \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$$

例 3.2　已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组标准正交基。

例 3.2　已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\boldsymbol{\beta}_1 \quad =\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,$$

例 3.2 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\end{aligned}$$

例 3.2　已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&= (1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),
\end{aligned}$$

例 3.2 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&= (1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2
\end{aligned}$$

例 3.2 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&= (1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\
&= (1,-1,1)^T-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T-\frac{2}{2}(1,-1,0)^T=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

解 (续)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

6. 向量空间的线性变换
   - 线性变化的定义及其性质
   - 线性变换的矩阵表示
   - 线性变换的运算
   - 线性变换的象（值域）与核

定义 7 (正交矩阵) 设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$，如果

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

定理 7

$$A\text{为正交矩阵} \iff A\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

定理 7

$\boldsymbol{A}$为正交矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的列向量组为一组标准正交基。

证明. 将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

定理 7

$$A\text{为正交矩阵} \iff A\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

证明. 将 A 按列分块为 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，则

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{pmatrix}$$

因此

$$A^T A = I \iff \begin{cases} \alpha_i^T \alpha_i = 1, & i = 1, 2, \cdots, n \\ \alpha_i^T \alpha_j = 0, & j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\iff A\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

□

定理 8　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶正交矩阵，则

(1) $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 -1

(2) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$

(3) $\boldsymbol{A}^T$ 也是正交矩阵

(4) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵

定理 9 若列向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay}\in\boldsymbol{R}^n$，则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变，即

$$(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\|=\|\boldsymbol{x}\|,\quad \|\boldsymbol{Ay}\|=\|\boldsymbol{y}\|,$$

$$<\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay}>=<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>.$$

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

6. 向量空间的线性变换
   - 线性变化的定义及其性质
   - 线性变换的矩阵表示
   - 线性变换的运算
   - 线性变换的象（值域）与核

定义 8 数域 F 上的线性空间 V 是一个非空集合，存在两种运算

- 加法 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$
- 数乘 $(\lambda \in \boldsymbol{\alpha})$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in V, \lambda \in F$，且 V 对两种运算封闭，并满足以下 8 条性质:

1. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$
2. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$
3. 存在 $\mathbf{0} \in V$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\mathbf{0}$ 称为 V 的零元素
4. 存在 $-\boldsymbol{\alpha} \in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，其中 $-\boldsymbol{\alpha}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素
5. $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$
6. $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$
7. $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$
8. $k(\alpha+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma} \in V, k, l \in F$。

- 当 F 是实数域时，V 称为实线性空间；
- 当 F 是复数域时，V 称为复线性空间。

- 当 F 是实数域时，V 称为实线性空间；
- 当 F 是复数域时，V 称为复线性空间。

线性空间 V 中的元素常称为向量，线性空间中的加法与数乘运算称为线性运算。

例 4.1

- 数域 F 上的全体多项式$F(x)$，对通常的多项式加法和数乘多项式的运算构成数域 F 上的线性空间，其中
  - 零元素是系数全为零的多项式（零多项式）
  - $f(x)$ 的负元素为 $(-1)f(x)$

例 4.1

- 数域 F 上的全体多项式$F(x)$，对通常的多项式加法和数乘多项式的运算构成数域 F 上的线性空间，其中
  - 零元素是系数全为零的多项式（零多项式）
  - $f(x)$ 的负元素为 $(-1)f(x)$
- 如果只考虑次数小于 n 的实系数多项式，则它们连同零多项式一起构成实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间，记为$\mathbb{R}[x]_n$。

例 4.2

对矩阵的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间，记为$\mathbb{R}^{m\times n}$，其中

- 零元素是 $m\times n$ 零矩阵
- 任一元素 $\boldsymbol{A}$ 的负元素为 $-\boldsymbol{A}$

例 4.3

对于$[a,b]$ 上的全体实连续函数，加法与数乘运算构成实数域上的线性空间，记为$C[a,b]$。

对于(a,b) 上全体 k 阶导数连续的实函数，对同样的加法和数乘运算也构成实线性空间，记为$C^k(a,b)$。

对于数域 F 和给定的非空集合 V，若定义的加法和数乘运算不封闭，或者运算不能完全满足 8 条规则，则 V 对定义的运算就不能构成数域 F 上的线性空间。

例 4.4

- 全体 n 阶实矩阵对矩阵的加法和数乘运算不能构成复数域上的线性空间；
- 全体非零的三维实向量对向量的加法和数乘运算不能构成实线性空间。

由线性空间的性质可以得到线性空间的一些性质。

由线性空间的性质可以得到线性空间的一些性质。

性质 0.1　线性空间的零元素是唯一的。

由线性空间的性质可以得到线性空间的一些性质。

性质 0.1 线性空间的零元素是唯一的。

证明. 设 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 是线性空间的两个零元素，则

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2.$$

$\square$

性质 0.2 线性空间中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素是唯一的。

性质 0.2 线性空间中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素是唯一的。

证明. 设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的两个负元素，则

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}.$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{0} = \boldsymbol{\beta}_1 + (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0} + \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_2.$$

□

性质 0.2 线性空间中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素是唯一的。

证明. 设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的两个负元素，则

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}.$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{0} = \boldsymbol{\beta}_1 + (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0} + \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_2.$$

□

利用负元素，可定义减法：

$$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + (-\boldsymbol{\alpha}).$$

性质 0.3 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V;k,l\in F$，则

$$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\beta},\quad (k-l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\alpha}.$$

性质 0.3 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V; k,l\in F$，则

$$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\beta},\quad (k-l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\alpha}.$$

证明.

$$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+k\boldsymbol{\beta}=k[(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}]=k[\boldsymbol{\alpha}+((-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta})]=k(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0})=k\boldsymbol{\alpha}.$$

$$(k-l)\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}=[(k-l)+l]\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}.$$

□

性质 0.3 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V; k,l\in F$，则

$$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\beta},\quad (k-l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\alpha}.$$

证明.

$$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+k\boldsymbol{\beta}=k[(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}]=k[\boldsymbol{\alpha}+((-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta})]=k(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0})=k\boldsymbol{\alpha}.$$

$$(k-l)\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}=[(k-l)+l]\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}.$$

□

分别取 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},k=l,l=0$，可得

性质 0.4

- $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$
- $k(-\boldsymbol{\beta})=-(k\boldsymbol{\beta})$
- $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$
- $(-l)\boldsymbol{\alpha}=-(l\boldsymbol{\alpha})$.

性质 0.5 设 $\boldsymbol{\alpha} \in V, k \in F$，若 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，则 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

性质 0.5 设 $\boldsymbol{\alpha} \in V, k \in F$，若 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，则 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

证明. 设 $k \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha} = 1\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}(k\alpha) = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

□

对于数域 F 上的线性空间 V(记为 $V(F)$)，其子集合 W 关于 $V(F)$ 中的两种运算可能是封闭的，也可能是不封闭的。

考虑 $\mathbb{R}^3$ 的两个子集合

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}, \\ W_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 1\}. \end{aligned}$$

显然，

- W_1 是过原点的平面 $x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$ 上的全体向量；
- W_2 是不过原点的平面 $x_1 - x_2 + 5x_3 = 1$ 上的全体向量。

考虑 $\mathbb{R}^3$ 的两个子集合

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}, \\ W_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 1\}. \end{aligned}$$

显然，

- W_1 是过原点的平面 $x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$ 上的全体向量；
- W_2 是不过原点的平面 $x_1 - x_2 + 5x_3 = 1$ 上的全体向量。

容易验证，W_1 关于向量的加法和数乘是封闭的，而 W_2 对这两种运算不封闭。

定义 9 (线性子空间) 设 $V(F)$ 是一个线性空间，W 是 V 的一个非空子集合。如果 W 对 $V(F)$ 中定义的线性运算也构成数域 F 上的一个线性空间，则称 W 为 $V(F)$ 上的一个线性子空间（简称子空间）。

定理 10 线性空间 $V(F)$ 的非空子集合 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

定理 10 线性空间 $V(F)$ 的非空子集合 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 只需验证 W 中的向量满足线性空间定义的 8 条规则。

定理 10 线性空间 $V(F)$ 的非空子集合 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 只需验证 W 中的向量满足线性空间定义的 8 条规则。

由于 W 是 V 的非空子集，故规则 (1),(2),(5),(6),(7),(8) 显然成立。

定理 10 线性空间 $V(F)$ 的非空子集合 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 只需验证 W 中的向量满足线性空间定义的 8 条规则。

由于 W 是 V 的非空子集，故规则 (1),(2),(5),(6),(7),(8) 显然成立。

因此只需证明

- $\mathbf{0} \in W$
- $\forall \boldsymbol{\alpha}, \ -\boldsymbol{\alpha} \in W$

定理 10 线性空间 $V(F)$ 的非空子集合 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 只需验证 W 中的向量满足线性空间定义的 8 条规则。

由于 W 是 V 的非空子集，故规则 (1),(2),(5),(6),(7),(8) 显然成立。

因此只需证明

- $\mathbf{0} \in W$
- $\forall \boldsymbol{\alpha}, \ -\boldsymbol{\alpha} \in W$

事实上，由于 W 对数乘封闭，即 $\forall \lambda \in F, \forall \boldsymbol{\alpha} \in W$，均有 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in W$。取 $\lambda = 0, -1$，即有

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \in W, \quad -\boldsymbol{\alpha} = (-1)\boldsymbol{\alpha} = \in W.$$

□

例 5.1　在线性空间 V 中,

- 由单个的零向量组成的子集合 $\{\mathbf{0}\}$ 是 V 的一个子空间，称为零子空间;
- V 本身也是 V 的一个子空间,

这两个子空间都称为 V 的平凡子空间，而 V 的其他子空间称为非平凡子空间。

例 5.2 设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解集合

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$$

是 F^n 的一个子空间，称为齐次线性方程组的解空间 (也称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间，记作 $\mathscr{N}(A)$)。

例 5.2 设 $A \in F^{m\times n}$，则 $Ax = 0$ 的解集合

$$S = \{x \mid Ax = 0\}$$

是 F^n 的一个子空间，称为齐次线性方程组的解空间 (也称矩阵 A 的零空间，记作 $\mathcal{N}(A)$)。

注：非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解集合不是 F^n 的子空间。

例 5.3　全体 n 阶实数量矩阵、实对角矩阵、实对称矩阵、实上（下）三角矩阵分别组成的集合，都是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间。

例 5.4 设 $\mathbb{R}^3$ 的子集合

$$V_1 = \{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}, V_2 = \{(1, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\},$$

则 V_1 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，V_2 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

例 5.4 设 $\mathbb{R}^3$ 的子集合

$$V_1 = \{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}, V_2 = \{(1, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\},$$

则 V_1 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，V_2 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

注：在 $\mathbb{R}^3$ 中，

- 凡是过原点的平面或直线上的全体向量组成的子集合都是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间；
- 凡是不过原点的平面或直线上的全体向量组成的子集合都不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

定理 11 设 V 是数域 F 上的线性空间，S 是 V 的一个非空子集合，则 S 中的一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W = \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\alpha}_i \in S,\ k_i \in F,\ i = 1, \cdots, m\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间。

定理 11 设 V 是数域 F 上的线性空间，S 是 V 的一个非空子集合，则 S 中的一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\alpha}_i\in S,\ k_i\in F,\ i=1,\cdots,m\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间。

证明. W 显然包含 S，设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$，则存在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\in S$ 及 $k_1,\cdots,k_m,l_1,\cdots,l_n\in F$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,\quad \boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_n\boldsymbol{\beta}_m$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)+(l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_n\boldsymbol{\beta}_m)\in W$$

$\forall k\in F$，有

$$k\boldsymbol{\alpha}=k(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=kk_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+kk_m\boldsymbol{\alpha}_m\in W,$$

故 W 是 V 的一个子空间。

定理 11 设 V 是数域 F 上的线性空间，S 是 V 的一个非空子集合，则 S 中的一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\alpha}_i\in S,\ k_i\in F,\ i=1,\cdots,m\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间。

证明. W 显然包含 S，设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$，则存在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\in S$ 及 $k_1,\cdots,k_m,l_1,\cdots,l_n\in F$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,\quad \boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_n\boldsymbol{\beta}_m$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)+(l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_n\boldsymbol{\beta}_m)\in W$$

$\forall k\in F$，有

$$k\boldsymbol{\alpha}=k(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=kk_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+kk_m\boldsymbol{\alpha}_m\in W,$$

故 W 是 V 的一个子空间。

再设 W^* 是 V 中包含 S 的任一子空间，则

$$\forall\alpha=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\in W.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in S\subset W^*$，故必有 $\boldsymbol{\alpha}\in W^*$，从而有 $W\subset W^*$，因此 W 是 V 中包含 S 的最小子空间。 □

以上定理中的 W 称为由 V 的非空子集 S 生成的子空间。

特别地，当 S 为有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 时，记

$$W = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) \text{ 或} W = span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$$

为由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间。

以上定理中的 W 称为由 V 的非空子集 S 生成的子空间。

特别地，当 S 为有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 时，记

$$W = L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m) \text{ 或} W = span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$$

为由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间。

例 5.5

- $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解空间是由它的基础解系生成的子空间；
- $\mathbb{R}^3$ 中任一个过原点的平面上的全体向量所构成的子空间，是由该平面上任意两个线性无关的向量生成的子空间。

定理 12 设 W_1, W_2 是数域 F 上的线性空间 V 上的两个子空间，且

$$W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s),\ W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

则 $W_1 = W_2$ 的充分必要条件是两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价。

定理 12 设 W_1, W_2 是数域 F 上的线性空间 V 上的两个子空间，且

$$W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s),\ W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

则 $W_1 = W_2$ 的充分必要条件是两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

定理 12 设 W_1, W_2 是数域 F 上的线性空间 V 上的两个子空间，且

$$W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s),\ W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

则 $W_1 = W_2$ 的充分必要条件是两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 设 $\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \in W_1$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 也可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，即存在 $l_1, \cdots, l_t \in F$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_t\boldsymbol{\beta}_t \in W_2,$$

因此，$W_1 \subset W_2$。

定理 12 设 W_1, W_2 是数域 F 上的线性空间 V 上的两个子空间，且

$$W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s),\ W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

则 $W_1 = W_2$ 的充分必要条件是两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 设 $\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \in W_1$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 也可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，即存在 $l_1, \cdots, l_t \in F$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_t\boldsymbol{\beta}_t \in W_2,$$

因此，$W_1 \subset W_2$。

同理可证 $W_2 \subset W_1$，从而 $W_1 = W_2$。

□

定义 10 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间，则 V 的子集合

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in W_1 \text{ 且} \boldsymbol{\alpha} \in W_2\}, \\ W_1 + W_2 &= \{\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mid \boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2\} \end{aligned}$$

分别称为两个子空间的**交**与**和**。

定义 10 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间，则 V 的子集合

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in W_1 \text{ 且} \boldsymbol{\alpha} \in W_2\}, \\ W_1 + W_2 &= \{\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mid \boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2\} \end{aligned}$$

分别称为两个子空间的**交**与**和**。

如果 $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$，则称 $W_1 + W_2$ 为直和，记为$W_1 \oplus W_2$。

定理 13 线性空间 $V(F)$ 的两个子空间 W_1, W_2 的交与和仍是 V 的子空间。

证明. 只证 $W_1 + W_2$ 是 V 的子空间，为此只需证 $W_1 + W_2$ 对 V 中的线性运算封闭。

定理 13 线性空间 $V(F)$ 的两个子空间 W_1, W_2 的交与和仍是 V 的子空间。

证明. 只证 $W_1 + W_2$ 是 V 的子空间，为此只需证 $W_1 + W_2$ 对 V 中的线性运算封闭。

设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W_1 + W_2$，即存在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \in W_1$；$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 \in W_2$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2,$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1) + (\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2) \in W_1 + W_2,$$

再设 $\lambda \in F$，则

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} = \lambda(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda\boldsymbol{\alpha}_2 \in W_1 + W_2.$$

故 $W_1 + W_2$ 也是 V 的一个子空间。 $\square$

定义 11 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组生成的子空间，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）空间，记为 $\mathscr{R}(A)$（$\mathscr{R}(A^T)$）。

定义 11 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组生成的子空间，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）空间，记为 $\mathscr{R}(A)$（$\mathscr{R}(A^T)$）。

若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则

- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为
$$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in \mathbb{R}^m$$
- $\boldsymbol{A}$ 的行向量组为
$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^n$$

定义 11 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组生成的子空间，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）空间，记为 $\mathscr{R}(A)$（$\mathscr{R}(A^T)$）。

若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则

- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为
$$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in \mathbb{R}^m$$
- $\boldsymbol{A}$ 的行向量组为
$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^n$$

于是

- $\mathscr{R}(A) = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间；
- $\mathscr{R}(A^T) = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

$$
\begin{aligned}
& \text{非齐次线性方程组 } \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \text{ 有解} \\
\Leftrightarrow \quad & \boldsymbol{b} \text{ 是 } \boldsymbol{A} \text{ 的列向量组的线性组合} \\
\Leftrightarrow \quad & \boldsymbol{b} \text{ 属于 } \boldsymbol{A} \text{ 的列空间，即 } \boldsymbol{b} \in \mathscr{R}(\boldsymbol{A})
\end{aligned}
$$

定义 12 设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$，$W$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。如果对于任意的 $\boldsymbol{\gamma} \in W$，均有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0},$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与子空间 W 正交，记作 $\boldsymbol{\alpha} \perp W$。

定义 12　设 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$，$W$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。如果对于任意的 $\boldsymbol{\gamma}\in W$，均有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=\mathbf{0},$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与子空间 W 正交，记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp W$。

定义 13　设 V 和 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间。如果对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\beta}\in W$，均有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0},$$

则称 V 与 W 正交，记作 $V\perp W$。

例 5.6　对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，其每个解向量与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个行向量都正交，故解空间与 $\boldsymbol{A}$ 的行空间是正交的，即

$$\mathscr{N}(\boldsymbol{A})\perp\mathscr{R}(A^T).$$

定理 14 $\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V,\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

定理 14 $\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V,\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

证明. 因 $\mathbf{0}$ 与任何子空间正交，故 W 是非空集合。设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$，于是 $\forall \boldsymbol{\gamma} \in W$，都有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0}, \quad (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0},$$

从而

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0}, \quad (k\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0}(k \in \mathbb{R}),$$

所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) \perp V, k\boldsymbol{\alpha}_1 \perp V$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \in W, k\boldsymbol{\alpha}_1 \in W$，故 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。 □

定义 14 $\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全体向量构成的子空间 W，称为 V 的**正交补**，记为 $W = V^{\perp}$。

定义 14 $\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全体向量构成的子空间 W，称为 V 的**正交补**，记为 $W = V^{\perp}$。

例 5.7 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间 $\mathscr{N}(\boldsymbol{A})$ 由与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量都正交的全部向量构成，故

$$\mathscr{N}(A) = \mathscr{R}(A^T)^{\perp}.$$

这是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的一个基本性质。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

6. 向量空间的线性变换
   - 线性变化的定义及其性质
   - 线性变换的矩阵表示
   - 线性变换的运算
   - 线性变换的象（值域）与核

我们知道：F^n 中任意 n 个线性无关的向量都是一组基，任何一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可以由 F^n 的基线性表示，其系数按序排成的向量就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这组基下的坐标。

我们知道：F^n 中任意 n 个线性无关的向量都是一组基，任何一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可以由 F^n 的基线性表示，其系数按序排成的向量就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这组基下的坐标。

这里我们将在一般的线性空间 $V(F)$ 中讨论类似的问题，为此先要讨论 $V(F)$ 中元素（或称向量）的线性相关性。

例 6.1　证明：线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中元素 $f_0=1, f_1=x, f_2=x^2, \cdots, f_{n-1}=x^{n-1}$ 是线性无关。

证明.　设 $k_0 f_0 + k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_{n-1} f_{n-1} = 0(x)$，即

$$k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_{n-1} x^{n-1} = 0(x),$$

其中 $0(x)$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的零元素，即零多项式。因此，要使 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 的线性组合等于零多项式，仅当 $k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 全为零才能成立，故 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 是线性无关的。 □

例 6.2 证明：线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中的元素

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是线性无关的。

例 6.2 证明：线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中的元素

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

是线性无关的。

证明. 设

$$k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=\mathbf{0}_{2\times 2}, \tag{2}$$

即

$$\begin{pmatrix}k_1+k_2+k_3+k_4 & k_2+k_3+k_4\\ k_3+k_4 & k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=0,\\ k_2+k_3+k_4=0,\\ k_3+k_4=0,\\ k_4=0.\end{cases}$$

而此线性方程组只有零解，因此仅当 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ 时，(2)才成立，故 A_1,A_2,A_3,A_4 线性无关。 □

显然，在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，矩阵

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

是也线性无关的，且 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任一矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\boldsymbol{E}_{11}+b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}+d\boldsymbol{E}_{22}.$$

显然，在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，矩阵

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

是也线性无关的，且 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任一矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22}.$$

不难证明：在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任意 5 个元素 (二阶矩阵)A,B,C,D,Q 是线性相关的，若 A,B,C,D 线性无关，则 Q 可由 A,B,C,D 线性表出，且表示法唯一。

显然，在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，矩阵

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

是也线性无关的，且 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任一矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\boldsymbol{E}_{11}+b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}+d\boldsymbol{E}_{22}.$$

不难证明：在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任意 5 个元素 (二阶矩阵)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{Q}$ 是线性相关的，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 线性无关，则 $\boldsymbol{Q}$ 可由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 线性表出，且表示法唯一。

由此可以发现 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的这些属性与 $\mathbb{R}^4$ 是类似的，我们可以把线性空间的这些属性抽象为基、维数与坐标的概念。

定义 15 如果线性空间 $V(F)$ 中存在线性无关的向量组 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，且任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 都可以由 B 线性表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称

- V 是 n 维线性空间（或者说V 的维数为 n，记作 $dimV=n$）；
- B 是 V 的一个基；
- 有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 B 的坐标（向量），记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in F^n.$$

如果 $V(F)$ 中有任意多个线性无关的向量，则称 V 是无限维线性空间。

定义 15 如果线性空间 $V(F)$ 中存在线性无关的向量组 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，且任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 都可以由 B 线性表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称

- V 是 n 维线性空间（或者说 V 的维数为 n，记作 $dimV=n$）；
- B 是 V 的一个基；
- 有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 B 的坐标（向量），记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in F^n.$$

如果 $V(F)$ 中有任意多个线性无关的向量，则称 V 是无限维线性空间。

例 6.3 在 $F[x]$ 中，$1,x,x^2,\cdots,x^n$(n 为任意正整数) 是线性无关的，故 $F[x]$ 是无限维空间。

我们只讨论有限维线性空间。

在 n 维线性空间 V 中，任意 $n+1$ 个元素 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 都可以由 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，而 n 维线性空间中任意 $n+1$ 个元素都是线性相关的，故 n 维线性空间 V 中，任何 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

在 n 维线性空间 V 中，任意 $n+1$ 个元素 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 都可以由 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，而 n 维线性空间中任意 $n+1$ 个元素都是线性相关的，故 n 维线性空间 V 中，任何 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

例 6.4

- $F[x]_n$ 是 n 维线性空间，$\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\}$ 是它的一组基；

在 n 维线性空间 V 中，任意 $n+1$ 个元素 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 都可以由 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，而 n 维线性空间中任意 $n+1$ 个元素都是线性相关的，故 n 维线性空间 V 中，任何 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

例 6.4

- $F[x]_n$ 是 n 维线性空间，$\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\}$ 是它的一组基；
- $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 是 4 维线性空间，$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 是它的一组基；

在 n 维线性空间 V 中，任意 $n+1$ 个元素 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 都可以由 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，而 n 维线性空间中任意 $n+1$ 个元素都是线性相关的，故 n 维线性空间 V 中，任何 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

例 6.4

- $F[x]_n$ 是 n 维线性空间，$\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\}$ 是它的一组基；
- $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 是 4 维线性空间，$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 是它的一组基；
- $F^{m\times n}$ 是 $m\times n$ 维线性空间，$\{\boldsymbol{E}_{ij}\}_{i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n}$ 是它的一组基。

在线性空间 V 中，由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$ 的维数等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$ 的基。

例 6.5　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})$ 和行空间 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}^T)$ 的维数都等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩。V 的零子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 的维数为零。

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系是其解空间 $\mathscr{N}(\boldsymbol{A})$ 的基，如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，则解空间 $\mathscr{N}(\boldsymbol{A})$ 的维数为 $n-r$，所以

$$\dim\ (\mathscr{R}(\boldsymbol{A}^T))+\dim\ (\mathscr{N}(\boldsymbol{A}))=n.$$

定理 15 设 V 是 n 维线性空间，W 是 V 的 m 维子空间，且 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 W 中的一组基，则 B_1 可以扩充为 V 的基，即在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基.

定理 15 设 V 是 n 维线性空间，W 是 V 的 m 维子空间，且 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 W 中的一组基，则 B_1 可以扩充为 V 的基，即在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基.

证明.

- 若 $m=n$，B_1 就是 V 的基。

定理 15 设 V 是 n 维线性空间，W 是 V 的 m 维子空间，且 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 W 中的一组基，则 B_1 可以扩充为 V 的基，即在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基.

证明.

- 若 $m=n$，B_1 就是 V 的基。
- 若 $m<n$，则必存在 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1} \in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m,, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 线性无关，否则 $\dim V = m$，这与 $\dim V = m$ 矛盾。

定理 15 设 V 是 n 维线性空间，W 是 V 的 m 维子空间，且 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 W 中的一组基，则 B_1 可以扩充为 V 的基，即在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基.

证明.

- 若 $m=n$，B_1 就是 V 的基。
- 若 $m<n$，则必存在 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1}\in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 线性无关，否则 $\dim\ V=m$，这与 $\dim\ V=m$ 矛盾。
    - 若 $n=m+1$，则定理得证；

定理 15 设 V 是 n 维线性空间，W 是 V 的 m 维子空间，且 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 W 中的一组基，则 B_1 可以扩充为 V 的基，即在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基.

证明.

- 若 $m = n$，B_1 就是 V 的基。
- 若 $m < n$，则必存在 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1} \in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m,, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 线性无关，否则 $\dim\ V = m$，这与 $\dim\ V = m$ 矛盾。
  - 若 $n = m+1$，则定理得证；
  - 若 $n > m+1$，重复以上步骤，必存在 $\boldsymbol{\alpha}_{m+2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in V$，使得 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m,, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性无关，即 V 的基。

$\square$

定理 16 (子空间的维数公式) 设 W_1, W_2 是线性空间 $V(F)$ 的子空间，则

$$\dim\ W_1 + \dim\ W_2 = \dim\ (W_1 + W_2) + \dim\ (W_1 \cap W_2).$$

定理 16 (子空间的维数公式) 设 W_1, W_2 是线性空间 $V(F)$ 的子空间，则

$$\dim\ W_1 + \dim\ W_2 = \dim\ (W_1 + W_2) + \dim\ (W_1 \cap W_2).$$

证明: 设 $\dim\ W_1 = s, \dim\ W_2 = t, \dim\ (W_1 \cap W_2) = r$，则

$$W_1 \cap W_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r),$$
$$W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{s-r}),$$
$$W_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{t-r}).$$

于是

$$W_1 + W_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{s-r}, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{t-r}).$$

只需证明 $\dim\ (W_1 + W_2) = s + t - r$，即上述生成 $W_1 + W_2$ 的 $s + t - r$ 个向量是线性无关的。

为此，设

$$a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{\alpha}_r+b_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+b_{s-r}\boldsymbol{\beta}_{s-r}+c_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+c_{t-r}\boldsymbol{\gamma}_{t-r}=\mathbf{0}, \tag{3}$$

于是

$$a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{\alpha}_r+b_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+b_{s-r}\boldsymbol{\beta}_{s-r}=-c_1\boldsymbol{\gamma}_1-\cdots-c_{t-r}\boldsymbol{\gamma}_{t-r}. \tag{4}$$

因上式两端的向量分别属于 W_1 和 W_2，故它们都属于 $W_1\cap W_2$，因此

$$-c_1\boldsymbol{\gamma}_1-\cdots-c_{t-r}\boldsymbol{\gamma}_{t-r}=d_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+d_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

即

$$d_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+d_r\boldsymbol{\alpha}_r+c_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+c_{t-r}\boldsymbol{\gamma}_{t-r}=\mathbf{0},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t-r}$ 为 W_2 的基，故其系数全为零。将其代入(4)右端，又得(4)的左端系数全为零，故(3)中的向量组线性无关。 □

n 维线性空间 $V(F)$ 中向量在基 B 下的坐标，与 F^n 中向量关于基 B 的坐标是完全类似的，主要有以下几个结论：

- 向量在给定基下的坐标是唯一的；
- 由基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵是可逆的；
- 基变换与坐标变换的公式

在这里都是适用的。

给定 $V(F)$ 中的一组基 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$，$V(F)$ 中的向量及其坐标（F^n 中的向量）不仅是一一对应的，而且这种对应保持线性运算关系不变，即

$V(F)$ 中 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}$ 对应于 F^n 中 $\boldsymbol{\alpha}_B+\boldsymbol{\gamma}_B$

$V(F)$ 中 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 对应于 F^n 中 $\lambda\boldsymbol{\alpha}_B$

给定 $V(F)$ 中的一组基 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$，$V(F)$ 中的向量及其坐标（F^n 中的向量）不仅是一一对应的，而且这种对应保持线性运算关系不变，即

$V(F)$ 中 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}$ 对应于 F^n 中 $\boldsymbol{\alpha}_B+\boldsymbol{\gamma}_B$

$V(F)$ 中 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 对应于 F^n 中 $\lambda\boldsymbol{\alpha}_B$

事实上，若 $\alpha=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\gamma}=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\beta}_n,\lambda\in F$，则有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= (x_1+y_1)\boldsymbol{\beta}_1+(x_2+y_2)\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+(x_n+y_n)\boldsymbol{\beta}_n,\\ \lambda\boldsymbol{\alpha} &= (\lambda x_1)\boldsymbol{\beta}_1+(\lambda x_2)\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+(\lambda x_n)\boldsymbol{\beta}_n\end{aligned}$$

故

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})_B=\boldsymbol{\alpha}_B+\boldsymbol{\beta}_B,\quad (\lambda\boldsymbol{\alpha})_B=\lambda\boldsymbol{\alpha}_B.$$

具有上述对应关系的两个线性空间 $V(F)$ 和 F^n，称它们是**同构**的。

具有上述对应关系的两个线性空间 $V(F)$ 和 F^n，称它们是**同构**的。

也就是说，研究任何 n 维线性空间 $V(F)$，都可以通过基和坐标，转化为研究 n 维向量空间 F^n。

具有上述对应关系的两个线性空间 $V(F)$ 和 F^n，称它们是同构的。

也就是说，研究任何 n 维线性空间 $V(F)$，都可以通过基和坐标，转化为研究 n 维向量空间 F^n。

这样，我们对不同的 n 维线性空间就有了统一的研究方法，统一到研究 F^n。

具有上述对应关系的两个线性空间 $V(F)$ 和 F^n，称它们是同构的。

也就是说，研究任何 n 维线性空间 $V(F)$，都可以通过基和坐标，转化为研究 n 维向量空间 F^n。

这样，我们对不同的 n 维线性空间就有了统一的研究方法，统一到研究 F^n。

因此，通常把线性空间也成为向量空间，线性空间中的元素也称为向量。

i

例 6.6　**证明：** $B=\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ **是** $\mathbb{R}[x]_n$ **的一组基，并求** $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ **在基** B **下的坐标。**

i

例 6.6　证明：$B=\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的一组基，并求 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 在基 B 下的坐标。

证明.　前面我们已经证明 B 是线性无关的，且 $\forall p(x)\in\mathbb{R}[x]_n$ 均可表示成

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1},$$

故 B 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的一组基（自然基），因此 $\mathbb{R}[x]_n$ 是 n 维实线性空间。$p(x)$ 在基 B 下的坐标为

$$(p(x))_B=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T.$$

i

例 6.6 证明：$B=\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的一组基，并求 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 在基 B 下的坐标。

证明. 前面我们已经证明 B 是线性无关的，且 $\forall p(x)\in\mathbb{R}[x]_n$ 均可表示成

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1},$$

故 B 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的一组基（自然基），因此 $\mathbb{R}[x]_n$ 是 n 维实线性空间。$p(x)$ 在基 B 下的坐标为

$$(p(x))_B=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T.$$

$$p(x)=(1,x,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

□

例 6.7 设 $B_1 = (g_1, g_2, g_3), B_2 = (h_1, h_2, h_3)$，其中

$$\begin{cases} g_1 = 1, \\ g_2 = -1 + x, \\ g_3 = 1 - x + x^2, \end{cases} , \quad \begin{cases} h_1 = 1 - x - x^2, \\ h_2 = 3x - 2x^2, \\ h_3 = 1 - 2x^2, \end{cases}$$

1. 证明 B_1, B_2 是 $\mathbb{R}[x]_3$ 的基
2. 求 B_1 到 B_2 的过渡矩阵
3. 已知 $[p(x)]_{B_1} = (1, 4, 3)^T$，求 $[p(x)]_{B_2}$.

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

6. 向量空间的线性变换
   - 线性变化的定义及其性质
   - 线性变换的矩阵表示
   - 线性变换的运算
   - 线性变换的象（值域）与核

定义 16 (映射) 设 X, Y 是两个非空集合，如果有一个法则 σ，它使 X 中每个元素 α 都有 Y 中唯一确定的一个元素 β 与之对应，则称 σ 是 X 到 Y 的一个映射，记作

$$\sigma : X \to Y,$$

并称 β 为 α 在 σ 下的象，α 为 β 在 σ 下一个原象，记作

$$\sigma : \alpha \mapsto \beta \text{ 或} \sigma(\alpha) = \beta.$$

定义 16 (映射)　设 X, Y 是两个非空集合，如果有一个法则 σ，它使 X 中每个元素 α 都有 Y 中唯一确定的一个元素 β 与之对应，则称 σ 是 X 到 Y 的一个映射，记作

$$\sigma : X \to Y,$$

并称 β 为 α 在 σ 下的象，α 为 β 在 σ 下一个原象，记作

$$\sigma : \alpha \mapsto \beta \text{ 或} \sigma(\alpha) = \beta.$$

注 2　α 的象是唯一的，但 β 的原象不是唯一的。

定义 16 (映射) 设 X, Y 是两个非空集合，如果有一个法则 σ，它使 X 中每个元素 α 都有 Y 中唯一确定的一个元素 β 与之对应，则称 σ 是 X 到 Y 的一个映射，记作

$$\sigma : X \to Y,$$

并称 β 为 α 在 σ 下的象，α 为 β 在 σ 下一个原象，记作

$$\sigma : \alpha \mapsto \beta \text{ 或} \sigma(\alpha) = \beta.$$

注 2 α 的象是唯一的，但 β 的原象不是唯一的。

由 X 到自身的映射 σ，常称之为**变换**。

- 若 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in X, \alpha_1 \neq \alpha_2$，都有 $\sigma(\alpha_1) \neq \sigma(\alpha_2)$，就称 σ 为单射。
- 若 $\forall \beta \in Y$，都有 $\alpha \in X$，使得 $\sigma(\alpha) = \beta$，则称 σ 为满射。
- 若 σ 既是单射，也是满射，则称 σ 为双射（或称一一对应）。

例 7.1

- $f(x) = \sin x$ 是 $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ 的一个映射，它是满射，但不是单射。
- $f(x) = e^x$ 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的一个映射，它是单射而不是满射。

线性函数

$$y = f(x) = ax$$

是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的映射。显然它是双射，且具有以下性质

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x), \lambda$ 为常数。

现在把一元线性函数推广到 n 维向量空间，设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，若对每一个列向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，映射

$$\sigma : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \text{ 即} \sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的一个映射，且满足以下性质

$$\begin{aligned} \sigma(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \sigma(\boldsymbol{x}_1) + \sigma(\boldsymbol{x}_2), \\ \sigma(\lambda \boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \sigma(\boldsymbol{x}),\ \lambda \in R. \end{aligned}$$

现在把一元线性函数推广到 n 维向量空间，设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，若对每一个列向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n}$，映射

$$\sigma:\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\ \text{即}\sigma(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

是 $\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ 的一个映射，且满足以下性质

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\sigma(\boldsymbol{x}_1)+\sigma(\boldsymbol{x}_2),\\ \sigma(\lambda\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\sigma(\boldsymbol{x}),\ \lambda\in R.\end{aligned}$$

我们把这个映射 σ 称为 $\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ 的线性映射（也称线性变换）。

更一般地，若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，则映射

$$\sigma : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$$

是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射。

更一般地，若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，则映射

$$\sigma : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$$

是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射。

例 7.2　二元线性函数

$$y = f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 = (a_1, a_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ 的线性映射。

更一般地，若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，则映射

$$\sigma : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$$

是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射。

例 7.2 二元线性函数

$$y = f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 = (a_1, a_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ 的线性映射。

本节主要讨论 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的线性映射（也称 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换）。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标
2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质
3. 线性空间的定义及简单性质
4. 线性子空间
5. 线性空间的基、维数和向量的坐标
6. 向量空间的线性变换
   - 线性变化的定义及其性质
   - 线性变换的矩阵表示
   - 线性变换的运算
   - 线性变换的象（值域）与核

定义 17 (线性变换) 设 $V(F)$ 是一个向量空间，若 $V(F)$ 的一个变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足条件：$\forall \alpha, \beta \in V$ 和 $\lambda \in F$，

1. $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$
2. $\boldsymbol{\sigma}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$

就称 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $V(F)$ 的一个线性变换，并称 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的象，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 的原象。

定义 17 (线性变换) 设 $V(F)$ 是一个向量空间，若 $V(F)$ 的一个变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足条件：$\forall \alpha, \beta \in V$ 和 $\lambda \in F$，

1. $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$
2. $\boldsymbol{\sigma}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$

就称 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $V(F)$ 的一个线性变换，并称 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的象，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 的原象。

线性运算等价于：$\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ 和 $\lambda, \mu \in F$，有

$$\boldsymbol{\sigma}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})+\mu\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}).$$

例 7.3 (旋转变换) $\mathbb{R}^2$ 中每个向量绕原点按逆时针方向旋转 θ 角的变换 $\boldsymbol{R}_\theta$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个线性变换。即 $\forall \boldsymbol{\alpha} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{R}_\theta(x, y) = \boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}' = (x', y'),$$

其中 $|\boldsymbol{\alpha}| = r$，而

$$\begin{cases} x' & = r\cos(\beta+\theta) = r\cos\beta\cos\theta - r\sin\beta\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' & = r\sin(\beta+\theta) = r\sin\beta\cos\theta + r\cos\beta\sin\theta = y\cos\theta + x\sin\theta. \end{cases},$$

于是，$\forall \boldsymbol{\alpha}_1 = (x_1, y_1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ 和 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}_\theta(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1 + \mu\boldsymbol{\alpha}_2) \\
=&\boldsymbol{R}_\theta(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\
=&((\lambda x_1 + \mu x_2)\cos\theta - (\lambda y_1 + \mu y_2)\sin\theta, (\lambda x_1 + \mu x_2)\sin\theta + (\lambda y_1 + \mu y_2)\cos\theta) \\
=&\lambda(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) + \mu(x_2\cos\theta - y_2\sin\theta, x_2\sin\theta + y_2\cos\theta) \\
=&\lambda\boldsymbol{R}_\theta(x_1, y_1) + \mu\boldsymbol{R}_\theta(x_2, y_2) \\
=&\lambda\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{\alpha}_1) + \mu\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{\alpha}_2),
\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{R}_\theta$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个线性变换。

例 7.4 (镜像变换（镜像反射）) $\mathbb{R}^2$ 中每个向量关于过原点的直线 L（看做镜面）相对称的变换 $\boldsymbol{\phi}$ 也是 $\mathbb{R}^2$ 的一个线性变换，即

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}'.$$

例 7.5 (投影变换) 把 $\mathbb{R}^3$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$ 投影到 xOy 平面上的向量 $\boldsymbol{\beta} = (x_1, x_2, 0)$ 的投影变换 $P(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{P}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$$

是 $\mathbb{R}^2$ 的一个线性变换。

例 7.6 (恒等变换、零变换、数乘变换)

- 恒等变换 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$
- 零变换 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})=0, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$
- 数乘变换 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{\alpha}, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$

例 7.7　$\mathbb{R}^3$ 中定义变换

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_2-4x_3,2x_3),$$

则 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性变换。

例 7.8 $\mathbb{R}^3$ 中定义变换

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2 + x_3, x_2),$$

则 $\boldsymbol{\sigma}$ 不是 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性变换。

对于 $\mathbb{R}^n$ 的变换

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

- 当 y_i 都是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合时，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换。
- 当 y_i 有一个不是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合时，$\boldsymbol{\sigma}$ 不是 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换。

  上例中，$y_1 = x_1^2$，故不是线性变换。

线性变换的简单性质

对于数域 F 上的向量空间 V 中的线性变换 σ

- $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}(-\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$

线性变换的简单性质

对于数域 F 上的向量空间 V 中的线性变换 σ

- 若 $\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n, \quad k_i \in F, \quad \boldsymbol{\alpha}_i \in V$，则

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_n\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

线性变换的简单性质

对于数域 F 上的向量空间 V 中的线性变换 σ

- 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则其象向量组 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也线性相关。

线性变换的简单性质

对于数域 F 上的向量空间 V 中的线性变换 σ

- 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则其象向量组 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也线性相关。

注 3　但 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，不能推导出 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也线性无关。如

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,2)^T, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,2,2)^T$$

线性无关，而

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}_1) = (1,1,0)^T, \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}_2) = (2,2,0)^T$$

线性相关。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标
2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
    - $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
    - 标准正交基
    - 施密特（Schmidt）正交化方法
    - 正交矩阵及其性质
3. 线性空间的定义及简单性质
4. 线性子空间
5. 线性空间的基、维数和向量的坐标
6. 向量空间的线性变换
    - 线性变化的定义及其性质
    - 线性变换的矩阵表示
    - 线性变换的运算
    - 线性变换的象（值域）与核

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $V(F)$ 的一组基，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 $V(F)$ 的一个线性变换，若 $\boldsymbol{\alpha} \in V(F)$，且

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}) = x_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) + x_2\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + x_n\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

这意味着，如果知道了 $\boldsymbol{\sigma}$ 关于 $V(F)$ 的基的象 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$，则任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的象 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 就知道了。

定理 17 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $V(F)$ 的一组基，若 $V(F)$ 的两个线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 关于这组基的象相同，即

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}$.

定理 17 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $V(F)$ 的一组基，若 $V(F)$ 的两个线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 关于这组基的象相同，即

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_i),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}$.

证明. 所谓 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}$，即每个向量在它们的作用下的象相同，即对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，有 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha})$。

定理 17 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $V(F)$ 的一组基，若 $V(F)$ 的两个线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 关于这组基的象相同，即

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_i),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}$.

证明. 所谓 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}$，即每个向量在它们的作用下的象相同，即对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，有 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha})$。

对任一的 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})&=x_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_n\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=x_1\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_n\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha})\end{aligned}$$

□

因 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_i)\in V(F)$，故它们可由 $V(F)$ 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性表出，即有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_{12}+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_{22}+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_{22}+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n))$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}. \tag{5}$$

定义 18 若 $V(F)$ 中的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$，使得 $V(F)$ 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 关于基的象 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 满足(5)，就称(5)中的 $\boldsymbol{A}$ 是 σ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的矩阵表示，或称 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下对应的矩阵。

定理 18 设 $V(F)$ 的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基下的坐标向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 在基下的坐标向量为 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)^T$，则

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

定理 18 设 $V(F)$ 的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基下的坐标向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 在基下的坐标向量为 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)^T$，则

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

证明. 由

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})&=x_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+x_n\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

例 7.9　求旋转变换 $\boldsymbol{R}_\theta$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)^T$ 的矩阵。

例 7.9 求旋转变换 $\boldsymbol{R}_\theta$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{e}_2=(0,1)^T$ 的矩阵。

解

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{e}_1) & = & \cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{e}_2) & = & -\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2. \end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=(\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{e}_1),\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{e}_2))=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

故初等旋转变换 $\boldsymbol{R}_\theta$ 在标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

例 7.10 求镜像变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的标准正交基 $\{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}\}$ 下所对应的矩阵 $\boldsymbol{H}$。

例 7.10 求镜像变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的标准正交基 $\{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\eta}\}$ 下所对应的矩阵 $\boldsymbol{H}$。

解 根据镜像变换的定义，有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\omega}) & = & \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}) & = & -\boldsymbol{\eta} \end{cases} \text{即}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\eta})=(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\eta})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{\varphi}$ 在标准正交基 $\{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\eta}\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 7.11 $\mathbb{R}^n$ 的恒等变换、零变换和数乘变换在任何基下的矩阵分别都是 $\boldsymbol{I}_n, \mathbf{0}_n, \lambda \boldsymbol{I}_n$。

例 7.12　设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性变换，$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，已知

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= (1,0,0)^T, & \boldsymbol{\alpha}_2 &= (1,1,0)^T, & \boldsymbol{\alpha}_3 &= (1,1,1)^T,\\
\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) &= (1,-1,0)^T, & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2) &= (-1,1,-1)^T, & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3) &= (1,-1,2)^T.
\end{aligned}$$

1. 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 B 下对应的矩阵；
2. 求 $\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\alpha}_2),\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\alpha}_3)$；
3. 已知 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$ 在基 B 下的坐标为 $(2,1,-2)^T$，问 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$ 的原象 $\boldsymbol{\beta}$ 是否唯一？并求 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标。

解 1. 由 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)\boldsymbol{A}$ 可知

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}$$

可求得

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解　2. 由

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)=(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_2),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_3))=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)\boldsymbol{A}$$

可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_2),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_3)) &= \boldsymbol{\sigma}((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)\boldsymbol{A}) \\ &= (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3))\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)\boldsymbol{A}^2 \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3)\begin{pmatrix} 6 & -10 & 14 \\ -4 & 9 & -14 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

解　3. 设 $(\boldsymbol{\beta})_B = (x_1, x_2, x_3)^T$，则

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

解得

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 0) + k(1, 2, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

故 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$ 的原象 $\boldsymbol{\beta}$ 不唯一。

定理 19 设线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和基 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，且 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$，则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.$$

定理 19 设线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和基 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，且 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$，则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.$$

证明. 由

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}, \\ (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C} \end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C} \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \\ &= (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}, \end{aligned}$$

由此即得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$。 □

例 7.13 设 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的矩阵，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^T, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = (-1,1,0)^T, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = (-1,0,1)^T.$$

2. $\boldsymbol{\alpha} = (1,2,3)^T$，求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的坐标向量 $(y_1, y_2, y_3)^T$ 及 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})$.

解 1. 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$$

知

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

解 1. 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$$

知

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 2. $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基下的坐标向量为其本身，即 $(1,2,3)^T$，因此，由坐标变换公式得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解　2. $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基下的坐标向量为其本身，即 $(1,2,3)^T$，因此，由坐标变换公式得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的坐标向量为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

由

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}:=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$$

知，给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，$\mathbb{R}^n$ 中任一向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 就等价于任给上式中的一个矩阵 $\boldsymbol{A}$。

由

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}:=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$$

知，给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，$\mathbb{R}^n$ 中任一向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 就等价于任给上式中的一个矩阵 $\boldsymbol{A}$。

反过来，任给 n 个向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，是否存在唯一的一个线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$，使得 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\beta}_j$？

定理 20 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中任意给定的 n 个向量，则一定存在唯一的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$，使得

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\beta}_j,\quad j=1,\cdots,n.$$

定理 20 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中任意给定的 n 个向量，则一定存在唯一的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$，使得

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j) = \boldsymbol{\beta}_j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

证明. **存在性**

设 $\boldsymbol{\zeta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，定义变换

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\zeta}) = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n$$

定理 20 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中任意给定的 n 个向量，则一定存在唯一的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$，使得

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j) = \boldsymbol{\beta}_j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

证明. **存在性**

设 $\boldsymbol{\zeta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，定义变换

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\zeta}) = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n$$

当 $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\alpha}_j$ 时，显然有

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j) = \boldsymbol{\beta}_j.$$

定理 20 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中任意给定的 n 个向量，则一定存在唯一的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$，使得

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\beta}_j,\quad j=1,\cdots,n.$$

证明. **存在性**

设 $\boldsymbol{\zeta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，定义变换

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\zeta})=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n$$

当 $\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\alpha}_j$ 时，显然有

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\beta}_j.$$

下证 $\boldsymbol{\sigma}$ 为线性变换。 任给 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量 $\boldsymbol{\zeta}_1=\sum_{j=1}^n a_j\boldsymbol{\alpha}_j$ 和 $\boldsymbol{\zeta}_2=\sum_{j=1}^n b_j\boldsymbol{\alpha}_j$ 以及 $k\in\mathbb{R}$，有

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\zeta}_1+\boldsymbol{\zeta}_2)=\boldsymbol{\sigma}(\sum_{j=1}^n(a_j+b_j)\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{j=1}^n(a_j+b_j)\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{j=1}^n a_j\boldsymbol{\beta}_j+\sum_{j=1}^n b_j\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\zeta}_1)+\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\zeta}_2),$$

$$\boldsymbol{\sigma}(k\boldsymbol{\zeta})=\boldsymbol{\sigma}(\sum_{j=1}^n kx_j\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{j=1}^n kx_j\boldsymbol{\beta}_j=k\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\zeta}).$$

□

综上所述，可得重要结论：

给定 $\mathbb{R}^n$ 的一组基后，$\mathbb{R}^n$ 中的线性变换与 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的矩阵一一对应。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标
2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质
3. 线性空间的定义及简单性质
4. 线性子空间
5. 线性空间的基、维数和向量的坐标
6. 向量空间的线性变换
   - 线性变化的定义及其性质
   - 线性变换的矩阵表示
   - 线性变换的运算
   - 线性变换的象（值域）与核

定义 19 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 是线性空间 $V(F)$ 的两个线性变换，$\lambda \in F$，定义

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\alpha}) &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\tau}(\alpha), \\
(\lambda\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\alpha}) &= \lambda\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}), \\
(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\alpha}) &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}))
\end{aligned}
$$

,

可以验证上述定义的$\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau},\lambda\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau}$ 仍是 $V(F)$ 的线性变换。

可以验证上述定义的$\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau},\lambda\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau}$ 仍是 $V(F)$ 的线性变换。

以 $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau}$ 为例，$\forall \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V, k_1,k_2\in F$,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau})(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2) &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2)) \\
&= \boldsymbol{\sigma}(k_1\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_2)) \\
&= k_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_1))+k_2\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_2)) \\
&= k_1(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\alpha}_2).
\end{aligned}$$

定理 21 设线性空间 $V(F)$ 的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 在 V 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下对应的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau}, \lambda\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\sigma\tau}$ 在该组基下对应的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, \lambda\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{AB}$。

定理 21 设线性空间 $V(F)$ 的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 在 V 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下对应的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau},\lambda\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau}$在该组基下对应的矩阵分别为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\lambda\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$。

证明. 由

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}$$

可知

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j,\quad \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j,$$

于是

$$(\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j)+\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})\boldsymbol{\alpha}_j.$$

这表明$\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau}$ 所对应的矩阵是为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$。

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\alpha}_j)&=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}_j))=\boldsymbol{\sigma}(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j)\\&=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\boldsymbol{\alpha}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ki}b_{ij}\right)\boldsymbol{\alpha}_k\end{aligned}$$

这表明$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau}$ 所对应的矩阵是为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$。 □

定义 20 如果线性变换 σ 对应的矩阵 A 为可逆矩阵，则称 σ 是**可逆的线性变换**。σ 可逆也可定义为：如果存在线性变换 τ 使得

$$\sigma\tau = \tau\sigma = I$$

则称 σ 为**可逆的线性变换**。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标
2. $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
    - $\boldsymbol{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
    - 标准正交基
    - 施密特（Schmidt）正交化方法
    - 正交矩阵及其性质
3. 线性空间的定义及简单性质
4. 线性子空间
5. 线性空间的基、维数和向量的坐标
6. 向量空间的线性变换
    - 线性变化的定义及其性质
    - 线性变换的矩阵表示
    - 线性变换的运算
    - 线性变换的象（值域）与核

定义 21　设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是线性空间 $V(F)$ 的一个线性变换，

- 把 V 中所有元素在 $\boldsymbol{\sigma}$ 下的象所组成的集合

$$\boldsymbol{\sigma}(V)=\{\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha}\in V\}$$

　称为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的象或值域，记为 $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\sigma}$；

- V 的零元 $\mathbf{0}$ 在 $\boldsymbol{\sigma}$ 下的完全原象

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})=\{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\alpha}\in V\}$$

　称为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的核，记为 $\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{\sigma}$。

例 7.14 $\mathbb{R}^2$ 上旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_\theta$ 与镜像变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 的值域都是 $\mathbb{R}^2$ 自身，它们的核都只含一个零向量 $\{\mathbf{0}\}$。

(1) $\boldsymbol{\sigma}(V)$（或 $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{\sigma}$）是线性空间 $V(F)$ 的一个子空间。

(1) $\boldsymbol{\sigma}(V)$（或 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\sigma}$）是线性空间 $V(F)$ 的一个子空间。

证明. 由 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 可知 $\boldsymbol{\sigma}(V)$ 是一个非空集合，且 $\forall \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\in\boldsymbol{\sigma}(V)$，$\exists \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V$，使得 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\beta}_2$，于是 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in F$，有

$$\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=\lambda_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\lambda_2\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\sigma}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)\in\boldsymbol{\sigma}(V)$$

所以，$\boldsymbol{\sigma}(V)$ 是 $V(F)$ 的一个子空间。 □

(2) $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$（或 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\sigma}$）也是线性空间 $V(F)$ 的一个子空间。

(2) $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$（或 Ker $\boldsymbol{\sigma}$）也是线性空间 $V(F)$ 的一个子空间。

证明. 因 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$ 不是空集，且 $\forall \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$ 和 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F$，均有

$$\boldsymbol{\sigma}(\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda_1 \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) + \lambda_2 \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda_1 \mathbf{0} + \lambda_2 \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

即 $\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 \in \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$，故 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$ 是 $V(F)$ 的子空间。 □

(3) 线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 是单射的充分必要条件是 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}$。

(3) 线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 是单射的充分必要条件是 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$。

证明.

$\Rightarrow$ 因 $\boldsymbol{\sigma}$ 是单射，则 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$，若 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{0})$，则 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$；

(3) 线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 是单射的充分必要条件是 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}$。

证明.

$\Rightarrow$ 因 $\boldsymbol{\sigma}$ 是单射，则 $\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$，若 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}=\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{0})$，则 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}$；

$\Leftarrow$ 由 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}$ 可得 $\forall \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V$，若 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2)$，即 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)-\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$，故 $\boldsymbol{\sigma}$ 为单射。

$\square$

- $\dim \boldsymbol{\sigma}(V)$ 称为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的秩，记作 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\sigma})$；
- $\dim \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$ 称为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的零度，记作 $\mathscr{N}(\boldsymbol{\sigma})$。

定理 22 设线性空间 $V(F)$ 的维数为 n，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 $V(F)$ 的一个线性变换，则

$$\dim \boldsymbol{\sigma}(V) + \dim \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0}) = n.$$

定理 22 设线性空间 $V(F)$ 的维数为 n，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 $V(F)$ 的一个线性变换，则

$$\dim\,\boldsymbol{\sigma}(V) + \dim\,\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0}) = n.$$

证明. 设 $\dim\,\sigma^{-1}(\mathbf{0}) = k, B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k\}$ 是核 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$ 的一组基，把 B_1 扩充到 V 的基

$$B = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}.$$

定理 22 设线性空间 $V(F)$ 的维数为 n，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 $V(F)$ 的一个线性变换，则

$$\dim \boldsymbol{\sigma}(V) + \dim \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0}) = n.$$

证明. 设 $\dim \sigma^{-1}(\mathbf{0}) = k, B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k\}$ 是核 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$ 的一组基，把 B_1 扩充到 V 的基

$$B = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}.$$

由于 $\forall \boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \in V$，有 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}) = x_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) + \cdots + x_n\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$，故 $\boldsymbol{\sigma}$ 的值域是 $\boldsymbol{\sigma}$ 关于 V 的基象生成的子空间，即

$$\boldsymbol{\sigma}(V) = L(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_k), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_{k+1}), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n))$$

再由 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \mathbf{0}(i = 1, \cdots, k)$ 得

$$\boldsymbol{\sigma}(V) = L(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_{k+1}), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)).$$

因此，只需证明 $\dim \boldsymbol{\sigma}(V) = n - k$，即 $\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_{k+1}), \cdots, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\}$ 线性无关。 □

续. 设

$$c_{k+1}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_{k+1})+\cdots+c_n\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathbf{0}$$

即

$$\boldsymbol{\sigma}(c_{k+1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1}+\cdots+c_n\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathbf{0}$$

故 $c_{k+1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1}+\cdots+c_n\boldsymbol{\alpha}_n\in\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$，因此它可被 B_1 线性表示，于是

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{\alpha}_k-c_{k+1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1}-\cdots-c_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

从而有

$$c_1=\cdots=c_k=c_{k+1}=\cdots=c_n,$$

故 $\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_{k+1}),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\}$ 线性无关。

□

由于线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 的值域 $\boldsymbol{\sigma}(V)$ 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 关于 V 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的象 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的生成子空间，故

$$\dim \boldsymbol{\sigma}(V) = \mathrm{r}\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\}.$$

由于线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 的值域 $\boldsymbol{\sigma}(V)$ 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 关于 V 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的象 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的生成子空间，故

$$\dim\ \boldsymbol{\sigma}(V) = \mathrm{r}\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\}.$$

而

$$(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

可以证明：基象组 $\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组有相同的线性相关性。

由于线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 的值域 $\boldsymbol{\sigma}(V)$ 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 关于 V 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的象 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的生成子空间，故

$$\dim \boldsymbol{\sigma}(V) = \mathrm{r}\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\}.$$

而

$$(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

可以证明：基象组 $\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组有相同的线性相关性。

于是有

$$\mathrm{r}\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}),$$

从而

$$\dim \boldsymbol{\sigma}(V) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

以下证明：基象组 $\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\}$ 与 A 的列向量组有相同的线性相关性。

以下证明：基象组 $\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)\}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组有相同的线性相关性。

设

$$x_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+x_n\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathbf{0}$$

即

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{j=1}^{n} x_j\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关可得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}.$$

- 若 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性无关，则 $x_1=\cdots=x_n=0$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解，故 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关。

  反之亦然。

- 若 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性无关，说明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解，即 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关。

  反之亦然。

若线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则核 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 在基 B 下的坐标向量 $(x_1,\cdots,x_n)^T$，就是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解向量。因此，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间 $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$ 的维数等于核 $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$ 的维数，即

$$\dim\ \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})=\dim\ \mathcal{N}(\boldsymbol{A}).$$