线性代数

线性方程组

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 5 月 1 日

1. 向量组的秩及其极大线性无关组

1. 向量组的秩及其极大线性无关组

定义 1 (向量组的秩) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中，若

- 存在 r 个线性无关的向量，
- 且其中任一向量可由这 r 个线性无关的向量线性表示，

则数 r 称为向量组的秩 (rank)，记作

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$$

或

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$$

- 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = s$；
- 只含零向量的向量组的秩为零。
- 只含一个非零向量的向量组的秩为 1。

定义 2　若向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 中每个向量可由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，就称向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

向量组的线性表示，具备

- 自反性

  向量组自己可以由自己线性表示

- 传递性

  设向量组 A 可以被向量组 B 线性表示，向量组 B 又可以被向量组 C 线性表示，则向量组 A 可以被向量组 C 线性表示

- 不具备对称性

  向量组 A 可以被向量组 B 线性表示，不一定有向量组 B 又可以被向量组 A 线性表示。

  如：部分组总是可以由整体线性表示，但反之不成立

向量组的等价，具备

- **自反性**

  任一向量组和自身等价

- **对称性**

  向量组 A 与向量组 B 等价，当然向量组 B 与向量组 A 等价

- **传递性**

  设向量组 A 与向量组 B 等价，向量组 B 与向量组 C 等价，则向量组 A 与向量组 C 等价

定理 1　若向量组 $B:\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且 $t>s$，则 $B:\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关。

定理 1 若向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且 $t > s$，则 B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关。

证明. 设 $\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{i=1}^{s} k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i, \quad j = 1, 2, \cdots, t.$ 欲证 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关，只需证：存在不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ 使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_t\boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{0}, \tag{1}$$

即

$$\sum_{j=1}^{t} x_j\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{j=1}^{t} x_j\left(\sum_{i=1}^{s} k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\right) = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t} k_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}.$$

当其中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的系数

$$\sum_{j=1}^{t} k_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s \tag{2}$$

时，(1) 显然成立。注意到齐次线性方程组 (2) 含 t 个未知量，s 个方程，而 $t > s$，故 (2) 有非零解。即有不全为零的 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ 使得 (1) 成立，故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关。 □

推论 1　若向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，则

$$t \leq s.$$

推论 2 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 $r+1$ 个向量都是线性相关的。

推论 2 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 $r+1$ 个向量都是线性相关的。

证明. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中的 r 个线性无关的向量，由于该向量组中任一个向量可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，由定理 3.2.1 可知，其中任意 $r+1$ 个向量都线性相关。 $\square$

定义 3 (向量组的秩的等价定义 & 极大线性无关组)　设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$。如果能从其中选出 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，满足

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；
- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关，

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为原向量组的一个**极大线性无关组**，简称**极大无关组**。

<u>极大线性无关组所含向量的个数 r</u>，称为原向量组的**秩**。

注 1

- 秩为 r 的向量组中，任一个线性无关的部分组最多含有 r 个向量；
- 一般情况下，极大无关组不惟一；
- 不同的极大无关组所含向量个数相同；
- 极大无关组与原向量组是等价的;
- 极大无关组是原向量组的**全权代表**。

推论 3　设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = p$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r$，如果向量组 B : $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由 A : $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则

$$r \leq p.$$

推论 3 设 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = p$, $R(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r$，如果向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可由 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则

$$r \leq p.$$

证明. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 分别为两个向量组的极大线性无关组。

(1) $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$等价于$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$可由$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性表示

(2) $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$等价于$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$线性表示

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$线性表示

由上述推论可知 $r \leq p$。 □

推论 4 等价向量组的秩相等。