第4讲、向量空间

May 24, 2017

1 向量空间

定义 1 (向量空间)**.** 设V是非空的n维向量集合，如果集合V对于向量的加法和数乘运算满足以下条件：

(1) 对任意的$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$，有$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V$；

(2) 对任意的$\boldsymbol{\alpha} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$，有$\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V$，

则称V为向量空间。

定义中的(1)表示该集合中向量对加法运算封闭；(2)表示该集合中向量对数乘运算封闭。因此，向量空间也可表述为：对加法和数乘运算封闭的非空集合。

例 1. 设三维向量的全体

$$\mathbb{R}^3 = \{\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)^T | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

以及三维向量集合

$$V_1 = \{\boldsymbol{\alpha} = (0, x_2, x_3)^T | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

和

$$V_2 = \{\boldsymbol{\alpha} = (1, x_2, x_3)^T | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

验证$\mathbb{R}^3, V_1$是向量空间，而V_2不是向量空间。 类似地，n维向量的全体$\mathbb{R}^n$也是一个向量空间。

例 2. 验证齐次线性方程组的全体

$$S = \{x | Ax = 0\}$$

是向量空间。

解. 因$0 \in S$，S为非空集合，由齐次线性方程组解的性质知，对任意的$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in S, \lambda \in R$，有$\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 \in S$且$\lambda\boldsymbol{\xi}_1 \in S$，故$S$中的向量关于加法与数乘运算封闭，称这个向量空间为齐次线性方程组的解空间。

例 3. 验证非齐次线性方程组解的全体

$$S = \{x | Ax = b, b \neq 0\}$$

不是向量空间。

解. 因对任意的$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in S, \lambda \in \mathbb{R}$，有

$$A(\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2) = A\boldsymbol{\eta}_1 + A\boldsymbol{\eta}_2 = b + b = 2b,$$

故$\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 \notin S$，即$S$关于向量的加法与数乘运算不封闭。

例 4. 设$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$是$n$维向量，验证集合

$$V(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \{\boldsymbol{\eta} = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

是向量空间。

解. 因$0=0\alpha+0\beta\in V$，故V为非空集合。另外，对任意的$\eta_1,\eta_2\in V,k\in\mathbb{R}$，有

$$\eta_1=\lambda_1\alpha+\mu_1\beta,\quad \eta_2=\lambda_2\alpha+\mu_2\beta$$

从而

$$\begin{aligned}\eta_1+\eta_2&=(\lambda_1+\lambda_2)\alpha+(\mu_1+\mu_2)\beta\in V,\\ k\eta_1&=(k\lambda_1)\alpha+(k\mu_1)\beta\in V,\end{aligned}$$

称该向量空间为由向量α,β生成的向量空间。

定义 2. 由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$生成的向量空间可表示为

$$V(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m|\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}\}.$$

例 5. 证明：等价的向量组生成的向量空间等价。

证明. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$等价，记

$$\begin{aligned}V_1&=\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m|\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}\},\\ V_2&=\{x=\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2+\cdots+\mu_m\beta_m|\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m\in\mathbb{R}\},\end{aligned}$$

需证明$V_1=V_2$。

设$x\in V_1$，则x可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示。因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性表示，故$x$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性表示，即$x\in V_2$，于是$V_1\subset V_2$。同理可证$V_2\subset V_1$。 □

2 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

定义 3. 设V是向量空间，如果

(1) 在V中有r个向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关；

(2) V中任一向量α可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$是向量空间V的一组基，r称为向量空间V的维数，并称V为r维向量空间。

注 1. 只含一个零向量的集合$\{0\}$也是一个向量空间，该向量空间没有基，规定它的维数为0，并称之为0维向量空间。

注 2. 如果把向量空间V看做是一个向量组，则V的基就是它的一个极大无关组，Vu的维数就是向量组的秩。于是，V的基不唯一，但它的维数是唯一确定的。设V是r维向量空间，则V中任意r个线性无关的向量就是V的一个基。

例 6. 在向量空间$\mathbb{R}^3$中，基本单位向量组

$$\epsilon_1=(1,0,0)^T,\quad \epsilon_2=(0,1,0)^T,\quad \epsilon_3=(0,0,1)^T$$

线性无关，且任一向量$\alpha\in\mathbb{R}^3$可由$\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$表示为

$$\alpha=x_1\epsilon_1+x_2\epsilon_2+x_3\epsilon_3.$$

此时，$\mathbb{R}^3$可表示为

$$\mathbb{R}^3=\{x=x_1\epsilon_1+x_2\epsilon_2+x_3\epsilon_3|x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}.$$

事实上，在$\mathbb{R}^3$中，任一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，只要它们线性无关，就构成$\mathbb{R}^3$的一组基。例如，在$\mathbb{R}^3$中，向量组

$$\epsilon_1=(1,0,0)^T,\quad \epsilon_2=(1,1,0)^T,\quad \epsilon_3=(1,1,1)^T$$

线性无关，构成$\mathbb{R}^3$中的一组基。对任一向量$\alpha\in\mathbb{R}^3$，

$$\alpha=(x_1-x_2)\alpha_1+(x_2-x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3.$$

此时，$\mathbb{R}^3$可表示为

$$\mathbb{R}^3=\{x=(x_1-x_2)\alpha_1+(x_2-x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3|x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}.$$

定义 4. $\mathbb{R}^n$中任一向量$\boldsymbol{\alpha}$均可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\beta}_1 + a_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

称$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$为$\mathbb{R}^n$的一组基，有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$是向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$下的坐标，记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{\alpha}_B = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

并称之为$\boldsymbol{\alpha}$的坐标向量。

注 3.

- $\mathbb{R}^n$的基不是唯一的
- 基本向量组

  $$\boldsymbol{\epsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

  称为$\mathbb{R}^n$的自然基或标准基。
- 本书对于向量及其坐标，采用列向量的形式，即

  $$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

例 7. 设$\mathbb{R}^n$的两组基为自然基B_1和$B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$，其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= (\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 0)^T, \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= (\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 0)^T, \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{\beta}_{n-1} &= (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ -1)^T, \\
\boldsymbol{\beta}_n &= (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 1)^T.
\end{aligned} \tag{1}$$

求向量组$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$分别在两组基下的坐标。

解. $\boldsymbol{\alpha}$在自然基B_1下的坐标即为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$. 设$\boldsymbol{\alpha}$在自然基$B_2$下的坐标为$(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，则满足以下方程

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

即得

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \end{pmatrix}$$

定理 1. 设$B = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$是$\mathbb{R}^n$的一组基，且

$$\begin{cases}
\boldsymbol{\eta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\
\boldsymbol{\eta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\
\cdots\cdots \\
\boldsymbol{\eta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.
\end{cases}$$

则$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$线性无关的充要条件是

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

设$\mathbb{R}^n$的两组基$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$和$B_2=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$满足关系式

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基B_1到新基B_2的过渡矩阵。

定理 2. 设α在两组基$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$与$B_2=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$的坐标分别为

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad 和 \quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

基B_1到B_2的过渡矩阵为$\mathbf{A}$，则

$$\mathbf{A}y=x \quad 或 \quad y=\mathbf{A}^{-1}x$$

例 8. 已知$\mathbb{R}^3$的一组基为$B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$$\beta_1=(1,2,1)^T,\beta_2=(1,-1,0)^T,\beta_3=(1,0,-1)^T,$$

求自然基B_1到B_2的过渡矩阵。

例 9. 已知$\mathbb{R}^3$的两组基为$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$和$B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$$\begin{aligned} \alpha_1&=(1,1,1)^T, & \alpha_2&=(0,1,1)^T, & \alpha_3&=(0,0,1)^T, \\ \beta_1&=(1,0,1)^T, & \beta_2&=(0,1,-1)^T, & \beta_3&=(1,2,0)^T. \end{aligned}$$

(1) 求基B_1到B_2的过渡矩阵。

(2) 已知α在基B_1的坐标为$(1,-2,-1)^T$，求α在基B_2下的坐标。

3 $\mathbb{R}^n$中向量的内积，欧式空间

定义 5. 在$\mathbb{R}^n$中，对于$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$和$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，规定$\alpha$和$\beta$的内积为

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

当α和β为列向量时，

$$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha.$$

性质 1 (内积的运算性质)**.** 对于$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^n$和$k\in\mathbb{R}$，

(i) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(ii) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(iii) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

(iv) $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$， 等号成立当且仅当$\alpha=0$.

定义 6. 定义（向量长度） 向量α的长度定义为

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$$

定理 3. 定理（柯西-施瓦茨*(Cauchy-Schwarz)*不等式）

$$|(\alpha,\beta)|\leqslant\|\alpha\|\|\beta\|$$

证明. $\forall t\in\mathbb{R}$，有

$$(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)\geqslant 0$$

即

$$(\beta,\beta)t^2+2(\alpha,\beta)t+(\alpha,\alpha)\geqslant 0$$

此为关于t的二次函数，由一元二次方程理论可知

$$\Delta=b^2-4ac=4(\alpha,\beta)^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\leqslant 0$$

即

$$(\alpha,\beta)^2\leqslant(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$$

亦即

$$|(\alpha,\beta)|\leqslant\|\alpha\|\|\beta\|$$

□

定义 7 (向量之间的夹角)**.** 向量α,β之间的夹角定义为

$$<\alpha,\beta>=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$$

定理 4.

$$\alpha\perp\beta\quad\Longleftrightarrow\quad(\alpha,\beta)=0$$

注意：零向量与任何向量的内积为零，从而零向量与任何向量正交。

定理 5 (三角不等式)**.**

$$\|\alpha+\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|.$$

证明.

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta,\alpha+\beta)&=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\\&\leqslant(\alpha,\alpha)+2|(\alpha,\beta)|+(\beta,\beta)\\&\leqslant\|\alpha\|^2+2\|\alpha\|\|\beta\|+\|\beta\|^2\end{aligned}$$

□

注意：当$\alpha\perp\beta$时，$\|\alpha+\beta\|=\|\alpha\|+\|\beta\|$。

定义 8 (欧几里得空间)**.** 定义了内积运算的n维实向量空间，称为n维欧几里得空间（简称欧氏空间），仍记为$\mathbb{R}^n$。

4 标准正交基

定理 6. $\mathbb{R}^n$中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是线性无关的。

证明. 设
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0,$$
则
$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$
即
$$k_j(\alpha_j, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$
由于$(\alpha_j, \alpha_j) > 0$，故
$$k_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$
因此，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关。 □

定义 9 (标准正交基)**.** 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$，若
$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$
则称$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基。

例 10. 设$B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基，求$\mathbb{R}^n$中向量$\beta$在基$B$下的坐标。

解.
$$\begin{aligned} & \beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \\ \Longrightarrow \quad & (\beta, \alpha_j) = (x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n, \alpha_j) = x_j(\alpha_j, \alpha_j) \\ \Longrightarrow \quad & x_j = \frac{(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \end{aligned}$$

5 施密特（Schmidt）正交化方法

本小节的目标是：从一组线性无关的向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$出发，构造一组标准正交向量组。

定义 10 (施密特（Schmidt）正交化过程)**.** 给定$\mathbb{R}^n$中的线性无关组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，

(1) 取$\beta_1 = \alpha_1$

(2) 令$\beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$，
$$\begin{aligned} & \beta_2 \perp \beta_1 \\ \Longrightarrow \quad & (\beta_1, \beta_2) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & k_{21} = -\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \end{aligned}$$
故
$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

(3) 令$\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$，
$$\begin{aligned} & \beta_3 \perp \beta_i, & (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow \quad & (\beta_3, \beta_i) = 0, & (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow \quad & k_{3i} = -\frac{(\alpha_3, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} & (i = 1, 2) \end{aligned}$$
故
$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{j-1}$， 取

$$
\begin{aligned}
&\beta_j = \alpha_j + k_{j1}\beta_1 + k_{j2}\beta_2 + \cdots + +k_{j,j-1}\beta_{j-1}, \\
&\quad \beta_j \perp \beta_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1) \\
\Longrightarrow &\quad (\beta_j, \beta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1) \\
\Longrightarrow &\quad (\alpha_j + k_{ji}\beta_i, \beta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1) \\
\Longrightarrow &\quad k_{ji} = -\frac{(\alpha_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}
\end{aligned}
$$

故

$$\beta_j = \alpha_j - \frac{(\alpha_j, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_j, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_j, \beta_{j-1})}{(\beta_{j-1}, \beta_{j-1})}\beta_{j-1}.$$

(5) 单位化

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m \xrightarrow{\eta_j = \frac{\beta_j}{\|\beta_j\|}} \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$$

例 11. 例 已知$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, -1, 1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解.

$$
\begin{aligned}
\beta_1 \quad &= \alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \\
\beta_2 \quad &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\
&= (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(1, -1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \\
\beta_3 \quad &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 \\
&= (1, -1, 1)^T - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T - \frac{2}{2}(1, -1, 0)^T = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_1 \quad &= \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\
\eta_2 \quad &= \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
\eta_3 \quad &= \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

6 正交矩阵及其性质

定义 11. 设$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，如果

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

则称$\mathbf{A}$为正交矩阵。

定理 7.

$$\mathbf{A}\text{为正交矩阵} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

证明. 将$\mathbf{A}$按列分块为$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix}$$

因此

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_i^T\alpha_i = 1, & i = 1, 2, \cdots, n \\ \alpha_i^T\alpha_j = 0, & j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

□

定理 8. 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$皆为n阶正交矩阵，则

(1) $|\mathbf{A}| = 1$ 或 -1

(2) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

(3) $\mathbf{A}^T$也是正交矩阵

(4) $\mathbf{AB}$也是正交矩阵

定理 9. 若列向量$x, y \in \mathbb{R}^n$在n阶正交矩阵$\mathbf{A}$的作用下变换为$\mathbf{A}x, \mathbf{A}y \in \mathbb{R}^n$，则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变，即

$$(\mathbf{A}x, \mathbf{A}y) = (x, y),$$

$$\|\mathbf{A}x\| = \|x\|, \quad \|\mathbf{A}y\| = \|y\|,$$

$$\langle \mathbf{A}x, \mathbf{A}y \rangle = \langle x, y \rangle.$$