线性代数

线性方程组

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 5 月 1 日

1. 矩阵的秩　相抵标准形

1. 矩阵的秩　相抵标准形

定义 1 (行秩 & 列秩)

- 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，把它的每一行称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**行向量**。把 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**。
- 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，把它的每一列称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**列向量**。把 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**。

对于 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，

- $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $\leq m$；
- $\boldsymbol{A}$ 的列秩 $\leq n$。

阶梯形矩阵

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

其中 $a_{11} \neq 0, a_{23} \neq 0, a_{34} \neq 0$。验证 $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $= 3$，列秩 $= 3$。

把 $\boldsymbol{A}$ 按行和列分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\alpha}_4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$$

下证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关。

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}) + x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) \\ +x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第一个分量

$$x_1 a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

从而

$$x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第 3 个分量

$$x_2 a_{23} = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

从而

$$x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

同理得 $x_3 = 0$。于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

又 $\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0}$，而零向量可由任何向量线性表示，这里

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大无关组。所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 3。

(2) 设

$$y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_3\boldsymbol{\beta}_3 + y_4\boldsymbol{\beta}_4 = \mathbf{0}$$

即

$$y_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

比较第三个分量得 $y_4 = 0$。从而

$$y_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

比较第二个分量得 $y_3 = 0$。从而

$$y_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

比较第一个分量得 $y_1 = 0$。故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

去掉向量组

$$B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5$$

的最后一个分量，所得的新向量记为

$$B^*:\boldsymbol{\beta}_1^*,\boldsymbol{\beta}_2^*,\boldsymbol{\beta}_3^*,\boldsymbol{\beta}_4^*,\boldsymbol{\beta}_5^*.$$

注意去掉的分量全为 0，故这两个向量组的相关性是一致的。

由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}_1^*,\boldsymbol{\beta}_3^*,\boldsymbol{\beta}_4^*$ 也线性无关。

因任意 $(3+1)=4$ 个 3 维向量必线性相关，故 $\boldsymbol{\beta}_1^*,\boldsymbol{\beta}_3^*,\boldsymbol{\beta}_4^*$ 为向量组 B^* 的极大无关组，即向量组 B^* 中任何一个向量都可由 $\boldsymbol{\beta}_1^*,\boldsymbol{\beta}_3^*,\boldsymbol{\beta}_4^*$ 线性表示，从而向量组 B 的任何一个向量都可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性表示。

得证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是向量组 B 的极大无关组，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 3。

结论 1 阶梯形矩阵的行秩等于列秩，其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数。

定理 1　初等行变换不改变矩阵的行秩。

证明. 只需证明每做一次对换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变。设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，进行一次初等变换所得矩阵为 $\boldsymbol{B}$。记 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为

$A：\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m.$

(1) 证明对调变换 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \boldsymbol{B}$ 不改变矩阵的行秩。因 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B：\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_j, , \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$B：\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, , \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

一致，故 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩。

(2) 证明倍乘变换 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i \times c,\ c \neq 0} \boldsymbol{B}$ 不改变矩阵的行秩。因 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B：\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A：\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩。

(3) 证明倍乘变换 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i+r_j\times c} \boldsymbol{B}$ 不改变矩阵的行秩。因 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B:\ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i + c\boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A:\ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩。

$\square$

定理 2 初等行变换不改变矩阵的列秩。

定理 2 初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明. 设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=\boldsymbol{B}$$

在 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中相同位置任取某 s 个列向量:

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}\quad\text{和}\quad\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s},$$

分别记为向量组 A^* 和 B^*。设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s}=\boldsymbol{0},\tag{1}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s}=\boldsymbol{0},\tag{2}$$

注意到方程组 (2) 是方程组 (1) 经过高斯消元法得到，故两方程组同解。即向量组 A^* 和 B^* 有完全相同的线性关系。得证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 列秩相等。 □

定理 3.3.2 提供了求向量组的秩与极大无关组的一种简便而有效的方法。

例 1　设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解　作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$，由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div 3}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&-1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

将最后一个阶梯矩阵 $\boldsymbol{B}$ 记为 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$

易知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组，故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 也为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5) = 3,$$

且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \\ \boldsymbol{\alpha}_5 &= \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_4, \end{aligned}$$

由定理 3.3.1 与定理 3.3.2 可以推出：初等列变换也不改变矩阵的列秩与行秩。

定理 3　初等变换不改变矩阵的行秩与列秩。

定理 4 矩阵的行秩等于其列秩。

定理 4 矩阵的行秩等于其列秩。

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换得到阶梯矩阵 $\boldsymbol{U}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\text{的行秩} &= \boldsymbol{U}\text{的行秩} \\ &= \boldsymbol{U}\text{的列秩} = \boldsymbol{A}\text{的列秩}\end{aligned}$$

$\square$

定义 2 (矩阵的秩)　矩阵的行秩或列秩的数值，称为**矩阵的秩**。记作

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \quad \text{或} \quad \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \quad \text{或} \quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$$

定义 3 (满秩矩阵)　对于 n 阶方阵，若

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**满秩矩阵**。

定理 5 对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$。

定理 5 对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$。

证明. 只需证明前两个表述等价。

(1)$\Rightarrow$(2) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$，记 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯形矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行，由行简化阶梯形矩阵的结构知 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

定理 5 对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$。

证明. 只需证明前两个表述等价。

(1)⇒(2) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$，记 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯形矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行，由行简化阶梯形矩阵的结构知 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

(2)⇒(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，记 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_0$，则

$$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换可以得到 $\boldsymbol{I}$，故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{I}) = n$。

□

定义 4 (子式与主子式) 对矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，任意挑选 k 行 ($i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行) 与 k 列 ($j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列)，其交点上的 k^2 个元素按原顺序排成的 k 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix} \tag{3}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的k 阶子行列式，简称 $\boldsymbol{A}$ 的k 阶子式。

- 当 (3) 等于零时，称为k 阶零子式;
- 当 (3) 不等于零时，称为k 阶非零子式;
- 当 (3) 的 $j_1=i_1$，$j_2=i_2$，$\cdots$，$j_k=i_k$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的k 阶主子式。

注　若 $\boldsymbol{A}$ 存在 r 阶非零子式，而所有 $r+1$ 阶子式 (如果有) 都等于零，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

事实上，由行列式的按行展开可知，若所有 $r+1$ 阶子式都等于零，可得到所有更高阶的子式都等于零。

定理 6 $R(\boldsymbol{A}) = r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

定理 6 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

$(\Rightarrow)$ 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$，即 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行构成的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的行秩为 r，其列秩也为 r；不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关。

由定理 3.3.5 可知，$\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子式为非零子式。

又因为 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关，所以 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 阶子式都是零子式（因为其中有一行可由其余 r 行线性表示），因此 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

定理 6 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

($\Rightarrow$) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$，即 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行构成的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的行秩为 r，其列秩也为 r；不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关。

由定理 3.3.5 可知，$\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子式为非零子式。

又因为 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关，所以 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 阶子式都是零子式（因为其中有一行可由其余 r 行线性表示），因此 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

($\Leftarrow$) 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子式 $|\boldsymbol{A}_r|\neq 0$，于是 $\boldsymbol{A}_r$ 可逆，其 r 个行向量线性无关。将它们添加分量称为 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个行向量，它们也线性无关。

而 $\boldsymbol{A}$ 的任何 $r+1$ 个行向量必线性相关（否则，$\boldsymbol{A}$ 中存在 $r+1$ 阶非零子式，这与题设矛盾），故 $\boldsymbol{A}$的行秩 $=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$.

□

关于矩阵的秩的基本结论

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$的行秩 $= \boldsymbol{A}$的列秩 $= \boldsymbol{A}$的非零子式的最高阶数

(2) 初等变换不改变矩阵的秩

性质 1

$$\max\{R(\boldsymbol{A}),\ R(\boldsymbol{B})\} \ \le\ R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \ \le\ R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}).$$

特别地，当 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}$ 为非零向量时，有

$$R(\boldsymbol{A}) \ \le\ R(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}) \ \le\ R(\boldsymbol{A}) + 1.$$

$$
\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \begin{cases} \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) & \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{b}\text{可以被}\boldsymbol{A}\text{的列向量线性表示} \\ \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+1 & \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{b}\text{不能被}\boldsymbol{A}\text{的列向量线性表示} \end{cases}
$$

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(1) 因

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}_1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-(c_1+2c_2)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{0}),$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}_1)=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$，从而 $\boldsymbol{b}_1$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示。

(2) 因

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+1$，从而 $\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示。

证明.

- 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列线性表示，故
$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leq\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$
同理
$$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leq\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$
所以
$$\max\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\}\leq\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$

证明.

- 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列线性表示，故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$

同理

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{B}) \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$

所以

$$\max\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\} \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$

- 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=p$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=q$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p \ \text{ 和 } \ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ 的列向量组可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q$ 线性表示，故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})\text{的列秩} \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q) \leq p+q.$$

□

注

- 不等式

$$\min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}), \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\} \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$$

意味着：在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当 $\boldsymbol{B}$ 的列向量能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示时，等号成立。

注

- 不等式

$$\min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}), \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\} \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$$

意味着：在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当 $\boldsymbol{B}$ 的列向量能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示时，等号成立。

- 不等式

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$$

意味着：对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$，有可能 $\boldsymbol{A}$ 的列向量与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量出现线性相关，合并为 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的秩一般会比 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 要小。

性质 2

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

性质 2

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

证明. 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=p$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=q$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \ \text{和}\ \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 线性表示，故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\text{的列秩} \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q) \leq p+q.$$

□

性质 2

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

证明. 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=p$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=q$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 线性表示，故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\text{的列秩} \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q) \leq p+q.$$

□

注　将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合并、相加，只可能使得秩减小。

性质 3

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leq \min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{R}(\boldsymbol{B})).$$

性质 3

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leq \min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{R}(\boldsymbol{B})).$$

证明. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，则

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{AB}\text{的列秩} \leq \boldsymbol{A}\text{的列秩} = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}).$$

类似地，将 $\boldsymbol{B}$ 按行分块，可得 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. $\square$

性质 3

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leq \min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathrm{R}(\boldsymbol{B})).$$

证明. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，则

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{AB}\text{的列秩} \leq \boldsymbol{A}\text{的列秩} = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}).$$

类似地，将 $\boldsymbol{B}$ 按行分块，可得 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leq \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. □

该性质告诉我们，对一个向量组进行线性组合，可能会使向量组的秩减小。

性质 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{PA}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{AQ}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{PAQ}).$$

性质 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{PA}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{AQ}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{PAQ}).$$

证明. 以下给出两种证明方法：

法一 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 可表示为若干个初等矩阵的乘积，而初等变换不改变矩阵的秩，故结论成立。

性质 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{PA}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{AQ}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{PAQ}).$$

证明. 以下给出两种证明方法：

法一 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 可表示为若干个初等矩阵的乘积，而初等变换不改变矩阵的秩，故结论成立。

法二 因

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{PA})) \le \mathrm{R}(\boldsymbol{PA}) \le \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$$

故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{PA}).$$

同理可证其他等式。

$\square$

例 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，且 $m < n$，证明：$|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| = 0$.

例 2　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，且 $m < n$，证明：$|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| = 0$.

解　由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T) \le \min\{m, n\} < n$，根据性质 2，有

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) \le \min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T),\ \mathrm{R}(\boldsymbol{A})\} < n,$$

而 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，故 $|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| = 0$。

定义 5 (矩阵的相抵) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换化为 $\boldsymbol{B}$(亦即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$)，就称 $\boldsymbol{A}$相抵于$\boldsymbol{B}$，记作 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$

性质 5 (相抵关系的性质)

- 反身性

$$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{A}$$

- 对称性

$$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{A}$$

- 传递性

$$\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{C} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{C}$$

定义 6 (阶梯形矩阵) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 零行在最下方;

(2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增,

则称 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯形矩阵。

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 7 行简化阶梯形矩阵 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 它是阶梯形矩阵；

(2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外，其余元素全为零，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行简化阶梯形矩阵**。

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 7 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = r$，则一定存在可逆的 m 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m \times n} = \boldsymbol{U}.$$

定理 7 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$，则一定存在可逆的 m 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m\times n}=\boldsymbol{U}.$$

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换，可将 $\boldsymbol{A}$ 化为有 r 个非零行的行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_1.$$

对 $\boldsymbol{U}_1$ 做初等列变换可将 $\boldsymbol{U}_1$ 化为 $\boldsymbol{U}$，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使得

$$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{U}$$

记 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{Q}$, 则有 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{U}$. □

定义 8 (相抵标准形)　设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}_{m\times n})=r$，则矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准形，简称标准形。

- 秩相等的同型矩阵，必有相同的标准形。
- 两个秩相等的同型矩阵是相抵的。

例 3　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵 $(m > n)$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$，证明：存在 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n.$$

例 3　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵 $(m>n)$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$，证明：存在 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n.$$

证明.　由定理 7 可知，存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{0}_1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{0}_1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\\ \boldsymbol{0}_1\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{0}_1$ 为 $(m-n)\times n$ 零矩阵。取

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{Q}\ \ \boldsymbol{0}_2),$$

其中 $\boldsymbol{0}_2$ 为 $n\times(m-n)$ 阶零矩阵，则

$$\boldsymbol{CPA}=(\boldsymbol{Q}\ \ \boldsymbol{0}_2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\\ \boldsymbol{0}_1\end{pmatrix}=\boldsymbol{QQ}^{-1}+\boldsymbol{0}_2\boldsymbol{0}_1=\boldsymbol{I}_n.$$

故存在 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{CP}$ 使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$. □

例 4　设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,3,1,2),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,5,3,3),$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,-1,a),\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (3,10,k,4),$$

试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩，并将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

解 将 4 个向量按列排成一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，做初等变换将其化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{U}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

(1) 当 $a=1$ 或 $k=2$ 时，$\boldsymbol{U}$ 只有 3 个非零行，故

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3.$$

(2) 当 $a\neq 1$ 且 $k\neq 2$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=4.$

(3) 当 $k=2$ 且 $a\neq 1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{1+5a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2+a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{3}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(4) 当 $k\neq 2$ 或 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

例 5　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，求 t。

例 5 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，求 t。

解

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$，故 $\boldsymbol{B}$ 中第 2、3 行必须成比例，即

$$\frac{-2}{2+t}=\frac{-4}{6},$$

即得 $t=1$。