线性代数

矩阵的初等变换与初等矩阵

武汉大学数学与统计学院

2017 年 8 月 30 日

1. 矩阵的初等变换与初等矩阵

1. 矩阵的定义

定义 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵，记作

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

这 $m \times n$ 个数称为 $\boldsymbol{A}$ 的元素，数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列，称为矩阵的 (i,j) 元。可简记为(a_{ij})、$(a_{ij})_{m\times n}$或$\boldsymbol{A}_{m\times n}$。

注 对矩阵的定义，需做以下几点说明：

- 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵；

- 行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_n$；
- 只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

称为行矩阵，又称行向量，也记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{pmatrix};$$

- 只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，又称列向量。
- 两行矩阵的行数相等、列数也相等时，称它们为同型矩阵。
- 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\mathbf{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相等，记作

$$\boldsymbol{A} = \mathbf{B}.$$

- 元素都为 0 的矩阵称为零矩阵，记作$\mathbf{O}$。注意不同型的零矩阵是不同的。

接下来我们举几个例子介绍矩阵的应用。

例　某厂向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

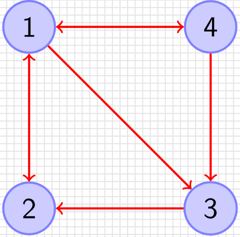
$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3} \\ \text{产品 4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{商店 1} & \text{商店 2} & \text{商店 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \end{array}$$

其中 a_{ij} 为工厂向第 j 店发送第 i 种产品的数量。这四种产品的单价及单件重量也可列成矩阵

$$
B = \begin{array}{c} \\ \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3} \\ \text{产品 4} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{单价} & \text{单件重量} \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \end{array}
$$

其中 b_{i1} 为第 i 种产品的单价，b_{i2} 为第 i 种产品的单件重量。

例 四个城市间的单向航线如图所示



若令

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有 1 条单向航线,}\\ 0, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线,}\end{cases}$$

则该航线图可用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 城市\ 1 \\ 城市\ 2 \\ 城市\ 3 \\ 城市\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 城市\ 1 & 城市\ 2 & 城市\ 3 & 城市\ 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

例　设变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 满足：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

它表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换，其系数 a_{ij} 构成矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$。

- 给定了线性变换 (1)，其系数矩阵也就确定。

- 反之，若给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定。
- 从这个意义上讲，线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系。

(1)、线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \quad \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

称为恒等变换，它对应 n 阶方阵

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

该方阵称为 n 阶单位矩阵，简称单位阵。其 (i,j) 元为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

(2)、线性变换

$$\begin{cases}y_1=\lambda_1x_1,\\ y_2=\lambda_2x_2,\\ \quad\vdots\\ y_n=\lambda_nx_n\end{cases}$$

对应于 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

这种方阵称为对角矩阵，简称对角阵，记作

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

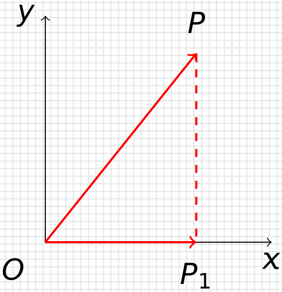
(3)、矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所对应的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

是一个投影变换。



(4)、矩阵

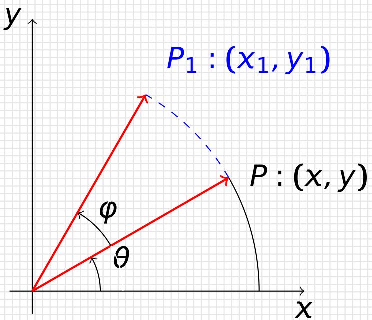
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$x_1 = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta+\varphi),$$
$$y_1 = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = r\sin(\theta+\varphi),$$



这表明经过上述变换，将向量 OP 逆时针旋转 φ 角得到向量 OP_1.

例 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2 \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ - x_4 = 0 \\ - 3x_3 + 9x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_3 + 9x_4 = 3 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

如此形状的方程组称为阶梯形线性方程组. 该方程组可写成矩阵形式

$$
\left(A \;\vdots\; b \right) = \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array} \right)
$$

图: 增广矩阵

求解过程可表示为

$$
\left(\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right) \xlongequal{r_1 \div 2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal[\substack{r_3 + (-3) \times r_1 \\ r_4 + (-5) \times r_1}]{r_2 + (-2) \times r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right.
$$

例　求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$$

解

其增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

求解过程可表示为:

$$
\left(A \mid b \right) \xlongequal[\substack{r_3 + (-3) \times r_1 \\ r_4 + (-1) \times r_1}]{r_2 + (-2) \times r_1}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3
\end{array} \right)
$$

$$
\xlongequal[r_3 + (-2) \times r_2]{r_3 + (-2) \times r_2}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3
\end{array} \right)
$$

$$
\xlongequal[r_3 \longleftrightarrow r_4]{r_4 \div (-3)}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right)
$$

该矩阵称为行简化阶梯矩阵，对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\ x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

注　该方程组有 5 个未知量，其中 x_1, x_3, x_4 为基本未知量，x_2, x_5 为自由未知量。

任取 $x_2 = k_1, x_5 = k_2$，可得线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 = 1 + k_1 - 7k_2, \\ x_2 = k_1, \\ x_3 = 2 - 4k_2, \\ x_4 = -1 + 3k_2, \\ x_5 = k_2. \end{cases}$$

例　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

解

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \xlongequal[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right) \xlongequal{r_3+(-1}$$

由第三行可以看出，该线性方程组无解。

- 含有矛盾方程而无解的方程组称为不相容方程组；
- 有解的方程组称为相容方程组；
- 多余方程。

对于一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

对于以上增广矩阵，总是可以经过一系列的变换将其化成

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} c_1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中 $c_{ii} = 1\ (i = 1, 2, \cdots, r)$。对应线性方程组解的情况如下:

1. 线性方程组有解 $\Leftrightarrow$ $d_{r+1} = 0$;
2. 在有解的情况下:

- 当 $r = n$ 时，有唯一解 $x_1 = d_1$，$x_2 = d_2$，$\cdots$，$x_n = d_n$；

- 当 $r < n$ 时，有无穷多解

$$\left\{\begin{array}{ccl} x_1 & = & d_1 - c_{1,r+1}k_1 - \cdots - c_{1n}k_{n-r}, \\ x_2 & = & d_2 - c_{2,r+1}k_1 - \cdots - c_{2n}k_{n-r}, \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & d_r - c_{r,r+1}k_1 - \cdots - c_{rn}k_{n-r}, \\ x_{r+1} & = & k_1, \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & k_{n-r}. \end{array}\right.$$

2. 矩阵的计算

2.1　矩阵的加法

定义 (矩阵的加法) 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和记为 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

注 只有当两个矩阵同型时才能进行加法运算。

矩阵加法的运算律：

(i) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$;

(ii) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，称

$$-\boldsymbol{A} = (-a_{ij}),$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，显然有

$$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}.$$

由此规定矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

2.2　矩阵的数乘

定义 (矩阵的数乘) 数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$，规定为

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

注 用数 k 乘一个矩阵，需要把数 k 乘矩阵的每一个元素，这与行列式的数乘性质不同。

矩阵数乘的运算律：

(i) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$;

(ii) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(iii) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

2.3　矩阵的乘法

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2, \end{cases} \tag{3}$$

若想求从 t_1, t_2 到 y_1, y_2 的线性变换，可将 (3) 代入 (2)，便得

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b \end{cases} \tag{4}$$

线性变换 (4) 可看成是先作线性变换 (3) 再作线性变换 (2) 的结果。把线性变换（4）叫做线性变换（2）和（3）的乘积，相应地把线性变换（4）对应的矩阵定义为线性变换（2）与（3）所对应矩阵的乘

积，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

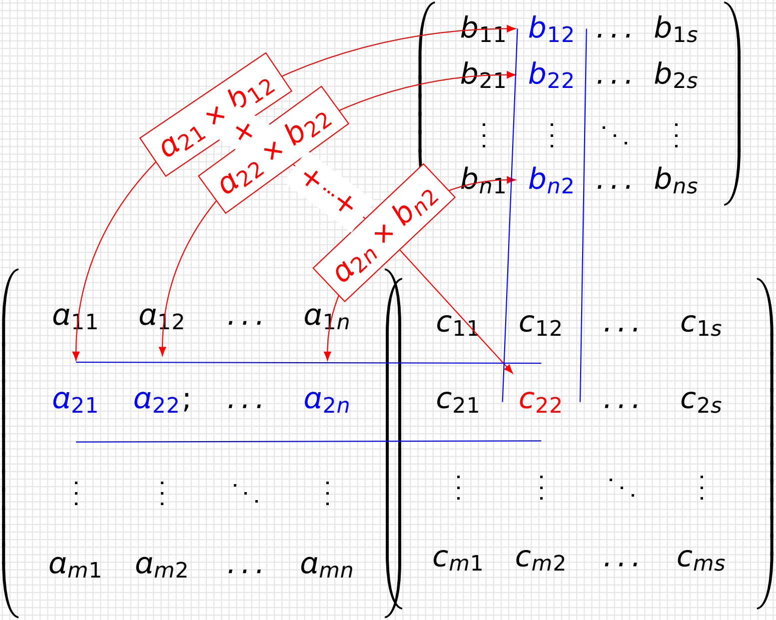
定义 (矩阵乘法) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$ 矩阵，即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

则 A 与 B 之乘积 AB（记为 $C = (c_{ij})$）为 $m \times s$ 矩阵，且

$$c_{ij} = c_{i1}b_{1j} + c_{i2}b_{2j} + \cdots + c_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

注 两个矩阵 A 与 B 相乘有意义的前提是A 的列数等于 B 的行数。



$a_{21} \times b_{12}$
$+$
$a_{22} \times b_{22}$
$+ \cdots +$
$a_{2n} \times b_{n2}$
b_{11} b_{12} $\ldots$ b_{1s}
b_{21} b_{22} $\ldots$ b_{2s}
b_{n1} b_{n2} $\ldots$ b_{ns}
a_{11} a_{12} $\ldots$ a_{1n}
a_{21} a_{22}; $\ldots$ a_{2n}
a_{m1} a_{m2} $\ldots$ a_{mn}
c_{11} c_{12} $\ldots$ c_{1s}
c_{21} c_{22} $\ldots$ c_{2s}
c_{m1} c_{m2} $\ldots$ c_{ms}

图: 矩阵乘法示意图

例　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$

解

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1\times5+2\times(-5)+(-1)\times6 & 1\times6+2\times(-6)+(-1) \\ (-1)\times5+3\times(-5)+4\times6 & (-1)\times6+3\times(-6)+4 \\ 1\times5+1\times(-5)+1\times6 & 1\times6+1\times(-6)+1\times \end{pmatrix}$$

例　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

例 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ -2ab & -2ab \end{pmatrix}$$

由以上例题可以看出一些结论：

1 矩阵乘法不满足交换律。

若 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$，则称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不可交换。

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，则称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换。

2 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}\text{且}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0} \xRightarrow{\text{有可能}} \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$$

3 矩阵乘法不满足消去律，即当 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ 时，

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，即 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}; \quad \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}.$$

矩阵乘法的运算律：

(i) 结合律

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

(ii) 数乘结合律

$$k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$$

(iii) 左结合律

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$$

右结合律

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$$

2.4　一些特殊矩阵及其运算

定义 (单位矩阵与数量矩阵)

1 主对角元全为 1，其余元素全为零的 n 阶方阵，称为 n 阶单位矩阵，记为 $\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2 主对角元全为非零数 k，其余元素全为零的 n 阶方阵，称为 n 阶数量矩阵，记为 $k\boldsymbol{I}_n, k\boldsymbol{I}, k\boldsymbol{E}$

$$k\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$$

注

1 单位阵在矩阵乘法中的作用相当于数 1 在数的乘法中的作用。

2 一些等式：

$$(k\boldsymbol{I})\boldsymbol{A} = k(\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}) = k\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{I}) = k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}) = k\boldsymbol{A}.$$

定义 (对角矩阵)　非对角元皆为零的 n 阶方阵称为 n 阶**对角矩阵**，记作 $\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

或记作 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

注

1 用对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，就是用 $\lambda_i (i = 1, \cdots, n)$ 乘 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行的每个元素；

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 \\ \vdots & \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2 用对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，就是用 $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$ 乘 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 列的每个元素，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 \\ \vdots & \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

定义 (三角矩阵)

1 主对角线以上的元素全为零的 n 阶方阵称为上三角矩阵 $(a_{ij}=0,\ i>j)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 主对角线以下的元素全为零的 n 阶方阵称为下三角矩阵

$(a_{ij}=0,\ i<j)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例 证明：两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵。

证明. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})$，则当 $i>j$ 时，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}\underbrace{a_{ik}}_{\substack{\Downarrow\\0}}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\underbrace{b_{kj}}_{\substack{\Downarrow\\0}}=$$

注　两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

第 i 个方程可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此上述线性方程组可表示为

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}, \quad \boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

定理 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵，则

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

证明.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_1+a_{1i}r_{n+i}}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

仿照上述步骤，可将行列式的左上角元素全消为零，即得

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{I} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n |\boldsymbol{AB}||-\boldsymbol{I}_n| = (-1)^n |\boldsymbol{AB}|(-1)^n \\
&= |\boldsymbol{AB}|.
\end{aligned}
$$

□

例　设

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}
$$

其中 A_{ij} 是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式。证明：当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证明.　设 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{C} = (c_{ij})$，其中

$$
c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij}|\boldsymbol{A}|
$$

于是

$$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A|I_n,$$

因此，

$$|A||A^*| = |AA^*| = |A|^n,$$

由于 $|A| \neq 0$，故 $|A^*| = |A|^{n-1}$. $\square$

定义 (矩阵幂) 设 A 是 n 阶矩阵，k 个 A 的连乘积称为 A 的 k 次幂，记作 A^k，即

$$A^k = \underbrace{A\,A\,\cdots\,A}_{k}$$

矩阵幂的运算律：

1 当 m, k 为正整数时，

$$A^m A^k = A^{m+k}, \quad (A^m)^k = A^{mk}.$$

2 当 $\boldsymbol{AB}$ 不可交换时，一般情况下，

$$(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$$

3 当 $\boldsymbol{AB}$ 可交换时，

$$(\boldsymbol{AB})^k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{B}^k\boldsymbol{A}^k.$$

定义 (矩阵多项式)　设 $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是 x 的 k 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$f(\boldsymbol{A}) = a_k\boldsymbol{A}^k + a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{I}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次多项式。

注

1 若 $f(x), g(x)$ 为多项式，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆是 n 阶矩阵，则

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A}).$$

2 当 $\boldsymbol{AB}$ 不可交换时，一般

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B}) \neq g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A})$$

3. 矩阵的转置、对称矩阵

定义 (转置矩阵) 把一个 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到的一个 $n \times m$ 矩阵，称之为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^T$ 或 $\boldsymbol{A}'$，即

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

定理 (矩阵转置的运算律)

(i) $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

(iii) $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$

(iv) $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

证明. 只证 (iv)。设
$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times s}, \boldsymbol{A}^T = (a^T_{ij})_{n\times m}, \boldsymbol{B}^T = (b^T_{ij})_{s\times n}$，注意到

$$a_{ij} = a^T_{ji}, b_{ij} = b^T_{ji},$$

有

$$(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T)_{ji} = \sum_{k=1}^n b^T_{jk}a^T_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = (\boldsymbol{AB})_{ij} = (\boldsymbol{AB})^T_{ji},$$

于是 $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$. □

定义 (对称矩阵、反对称矩阵) 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个 n 阶矩阵。

1 如果

$$a_{ij} = a_{ji},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵;

2 如果

$$a_{ij} = -a_{ji},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵。

注 关于对称矩阵与反对称矩阵，有如下性质:

1. $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$;
2. $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$;
3. 反对称矩阵的主对角元全为零。
4. 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。
5. 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

设 $\boldsymbol{A}$ 为一 n 阶方阵，则

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{T}}{2}+\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{T}}{2}$$

容易验证 $\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{T}}{2}$ 为对称阵，$\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{T}}{2}$ 为反对称阵。

6. 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 对称的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}$ 可交换。

例 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}$ 都是对称矩阵。

证明.

$$(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})^{T}=\boldsymbol{A}^{T}(\boldsymbol{A}^{T})^{T}=\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A},\quad(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T})^{T}=(\boldsymbol{A}^{T})^{T}\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}$$

□

例 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 为 n 阶反对称矩阵。

证明.

$$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^T=(\boldsymbol{AB})^T+(\boldsymbol{BA})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A})+(-\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{B}=$$

4. 逆矩阵

给定一个从 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 的线性变换

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} \tag{5}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 左乘 (5)，得

$$\boldsymbol{A}^*\mathbf{y} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\mathbf{x} = |\boldsymbol{A}|\mathbf{x}.$$

当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\mathbf{y}.$$

记

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{B}\mathbf{y}, \tag{6}$$

它表示一个从 $\mathbf{y}$ 到 $\mathbf{x}$ 的线性变换，称为线性变换 (5) 的逆变换。

注　$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系：

1. 将 (6) 代入 (5)

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\mathbf{y}) = (\boldsymbol{AB})\mathbf{y}$$

可见 $\boldsymbol{AB}$ 为恒等变换对应的矩阵，故

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}.$$

2. 将 (5) 代入 (6)

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\mathbf{x}) = (\boldsymbol{BA})\mathbf{x}$$

可见 $\boldsymbol{BA}$ 为恒等变换对应的矩阵，故

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

定义 (逆矩阵) 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果有一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并把 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。

注

1. 可逆矩阵与其逆矩阵为同阶方阵。
2. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 地位相等，也可称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵。

定理 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵惟一。

证明. □

$\boldsymbol{A}$ 的矩阵记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

定理 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

证明.

定义 代数余子式矩阵，伴随矩阵 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$ 为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，称

$$\mathrm{coef}\boldsymbol{A}=(A_{ij})_{n\times n}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式矩阵，并称 $\mathrm{coef}\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^*$，即

$$\boldsymbol{A}^*=(\mathrm{coef}\boldsymbol{A})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

之前已证

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$$

同理可证

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$$

定理 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

证明.

□

该定理提供了求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的一种方法。

推论 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$（或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$），则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

证明.

□

该推论告诉我们，判断 $\boldsymbol{B}$ 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的逆，只需验证 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ 的一个等式成立即可。

定义 (奇异阵与非奇异阵) 当 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵。

注 可逆矩阵就是非奇异矩阵。

定理 可逆矩阵有如下运算规律:

1 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}.$$

2 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$k \neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}A^{-1}.$$

3 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵且均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

若 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 皆可逆，则

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1} = \boldsymbol{A}_m^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$$

4 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^T$ 亦可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T.$$

5 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}.$$

例　已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解

$$|\boldsymbol{A}| = ad - bc, \quad |\boldsymbol{A}^*| = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1 当 $|\boldsymbol{A}| = ad - bc = 0$ 时，逆阵不存在；

2 当 $|\boldsymbol{A}| = ad - bc \neq 0$ 时，

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例　求方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆阵。

解 $|\boldsymbol{A}|=2$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。计算 $\boldsymbol{A}$ 的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2 \\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2 \\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2 \end{array}$$

$$\mathrm{coef}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程

$$\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} - 10\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0},$$

证明：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}$ 都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明.

$$\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} - 10\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}) = 10\boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{10}(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I})\right] = \boldsymbol{I}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{10}(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I})$.

$$\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} - 10\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0} \Rightarrow (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}) = 6\boldsymbol{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}$$

故 $\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}$ 可逆，且$(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})^{-1} = \dfrac{1}{6}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})$.

□

例　证明：可逆对称矩阵的逆矩阵仍为对称矩阵；可逆反对称矩阵的逆矩阵仍为反对称矩阵。

例　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 为非零实矩阵，证明：若 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^T$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

证明.　欲证 $\boldsymbol{A}$ 可逆，只需证 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$。

由 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^T$ 及 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义可知，$\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 等于自身的代数余子式 A_{ij}。

再根据行列式的按行展开定义，有

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 为非零实矩阵，故 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆。 □

例　设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆，当 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 时，求 $\boldsymbol{B}$.

解

$$A^*B = A^{-1} + B \Rightarrow (A^* - I)B = A^{-1} \Rightarrow |A^* - I| \cdot |B| = |A^{-1}| \neq 0$$

故 B 与 $A^* - I$ 可逆。

$$B = (A^* - I)^{-1}A^{-1} = [A(A^* - I)]^{-1} = (AA^* - A)^{-1} = (|A|I - A)^{-1}.$$

其中

$$|A|I - A = \begin{pmatrix} 8 & & \\ & 8 & \\ & & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

易算得

$$B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例　设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵，证明：

(1). $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

(2). $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$

证明.

(1) 由 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \neq 0$ 可知 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且有 $(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|\boldsymbol{I}$。故

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB})^* &= |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \\ &= |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由 $(\boldsymbol{A}^*)^*\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{I}$，得

$$(\boldsymbol{A}^*)^*|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = |\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{I}$$

两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

□

例 设 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解

$$|\mathbf{P}| = 2, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}, \quad \boldsymbol{A}^2 = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}$$

$$\mathbf{\Lambda}^n = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

结论 令

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m.$$

(i) 若 $\boldsymbol{A}=\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^k=\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}$，从而

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A}) &= a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m \\ &= \mathbf{P}a_0\boldsymbol{I}\mathbf{P}^{-1}+\mathbf{P}a_1\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}+\cdots+\mathbf{P}a_m\boldsymbol{\Lambda}^m\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{P}^{-1}.\end{aligned}$$

(ii) 若 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为对角阵，则
$\boldsymbol{\Lambda}^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$，从而

$$\varphi(\boldsymbol{\Lambda})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{\Lambda}+\cdots+a_m\boldsymbol{\Lambda}^m$$

$$=a_0\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}+\cdots+a_m\Bigg($$

$$=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1)&&&\\&\varphi(\lambda_2)&&\\&&\ddots&\\&&&\varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

5. 矩阵的初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行；

(ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行；
(ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；
(iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，分别称为

(i) 对换变换 $r_i \longleftrightarrow r_j$；
(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$；
(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$。

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行；
(ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；
(iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，分别称为

(i) 对换变换 $r_i \longleftrightarrow r_j$；
(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$；
(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$。

对应的还有初等列变换。

矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行；
(ii) 以非零常数 k 乘矩阵的某一行；
(iii) 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行。

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，分别称为

(i) 对换变换 $r_i \longleftrightarrow r_j$；
(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$；
(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$。

对应的还有初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

矩阵的初等变换与初等矩阵

三种初等变换都是可逆的,

初等变换	逆变换
$r_i \longleftrightarrow r_j$	$r_i \longleftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	$r_i \div k$
$r_i + r_j \times k$	$r_i - r_j \times k$

表: 初等变换及其逆变换

矩阵的初等变换与初等矩阵

定义 (矩阵的等价)

(i) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价，记为 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$；

(ii) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价，记为 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$；

(iii) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。

矩阵的初等变换与初等矩阵

性质　矩阵的等价满足以下三条性质:

(i) **反身性**: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$;

(ii) **对称性**: 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$;

(iii) **传递性**: 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$。

矩阵的初等变换与初等矩阵

定义 (初等矩阵) 将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做一次初等变换所得的矩阵称为**初等矩阵**。对应于 3 类初等行、列变换，有 3 种类型的初等矩阵。

矩阵的初等变换与初等矩阵

以下介绍三种初等矩阵：

1. 初等对调矩阵；
2. 初等倍乘矩阵；
3. 初等倍加矩阵。

矩阵的初等变换与初等矩阵

1、对调 $\boldsymbol{I}$ 的两行或两列（初等对调矩阵）

$$
\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&& \\
&& 0 && \cdots && 1 && \\
&&& 1 &&&&& \\
&& \vdots && \ddots && \vdots && \\
&&&&& 1 &&& \\
&& 1 && \cdots && 0 && \\
&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
& \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\
\text{第 } i \text{ 列} \qquad \text{第 } j \text{ 列} &
\end{array}
$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

a、用 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 左乘 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}=\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

相当于 把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对调（$r_i \longleftrightarrow r_j$）.

矩阵的初等变换与初等矩阵

b、用 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad\quad \text{第 } i \text{ 列} \quad \text{第 } j \text{ 列} \qquad\qquad\quad \end{array}$$

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列对调（$c_i \leftrightarrow c_j$）.

矩阵的初等变换与初等矩阵

2、以非零常数 k 乘 $\boldsymbol{I}$ 的某行或某列（初等倍乘矩阵）

$$\boldsymbol{E}_i(k)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \text{第 } i \text{ 列} & \end{array}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

a、以 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

相当于以数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行（$r_i \times k$）；

矩阵的初等变换与初等矩阵

b、以 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_i(k)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \text{第 } i \text{ 列} \end{array}$$

相当于以数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列（$c_i \times k$）。

3、将非零常数 k 乘 $\boldsymbol{I}$ 的某行再加到另一行上（初等倍加矩阵）

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k)=\left(\begin{array}{ccccccc}1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&\cdots&k&& \\ &&&\ddots&\vdots&& \\ &&&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

a、以 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以数 k 加到第 i 行上（$r_i + r_j \times k$）；

矩阵的初等变换与初等矩阵

b、以 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j}+ka_{2i} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj}+ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第 i 列　　第 j 列

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以数 k 加到第 j 列上（$c_j+c_i\times k$）。

矩阵的初等变换与初等矩阵

定理　设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m \times n$ 矩阵，

- 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；
- 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

矩阵的初等变换与初等矩阵

练习 请自行补充以下变换的具体含义:

$\boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_i(k)$:

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k)$:

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$:

矩阵的初等变换与初等矩阵

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换 $r_i \longleftrightarrow r_j$ 的逆变换为其本身可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$$

(ii) 由变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \div k$可知

$$\boldsymbol{E}_i(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_i(k^{-1})$$

(iii) 由变换 $r_i + r_j \times k$ 的逆变换为 $r_i - r_j \times k$可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}(-k)$$

以上结论也可总结为

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{E}_{i}(k)\boldsymbol{E}_{i}(k^{-1})=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{E}_{ij}(-k)=\boldsymbol{I}.$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

例 设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \left(\begin{matrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \\ & & \end{matrix} \right.$$

求 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ 及 $(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

解

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 (续)　因

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

解 (续) 因

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

而

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

解 (续) 因

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

而

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

例　将三对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 分解成主对角元为 1 的下三角矩阵 $\mathbf{L}$ 和上三角阵 $\mathbf{U}$ 的乘积 $\boldsymbol{A}=\mathbf{LU}$（称为矩阵的 LU 分解）。

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_2}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

解 (续)　将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\boldsymbol{A} = \mathbf{U}$$

解 (续) 将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\boldsymbol{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U},$$

解 (续)　将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\boldsymbol{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U},$$

其中

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}$$

$$= \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1}$$

解 (续)　将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\boldsymbol{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{LU},$$

其中

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}$$

$$= \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解 (续)　将上面三个式子中左端的矩阵分别记为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\boldsymbol{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U},$$

其中

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}$$

$$= \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

定理　可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明. 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵，即

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \end{array}\right.$$

其中 $c_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$。 □

矩阵的初等变换与初等矩阵

续.

因此，对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \boldsymbol{A} = \mathbf{U}.$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

续.

因此，对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \boldsymbol{A} = \mathbf{U}.$$

当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而 $\mathbf{U}$ 必为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$. □

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论　可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

推论 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明. 由上述定理，必存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

推论 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明. 由上述定理，必存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$ 使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1)^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1},$$

亦即

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1.$$

□

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论　如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与同阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换，那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论　如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与同阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换，那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

注　该推论给出了求可逆矩阵的逆的一种有效方法，请大家熟练掌握。

矩阵的初等变换与初等矩阵

例 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解

$$\left(\, \boldsymbol{A} \,\middle|\, \boldsymbol{I} \,\right) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$
\left(\,\boldsymbol{A}\,\middle|\,\boldsymbol{I}\,\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

解

$$\left(A \mid I \right) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$
(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\left(\boldsymbol{A} \,\middle|\, \boldsymbol{I}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_1 + r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

例　已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\boldsymbol{ABA}^T = 2\boldsymbol{BA}^T + \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^T = \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{BA}^T = (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$$

解

$$\boldsymbol{ABA}^T = 2\boldsymbol{BA}^T + \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^T = \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{BA}^T = (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$$

故

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = [\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})]^{-1} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{A}^T)^{-1}$$

解

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$$

故

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = [\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})]^{-1} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{A}^T)^{-1}$$

而

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

解

$$ABA^T = 2BA^T + I \ \Rightarrow \ (A-2I)BA^T = I \ \Rightarrow \ BA^T = (A-2I)^{-1}$$

故

$$B = (A-2I)^{-1}(A^T)^{-1} = [A^T(A-2I)]^{-1} = (A^TA - 2A^T)^{-1}$$

而

$$A^TA - 2A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

推论　对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$，如果增广矩阵

$$(\boldsymbol{A},\ \mathbf{b}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{I},\mathbf{x}),$$

则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\mathbf{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{b}$ 为惟一解。

矩阵的初等变换与初等矩阵

例　设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ 与 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ 的解。

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$(\boldsymbol{A} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

解

$$(\boldsymbol{A}\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

解

$$(\boldsymbol{A}\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \div 5 \\ r_3 + 3r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

解

$$(\boldsymbol{A}\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\ r_2\div 5\\ r_3+3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

例　求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A} + \mathbf{X}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解　原方程等价于

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\mathbf{X}=\boldsymbol{A}$$

解 原方程等价于

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\mathbf{X}=\boldsymbol{A}$$

而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解 原方程等价于

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\mathbf{X}=\boldsymbol{A}$$

而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\ \ \boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

解 原方程等价于

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\mathbf{X}=\boldsymbol{A}$$

而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}\overset{\substack{r_3+4r_2\\ r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

解 原方程等价于

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\mathbf{X}=\boldsymbol{A}$$

而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}\overset{\substack{r_3+4r_2\\ r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\ r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

例　当 a, b 满足什么条件时，矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 不可逆。

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_1 \times (-2)]{r_2 + r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_1 \times (-2)]{r_2 + r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_2 \times (-1)]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换与初等矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_1 \times (-2)]{r_2 + r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_2 \times (-1)]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知 $\boldsymbol{A}$ 不可逆的条件是 $(a-1)b=0$。

6. 矩阵分块

矩阵分块

矩阵

$$\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

可记为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

定义 (矩阵的按行分块)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in})$$

矩阵分块

定义 (矩阵的按列分块)

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_2, & \cdots, \mathbf{b}_s \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{b}_j=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

当 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中非零元素都集中在主对角线附近，有时可分块成如下对角块矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 r_i 阶方阵 $(i = 1, 2, \cdots, m)$，且

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n.$$

矩阵分块

如

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的加法) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 为同型矩阵，则

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} + \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} + \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} + \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的数乘)

$$\lambda \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的乘法) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n \times s$ 矩阵,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st} \end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{A}_{i1}, \boldsymbol{A}_{i2}, \cdots, A_{is}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j}, \boldsymbol{B}_{2j}, \cdots, \boldsymbol{B}_{sj}$ 的行数, 则

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rt} \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}.$$

矩阵分块

例　用分块矩阵的乘法计算 $\boldsymbol{AB}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵分块

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:ccc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ \hdashline -1&2&1&0&0\\1&1&0&1&0\\-2&0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\mathbf{0}_{2\times3}\\ \boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{I}_3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc:cc}3&2&0&1&0\\1&3&0&0&1\\ \hdashline -1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{I}_2\\ -\boldsymbol{I}_3&\mathbf{0}_{3\times2}\end{pmatrix}$$

矩阵分块

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{I}_2\\ -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{I}_2\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{I}_3=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{rr}-2 & 4\\ 4 & 4\\ -6 & -4\end{array}\right.$$

矩阵分块

例　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 按列分块成 $1\times s$ 分块矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 看成 1×1 分块矩阵，则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_s)=(\boldsymbol{A}\mathbf{b}_1,\boldsymbol{A}\mathbf{b}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\mathbf{b}_s)$$

若已知 $\boldsymbol{AB}=0$，则显然

$$\boldsymbol{A}\mathbf{b}_j=0,\quad j=1,2,\cdots,s.$$

因此，$\boldsymbol{B}$ 的每一列 $\mathbf{b}_j$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=0$ 的解。

矩阵分块

例 设 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

矩阵分块

例　设 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明.　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把 $\boldsymbol{A}$ 用列向量表示为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$$

矩阵分块

例　设 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明.　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把 $\boldsymbol{A}$ 用列向量表示为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，故

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

例　设 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，证明 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$.

证明.　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把 $\boldsymbol{A}$ 用列向量表示为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，故

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j=0, \quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\boldsymbol{\alpha}_j^T\boldsymbol{\alpha}_j=0, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0 \Rightarrow a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0 \Rightarrow \boldsymbol{A}=\mathbf{0}.$$

矩阵分块

例　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 可以分块成同型对角块矩阵，即

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \boldsymbol{C}_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & & & \\ & \boldsymbol{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \boldsymbol{D}_m \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}_i$ 和 $\boldsymbol{D}_i$ 为同阶方阵（$i = 1, 2, \cdots, m$），则

$$\boldsymbol{CD} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{D}_1 & & & \\ & \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \boldsymbol{C}_m\boldsymbol{D}_m \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例　证明：若方阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的上三角阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为上三角阵。

矩阵分块

证明. 对阶数 n 用数学归纳法。

矩阵分块

证明. 对阶数 n 用数学归纳法。

1 当 $n = 1$ 时，$(a)^{-1} = (\frac{1}{a})$，结论成立。

矩阵分块

证明. 对阶数 n 用数学归纳法。

1 当 $n=1$ 时，$(a)^{-1}=(\frac{1}{a})$，结论成立。

2 假设命题对 $n-1$ 阶可逆上三角矩阵成立，考虑 n 阶情况，设

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为 $n-1$ 阶可逆上三角阵。

□

矩阵分块

续. 设 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

矩阵分块

续. 设 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\boldsymbol{\alpha\gamma} & a_{11}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha B}_1 \\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

矩阵分块

续. 于是

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{I}_1 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

续. 于是

$$A_1\gamma = 0 \;\Rightarrow\; \gamma = 0,$$

$$A_1B_1 = I_1 \;\Rightarrow\; B_1 = A_1^{-1}.$$

由归纳假设，B_1 为 $n-1$ 阶上三角矩阵，因此

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。 □

矩阵分块

定义 (分块矩阵的转置) 分块矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{B}_{lk})_{t\times s},$$

其中 $\boldsymbol{B}_{lk} = \boldsymbol{A}_{kl}$.

矩阵分块

定义 (分块矩阵的转置)　分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^T=(\boldsymbol{B}_{lk})_{t\times s},$$

其中 $\boldsymbol{B}_{lk}=\boldsymbol{A}_{kl}$.

例

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23}\end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^T & \boldsymbol{A}_{21}^T\\ \boldsymbol{A}_{12}^T & \boldsymbol{A}_{22}^T\\ \boldsymbol{A}_{13}^T & \boldsymbol{A}_{23}^T\end{pmatrix}$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的转置) 分块矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{B}_{lk})_{t\times s},$$

其中 $\boldsymbol{B}_{lk} = \boldsymbol{A}_{kl}$.

例

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^T & \boldsymbol{A}_{21}^T \\ \boldsymbol{A}_{12}^T & \boldsymbol{A}_{22}^T \\ \boldsymbol{A}_{13}^T & \boldsymbol{A}_{23}^T \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} \xlongequal{\text{按行分块}} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T & \mathbf{b}_2^T & \cdots & \mathbf{b}_m^T \end{pmatrix}$$

矩阵分块

定义 (可逆分块矩阵的逆矩阵) 对角块矩阵（准对角矩阵）

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix}$$

的行列式为 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_m|$，因此，$\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件为

$$|\boldsymbol{A}_i|\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

其逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m^{-1} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

分块矩阵的作用:

- 用分块矩阵求逆矩阵，可将高阶矩阵的求逆转化为低阶矩阵的求逆。
- 一个 2×2 的分块矩阵求逆，可以根据逆矩阵的定义，用解矩阵方程的方法解得。

矩阵分块

例　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 皆为可逆矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

矩阵分块

解　因 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{D}|\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

矩阵分块

解 因 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{D}| \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。设 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{BX} & \boldsymbol{BY} \\ \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY} + \boldsymbol{DT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

解 因 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{D}| \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。设 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{BX} & \boldsymbol{BY} \\ \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY} + \boldsymbol{DT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{BX} &= \boldsymbol{I} & &\Rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{-1} \\
\boldsymbol{BY} &= \boldsymbol{0} & &\Rightarrow \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DZ} &= \boldsymbol{0} & &\Rightarrow \boldsymbol{Z} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1} \\
\boldsymbol{CY} + \boldsymbol{DT} &= \boldsymbol{I} & &\Rightarrow \boldsymbol{T} = \boldsymbol{D}^{-1}
\end{aligned}$$

矩阵分块

解 因 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{D}| \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。设 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{BX} & \boldsymbol{BY} \\ \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY} + \boldsymbol{DT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{BX} = \boldsymbol{I} \quad & \Rightarrow \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{BY} = \boldsymbol{0} \quad & \Rightarrow \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DZ} = \boldsymbol{0} \quad & \Rightarrow \quad \boldsymbol{Z} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{CY} + \boldsymbol{DT} = \boldsymbol{I} \quad & \Rightarrow \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{D}^{-1} \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵) 对于分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

同样可以定义它的 3 类初等行变换与列变换，并相应地定义 3 类分块矩阵：

(i) 分块倍乘矩阵（C_1, C_2 为可逆阵）

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

(ii) 分块倍加矩阵

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ C_3 & I_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} I_m & C_4 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

(iii) 分块对换矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}$ 为方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆。证明：$\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

矩阵分块

解　构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式可知

$$|\boldsymbol{A}| = |\mathbf{P}_1\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_{11}| \cdot |\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}|$$

故 $\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 可逆。

矩阵分块

解 (续)

$$\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix} \xlongequal{\mathbf{Q} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

解 (续)

$$\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix} \xlongequal{\mathbf{Q} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & -\boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

矩阵分块

解 (续)

$$\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix} \xlongequal{\mathbf{Q} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & -\boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

解 (续)

$$\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix} \overset{\mathbf{Q} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & -\boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & -\boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例　设 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

矩阵分块

例　设 $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

证明.　构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例　设 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

证明.　构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例　设 $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

证明.　构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得

$$|\mathbf{Q}|=|\mathbf{P}_1\mathbf{Q}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

□

矩阵分块

例　设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶分块矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$$

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

总之有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得结论。 □