线性代数

向量空间与线性变换

张晓平

数学与统计学院
Email: xpzhang.math@whu.edu.cn
Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

1. $\mathbb{R}^n$的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

定义

设有序向量组$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\subset\mathbb{R}^n$，如果$B$线性无关，则$\mathbb{R}^n$中任一向量$\boldsymbol{\alpha}$均可由$B$线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

称B为$\mathbb{R}^n$的一组基，有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是向量$\boldsymbol{\alpha}$在基B下的坐标，记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\ \text{或}\ \boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

并称之为$\boldsymbol{\alpha}$的坐标向量。

注

- $\mathbb{R}^n$的基不是唯一的
- 基本向量组

$$\epsilon_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

称为$\mathbb{R}^n$的自然基或标准基。

- 本书对于向量及其坐标，采用列向量的形式，即

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

例1

设$\mathbb{R}^n$的两组基为自然基B_1和$B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$，其中

$$\begin{array}{lllllllll} \boldsymbol{\beta}_1 & =(& 1, & -1, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0)^T, \\ \boldsymbol{\beta}_2 & =(& 0, & 1, & -1, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0)^T, \\ & \vdots & & & & & & & & \\ \boldsymbol{\beta}_{n-1} & =(& 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 1, & -1)^T, \\ \boldsymbol{\beta}_n & =(& 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 1)^T. \end{array} \tag{1}$$

求向量组$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$分别在两组基下的坐标。

定理

设$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是$\mathbb{R}^n$的一组基，且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\eta}_2=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{\eta}_n=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases}$$

则$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$线性无关的充要条件是

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

设$\mathbb{R}^n$的两组基$B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$和$B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基B_1到新基B_2的过渡矩阵。

定理

设α在两组基$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$与$B_2=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$的坐标分别为

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad 和 \quad \mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

基B_1到B_2的过渡矩阵为$\mathbf{A}$，则

$$\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{x} \quad 或 \quad \mathbf{y}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

例2

已知$\mathbb{R}^3$的一组基为$B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T,$$

求自然基B_1到B_2的过渡矩阵。

例3

已知$\mathbb{R}^3$的两组基为$B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$和$B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$， 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^T.$$

(1) 求基B_1到B_2的过渡矩阵。

(2) 已知α在基B_1的坐标为$(1,-2,-1)^T$，求$\boldsymbol{\alpha}$在基B_2下的坐标。

定义

在$\mathbb{R}^n$中，对于$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$和$\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，规定$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

当$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$为列向量时，

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}.$$

内积的运算性质

对于$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$和$k \in \mathbb{R}$，

(i) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$，　等号成立当且仅当$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

内积的运算性质

对于$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$和$k \in \mathbb{R}$，

(i) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$， 等号成立当且仅当$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

定义（向量长度）

向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$$

定理（柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式）

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

定理（柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式）

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

证明： $\forall t \in \mathbb{R}$，有

$$(\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}) \ge 0$$

即

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})t^2 + 2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})t + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) \ge 0$$

此为关于t的二次函数，由一元二次方程理论可知

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 - 4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) \le 0$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \le (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$$

亦即

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

定义（向量之间的夹角）

向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$之间的夹角定义为

$$<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定义（向量之间的夹角）

向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$之间的夹角定义为

$$<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理

$$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}\iff(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$$

定义（向量之间的夹角）

向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$之间的夹角定义为

$$<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理

$$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}\iff(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$$

注意：零向量与任何向量的内积为零，从而零向量与任何向量正交。

定理（三角不等式）

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|.$$

定理（三角不等式）

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

证明:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
&\leq (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})|+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
&\leq \|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2
\end{aligned}$$

定理（三角不等式）

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

证明:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\ &\leq (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\ &\leq \|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2\end{aligned}$$

注意：当$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$时，$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$。

定义（欧几里得空间）

定义了内积运算的n维实向量空间，称为n维欧几里得空间（简称欧氏空间），仍记为$\mathbb{R}^n$。

定理

$\mathbb{R}^n$中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$是线性无关的。

定理

$\mathbb{R}^n$中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$是线性无关的。

证明： 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0,$$

则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$

即

$$k_j(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

由于$(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) > 0$，故

$$k_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关。

定义（标准正交基）

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$，若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$是$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基。

例1

设$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基，求$\mathbb{R}^n$中向量$\beta$在基$B$下的坐标。

例1

设$B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$是$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基，求$\mathbb{R}^n$中向量$\boldsymbol{\beta}$在基$B$下的坐标。

解:

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n \\
\Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_j)=x_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j) \\
\Longrightarrow\quad & x_j=\frac{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)}
\end{aligned}
$$

目标

从一组线性无关的向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$出发，构造一组标准正交向量组。

施密特（Schmidt）正交化过程

给定$\mathbb{R}^n$中的线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

施密特（Schmidt）正交化过程

给定$\mathbb{R}^n$中的线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定$\mathbb{R}^n$中的线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

施密特（Schmidt）正交化过程

给定$\mathbb{R}^n$中的线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定$\mathbb{R}^n$中的线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定$\mathbb{R}^n$中的线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\
\Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \\
\Longrightarrow \quad & k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}
\end{aligned}
$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定$\mathbb{R}^n$中的线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \\ \Longrightarrow\quad & k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

施密特（Schmidt）正交化过程

(3) 令$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$，

施密特（Schmidt）正交化过程

(3) 令$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$，

$$\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, \qquad (i = 1, 2)$$

施密特（Schmidt）正交化过程

(3) 令$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i = 1, 2) \end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化过程

(3) 令$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow\quad & k_{3i} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} && (i = 1, 2) \end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化过程

(3) 令$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow\ & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow\ & k_{3i} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} && (i = 1, 2) \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

施密特（Schmidt）正交化过程

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，

施密特（Schmidt）正交化过程

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + +k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

施密特（Schmidt）正交化过程

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + +k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + +k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + +k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + +k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)}$$

施密特（Schmidt）正交化过程

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + +k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1) \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1) \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1) \\ \Longrightarrow \quad & k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1}, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}\boldsymbol{\beta}_{j-1}.$$

施密特（Schmidt）正交化过程

(5) 单位化

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m \xrightarrow{\eta_j = \frac{\beta_j}{\|\beta_j\|}} \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$$

例

已知$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

例

已知$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解:

$$\boldsymbol{\beta}_1 \quad =\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,$$

例

已知$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\end{aligned}$$

例

已知$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&=(1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),
\end{aligned}$$

例

已知$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&= (1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2
\end{aligned}$$

例

已知$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\ \ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&=(1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\
&=(1,-1,1)^T-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T-\frac{2}{2}(1,-1,0)^T=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

定义

设$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，如果

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

则称$\mathbf{A}$为正交矩阵。

定理

$\mathbf{A}$为正交矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$的列向量组为一组标准正交基。

定理

$\mathbf{A}$为正交矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$的列向量组为一组标准正交基。

证明: 将$\mathbf{A}$按列分块为$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

定理

$\mathbf{A}$为正交矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$的列向量组为一组标准正交基。

证明： 将$\mathbf{A}$按列分块为$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

因此

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_i = 1, & i = 1, 2, \cdots, n \\ \boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j = 0, & j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$的列向量组为一组标准正交基。

定理

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$皆为n阶正交矩阵，则

(1) $|\mathbf{A}| = 1$ 或 -1

(2) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

(3) $\mathbf{A}^T$也是正交矩阵

(4) $\mathbf{AB}$也是正交矩阵

定理

若列向量$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$在$n$阶正交矩阵$\mathbf{A}$的作用下变换为$\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay} \in \mathbb{R}^n$，则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变，即

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$\|\mathbf{Ax}\| = \|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{Ay}\| = \|\mathbf{y}\|,$$

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{Ay} >=< \mathbf{x}, \mathbf{y} > .$$