向量空间与线性变换

▷▷

张晓平

武汉大学数学与统计学院

◁◁

2017 年 11 月 28 日

目录

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

定义 1　设有序向量组 $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\subset\mathbb{R}^n$，如果 B 线性无关，则 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

称 B 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标，记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

并称之为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标向量。

注 1

- $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的；
- 基本向量组
$$\boldsymbol{\epsilon}_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0), \quad i = 1,2,\cdots,n$$
称为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基或标准基；
- 本课程对于向量及其坐标，采用列向量的形式，即
$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

例 2.1　设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基为自然基 B_1 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$，其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= (\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= (\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 0)^T,\\
&\ \vdots\\
\boldsymbol{\beta}_{n-1} &= (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ -1)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_n &= (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 1)^T.
\end{aligned} \tag{1}$$

求向量组 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 分别在两组基下的坐标。

定理 1 设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\eta}_2=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{\eta}_n=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关的充要条件是

$$\det\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵。

定理 2 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad 和 \quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x} \quad 或 \quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

例 2.2　已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基为 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

例 2.3　已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^T.$$

(1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 α 在基 B_1 的坐标为 $(1,-2,-1)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

定义 2 在 $\mathbb{R}^n$ 中，对于 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为列向量时，

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}.$$

性质 1 (内积的运算性质) 对于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$ 和 $k\in\mathbb{R}$,

(i) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

性质 1 (内积的运算性质) 对于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$ 和 $k\in\mathbb{R}$,

(i) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

定义 3 (向量长度) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$$

定理 3 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|$$

定理 3 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

证明 $\forall t \in \mathbb{R}$，有

$$(\boldsymbol{\alpha} + t\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} + t\boldsymbol{\beta}) \geq 0$$

即

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})t^2 + 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})t + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$$

此为关于 t 的二次函数，由一元二次方程理论可知

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 - 4(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \leq 0$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 \leq (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})$$

亦即

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

定义 4 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定义 4 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$< \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} >= \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理 4

$$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \quad \Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

定义 4 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$< \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} > = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理 4

$$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \quad \Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

注意：零向量与任何向量的内积为零，从而零向量与任何向量正交。

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

证明

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) & =(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
& \leq(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})|+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
& \leq\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2
\end{aligned}$$

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

证明

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\ &\le (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\ &\le \|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2\end{aligned}$$

注意：当 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$ 时，$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$。

定义 5 (欧几里得空间) 定义了内积运算的 n 维实向量空间，称为 n 维欧几里得空间（简称欧氏空间），仍记为 $\mathbb{R}^n$。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

定理 6 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的。

定理 6 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的。

证明. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0,$$

则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$

即

$$k_j(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

由于 $(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) > 0$，故

$$k_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关。 □

定义 6 (标准正交基) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$，若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基。

例 3.1 设 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基，求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标。

例 3.1　设 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基，求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标。

解

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n \\
\Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_j)=x_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j) \\
\Longrightarrow\quad & x_j=\frac{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j).
\end{aligned}
$$

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

目标

从一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 出发，构造一组标准正交向量组。

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$,

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \\ \Longrightarrow\quad & k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$，

$$\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, \qquad (i = 1, 2)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, \qquad (i = 1, 2)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, \qquad (i = 1, 2)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i = 1,2) \\
\Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i = 1,2) \\
\Longrightarrow \quad & k_{3i} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} && (i = 1,2)
\end{aligned}
$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i = 1,2) \\
\Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i = 1,2) \\
\Longrightarrow\quad & k_{3i} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} && (i = 1,2)
\end{aligned}
$$

故

$$
\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2
$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{\alpha}_j+k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1+k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots++k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j\perp\boldsymbol{\beta}_i\quad(i=1,2,\cdots,j-1)$$

$$\Longrightarrow\quad(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,j-1)$$

$$\Longrightarrow\quad(\boldsymbol{\alpha}_j+k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,j-1)$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)}$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1}, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}\boldsymbol{\beta}_{j-1}.$$

施密特（Schmidt）正交化过程（续）

(5) 单位化

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m \xrightarrow{\eta_j = \frac{\boldsymbol{\beta}_j}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}} \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$$

例 3.2　已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

例 3.2　已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\boldsymbol{\beta}_1 \quad =\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,$$

例 3.2　已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\end{aligned}$$

例 3.2　已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&= (1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),
\end{aligned}$$

例 3.2 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&= (1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2
\end{aligned}$$

例 3.2 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&= (1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\
&= (1,-1,1)^T-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T-\frac{2}{2}(1,-1,0)^T=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

解 (续)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

定义 7 (正交矩阵) 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$，如果

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

定理 7

A为正交矩阵 $\Longleftrightarrow$ A的列向量组为一组标准正交基。

定理 7

$$A\text{为正交矩阵} \iff A\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

证明. 将 A 按列分块为 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$A^T A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

定理 7

$$\boldsymbol{A}\text{为正交矩阵} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

证明. 将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_i = 1, & i = 1, 2, \cdots, n \\ \boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j = 0, & j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

□

定理 8 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶正交矩阵，则

(1) $|\boldsymbol{A}| = 1$ 或 -1

(2) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$

(3) $\boldsymbol{A}^T$ 也是正交矩阵

(4) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵

定理 9 若列向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay}\in\mathbb{R}^n$，则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变，即

$$(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\|=\|\boldsymbol{x}\|,\quad \|\boldsymbol{Ay}\|=\|\boldsymbol{y}\|,$$

$$<\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ay}>=<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>.$$

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

定义 8 数域 F 上的线性空间 V 是一个非空集合，存在两种运算

- 加法（$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$）
- 数乘 ($\lambda \in \boldsymbol{\alpha}$)

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in V, \lambda \in F$，且 V 对两种运算封闭，并满足以下 8 条性质：

1. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$
2. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$
3. 存在 $\mathbf{0} \in V$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\mathbf{0}$ 称为 V 的零元素
4. 存在 $-\boldsymbol{\alpha} \in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，其中 $-\boldsymbol{\alpha}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素
5. $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$
6. $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$
7. $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$
8. $k(\alpha+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma} \in V, k,l \in F$。

- 当 F 是实数域时，V 称为实线性空间；
- 当 F 是复数域时，V 称为复线性空间。

- 当 F 是实数域时，V 称为实线性空间；
- 当 F 是复数域时，V 称为复线性空间。

线性空间 V 中的元素常称为向量，线性空间中的加法与数乘运算称为线性运算。

例 4.1

- 数域 F 上的全体多项式$F(x)$，对通常的多项式加法和数乘多项式的运算构成数域 F 上的线性空间，其中
  - 零元素是系数全为零的多项式（零多项式）
  - $f(x)$ 的负元素为 $(-1)f(x)$

例 4.1

- 数域 F 上的全体多项式 $F(x)$，对通常的多项式加法和数乘多项式的运算构成数域 F 上的线性空间，其中
  - 零元素是系数全为零的多项式（零多项式）
  - $f(x)$ 的负元素为 $(-1)f(x)$
- 如果只考虑次数小于 n 的实系数多项式，则它们连同零多项式一起构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，记为 $\mathbb{R}[x]_n$。

例 4.2

对矩阵的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间，记为$\mathbb{R}^{m\times n}$，其中

- 零元素是 $m\times n$ 零矩阵
- 任一元素 $\boldsymbol{A}$ 的负元素为 $-\boldsymbol{A}$

例 4.3

对于$[a,b]$ 上的全体实连续函数，加法与数乘运算构成实数域上的线性空间，记为$C[a,b]$。

对于(a,b) 上全体 k 阶导数连续的实函数，对同样的加法和数乘运算也构成实线性空间，记为$C^k(a,b)$。

对于数域 F 和给定的非空集合 V，若定义的加法和数乘运算不封闭，或者运算不能完全满足 8 条规则，则 V 对定义的运算就不能构成数域 F 上的线性空间。

例 4.4

- 全体 n 阶实矩阵对矩阵的加法和数乘运算不能构成复数域上的线性空间；
- 全体非零的三维实向量对向量的加法和数乘运算不能构成实线性空间。

由线性空间的性质可以得到线性空间的一些性质。

由线性空间的性质可以得到线性空间的一些性质。

性质 2 线性空间的零元素是唯一的。

由线性空间的性质可以得到线性空间的一些性质。

性质 2 线性空间的零元素是唯一的。

证明. 设 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 是线性空间的两个零元素，则

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2.$$

$\square$

性质 3 线性空间中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素是唯一的。

性质 3 线性空间中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素是唯一的。

证明. 设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的两个负元素，则

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}.$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{0} = \boldsymbol{\beta}_1 + (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0} + \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_2.$$

□

性质 3 线性空间中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素是唯一的。

证明. 设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的两个负元素，则

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}.$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{0} = \boldsymbol{\beta}_1 + (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0} + \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_2.$$

□

利用负元素，可定义减法：

$$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + (-\boldsymbol{\alpha}).$$

性质 4 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V;k,l\in F$，则

$$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\beta},\quad (k-l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\alpha}.$$

性质 4 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V; k, l \in F$，则

$$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} - l\boldsymbol{\beta}, \quad (k-l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} - l\boldsymbol{\alpha}.$$

证明.

$$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) + k\boldsymbol{\beta} = k[(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}] = k[\boldsymbol{\alpha}+((-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta})] = k(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}) = k\boldsymbol{\alpha}.$$

$$(k-l)\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha} = [(k-l)+l]\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha}.$$

□

性质 4 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V; k,l\in F$，则

$$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\beta},\quad (k-l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}-l\boldsymbol{\alpha}.$$

证明.

$$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+k\boldsymbol{\beta}=k[(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}]=k[\boldsymbol{\alpha}+((-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta})]=k(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0})=k\boldsymbol{\alpha}.$$

$$(k-l)\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}=[(k-l)+l]\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}.$$

$\square$

分别取 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},k=l,l=0$，可得

性质 5

- $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$
- $k(-\boldsymbol{\beta})=-(k\boldsymbol{\beta})$
- $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$
- $(-l)\boldsymbol{\alpha}=-(l\boldsymbol{\alpha})$.

性质 6 设 $\boldsymbol{\alpha} \in V, k \in F$，若 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，则 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

性质 6 设 $\boldsymbol{\alpha} \in V, k \in F$，若 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，则 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

证明. 设 $k \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha} = 1\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}(k\alpha) = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$\square$

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

对于数域 F 上的线性空间 V(记为 $V(F)$)，其子集合 W 关于 $V(F)$ 中的两种运算可能是封闭的，也可能是不封闭的。

考虑 $\mathbb{R}^3$ 的两个子集合

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}, \\ W_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 1\}. \end{aligned}$$

显然,

- W_1 是过原点的平面 $x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$ 上的全体向量;
- W_2 是不过原点的平面 $x_1 - x_2 + 5x_3 = 1$ 上的全体向量。

考虑 $\mathbb{R}^3$ 的两个子集合

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\},\\
W_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 5x_3 = 1\}.
\end{aligned}
$$

显然，

- W_1 是过原点的平面 $x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$ 上的全体向量；
- W_2 是不过原点的平面 $x_1 - x_2 + 5x_3 = 1$ 上的全体向量。

容易验证，W_1 关于向量的加法和数乘是封闭的，而 W_2 对这两种运算不封闭。

定义 9 (线性子空间) 设 $V(F)$ 是一个线性空间，W 是 V 的一个非空子集合。如果 W 对 $V(F)$ 中定义的线性运算也构成数域 F 上的一个线性空间，则称 W 为 $V(F)$ 上的一个线性子空间（简称子空间）。

定理 10　线性空间 $V(F)$ 的非空子集合 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

定理 10 线性空间 $V(F)$ 的非空子集合 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

证明.

- $\Rightarrow$ 显然成立。
- $\Leftarrow$ 只需验证 W 中的向量满足线性空间定义的 8 条规则。

定理 10 线性空间 $V(F)$ 的非空子集合 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 只需验证 W 中的向量满足线性空间定义的 8 条规则。

由于 W 是 V 的非空子集，故规则 (1),(2),(5),(6),(7),(8) 显然成立。

定理 10 线性空间 $V(F)$ 的非空子集合 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 只需验证 W 中的向量满足线性空间定义的 8 条规则。

由于 W 是 V 的非空子集，故规则 (1),(2),(5),(6),(7),(8) 显然成立。

因此只需证明

- $\mathbf{0} \in W$
- $\forall \boldsymbol{\alpha}, \ -\boldsymbol{\alpha} \in W$

定理 10 线性空间 $V(F)$ 的非空子集合 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 只需验证 W 中的向量满足线性空间定义的 8 条规则。

由于 W 是 V 的非空子集，故规则 (1),(2),(5),(6),(7),(8) 显然成立。

因此只需证明

- $\mathbf{0} \in W$
- $\forall \boldsymbol{\alpha}, \ -\boldsymbol{\alpha} \in W$

事实上，由于 W 对数乘封闭，即 $\forall \lambda \in F, \forall \boldsymbol{\alpha} \in W$，均有 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in W$。取 $\lambda = 0, -1$，即有

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \in W, \quad -\boldsymbol{\alpha} = (-1)\boldsymbol{\alpha} = \in W.$$

□

例 5.1 在线性空间 V 中，

- 由单个的零向量组成的子集合 $\{\mathbf{0}\}$ 是 V 的一个子空间，称为**零子空间**；
- V 本身也是 V 的一个子空间，

这两个子空间都称为 V 的**平凡子空间**，而 V 的其他子空间称为**非平凡子空间**。

例 5.2　设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集合

$$S=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

是 F^n 的一个子空间，称为齐次线性方程组的解空间 (也称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间，记作 $\mathcal{N}(A)$)。

例 5.2 设 $A \in F^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解集合

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}\}$$

是 F^n 的一个子空间，称为齐次线性方程组的解空间 (也称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间，记作 $\mathcal{N}(A)$)。

注：非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解集合不是 F^n 的子空间。

例 5.3 全体 n 阶实数量矩阵、实对角矩阵、实对称矩阵、实上（下）三角矩阵分别组成的集合，都是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间。

例 5.4 设 $\mathbb{R}^3$ 的子集合

$$V_1 = \{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}, V_2 = \{(1, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\},$$

则 V_1 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，V_2 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

例 5.4　设 $\mathbb{R}^3$ 的子集合

$$V_1 = \{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}, V_2 = \{(1, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\},$$

则 V_1 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，V_2 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

注：在 $\mathbb{R}^3$ 中，

- 凡是过原点的平面或直线上的全体向量组成的子集合都是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间；
- 凡是不过原点的平面或直线上的全体向量组成的子集合都不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

定理 11 设 V 是数域 F 上的线性空间，S 是 V 的一个非空子集合，则 S 中的一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W = \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\alpha}_i \in S,\ k_i \in F,\ i = 1, \cdots, m\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间。

定理 11　设 V 是数域 F 上的线性空间，S 是 V 的一个非空子集合，则 S 中的一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W = \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\alpha}_i \in S,\ k_i \in F,\ i = 1, \cdots, m\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间。

证明.　W 显然包含 S，设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$，则存在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in S$ 及 $k_1, \cdots, k_m, l_1, \cdots, l_n \in F$，使得

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m, \quad \boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_n\boldsymbol{\beta}_m$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m) + (l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_n\boldsymbol{\beta}_m) \in W$$

$\forall k \in F$，有

$$k\boldsymbol{\alpha} = k(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m) = kk_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + kk_m\boldsymbol{\alpha}_m \in W,$$

故 W 是 V 的一个子空间。

定理 11 设 V 是数域 F 上的线性空间，S 是 V 的一个非空子集合，则 S 中的一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W = \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\alpha}_i \in S,\ k_i \in F,\ i = 1, \cdots, m\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间。

证明. W 显然包含 S，设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$，则存在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in S$ 及 $k_1, \cdots, k_m, l_1, \cdots, l_n \in F$，使得

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m, \quad \boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_n\boldsymbol{\beta}_m$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m) + (l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_n\boldsymbol{\beta}_m) \in W$$

$\forall k \in F$，有

$$k\boldsymbol{\alpha} = k(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m) = kk_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + kk_m\boldsymbol{\alpha}_m \in W,$$

故 W 是 V 的一个子空间。

再设 W^* 是 V 中包含 S 的任一子空间，则

$$\forall \alpha = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \in W.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in S \subset W^*$，故必有 $\boldsymbol{\alpha} \in W^*$，从而有 $W \subset W^*$，因此 W 是 V 中包含 S 的最小子空间。 □

以上定理中的 W 称为由 V 的非空子集 S 生成的子空间。

特别地，当 S 为有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 时，记

$$W = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) \text{ 或} W = span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$$

为由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间。

以上定理中的 W 称为由 V 的非空子集 S 生成的子空间。

特别地，当 S 为有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 时，记

$$W = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) \text{ 或} W = span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$$

为由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间。

例 5.5

- $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解空间是由它的基础解系生成的子空间；
- $\mathbb{R}^3$ 中任一个过原点的平面上的全体向量所构成的子空间，是由该平面上任意两个线性无关的向量生成的子空间。

定理 12 设 W_1, W_2 是数域 F 上的线性空间 V 上的两个子空间，且

$$W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s),\ W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

则 $W_1 = W_2$ 的充分必要条件是两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价。

定理 12 设 W_1, W_2 是数域 F 上的线性空间 V 上的两个子空间，且

$$W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s),\ W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

则 $W_1 = W_2$ 的充分必要条件是两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

定理 12 设 W_1, W_2 是数域 F 上的线性空间 V 上的两个子空间，且

$$W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s),\ W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

则 $W_1 = W_2$ 的充分必要条件是两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 设 $\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \in W_1$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 也可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，即存在 $l_1, \cdots, l_t \in F$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_t\boldsymbol{\beta}_t \in W_2,$$

因此，$W_1 \subset W_2$。

定理 12 设 W_1, W_2 是数域 F 上的线性空间 V 上的两个子空间，且

$$W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s),\ W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),$$

则 $W_1 = W_2$ 的充分必要条件是两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价。

证明.

$\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 设 $\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \in W_1$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 也可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，即存在 $l_1, \cdots, l_t \in F$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_t\boldsymbol{\beta}_t \in W_2,$$

因此，$W_1 \subset W_2$。

同理可证 $W_2 \subset W_1$，从而 $W_1 = W_2$。

$\square$

定义 10 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间，则 V 的子集合

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in W_1 \text{ 且} \boldsymbol{\alpha} \in W_2\}, \\ W_1 + W_2 &= \{\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mid \boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1, \ \boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2\} \end{aligned}$$

分别称为两个子空间的**交**与**和**。

定义 10 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间，则 V 的子集合

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in W_1 \text{ 且} \boldsymbol{\alpha} \in W_2\}, \\ W_1 + W_2 &= \{\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mid \boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2\} \end{aligned}$$

分别称为两个子空间的**交**与**和**。

如果 $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$，则称 $W_1 + W_2$ 为直和，记为$W_1 \oplus W_2$。

定理 13 线性空间 $V(F)$ 的两个子空间 W_1, W_2 的交与和仍是 V 的子空间。

证明. 只证 $W_1 + W_2$ 是 V 的子空间，为此只需证 $W_1 + W_2$ 对 V 中的线性运算封闭。

定理 13 线性空间 $V(F)$ 的两个子空间 W_1, W_2 的交与和仍是 V 的子空间。

证明. 只证 $W_1 + W_2$ 是 V 的子空间，为此只需证 $W_1 + W_2$ 对 V 中的线性运算封闭。

设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W_1 + W_2$，即存在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \in W_1$；$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 \in W_2$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2,$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1) + (\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2) \in W_1 + W_2,$$

再设 $\lambda \in F$，则

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} = \lambda(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda\boldsymbol{\alpha}_2 \in W_1 + W_2.$$

故 $W_1 + W_2$ 也是 V 的一个子空间。 □

定义 11 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组生成的子空间，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）空间，记为 $\mathscr{R}(A)$（$\mathscr{R}(A^T)$）。

定义 11 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组生成的子空间，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）空间，记为 $\mathscr{R}(A)$（$\mathscr{R}(A^T)$）。

若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则

- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为
$$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in \mathbb{R}^m$$
- $\boldsymbol{A}$ 的行向量组为
$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^n$$

定义 11 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组生成的子空间，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）空间，记为 $\mathscr{R}(A)$（$\mathscr{R}(A^T)$）。

若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$，则

- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为
$$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in \mathbb{R}^m$$
- $\boldsymbol{A}$ 的行向量组为
$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^n$$

于是

- $\mathscr{R}(A) = L(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间；
- $\mathscr{R}(A^T) = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

$$
\begin{aligned}
& \text{非齐次线性方程组 } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \text{ 有解} \\
\Leftrightarrow \quad & \boldsymbol{b} \text{ 是 } \boldsymbol{A} \text{ 的列向量组的线性组合} \\
\Leftrightarrow \quad & \boldsymbol{b} \text{ 属于 } \boldsymbol{A} \text{ 的列空间，即 } \boldsymbol{b} \in \mathscr{R}(\boldsymbol{A})
\end{aligned}
$$

定义 12 设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$，$W$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。如果对于任意的 $\boldsymbol{\gamma} \in W$，均有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0},$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与子空间 W 正交，记作 $\boldsymbol{\alpha} \perp W$。

定义 12 设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$，$W$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。如果对于任意的 $\boldsymbol{\gamma} \in W$，均有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0},$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与子空间 W 正交，记作 $\boldsymbol{\alpha} \perp W$。

定义 13 设 V 和 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间。如果对于任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\beta} \in W$，均有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0},$$

则称 V 与 W 正交，记作 $V \perp W$。

例 5.6 对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，其每个解向量与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个行向量都正交，故解空间与 $\boldsymbol{A}$ 的行空间是正交的，即

$$\mathscr{N}(\boldsymbol{A}) \perp \mathscr{R}(A^T).$$

定理 14 $\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V,\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

定理 14 $\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V,\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

证明. 因 $\mathbf{0}$ 与任何子空间正交，故 W 是非空集合。设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$，于是 $\forall \boldsymbol{\gamma} \in W$，都有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0}, \quad (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0},$$

从而

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0}, \quad (k\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0} (k \in \mathbb{R}),$$

所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) \perp V, k\boldsymbol{\alpha}_1 \perp V$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \in W, k\boldsymbol{\alpha}_1 \in W$，故 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。 □

定义 14 $\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全体向量构成的子空间 W，称为 V 的**正交补**，记为 $W = V^\perp$。

定义 14　$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全体向量构成的子空间 W，称为 V 的**正交补**，记为 $W = V^{\perp}$。

例 5.7　$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间 $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$ 由与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量都正交的全部向量构成，故

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^{\perp}.$$

这是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的一个基本性质。

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标

2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间
   - 标准正交基
   - 施密特（Schmidt）正交化方法
   - 正交矩阵及其性质

3. 线性空间的定义及简单性质

4. 线性子空间

5. 线性空间的基、维数和向量的坐标

我们知道：F^n 中任意 n 个线性无关的向量都是一组基，任何一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可以由 F^n 的基线性表示，其系数按序排成的向量就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这组基下的坐标。

我们知道：F^n 中任意 n 个线性无关的向量都是一组基，任何一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可以由 F^n 的基线性表示，其系数按序排成的向量就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这组基下的坐标。

这里我们将在一般的线性空间 $V(F)$ 中讨论类似的问题，为此先要讨论 $V(F)$ 中元素（或称向量）的线性相关性。

例 6.1 证明：线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中元素 $f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = x^2, \cdots, f_{n-1} = x^{n-1}$ 是线性无关。

证明. 设 $k_0 f_0 + k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_{n-1} f_{n-1} = 0(x)$，即

$$k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_{n-1} x^{n-1} = 0(x),$$

其中 $0(x)$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的零元素，即零多项式。因此，要使 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 的线性组合等于零多项式，仅当 $k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 全为零才能成立，故 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 是线性无关的。 □

例 6.2　证明：线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中的元素

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是线性无关的。

例 6.2 证明：线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中的元素

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

是线性无关的。

证明. 设

$$k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=\mathbf{0}_{2\times 2}, \tag{2}$$

即

$$\begin{pmatrix}k_1+k_2+k_3+k_4&k_2+k_3+k_4\\k_3+k_4&k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=0,\\ k_2+k_3+k_4=0,\\ k_3+k_4=0,\\ k_4=0.\end{cases}$$

而此线性方程组只有零解，因此仅当 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ 时，(2)才成立，故 A_1,A_2,A_3,A_4 线性无关。 □

显然，在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，矩阵

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是也线性无关的，且 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任一矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a\boldsymbol{E}_{11}+b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}+d\boldsymbol{E}_{22}.$$

显然，在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，矩阵

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

是也线性无关的，且 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任一矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\boldsymbol{E}_{11}+b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}+d\boldsymbol{E}_{22}.$$

不难证明：在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任意 5 个元素 (二阶矩阵)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{Q}$ 是线性相关的，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 线性无关，则 $\boldsymbol{Q}$ 可由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 线性表出，且表示法唯一。

显然，在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，矩阵

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是也线性无关的，且 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任一矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a\boldsymbol{E}_{11}+b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}+d\boldsymbol{E}_{22}.$$

不难证明：在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中任意 5 个元素 (二阶矩阵)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{Q}$ 是线性相关的，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 线性无关，则 $\boldsymbol{Q}$ 可由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 线性表出，且表示法唯一。

由此可以发现 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的这些属性与 $\mathbb{R}^4$ 是类似的，我们可以把线性空间的这些属性抽象为基、维数与坐标的概念。

定义 15 如果线性空间 $V(F)$ 中存在线性无关的向量组 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，且任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 都可以由 B 线性表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称

- V 是 n 维线性空间（或者说 V 的维数为 n，记作 $dimV=n$）；
- B 是 V 的一个基；
- 有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 B 的坐标（向量），记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in F^n.$$

如果 $V(F)$ 中有任意多个线性无关的向量，则称 V 是无限维线性空间。

定义 15　如果线性空间 $V(F)$ 中存在线性无关的向量组 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，且任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 都可以由 B 线性表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称

- V 是 n 维线性空间（或者说V 的维数为 n，记作 $dimV=n$）；
- B 是 V 的一个基；
- 有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 B 的坐标（向量），记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in F^n.$$

如果 $V(F)$ 中有任意多个线性无关的向量，则称 V 是无限维线性空间。

例 6.3　在 $F[x]$ 中，$1,x,x^2,\cdots,x^n(n$ 为任意正整数) 是线性无关的，故 $F[x]$ 是无限维空间。

我们只讨论有限维线性空间。

在 n 维线性空间 V 中，任意 $n+1$ 个元素 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 都可以由 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，而 n 维线性空间中任意 $n+1$ 个元素都是线性相关的，故 n 维线性空间 V 中，任何 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

在 n 维线性空间 V 中，任意 $n+1$ 个元素 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 都可以由 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，而 n 维线性空间中任意 $n+1$ 个元素都是线性相关的，故 n 维线性空间 V 中，任何 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

例 6.4

- $F[x]_n$ 是 n 维线性空间，$\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\}$ 是它的一组基；

在 n 维线性空间 V 中，任意 $n+1$ 个元素 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 都可以由 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，而 n 维线性空间中任意 $n+1$ 个元素都是线性相关的，故 n 维线性空间 V 中，任何 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

例 6.4

- $F[x]_n$ 是 n 维线性空间，$\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ 是它的一组基；
- $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 是 4 维线性空间，$\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 是它的一组基；

在 n 维线性空间 V 中，任意 $n+1$ 个元素 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ 都可以由 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，而 n 维线性空间中任意 $n+1$ 个元素都是线性相关的，故 n 维线性空间 V 中，任何 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

例 6.4

- $F[x]_n$ 是 n 维线性空间，$\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\}$ 是它的一组基；
- $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 是 4 维线性空间，$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 是它的一组基；
- $F^{m\times n}$ 是 $m\times n$ 维线性空间，$\{\boldsymbol{E}_{ij}\}_{i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n}$ 是它的一组基。

在线性空间 V 中，由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 的维数等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 的基。

例 6.5　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})$ 和行空间 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}^T)$ 的维数都等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩。V 的零子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 的维数为零。

$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系是其解空间 $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$ 的基，如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$，则解空间 $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$ 的维数为 $n-r$，所以

$$\dim(\mathscr{R}(\boldsymbol{A}^T))+\dim(\mathcal{N}(\boldsymbol{A}))=n.$$

定理 15 设 V 是 n 维线性空间，W 是 V 的 m 维子空间，且 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 W 中的一组基，则 B_1 可以扩充为 V 的基，即**在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基**.

定理 15 设 V 是 n 维线性空间，W 是 V 的 m 维子空间，且 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 W 中的一组基，则 B_1 可以扩充为 V 的基，即在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基.

证明.

- 若 $m=n$，B_1 就是 V 的基。

定理 15 设 V 是 n 维线性空间，W 是 V 的 m 维子空间，且 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 W 中的一组基，则 B_1 可以扩充为 V 的基，即在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基.

证明.

- 若 $m=n$，B_1 就是 V 的基。
- 若 $m<n$，则必存在 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1}\in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 线性无关，否则 $\dim V=m$，这与 $\dim V=m$ 矛盾。

定理 15 设 V 是 n 维线性空间，W 是 V 的 m 维子空间，且 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 W 中的一组基，则 B_1 可以扩充为 V 的基，即在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基.

证明.

- 若 $m=n$，B_1 就是 V 的基。
- 若 $m<n$，则必存在 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1}\in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 线性无关，否则 $\dim V=m$，这与 $\dim V=m$ 矛盾。
  - 若 $n=m+1$，则定理得证；

定理 15 设 V 是 n 维线性空间，W 是 V 的 m 维子空间，且 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 W 中的一组基，则 B_1 可以扩充为 V 的基，即在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基.

证明.

- 若 $m=n$，B_1 就是 V 的基。
- 若 $m<n$，则必存在 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1} \in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m,, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 线性无关，否则 $\dim V = m$，这与 $\dim V = m$ 矛盾。
    - 若 $n = m+1$，则定理得证；
    - 若 $n > m+1$，重复以上步骤，必存在 $\boldsymbol{\alpha}_{m+2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in V$，使得 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m,, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性无关，即 V 的基。

$\square$

定理 16 (子空间的维数公式) 设 W_1, W_2 是线性空间 $V(F)$ 的子空间，则

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).$$

定理 16 (子空间的维数公式) 设 W_1, W_2 是线性空间 $V(F)$ 的子空间，则

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).$$

证明: 设 $\dim W_1 = s, \dim W_2 = t, \dim(W_1 \cap W_2) = r$，则

$$W_1 \cap W_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r),$$
$$W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{s-r}),$$
$$W_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{t-r}).$$

于是

$$W_1 + W_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{s-r}, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{t-r}).$$

只需证明 $\dim(W_1 + W_2) = s + t - r$，即上述生成 $W_1 + W_2$ 的 $s + t - r$ 个向量是线性无关的。

为此，设

$$a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{\alpha}_r+b_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+b_{s-r}\boldsymbol{\beta}_{s-r}+c_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+c_{t-r}\boldsymbol{\gamma}_{t-r}=\mathbf{0}, \tag{3}$$

于是

$$a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{\alpha}_r+b_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+b_{s-r}\boldsymbol{\beta}_{s-r}=-c_1\boldsymbol{\gamma}_1-\cdots-c_{t-r}\boldsymbol{\gamma}_{t-r}. \tag{4}$$

因上式两端的向量分别属于 W_1 和 W_2，故它们都属于 $W_1\cap W_2$，因此

$$-c_1\boldsymbol{\gamma}_1-\cdots-c_{t-r}\boldsymbol{\gamma}_{t-r}=d_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+d_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

即

$$d_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+d_r\boldsymbol{\alpha}_r+c_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+c_{t-r}\boldsymbol{\gamma}_{t-r}=\mathbf{0},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t-r}$ 为 W_2 的基，故其系数全为零。将其代入(4)右端，又得(4)的左端系数全为零，故(3)中的向量组线性无关。