线性代数

线性方程组

张晓平

数学与统计学院
Email: xpzhang.math@whu.edu.cn
Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

考察三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

我们用向量工具给出其几何解释。

考察三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

我们用向量工具给出其几何解释。 记

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以及

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} = a_{i1}\mathbf{i} + a_{i2}\mathbf{j} + a_{i3}\mathbf{k}$$

该线性方程组的解可记为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$$

向量的垂直

两个向量$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$，$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$垂直的充分必要条件是

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0.$$

向量的垂直

两个向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$垂直的充分必要条件是

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0.$$

由以上方程组可看出，解向量$\mathbf{x}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都垂直。

向量的垂直

两个向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$垂直的充分必要条件是

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0.$$

由以上方程组可看出，解向量$\mathbf{x}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都垂直。故

(1) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$不共面，只有零向量与三者都垂直，即线性方程组(1)只有零解；

向量的垂直

两个向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$垂直的充分必要条件是

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0.$$

由以上方程组可看出，解向量$\mathbf{x}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都垂直。故

(1) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$不共面，只有零向量与三者都垂直，即线性方程组(1)只有零解；

(2) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$共面但不共线，则与该平面垂直的向量都是线性方程组(1)的解， 故(1)有无穷多个彼此平行的解向量；

向量的垂直

两个向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$垂直的充分必要条件是

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0.$$

由以上方程组可看出，解向量$\mathbf{x}$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都垂直。故

(1) 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不共面，只有零向量与三者都垂直，即线性方程组(1)只有零解；

(2) 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$共面但不共线，则与该平面垂直的向量都是线性方程组(1)的解，故(1)有无穷多个彼此平行的解向量；

(3) 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$共线，则过原点且与该直线垂直的平面上的全体向量都是(1)的解向量，此时任一解向量均可表示为

$$\mathbf{x}=k_1\mathbf{x}^{(1)}+k_2\mathbf{x}^{(2)},$$

其中$\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(1)}$为(1)的某两个不共线的非零解向量，$k_1,k_2$为任意常数。

n维向量

数域F上的n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$构成的有序数组称为数域F上的一个n维向量，记为

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

其中a_i称为α的第i个分量。

n维向量

数域F上的n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$构成的有序数组称为数域F上的一个n维向量，记为

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

其中a_i称为α的第i个分量。

- 形如(2)的向量称为**行向量**；
- 形如

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

的向量称为**列向量**。

n维向量

数域F上的n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$构成的有序数组称为数域F上的一个n维向量，记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

其中a_i称为$\boldsymbol{\alpha}$的第i个分量。

- 形如(2)的向量称为行向量；
- 形如

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

的向量称为列向量。

数域F上全体n维向量组成的集合，记作F^n。

n维向量

数域F上的n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$构成的有序数组称为数域F上的一个n维向量，记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

其中a_i称为$\boldsymbol{\alpha}$的第i个分量。

- 形如(2)的向量称为行向量；
- 形如

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

的向量称为列向量。

数域F上全体n维向量组成的集合，记作F^n。设$\boldsymbol{\alpha} \in F^n$，则

- 当F取为$\mathbb{R}$时，$\boldsymbol{\alpha}$为实向量；
- 当F取为$\mathbb{C}$时，$\boldsymbol{\alpha}$为复向量。

向量运算

设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in F^n$，$k\in F$，定义

(i) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$当且仅当$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$;

(ii) 向量加法

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

(iii) 向量数乘

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

向量运算

设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in F^n$，$k\in F$，定义

(i) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$当且仅当$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$；

(ii) 向量加法

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

(iii) 向量数乘

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

- 在(iii)中取$k=-1$，得

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

右端的向量称为$\boldsymbol{\alpha}$的负向量，记为$-\boldsymbol{\alpha}$.

- 向量的减法定义为

$$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\alpha})$$

向量的8条运算规则

设$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in F^n, 1, k, l \in F$，则

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$

(3) 对任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，有$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$

(4) 对任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，存在负向量$-\boldsymbol{\alpha}$，使得$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

向量的8条运算规则

设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in F^n,1,k,l\in F$，则

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$

(3) 对任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，有$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$

(4) 对任一向量$\boldsymbol{\alpha}$，存在负向量$-\boldsymbol{\alpha}$，使得$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

向量空间

数域F上的n维向量，在其中定义了上述加法与数乘运算，就称之为F上的n维向量空间，仍记为F^n。当$F=\mathbb{R}$时，叫做n维实向量空间，记作$\mathbb{R}^n$。

定义(线性表示)

设$\boldsymbol{\alpha}_i \in F^n, k_i \in F(i = 1, 2, \cdots, m)$，则向量

$$\sum_{i=1}^{m} k_i\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$在数域$F$上的一个线性组合。

如果记

$$\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{m} k_i\boldsymbol{\alpha}_i,$$

则称$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示（或线性表出）。

设有线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵。记

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\mathbf{b}$$

于是线性方程组可等价的表述为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{b}$$

注

向量$\mathbf{b}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，等价于方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{b}$$

有解。

定义(线性相关与线性无关)

若对m个向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$，有$m$个不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \tag{3}$$

成立，则称$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关；否则，称$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关。

定义(线性相关与线性无关)

若对m个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in F^n$，有$m$个不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0} \tag{3}$$

成立，则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关；否则，称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关。

注

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，指的是

- 没有不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使(3)成立
- 只有当$k_1, k_2, \cdots, k_m$全为零时，才使(3)成立
- 若(3)成立，则$k_1, k_2, \cdots, k_m$必须全为零

定理3.1.1

- 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，等价于齐次方程组
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$
有非零解。
- 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，等价于齐次方程组
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$
只有零解。

对于只含有一个向量$\boldsymbol{\alpha}$的向量组，若存在不为零的数k使得

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

则

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

对于只含有一个向量$\boldsymbol{\alpha}$的向量组，若存在不为零的数k使得

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

则

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

若$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，要使

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

必须$k = 0$.

对于只含有一个向量$\boldsymbol{\alpha}$的向量组，若存在不为零的数k使得

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

则

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

若$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，要使

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

必须$k = 0$.

小结

- 当$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$时，向量组$\boldsymbol{\alpha}$线性相关
- 当$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$时，向量组$\boldsymbol{\alpha}$线性无关

定理3.1.2

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

定理3.1.2

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

证明: $(\Rightarrow)$　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关，则必存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

定理3.1.2

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

证明: $(\Rightarrow)$　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关，则必存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

不妨设$k_1 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m\text{fi}$$

必要性得证。

定理3.1.2

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

证明: $(\Rightarrow)$　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关，则必存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

不妨设$k_1 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m \text{fi}$$

必要性得证。

$(\Leftarrow)$　不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

定理3.1.2

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

证明: $(\Rightarrow)$　若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关，则必存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

不妨设$k_1 \neq 0$，则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m fi$$

必要性得证。

$(\Leftarrow)$　不妨设α_1可由$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示，即

$$\alpha_1 = l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m$$

于是有

$$\alpha_1 - l_2\alpha_2 - \cdots - l_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

定理3.1.2

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出。

证明: $(\Rightarrow)$　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$线性相关，则必存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

不妨设$k_1 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m\text{fi}$$

必要性得证。

$(\Leftarrow)$　不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - l_2\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - l_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

显然$1, -l_2, \cdots, -l_m$不全为零，故$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关。

证明线性无关的方法

证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的基本方法为：

说明齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

只有零解。

证明线性无关的方法

证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的基本方法为：

说明齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

只有零解。

也常常表述为：设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

然后说明上式成立，只能有唯一选择：

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0.$$

例1

设n维向量$\mathbf{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$，则$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$线性无关。

例1

设n维向量$\mathbf{e}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，则$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$线性无关。

解： 设存在$k_1,k_2,\cdots,k_n$使得

$$k_1\mathbf{e}_1+k_2\mathbf{e}_2+\cdots+k_n\mathbf{e}_n=\mathbf{0},$$

即

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\mathbf{0},$$

则必有$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$线性无关。

例1

设n维向量$\mathbf{e}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，则$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$线性无关。

解: 设存在$k_1,k_2,\cdots,k_n$使得

$$k_1\mathbf{e}_1+k_2\mathbf{e}_2+\cdots+k_n\mathbf{e}_n=\mathbf{0},$$

即

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\mathbf{0},$$

则必有$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$线性无关。

注

n维向量$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$称为基本向量。$F^n$中任何向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$都可以由$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\cdots+a_n\mathbf{e}_n.$$

例2

包含零向量的向量组是线性相关的。

例2

包含零向量的向量组是线性相关的。

解: 设该向量组为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$。则存在$m$个不全为零的数$1, 0, \cdots, 0$使得

$$1\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

故该向量组线性相关。

例3

如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关。

例3

如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关。

证明: 不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r < m)$线性相关，则存在$r$个不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_r$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

从而有m个不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + 0\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

故$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关。

注

- 如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，则其中任一部分向量组也线性无关。
- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

注

- 如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，则其中任一部分向量组也线性无关。
- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

注

该定理不能理解为：线性相关的向量组中，每一个向量都能由其余向量线性表示。

注

- 如果$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，则其中任一部分向量组也线性无关。
- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

注

该定理不能理解为：线性相关的向量组中，每一个向量都能由其余向量线性表示。

如$\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1)$线性相关(因为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关)，但$\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示。

重要结论

对于齐次线性方程组，如果

$$\text{未知量个数} \quad > \quad \text{方程个数},$$

则它必有无穷多解，从而必有非零解。

定理3.1.3

任意$n+1$个n维向量都是线性相关的。

定理3.1.3

任意$n+1$个n维向量都是线性相关的。

证明: 对向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \in F^n$，设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n + x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0},$$

注意到此齐次线性方程组中，未知量个数为$n+1$，而方程个数为n，故方程组一定有无穷多个解，从而必有非零解。得证$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$线性相关。

定理3.1.3

任意$n+1$个n维向量都是线性相关的。

证明: 对向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\in F^n$，设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n+x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\mathbf{0},$$

注意到此齐次线性方程组中，未知量个数为$n+1$，而方程个数为n，故方程组一定有无穷多个解，从而必有非零解。得证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$线性相关。

注

- 向量个数 $>$ 向量维数 $\Rightarrow$ 向量组必线性相关。

定理3.1.3

任意$n+1$个n维向量都是线性相关的。

证明： 对向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \in F^n$，设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n + x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0},$$

注意到此齐次线性方程组中，未知量个数为$n+1$，而方程个数为n，故方程组一定有无穷多个解，从而必有非零解。得证$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$线性相关。

注

- 向量个数 $>$ 向量维数 $\Rightarrow$ 向量组必线性相关。
- 在$\mathbb{R}^n$中，任意一组线性无关的向量最多只能含n个向量。

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故存在不全为零的数$k, k_1, k_2, \cdots, k_r$使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

其中$k \neq 0$

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故存在不全为零的数$k, k_1, k_2, \cdots, k_r$使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

其中$k \neq 0$(若$k = 0$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关可知$k_1, k_2, \cdots, k_r$全为零，这与$k, k_1, k_2, \cdots, k_r$不全为零矛盾)。

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故存在不全为零的数$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

其中$k\neq 0$(若$k=0$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关可知$k_1,k_2,\cdots,k_r$全为零，这与$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零矛盾)。于是$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故存在不全为零的数$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

其中$k\neq 0$(若$k=0$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关可知$k_1,k_2,\cdots,k_r$全为零，这与$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零矛盾)。于是$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

再证唯一性　设有两种表示法

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r,\quad \boldsymbol{\beta}=h_1\boldsymbol{\alpha}_1+h_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+h_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

定理3.1.4

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，而$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，故存在不全为零的数$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$使得

$$k\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\mathbf{0},$$

其中$k\neq 0$(若$k=0$，则由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关可知$k_1,k_2,\cdots,k_r$全为零，这与$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零矛盾)。于是$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示为

$$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\alpha_r.$$

再证唯一性　设有两种表示法

$$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_r\alpha_r,\quad \beta=h_1\alpha_1+h_2\alpha_2+\cdots+h_r\alpha_r.$$

于是

$$(l_1-h_1)\alpha_1+(l_2-h_2)\alpha_2+\cdots+(l_r-h_r)\alpha_1=\mathbf{0},$$

定理3.1.4

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，而$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，并且表示法惟一。

证明: 因为$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，故存在不全为零的数$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

其中$k\neq 0$(若$k=0$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关可知$k_1,k_2,\cdots,k_r$全为零，这与$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零矛盾)。于是$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

再证唯一性　设有两种表示法

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r,\quad \boldsymbol{\beta}=h_1\boldsymbol{\alpha}_1+h_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+h_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

于是

$$(l_1-h_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2-h_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_r-h_r)\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0},$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关可知 $l_i-h_i=0$,　即$l_i=h_i$.

故$\boldsymbol{\beta}$由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示的表示法惟一。

推论

如果F^n中的n个向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，则$F^n$中的任一向量$\boldsymbol{\alpha}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，且表示法惟一。

推论

如果F^n中的n个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关，则$F^n$中的任一向量$\alpha$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示，且表示法惟一。

证明： 由"任意$n+1$个n维向量线性相关"知，$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关，由前述定理可得结论成立。

例4

设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是否线性相关?

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$可否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示? 如能表示求出其表示式。

例4

设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是否线性相关?

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$可否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示? 如能表示求出其表示式。

解:

(1) 考察 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 由$|\mathbf{A}|=7$可知$\mathbf{A}$可逆，

故$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解，从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关。

例4

设$\alpha_1=(1,-1,1),\alpha_2=(1,2,0),\alpha_3=(1,0,3),\alpha_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关?

(2) α_4可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示? 如能表示求出其表示式。

解:

(1) 考察 $\mathbf{A}=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 由$|\mathbf{A}|=7$可知$\mathbf{A}$可逆，故$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

(2) 根据推论，α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法惟一。

例4

设$\alpha_1 = (1, -1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 0), \alpha_3 = (1, 0, 3), \alpha_4 = (2, -3, 7)$. 问：

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是否线性相关?

(2) α_4可否由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示? 如能表示求出其表示式。

解:

(1) 考察 $\mathbf{A} = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 由$|\mathbf{A}| = 7$可知$\mathbf{A}$可逆，故$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$只有零解，从而$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关。

(2) 根据推论，α_4可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，且表示法惟一。 设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \alpha_4$$

例4

设$\alpha_1=(1,-1,1),\alpha_2=(1,2,0),\alpha_3=(1,0,3),\alpha_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关?

(2) α_4可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示? 如能表示求出其表示式。

解:

(1) 考察 $\mathbf{A}=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 　由$|\mathbf{A}|=7$可知$\mathbf{A}$可逆，

故$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

(2) 根据推论，α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法惟一。 设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4\Rightarrow x_1\alpha_1^T+x_2\alpha_2^T+x_3\alpha_3^T=\alpha_4^T$$

即

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T&\alpha_2^T&\alpha_3^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$$

例4

设$\alpha_1=(1,-1,1),\alpha_2=(1,2,0),\alpha_3=(1,0,3),\alpha_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关?

(2) α_4可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示? 如能表示求出其表示式。

解:

(1) 考察 $\mathbf{A}=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 由$|\mathbf{A}|=7$可知$\mathbf{A}$可逆，

故$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

(2) 根据推论，α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法惟一。设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4\Rightarrow x_1\alpha_1^T+x_2\alpha_2^T+x_3\alpha_3^T=\alpha_4^T$$

即

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T & \alpha_2^T & \alpha_3^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$$

例5

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$线性相关。

例5

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$线性相关。

解: 设有数x_1, x_2, x_3使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0} \tag{4}$$

例5

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$线性相关。

解: 设有数x_1, x_2, x_3使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0} \tag{4}$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2) + x_3(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$$

亦即

$$(x_1 + x_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_1 - 2x_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (x_1 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

例5

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$线性相关。

解: 设有数x_1, x_2, x_3使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0} \tag{4}$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2) + x_3(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$$

亦即

$$(x_1 + x_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_1 - 2x_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (x_1 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，故

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

求解该方程组可得非零解$(-1, -1, 2)$。因此，有不全为零的数x_1, x_2, x_3使得(4)成立，从而$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$线性相关。

定理3.1.5

(1) 如果一组n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，那么把这些向量各任意添加$m$个分量所得的向量($n+m$维)组$\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$也线性无关。

(2) 如果$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，那么它们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量也线性相关。

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性相关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性相关}$$

证明： 两者互为逆否命题，证明第一个即可。

证明： 两者互为逆否命题，证明第一个即可。

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

只有零解。

证明: 两者互为逆否命题，证明第一个即可。

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

只有零解。设$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^T$，$i=1,2,\cdots,s$，即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & = & 0, \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ns}x_s & = & 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

只有零解。

不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}, a_{n+1,i})^T, \quad ii = 1, 2, \cdots, s.$$

不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}, a_{n+1,i})^T, \quad ii = 1, 2, \cdots, s.$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s^* = \mathbf{0}$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & = & 0, \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ns}x_s & = & 0, \\ a_{n+1,1}x_1 & + & a_{n+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n+1,s}x_s & = & 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

方程组(6)的解全是方程组(5)的解。

不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\alpha_i^* = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}, a_{n+1,i})^T, \quad ii = 1, 2, \cdots, s.$$

设

$$x_1\alpha_1^* + x_2\alpha_2^* + \cdots + x_s\alpha_s^* = \mathbf{0}$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & = & 0, \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ns}x_s & = & 0, \\ a_{n+1,1}x_1 & + & a_{n+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n+1,s}x_s & = & 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

方程组(6)的解全是方程组(5)的解。

而方程组(5)只有零解，故方程组(6)也只有零解。故向量组$\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_s^*$线性无关。

注

设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

注

设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

证明: 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，把这些向量各任意添加$m$个全为零的分量，所得到的新向量组记为$\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$。

注

设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

证明: 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，把这些向量各任意添加$m$个全为零的分量，所得到的新向量组记为$\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$。此时方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

与方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s^* = \mathbf{0}$$

完全相同。所以新向量组$\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$也线性相关。

小结

对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。

小结

对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。

如

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ 0 \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}$$

线性相关性一致。

例6

考察以下向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\5\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\\6\\9\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\\3\end{pmatrix}$$

例6

考察以下向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\5\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\\6\\9\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\\3\end{pmatrix}$$

解: 去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

线性无关，故原向量组线性无关。

向量组的秩

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$中，若

- 存在r个线性无关的向量，
- 且其中任一向量可由这r个线性无关的向量线性表示，

则数r称为向量组的秩(rank)，记作

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$$

或

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$$

向量组的秩

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中，若

- 存在r个线性无关的向量，
- 且其中任一向量可由这r个线性无关的向量线性表示,

则数r称为向量组的秩(rank)，记作

$$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r$$

或

$$\mathrm{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r$$

- 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，则$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = s$；
- 只含零向量的向量组的秩为零。
- 只含一个非零向量的向量组的秩为1。

定义

若向量组B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$中每个向量可由向量组$A$：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，就称向量组$B$：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由向量组$A$：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示。

定义

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$中每个向量可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，就称向量组$B$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

定义

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$中每个向量可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，就称向量组$B$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

向量组的线性表示，具备

- 自反性

  向量组自己可以由自己线性表示

定义

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$中每个向量可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，就称向量组$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

向量组的线性表示，具备

- 自反性

  向量组自己可以由自己线性表示

- 传递性

  设向量组A可以被向量组B线性表示，向量组B又可以被向量组C线性表示，则向量组A可以被向量组C线性表示

定义

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$中每个向量可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，就称向量组$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

向量组的线性表示，具备

- 自反性

  向量组自己可以由自己线性表示

- 传递性

  设向量组A可以被向量组B线性表示，向量组B又可以被向量组C线性表示，则向量组A可以被向量组C线性表示

- 不具备对称性

  向量组A可以被向量组B线性表示，不一定有向量组B又可以被向量组A线性表示。

定义

若向量组B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$中每个向量可由向量组$A$：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，就称向量组$B$：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由向量组$A$：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。

向量组的线性表示，具备

- 自反性

  向量组自己可以由自己线性表示

- 传递性

  设向量组A可以被向量组B线性表示，向量组B又可以被向量组C线性表示，则向量组A可以被向量组C线性表示

- 不具备对称性

  向量组A可以被向量组B线性表示，不一定有向量组B又可以被向量组A线性表示。

  如：部分组总是可以由整体线性表示，但反之不成立

向量组的等价，具备

- 自反性

  任一向量组和自身等价

向量组的等价，具备

- 自反性

  任一向量组和自身等价

- 对称性

  向量组A与向量组B等价，当然向量组B与向量组A等价

向量组的等价，具备

- 自反性

  任一向量组和自身等价

- 对称性

  向量组A与向量组B等价，当然向量组B与向量组A等价

- 传递性

  设向量组A与向量组B等价，向量组B与向量组C等价，则向量组A与向量组C等价

定理3.2.1

若向量组$B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示，且$t > s$，则$B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性相关。

定理3.2.1

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$t > s$，则$B$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性相关。

证明: 设 $\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{i=1}^{s} k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i, \quad j = 1, 2, \cdots, t.$

定理3.2.1

若向量组$B:\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$t>s$，则$B:\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关。

证明: 设 $\boldsymbol{\beta}_j=\sum\limits_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\quad j=1,2,\cdots,t.$ 欲证$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关，只需证：存在不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_t$使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}, \tag{7}$$

定理3.2.1

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$t>s$，则$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关。

证明: 设 $\boldsymbol{\beta}_j=\sum\limits_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\quad j=1,2,\cdots,t.$ 欲证$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关，只需证：存在不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_t$使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0},\tag{7}$$

即

$$\sum_{j=1}^{t}x_j\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{j=1}^{t}x_j\left(\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}.$$

定理3.2.1

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$t>s$， 则$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关。

证明: 设 $\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\quad j=1,2,\cdots,t.$ 欲证$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关，只需证：存在不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_t$使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0},\tag{7}$$

即

$$\sum_{j=1}^{t}x_j\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{j=1}^{t}x_j\left(\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}.$$

当其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的系数

$$\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j=0,\quad i=1,2,\cdots,s\tag{8}$$

时，(7)显然成立。

定理3.2.1

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$t>s$，则$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关。

证明： 设 $\boldsymbol{\beta}_j=\sum\limits_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\quad j=1,2,\cdots,t.$ 欲证$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关，只需证：存在不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_t$使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}, \tag{7}$$

即

$$\sum_{j=1}^{t}x_j\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{j=1}^{t}x_j\left(\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}.$$

当其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的系数

$$\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j=0,\quad i=1,2,\cdots,s \tag{8}$$

时，(7)显然成立。注意到齐次线性方程组(8)含t个未知量，s个方程，而$t>s$，故(8)有非零解。

定理3.2.1

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$t>s$， 则$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关。

证明： 设 $\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\quad j=1,2,\cdots,t.$ 欲证$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关，只需证：存在不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_t$使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0},\tag{7}$$

即

$$\sum_{j=1}^{t}x_j\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{j=1}^{t}x_j\left(\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}.$$

当其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的系数

$$\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j=0,\quad i=1,2,\cdots,s\tag{8}$$

时，(7)显然成立。注意到齐次线性方程组(8)含t个未知量，s个方程，而$t>s$，故(8)有非零解。即有不全为零的$x_1,x_2,\cdots,x_t$使得(7)成立，

推论3.2.1(定理3.2.1的逆否命题)

若向量组B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由向量组$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且$B$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关，则

$$t \leq s$$

。

推论3.2.2

若$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$， 则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$中任何$r+1$个向量都是线性相关的。

推论3.2.2

若$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$， 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任何$r+1$个向量都是线性相关的。

证明： 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中的$r$个线性无关的向量，由于该向量组中任一个向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，由定理3.2.1可知，其中任意$r+1$个向量都线性相关。

定义(向量组的秩的等价定义 & 极大线性无关组)

设有向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$。如果能从其中选出$r$个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，满足

- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关；
- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任意$r+1$个向量都线性相关，

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

定义(向量组的秩的等价定义 & 极大线性无关组)

设有向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$。如果能从其中选出$r$个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，满足

- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关；
- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任意$r+1$个向量都线性相关，

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

极大线性无关组所含向量的个数r，称为原向量组的秩。

定义(向量组的秩的等价定义 & 极大线性无关组)

设有向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$。如果能从其中选出$r$个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，满足

- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关；
- 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任意$r+1$个向量都线性相关，

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

极大线性无关组所含向量的个数r，称为原向量组的秩。

注

- 秩为r的向量组中，任一个线性无关的部分组最多含有r个向量；
- 一般情况下，极大无关组不惟一；
- 不同的极大无关组所含向量个数相同；
- 极大无关组与原向量组是等价的;
- 极大无关组是原向量组的全权代表。

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = p$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = r$，如果向量组$B$：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$可由$A$：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，则

$$r \leq p.$$

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=p$, $\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r$， 如果向量组$B:\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$A:\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则

$$r\le p.$$

证明: 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=p$，$\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r$，如果向量组$B:\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$A:\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则

$$r\le p.$$

证明: 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

$$(1)\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r 等价于 \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$$

$$\Rightarrow\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r 可由 \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t 线性表示$$

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=p$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$，如果向量组$B:\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由$A:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，则

$$r\le p.$$

证明： 不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

(1) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$等价于$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示

(2) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=p$, $\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r$， 如果向量组$B:\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$A:\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则

$$r\le p.$$

证明： 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

(1) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$等价于$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

$\Rightarrow$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示

(2) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$

$\Rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$线性表示

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=p$, $\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r$， 如果向量组$B:\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$A:\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示， 则

$$r\le p.$$

证明: 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

(1) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$等价于$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

$\Rightarrow$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示

(2) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$

$\Rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$线性表示

$\Longrightarrow$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$线性表示

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=p$, $\mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r$， 如果向量组$B$: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$A$: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示， 则

$$r\leq p.$$

证明: 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\text{等价于}\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\\
&\Rightarrow\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\text{可由}\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\text{线性表示}\\
&(2)\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{线性表示}\\
&(3)\quad \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{等价于}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\\
&\Rightarrow\quad \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\text{线性表示}\\
&\Longrightarrow\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\text{线性表示}
\end{aligned}$$

由推论3.2.1可知$r\leq p$。

推论3.2.3

设$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = p$, $\mathrm{r}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = r$， 如果向量组$B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示， 则

$$r \le p.$$

证明: 不妨设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$分别为两个向量组的极大线性无关组。

(1) $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$等价于$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$

$\Rightarrow$ $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$可由$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性表示

(2) $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示

(3) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$等价于$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$

$\Rightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$线性表示

$\Longrightarrow$ $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$线性表示

由推论3.2.1可知$r \le p$。

定义(行秩 & 列秩)

- 对于矩阵**A**，把它的每一行称为**A**的一个行向量。把**A**的行向量组的秩，称为矩阵**A**的行秩。
- 对于矩阵**A**，把它的每一列称为**A**的一个列向量。把**A**的列向量组的秩，称为矩阵**A**的列秩。

定义(行秩 & 列秩)

- 对于矩阵$\mathbf{A}$，把它的每一行称为$\mathbf{A}$的一个行向量。把$\mathbf{A}$的行向量组的秩，称为矩阵$\mathbf{A}$的行秩。
- 对于矩阵$\mathbf{A}$，把它的每一列称为$\mathbf{A}$的一个列向量。把$\mathbf{A}$的列向量组的秩，称为矩阵$\mathbf{A}$的列秩。

对于$m \times n$阶矩阵$\mathbf{A}$，

- $\mathbf{A}$的行秩 $\leq m$；
- $\mathbf{A}$的列秩 $\leq n$。

阶梯形矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中$a_{11}\neq 0, a_{23}\neq 0, a_{34}\neq 0$。验证$\mathbf{A}$的行秩$=3$，列秩$=3$。

把$\mathbf{A}$按行和列分块为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$$

下证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$线性无关。

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15})+x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25})+x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}) + x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第一个分量

$$x_1 a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15})+x_2(0,0,a_{23},a_{24},a_{25})+x_3(0,0,0,a_{34},a_{35})=(0,0,0,0,0)$$

比较第一个分量

$$x_1a_{11}=0\Rightarrow x_1=0.$$

从而

$$x_2(0,0,a_{23},a_{24},a_{25})+x_3(0,0,0,a_{34},a_{35})=(0,0,0,0,0)$$

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}) + x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第一个分量

$$x_1 a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

从而

$$x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第3个分量

$$x_2 a_{23} = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}) + x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第一个分量

$$x_1 a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

从而

$$x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第3个分量

$$x_2 a_{23} = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

从而

$$x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15})+x_2(0,0,a_{23},a_{24},a_{25})+x_3(0,0,0,a_{34},a_{35})=(0,0,0,0,0)$$

比较第一个分量

$$x_1a_{11}=0\Rightarrow x_1=0.$$

从而

$$x_2(0,0,a_{23},a_{24},a_{25})+x_3(0,0,0,a_{34},a_{35})=(0,0,0,0,0)$$

比较第3个分量

$$x_2a_{23}=0\Rightarrow x_2=0.$$

从而

$$x_3(0,0,0,a_{34},a_{35})=(0,0,0,0,0)$$

同理得$x_3=0$。于是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关。

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15})+x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25})+x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第一个分量

$$x_1a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

从而

$$x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第3个分量

$$x_2a_{23} = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

从而

$$x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

同理得$x_3 = 0$。 于是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关。

又$\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0}$，而零向量可由任何向量线性表示，这里

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3.$$

故$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$的极大无关组。所以矩阵$\mathbf{A}$的行秩为3

(2) 设

$$y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_3\boldsymbol{\beta}_3 + y_4\boldsymbol{\beta}_4 = \mathbf{0}$$

即

$$y_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

比较第三个分量得$y_4 = 0$。从而

$$y_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

比较第二个分量得$y_3 = 0$。从而

$$y_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

比较第一个分量得$y_1 = 0$。故$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$线性无关。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

去掉向量组

$$B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5$$

的最后一个分量， 所得的新向量记为

$$B^*:\boldsymbol{\beta}_1^*,\boldsymbol{\beta}_2^*,\boldsymbol{\beta}_3^*,\boldsymbol{\beta}_4^*,\boldsymbol{\beta}_5^*.$$

注意去掉的分量全为0，故这两个向量组的相关性是一致的。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

去掉向量组

$$B : \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4, \boldsymbol{\beta}_5$$

的最后一个分量， 所得的新向量记为

$$B^* : \boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_2^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*, \boldsymbol{\beta}_5^*.$$

注意去掉的分量全为0，故这两个向量组的相关性是一致的。

由$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$线性无关， 则$\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*$也线性无关。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

去掉向量组

$$B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4, \boldsymbol{\beta}_5$$

的最后一个分量， 所得的新向量记为

$$B^*: \boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_2^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*, \boldsymbol{\beta}_5^*.$$

注意去掉的分量全为0，故这两个向量组的相关性是一致的。

由$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$线性无关， 则$\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*$也线性无关。

因任意$(3+1)=4$个3维向量必线性相关， 故$\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*$为向量组$B^*$的极大无关组，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

去掉向量组

$$B : \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$$

的最后一个分量，所得的新向量记为

$$B^* : \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*, \beta_4^*, \beta_5^*.$$

注意去掉的分量全为0，故这两个向量组的相关性是一致的。

由$\beta_1, \beta_3, \beta_4$线性无关，则$\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$也线性无关。

因任意$(3+1)=4$个3维向量必线性相关，故$\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$为向量组$B^*$的极大无关组，即向量组$B^*$中任何一个向量都可由$\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$线性表示，从而向量组$B$的任何一个向量都可以由$\beta_1, \beta_3, \beta_4$线性表示。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

去掉向量组

$$B: \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$$

的最后一个分量， 所得的新向量记为

$$B^*: \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*, \beta_4^*, \beta_5^*.$$

注意去掉的分量全为0，故这两个向量组的相关性是一致的。

由$\beta_1, \beta_3, \beta_4$线性无关， 则$\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$也线性无关。

因任意$(3+1)=4$个3维向量必线性相关， 故$\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$为向量组$B^*$的极大无关组， 即向量组$B^*$中任何一个向量都可由$\beta_1^*, \beta_3^*, \beta_4^*$线性表示， 从而向量组$B$的任何一个向量都可以由$\beta_1, \beta_3, \beta_4$线性表示。

得证$\beta_1, \beta_3, \beta_4$是向量组$B$的极大无关组， 即矩阵$\mathbf{A}$的列秩为3。

结论

阶梯形矩阵的行秩等于列秩，其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数。

定理3.3.1

初等行变换不改变矩阵的行秩。

定理3.3.1

初等行变换不改变矩阵的行秩。

证明: 只需证明每做一次对换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变。

定理3.3.1

初等行变换不改变矩阵的行秩。

证明: 只需证明每做一次对换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变。

设$\mathbf{A}$是$m \times n$矩阵，进行一次初等变换所得矩阵为$\mathbf{B}$。记$\mathbf{A}$的行向量为

$$A: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m.$$

定理3.3.1

初等行变换不改变矩阵的行秩。

证明: 只需证明每做一次对换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变。

设$\mathbf{A}$是$m \times n$矩阵，进行一次初等变换所得矩阵为$\mathbf{B}$。记$\mathbf{A}$的行向量为

$$A: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m.$$

(1) 证明对换变换不改变矩阵的行秩。

定理3.3.1

初等行变换不改变矩阵的行秩。

证明: 只需证明每做一次对换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变。

设$\mathbf{A}$是$m \times n$矩阵，进行一次初等变换所得矩阵为$\mathbf{B}$。记$\mathbf{A}$的行向量为

$$A: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m.$$

(1) 证明对换变换不改变矩阵的行秩。

$$\mathbf{A} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \mathbf{B}$$

因$\mathbf{B}$的行向量组

$$B: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_j, , \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与$\mathbf{A}$的行向量组

$$B: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, , \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

一致，故$\mathbf{B}$的行秩等于$\mathbf{A}$的行秩。

定理3.3.1

初等行变换不改变矩阵的行秩。

证明: 只需证明每做一次对换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变。

设$\mathbf{A}$是$m \times n$矩阵，进行一次初等变换所得矩阵为$\mathbf{B}$。记$\mathbf{A}$的行向量为

$$A: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m.$$

(1) 证明对换变换不改变矩阵的行秩。

$$\mathbf{A} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \mathbf{B}$$

因$\mathbf{B}$的行向量组

$$B: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_j, , \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与$\mathbf{A}$的行向量组

$$B: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, , \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

一致，故$\mathbf{B}$的行秩等于$\mathbf{A}$的行秩。

(2) 证明倍乘变换不改变矩阵的行秩。

(2) 证明倍乘变换不改变矩阵的行秩。

$$\mathbf{A} \xrightarrow{r_i \times c} \mathbf{B},$$

其中$c \neq 0$。因$\mathbf{B}$的行向量组

$$B: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与$\mathbf{A}$的行向量组

$$A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故$\mathbf{B}$的行秩等于$\mathbf{A}$的行秩。

(3) 证明倍乘变换不改变矩阵的行秩。

(3) 证明倍乘变换不改变矩阵的行秩。

$$\mathbf{A} \xrightarrow{r_i + r_j \times c} \mathbf{B},$$

因$\mathbf{B}$的行向量组

$$B: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i + c\boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与$\mathbf{A}$的行向量组

$$A: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故$\mathbf{B}$的行秩等于$\mathbf{A}$的行秩。

定理3.3.2

初等行变换不改变矩阵的列秩。

定理3.3.2

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明: 设

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=\mathbf{B}$$

定理3.3.2

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明: 设

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=\mathbf{B}$$

在$\mathbf{A},\mathbf{B}$中相同位置任取某s个列向量：

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}\ \text{和}\ \boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s},$$

分别记为向量组A^*和B^*。

定理3.3.2

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明： 设

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=\mathbf{B}$$

在$\mathbf{A},\mathbf{B}$中相同位置任取某s个列向量：

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}\ \text{和}\ \boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s},$$

分别记为向量组A^*和B^*。设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s}=\mathbf{0}, \tag{9}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s}=\mathbf{0}, \tag{10}$$

定理3.3.2

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明: 设

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m) = \mathbf{B}$$

在$\mathbf{A}, \mathbf{B}$中相同位置任取某s个列向量：

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_s} \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_s},$$

分别记为向量组A^*和B^*。设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

注意到方程组(10)是方程组(9)经过高斯消元法得到，故两方程组同解。

定理3.3.2

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明： 设

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=\mathbf{B}$$

在$\mathbf{A},\mathbf{B}$中相同位置任取某s个列向量：

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}\ \text{和}\ \boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s},$$

分别记为向量组A^*和B^*。设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s}=\mathbf{0}, \tag{9}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s}=\mathbf{0}, \tag{10}$$

注意到方程组(10)是方程组(9)经过高斯消元法得到，故两方程组同解。即向量组A^*和B^*有完全相同的线性关系。得证$\mathbf{A},\mathbf{B}$列秩相等。

定理3.3.2

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明： 设

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=\mathbf{B}$$

在$\mathbf{A},\mathbf{B}$中相同位置任取某s个列向量：

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}\ \text{和}\ \boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s},$$

分别记为向量组A^*和B^*。设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s}=\mathbf{0},\tag{9}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s}=\mathbf{0},\tag{10}$$

注意到方程组(10)是方程组(9)经过高斯消元法得到，故两方程组同解。即向量组A^*和B^*有完全相同的线性关系。得证$\mathbf{A},\mathbf{B}$列秩相等。

注

定理3.3.2提供了求向量组的秩与极大无关组的一种简便而有效的方法。

例1

设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\6\\4\\-1\end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

例1

设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\6\\4\\-1\end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解： 作矩阵$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$，由

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div 3}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&-1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\mathbf{B}$$

将最后一个阶梯矩阵$\mathbf{B}$记为$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

将最后一个阶梯矩阵$\mathbf{B}$记为$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$

易知$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$为$\mathbf{B}$的列向量组的一个极大无关组，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$也为$\mathbf{A}$的列向量组的一个极大无关组，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3,$$

且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \\ \boldsymbol{\alpha}_5 &= \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4, \end{aligned}$$

由定理3.3.1与定理3.3.2可以推出：初等列变换也不改变矩阵的列秩与行秩。

由定理3.3.1与定理3.3.2可以推出：初等列变换也不改变矩阵的列秩与行秩。

定理3.3.3

初等变换不改变矩阵的行秩与列秩。

由定理3.3.1与定理3.3.2可以推出：初等列变换也不改变矩阵的列秩与行秩。

定理3.3.3

初等变换不改变矩阵的行秩与列秩。

定理3.3.4

矩阵的行秩等于其列秩。

由定理3.3.1与定理3.3.2可以推出：初等列变换也不改变矩阵的列秩与行秩。

定理3.3.3

初等变换不改变矩阵的行秩与列秩。

定理3.3.4

矩阵的行秩等于其列秩。

证明： 对$\mathbf{A}$做初等行变换得到阶梯矩阵$\mathbf{U}$，则有

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\text{的行秩} &= \mathbf{U}\text{的行秩}\\ &= \mathbf{U}\text{的列秩} = \mathbf{A}\text{的列秩}\end{aligned}$$

定义(矩阵的秩)

矩阵的行秩或列秩的数值，称为矩阵的秩。记作

$$r(\mathbf{A}) \quad 或 \quad R(\mathbf{A}) \quad 或 \quad \mathrm{rank}(\mathbf{A})$$

定义(矩阵的秩)

矩阵的行秩或列秩的数值，称为矩阵的秩。记作

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) \quad 或 \quad \mathrm{R}(\mathbf{A}) \quad 或 \quad \mathrm{rank}(\mathbf{A})$$

定义(满秩矩阵)

对于n阶方阵，若

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n,$$

则称$\mathbf{A}$为满秩矩阵。

定理3.3.5

对于n阶方阵，下列表述等价：

(1) $\mathbf{A}$为满秩矩阵。

(2) $\mathbf{A}$为可逆矩阵。

(3) $\mathbf{A}$为非奇异矩阵。

(4) $|\mathbf{A}| \neq 0$。

定理3.3.5

对于n阶方阵，下列表述等价：

(1) **A**为满秩矩阵。

(2) **A**为可逆矩阵。

(3) **A**为非奇异矩阵。

(4) $|\mathbf{A}| \neq 0$。

证明: 只需证明前两个表述等价。

定理3.3.5

对于n阶方阵，下列表述等价：

(1) $\mathbf{A}$为满秩矩阵。

(2) $\mathbf{A}$为可逆矩阵。

(3) $\mathbf{A}$为非奇异矩阵。

(4) $|\mathbf{A}| \neq 0$。

证明: 只需证明前两个表述等价。

(1)⇒(2) 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$，记$\mathbf{A}$的行简化阶梯形矩阵为$\mathbf{B}$，则$\mathbf{B}$有$n$个非零行，

定理3.3.5

对于n阶方阵，下列表述等价：

(1) $\mathbf{A}$为满秩矩阵。

(2) $\mathbf{A}$为可逆矩阵。

(3) $\mathbf{A}$为非奇异矩阵。

(4) $|\mathbf{A}| \neq 0$。

证明： 只需证明前两个表述等价。

(1)⇒(2) 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$，记$\mathbf{A}$的行简化阶梯形矩阵为$\mathbf{B}$，则$\mathbf{B}$有$n$个非零行，由行简化阶梯形矩阵的结构知 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$,

定理3.3.5

对于n阶方阵，下列表述等价：

(1) $\mathbf{A}$为满秩矩阵。

(2) $\mathbf{A}$为可逆矩阵。

(3) $\mathbf{A}$为非奇异矩阵。

(4) $|\mathbf{A}| \neq 0$。

证明: 只需证明前两个表述等价。

(1)$\Rightarrow$(2) 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$，记$\mathbf{A}$的行简化阶梯形矩阵为$\mathbf{B}$，则$\mathbf{B}$有$n$个非零行，由行简化阶梯形矩阵的结构知 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, 即存在可逆矩阵$\mathbf{P}$使得

$$\mathbf{PA} = \mathbf{I},$$

故$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}$，即$\mathbf{A}$可逆。

定理3.3.5

对于n阶方阵，下列表述等价：

(1) $\mathbf{A}$为满秩矩阵。

(2) $\mathbf{A}$为可逆矩阵。

(3) $\mathbf{A}$为非奇异矩阵。

(4) $|\mathbf{A}| \neq 0$。

证明: 只需证明前两个表述等价。

(1)⇒(2) 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$，记$\mathbf{A}$的行简化阶梯形矩阵为$\mathbf{B}$，则$\mathbf{B}$有$n$个非零行，由行简化阶梯形矩阵的结构知 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, 即存在可逆矩阵$\mathbf{P}$使得

$$\mathbf{PA} = \mathbf{I},$$

故$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}$，即$\mathbf{A}$可逆。

(2)⇒(1) 若$\mathbf{A}$可逆，记$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}_0$，则

$$\mathbf{P}_0\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

定理3.3.5

对于n阶方阵，下列表述等价：

(1) $\mathbf{A}$为满秩矩阵。

(2) $\mathbf{A}$为可逆矩阵。

(3) $\mathbf{A}$为非奇异矩阵。

(4) $|\mathbf{A}| \neq 0$。

证明: 只需证明前两个表述等价。

(1)⇒(2) 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$，记$\mathbf{A}$的行简化阶梯形矩阵为$\mathbf{B}$，则$\mathbf{B}$有$n$个非零行，由行简化阶梯形矩阵的结构知 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, 即存在可逆矩阵$\mathbf{P}$使得

$$\mathbf{PA} = \mathbf{I},$$

故$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}$，即$\mathbf{A}$可逆。

(2)⇒(1) 若$\mathbf{A}$可逆，记$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}_0$，则

$$\mathbf{P}_0\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

即$\mathbf{A}$经过初等行变换可以得到$\mathbf{I}$，故$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{I}) = n$。

子式与主子式

对矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，任意挑选$k$行($i_1,i_2,\cdots,i_k$行)与$k$列($j_1,j_2,\cdots,j_k$列)，其交点上的$k^2$个元素按原顺序排成的$k$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix} \tag{11}$$

称为$\mathbf{A}$的k阶子行列式，简称$\mathbf{A}$的k阶子式。

子式与主子式

对矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，任意挑选$k$行$(i_1,i_2,\cdots,i_k$行$)$与$k$列$(j_1,j_2,\cdots,j_k$列$)$，其交点上的$k^2$个元素按原顺序排成的$k$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix} \tag{11}$$

称为$\mathbf{A}$的k阶子行列式，简称$\mathbf{A}$的k阶子式。

- 当(11)等于零时，称为k阶零子式;
- 当(11)不等于零时，称为k阶非零子式;
- 当(11)的$j_1=i_1,\ j_2=i_2,\ \cdots,\ j_k=i_k$，称为$\mathbf{A}$的$k$阶主子式。

注

若$\mathbf{A}$存在r阶非零子式，而所有$r+1$阶子式(如果有)都等于零，则矩阵$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为r。

注

若$\mathbf{A}$存在r阶非零子式，而所有$r+1$阶子式(如果有)都等于零，则矩阵$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为r。

事实上，由行列式的按行展开可知，若所有$r+1$阶子式都等于零，可得到所有更高阶的子式都等于零。

定理3.3.6

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$的充分必要条件是$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为$r$。

定理3.3.6

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$的充分必要条件是$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为$r$。

证明:

$(\Rightarrow)$ 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$，即$\mathbf{A}$的行秩为$r$，不妨设$\mathbf{A}$的前$r$行构成的矩阵$\mathbf{A}_1$的行秩为$r$， 其列秩也为$r$；不妨设$\mathbf{A}_1$的前$r$个列向量线性无关。

定理3.3.6

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$的充分必要条件是$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为$r$。

证明:

$(\Rightarrow)$ 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$，即$\mathbf{A}$的行秩为$r$，不妨设$\mathbf{A}$的前$r$行构成的矩阵$\mathbf{A}_1$的行秩为$r$， 其列秩也为$r$；不妨设$\mathbf{A}_1$的前$r$个列向量线性无关。

由定理3.3.5可知，$\mathbf{A}$的左上角r阶子式为非零子式。

定理3.3.6

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$的充分必要条件是$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为$r$。

证明:

$(\Rightarrow)$ 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$，即$\mathbf{A}$的行秩为$r$，不妨设$\mathbf{A}$的前$r$行构成的矩阵$\mathbf{A}_1$的行秩为$r$，其列秩也为$r$；不妨设$\mathbf{A}_1$的前$r$个列向量线性无关。

由定理3.3.5可知，$\mathbf{A}$的左上角r阶子式为非零子式。

又因为$\mathbf{A}$的任意$r+1$个行向量线性相关，所以$\mathbf{A}$的任意$r+1$阶子式都是零子式（因为其中有一行可由其余r行线性表示），因此$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为r。

定理3.3.6

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$的充分必要条件是$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为$r$。

证明:

($\Rightarrow$) 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$，即$\mathbf{A}$的行秩为$r$，不妨设$\mathbf{A}$的前$r$行构成的矩阵$\mathbf{A}_1$的行秩为$r$，其列秩也为$r$；不妨设$\mathbf{A}_1$的前$r$个列向量线性无关。

由定理3.3.5可知，$\mathbf{A}$的左上角r阶子式为非零子式。

又因为$\mathbf{A}$的任意$r+1$个行向量线性相关，所以$\mathbf{A}$的任意$r+1$阶子式都是零子式（因为其中有一行可由其余r行线性表示），因此$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为r。

($\Leftarrow$) 不妨设$\mathbf{A}$的左上角r阶子式$|\mathbf{A}_r| \neq 0$，于是$\mathbf{A}_r$可逆，其r个行向量线性无关。

定理3.3.6

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$的充分必要条件是$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为$r$。

证明:

$(\Rightarrow)$ 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$，即$\mathbf{A}$的行秩为$r$，不妨设$\mathbf{A}$的前$r$行构成的矩阵$\mathbf{A}_1$的行秩为$r$，其列秩也为$r$；不妨设$\mathbf{A}_1$的前$r$个列向量线性无关。

由定理3.3.5可知，$\mathbf{A}$的左上角r阶子式为非零子式。

又因为$\mathbf{A}$的任意$r+1$个行向量线性相关，所以$\mathbf{A}$的任意$r+1$阶子式都是零子式（因为其中有一行可由其余r行线性表示），因此$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为r。

$(\Leftarrow)$ 不妨设$\mathbf{A}$的左上角r阶子式$|\mathbf{A}_r| \neq 0$，于是$\mathbf{A}_r$可逆，其r个行向量线性无关。将它们添加分量称为$\mathbf{A}$的前r个行向量，它们也线性无关。

定理3.3.6

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$的充分必要条件是$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为$r$。

证明:

($\Rightarrow$) 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$，即$\mathbf{A}$的行秩为$r$，不妨设$\mathbf{A}$的前$r$行构成的矩阵$\mathbf{A}_1$的行秩为$r$，其列秩也为$r$；不妨设$\mathbf{A}_1$的前$r$个列向量线性无关。

由定理3.3.5可知，$\mathbf{A}$的左上角r阶子式为非零子式。

又因为$\mathbf{A}$的任意$r+1$个行向量线性相关，所以$\mathbf{A}$的任意$r+1$阶子式都是零子式（因为其中有一行可由其余r行线性表示），因此$\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数为r。

($\Leftarrow$) 不妨设$\mathbf{A}$的左上角r阶子式$|\mathbf{A}_r| \neq 0$，于是$\mathbf{A}_r$可逆，其r个行向量线性无关。将它们添加分量称为$\mathbf{A}$的前r个行向量，它们也线性无关。

而$\mathbf{A}$的任何$r+1$个行向量必线性相关（否则，$\mathbf{A}$中存在$r+1$阶非零子式，这与题设矛盾），故$\mathbf{A}$的行秩$= \mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$.

关于矩阵的秩的基本结论

(1) $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$的行秩 $=$ $\mathbf{A}$的列秩 $=$ $\mathbf{A}$的非零子式的最高阶数

(2) 初等变换不改变矩阵的秩

性质1

$$\max\{\mathrm{r}(\mathbf{A}),\ \mathrm{r}(\mathbf{B})\} \ \leq\ \mathrm{r}(\mathbf{A},\ \mathbf{B})\ \leq\ \mathrm{r}(\mathbf{A})+\mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

特别地，当$\mathbf{B}=\mathbf{b}$为非零向量时，有

$$\mathrm{r}(\mathbf{A})\ \leq\ \mathrm{r}(\mathbf{A},\ \mathbf{b})\ \leq\ \mathrm{r}(\mathbf{A})+1.$$

性质1

$$\max\{\mathrm{r}(\mathbf{A}),\ \mathrm{r}(\mathbf{B})\} \ \leq\ \mathrm{r}(\mathbf{A},\ \mathbf{B}) \ \leq\ \mathrm{r}(\mathbf{A})+\mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

特别地，当$\mathbf{B}=\mathbf{b}$为非零向量时，有

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) \ \leq\ \mathrm{r}(\mathbf{A},\ \mathbf{b}) \ \leq\ \mathrm{r}(\mathbf{A})+1.$$

$$\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\begin{cases}\mathrm{r}(\mathbf{A}) & \Longleftrightarrow\ \mathbf{b}\text{可以被}\mathbf{A}\text{的列向量线性表示}\\ \mathrm{r}(\mathbf{A})+1 & \Longleftrightarrow\ \mathbf{b}\text{不能被}\mathbf{A}\text{的列向量线性表示}\end{cases}$$

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

(1) 取$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，则

$$(\mathbf{A},\ \mathbf{b})=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-(c_1+2c_2)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=(\mathbf{A},\mathbf{0}),$$

故$\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{0})=\mathrm{r}(\mathbf{A})$。

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(1) 取$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，则

$$(\mathbf{A},\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-(c_1+2c_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}, \mathbf{0}),$$

故$\mathrm{r}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}, \mathbf{0}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$。

(2) 取$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则

$$(\mathbf{A},\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{b}$不能由$\mathbf{A}$的列向量线性表示，故 $\mathrm{r}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) + 1$

证明:

- 因为$\mathbf{A}$的列均可由$(\mathbf{A},\mathbf{B})$的列线性表示，故

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$

证明:

- 因为$\mathbf{A}$的列均可由$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$的列线性表示，故

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

同理

$$\mathrm{r}(\mathbf{B}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

证明:

- 因为$\mathbf{A}$的列均可由$(\mathbf{A},\mathbf{B})$的列线性表示，故

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$

同理

$$\mathrm{r}(\mathbf{B}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$

所以

$$\max\{\mathrm{r}(\mathbf{A}),\ \mathrm{r}(\mathbf{B})\} \leq \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$

证明:

- 因为$\mathbf{A}$的列均可由$(\mathbf{A},\mathbf{B})$的列线性表示，故
$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$
同理
$$\mathrm{r}(\mathbf{B}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$
所以
$$\max\{\mathrm{r}(\mathbf{A}),\ \mathrm{r}(\mathbf{B})\} \le \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$
- 设$\mathrm{r}(\mathbf{A})=p$, $\mathrm{r}(\mathbf{B})=q$，$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组分别为
$$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q.$$

证明:

- 因为$\mathbf{A}$的列均可由$(\mathbf{A},\mathbf{B})$的列线性表示，故
$$\mathrm{r}(\mathbf{A})\le \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$
同理
$$\mathrm{r}(\mathbf{B})\le \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$
所以
$$\max\{\mathrm{r}(\mathbf{A}),\ \mathrm{r}(\mathbf{B})\}\le \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$
- 设$\mathrm{r}(\mathbf{A})=p$, $\mathrm{r}(\mathbf{B})=q$，$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组分别为
$$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p\ \text{和}\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q.$$

证明:

- 因为$\mathbf{A}$的列均可由$(\mathbf{A},\mathbf{B})$的列线性表示，故
$$\mathrm{r}(\mathbf{A})\leq \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$
同理
$$\mathrm{r}(\mathbf{B})\leq \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$
所以
$$\max\{\mathrm{r}(\mathbf{A}),\ \mathrm{r}(\mathbf{B})\}\leq \mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$
- 设$\mathrm{r}(\mathbf{A})=p$, $\mathrm{r}(\mathbf{B})=q$，$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组分别为
$$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p\ \text{和}\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q.$$
显然$(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$的列向量组可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q$线性表示，故
$$\mathrm{r}(\mathbf{A},\ \mathbf{B})=(\mathbf{A},\ \mathbf{B})\text{的列秩}\leq \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q)\leq p+q.$$

注

- 不等式
$$\min\{\mathrm{r}(\mathbf{A}), \mathrm{r}(\mathbf{B})\} \leq \mathrm{r}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$
意味着：在$\mathbf{A}$的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当$\mathbf{B}$的列向量能被$\mathbf{A}$的列向量线性表示时，等号成立。

注

- 不等式
$$\min\{\mathrm{r}(\mathbf{A}), \mathrm{r}(\mathbf{B})\} \le \mathrm{r}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$
意味着：在$\mathbf{A}$的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当$\mathbf{B}$的列向量能被$\mathbf{A}$的列向量线性表示时，等号成立。

- 不等式
$$\mathrm{r}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A}) + \mathrm{r}(\mathbf{B})$$
意味着：对$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$，有可能$\mathbf{A}$的列向量与$\mathbf{B}$的列向量出现线性相关，合并为$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$的秩一般会比$\mathrm{r}(\mathbf{A}) + \mathrm{r}(\mathbf{B})$要小。

性质2

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A})+\mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

性质2

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A})+\mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

证明: 设$\mathrm{r}(\mathbf{A})=p$, $\mathrm{r}(\mathbf{B})=q$， $\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

性质2

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A}) + \mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

证明: 设$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = p$, $\mathrm{r}(\mathbf{B}) = q$，$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

性质2

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A})+\mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

证明: 设$\mathrm{r}(\mathbf{A})=p$, $\mathrm{r}(\mathbf{B})=q$， $\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然$\mathbf{A}+\mathbf{B}$的列向量组可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$线性表示，故

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{A}+\mathbf{B}\text{的列秩} \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q) \leq p+q.$$

性质2

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A})+\mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

证明: 设$\mathrm{r}(\mathbf{A})=p$, $\mathrm{r}(\mathbf{B})=q$， $\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然$\mathbf{A}+\mathbf{B}$的列向量组可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$线性表示，故

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{A}+\mathbf{B}\text{的列秩} \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q) \leq p+q.$$

注

将矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$合并、相加，只可能使得秩减小。

性质3

$$r(\mathbf{AB}) \le \min(r(\mathbf{A}),\ r(\mathbf{B})).$$

性质3

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \leq \min(\mathrm{r}(\mathbf{A}),\ \mathrm{r}(\mathbf{B})).$$

证明: 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$分别为$m \times n, n \times s$矩阵，将$\mathbf{A}$按列分块，则

$$\mathbf{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

性质3

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \leq \min(\mathrm{r}(\mathbf{A}),\ \mathrm{r}(\mathbf{B})).$$

证明: 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$分别为$m \times n, n \times s$矩阵，将$\mathbf{A}$按列分块，则

$$\mathbf{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\mathbf{AB}$的列向量组可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，故

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) = \mathbf{AB}\text{的列秩} \leq \mathbf{A}\text{的列秩} = \mathrm{r}(\mathbf{A}).$$

性质3

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \le \min(\mathrm{r}(\mathbf{A}), \mathrm{r}(\mathbf{B})).$$

证明： 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$分别为$m \times n, n \times s$矩阵，将$\mathbf{A}$按列分块，则

$$\mathbf{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\mathbf{AB}$的列向量组可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，故

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) = \mathbf{AB}\text{的列秩} \le \mathbf{A}\text{的列秩} = \mathrm{r}(\mathbf{A}).$$

类似地，将$\mathbf{B}$按行分块，可得

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \le \mathrm{r}(\mathbf{B}).$$

该定理告诉我们，

对一个向量组进行线性组合，可能会使向量组的秩减小。

性质4

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$分别为m阶、n阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{PA}) = \mathrm{r}(\mathbf{AQ}) = \mathrm{r}(\mathbf{PAQ}).$$

性质4

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{P},\mathbf{Q}$分别为m阶、n阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{PA})=\mathrm{r}(\mathbf{AQ})=\mathrm{r}(\mathbf{PAQ}).$$

证明:

方法一　可逆矩阵$\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$可表示为若干个初等矩阵的乘积，而初等变换不改变矩阵的秩，故结论成立。

性质4

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$分别为m阶、n阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{PA}) = \mathrm{r}(\mathbf{AQ}) = \mathrm{r}(\mathbf{PAQ}).$$

证明:

方法一　可逆矩阵$\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$可表示为若干个初等矩阵的乘积，而初等变换不改变矩阵的秩，故结论成立。

方法二　因

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{PA})) \le \mathrm{r}(\mathbf{PA}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A})$$

故

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{PA}).$$

性质4

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{P},\mathbf{Q}$分别为m阶、n阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{PA})=\mathrm{r}(\mathbf{AQ})=\mathrm{r}(\mathbf{PAQ}).$$

证明:

方法一　可逆矩阵$\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$可表示为若干个初等矩阵的乘积，而初等变换不改变矩阵的秩，故结论成立。

方法二　因

$$\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{PA}))\leq\mathrm{r}(\mathbf{PA})\leq\mathrm{r}(\mathbf{A})$$

故

$$\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{PA}).$$

同理可证其他等式。

例3.3.2

设$\mathbf{A}$是$m \times n$矩阵，且$m < n$，证明：$|\mathbf{A}^T\mathbf{A}| = 0.$

例3.3.2

设$\mathbf{A}$是$m \times n$矩阵，且$m < n$，证明：$|\mathbf{A}^T\mathbf{A}| = 0$.

解: 由于$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^T) \leq \min\{m, n\} < n$，根据性质2，有

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \leq \min\{\mathrm{r}(\mathbf{A}^T), \mathrm{r}(\mathbf{A})\} < n,$$

而$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$为n阶矩阵，故$|\mathbf{A}^T\mathbf{A}| = 0$。

矩阵的相抵

若矩阵$\mathbf{A}$经过初等变换化为$\mathbf{B}$(亦即存在可逆矩阵$\mathbf{P}$和$\mathbf{Q}$使得$\mathbf{PAQ}=\mathbf{B}$)，就称$\mathbf{A}$相抵于$\mathbf{B}$，记作$\mathbf{A}\cong\mathbf{B}$

矩阵的相抵

若矩阵$\mathbf{A}$经过初等变换化为$\mathbf{B}$(亦即存在可逆矩阵$\mathbf{P}$和$\mathbf{Q}$使得$\mathbf{PAQ}=\mathbf{B}$)，就称$\mathbf{A}$相抵于$\mathbf{B}$，记作$\mathbf{A}\cong\mathbf{B}$

相抵关系的性质

- 反身性
$$\mathbf{A}\cong\mathbf{A}$$
- 对称性
$$\mathbf{A}\cong\mathbf{B}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{B}\cong\mathbf{A}$$
- 传递性
$$\mathbf{A}\cong\mathbf{B},\ \ \mathbf{B}\cong\mathbf{C}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}\cong\mathbf{C}$$

阶梯形矩阵

若矩阵$\mathbf{A}$满足

(1) 零行在最下方；

(2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增，

则称$\mathbf{A}$为阶梯形矩阵。

阶梯形矩阵

若矩阵$\mathbf{A}$满足

(1) 零行在最下方；

(2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增，

则称$\mathbf{A}$为阶梯形矩阵。

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵

若矩阵**A**满足

(1) 它是阶梯形矩阵；

(2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外，其余元素全为零，

则称**A**为行简化阶梯形矩阵。

阶梯形矩阵

若矩阵$\mathbf{A}$满足

(1) 它是阶梯形矩阵；

(2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外，其余元素全为零，

则称$\mathbf{A}$为行简化阶梯形矩阵。

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理3.3.7

若$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，且$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$，则一定存在可逆的$m$阶矩阵$\mathbf{P}$和$n$阶矩阵$\mathbf{Q}$使得

$$\mathbf{PAQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n} = \mathbf{U}.$$

定理3.3.7

若$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，且$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$，则一定存在可逆的$m$阶矩阵$\mathbf{P}$和$n$阶矩阵$\mathbf{Q}$使得

$$\mathbf{PAQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m\times n} = \mathbf{U}.$$

证明: 对$\mathbf{A}$做初等行变换，可将$\mathbf{A}$化为有r个非零行的行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}_1.$$

定理3.3.7

若$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，且$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r$，则一定存在可逆的m阶矩阵$\mathbf{P}$和n阶矩阵$\mathbf{Q}$使得

$$\mathbf{PAQ}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{m\times n}=\mathbf{U}.$$

证明: 对$\mathbf{A}$做初等行变换，可将$\mathbf{A}$化为有r个非零行的行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\mathbf{U}_1.$$

对$\mathbf{U}_1$做初等列变换可将$\mathbf{U}_1$化为$\mathbf{U}$，即存在初等矩阵$\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2,\cdots,\mathbf{Q}_t$使得

$$\mathbf{U}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_t=\mathbf{U}$$

定理3.3.7

若$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，且$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r$，则一定存在可逆的m阶矩阵$\mathbf{P}$和n阶矩阵$\mathbf{Q}$使得

$$\mathbf{PAQ}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{m\times n}=\mathbf{U}.$$

证明: 对$\mathbf{A}$做初等行变换，可将$\mathbf{A}$化为有r个非零行的行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\mathbf{U}_1.$$

对$\mathbf{U}_1$做初等列变换可将$\mathbf{U}_1$化为$\mathbf{U}$，即存在初等矩阵$\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2,\cdots,\mathbf{Q}_t$使得

$$\mathbf{U}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_t=\mathbf{U}$$

记

$$\mathbf{P}_s\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{P},\quad \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_t=\mathbf{Q},$$

则有

$$\mathbf{PAQ}=\mathbf{U}.$$

定义（相抵标准形）

设$\mathrm{r}(\mathbf{A}_{m\times n}) = r$，则矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

称为$\mathbf{A}$的相抵标准形，简称标准形。

定义（相抵标准形）

设$\mathrm{r}(\mathbf{A}_{m\times n}) = r$，则矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

称为$\mathbf{A}$的相抵标准形，简称标准形。

注

- 秩相等的同型矩阵，必有相同的标准形。
- 两个秩相等的同型矩阵是相抵的。

例3

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵$(m>n)$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=n$，证明：存在$n\times m$矩阵$\mathbf{B}$使得

$$\mathbf{BA}=\mathbf{I}_n.$$

例3

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵$(m > n)$，$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$，证明：存在$n \times m$矩阵$\mathbf{B}$使得

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

证明: 由定理3.3.7可知，存在m阶可逆矩阵$\mathbf{P}$与n阶可逆矩阵$\mathbf{Q}$使得

$$\mathbf{PAQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0}_1 \end{pmatrix}$$

例3

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵$(m>n)$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=n$，证明：存在$n\times m$矩阵$\mathbf{B}$使得

$$\mathbf{BA}=\mathbf{I}_n.$$

证明: 由定理3.3.7可知，存在m阶可逆矩阵$\mathbf{P}$与n阶可逆矩阵$\mathbf{Q}$使得

$$\mathbf{PAQ}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_n\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{PA}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_n\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{0}_1$为$(m-n)\times n$零矩阵。

例3

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵$(m>n)$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=n$，证明：存在$n\times m$矩阵$\mathbf{B}$使得

$$\mathbf{BA}=\mathbf{I}_n.$$

证明: 由定理3.3.7可知，存在m阶可逆矩阵$\mathbf{P}$与n阶可逆矩阵$\mathbf{Q}$使得

$$\mathbf{PAQ}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_n\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{PA}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_n\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{0}_1$为$(m-n)\times n$零矩阵。
取

$$\mathbf{C}=(\mathbf{Q}\ \ \mathbf{0}_2),$$

其中$\mathbf{0}_2$为$n\times(m-n)$阶零矩阵，

例3

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵$(m>n)$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=n$，证明：存在$n\times m$矩阵$\mathbf{B}$使得

$$\mathbf{BA}=\mathbf{I}_n.$$

证明: 由定理3.3.7可知，存在m阶可逆矩阵$\mathbf{P}$与n阶可逆矩阵$\mathbf{Q}$使得

$$\mathbf{PAQ}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_n\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{PA}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_n\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{0}_1$为$(m-n)\times n$零矩阵。
取

$$\mathbf{C}=(\mathbf{Q}\ \ \mathbf{0}_2),$$

其中$\mathbf{0}_2$为$n\times(m-n)$阶零矩阵，则

$$\mathbf{CPA}=(\mathbf{Q}\ \ \mathbf{0}_2)\begin{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}=\mathbf{QQ}^{-1}+\mathbf{0}_2\mathbf{0}_1=\mathbf{I}_n.$$

例3

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵$(m>n)$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=n$，证明：存在$n\times m$矩阵$\mathbf{B}$使得

$$\mathbf{BA}=\mathbf{I}_n.$$

证明: 由定理3.3.7可知，存在m阶可逆矩阵$\mathbf{P}$与n阶可逆矩阵$\mathbf{Q}$使得

$$\mathbf{PAQ}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_n\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{PA}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_n\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{0}_1$为$(m-n)\times n$零矩阵。
取

$$\mathbf{C}=(\mathbf{Q}\ \ \mathbf{0}_2),$$

其中$\mathbf{0}_2$为$n\times(m-n)$阶零矩阵，则

$$\mathbf{CPA}=(\mathbf{Q}\ \ \mathbf{0}_2)\begin{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}\\ \mathbf{0}_1\end{pmatrix}=\mathbf{QQ}^{-1}+\mathbf{0}_2\mathbf{0}_1=\mathbf{I}_n.$$

故存在$\mathbf{B}=\mathbf{CP}$使得

$$\mathbf{BA}=\mathbf{I}_n.$$

例4

设$\alpha_1=(1,3,1,2)$，$\alpha_2=(2,5,3,3)$，$\alpha_3=(0,1,-1,a)$，$\alpha_4=(3,10,k,4)$，试求向量组α_1，α_2，α_3，α_4的秩，并将α_4用α_1，α_2，α_3线性表示。

例4

设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,k,4)$，试求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的秩，并将$\boldsymbol{\alpha}_4$用$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

解: 将4个向量按列排成一个矩阵$\mathbf{A}$，对$\mathbf{A}$进行初等变换，将其化为阶梯形矩阵$\mathbf{U}$，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

例4

设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,k,4)$， 试求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的秩，并将$\boldsymbol{\alpha}_4$用$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

解: 将4个向量按列排成一个矩阵$\mathbf{A}$，对$\mathbf{A}$进行初等变换，将其化为阶梯形矩阵$\mathbf{U}$，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

(1) 当$a=1$或$k=2$时，$\mathbf{U}$只有3个非零行，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{r}(\mathbf{A})=3.$$

例4

设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,10,k,4)$，试求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的秩，并将$\boldsymbol{\alpha}_4$用$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

解: 将4个向量按列排成一个矩阵$\mathbf{A}$，对$\mathbf{A}$进行初等变换，将其化为阶梯形矩阵$\mathbf{U}$，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

(1) 当$a=1$或$k=2$时，$\mathbf{U}$只有3个非零行，故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{r}(\mathbf{A})=3.$$

(2) 当$a\neq 1$且$k\neq 2$时，

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathrm{r}(\mathbf{A})=4.$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

- 当$k=2$且$a\neq 1$时，$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示， 且

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{1+5a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2+a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{3}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- 当$k=2$且$a \neq 1$时，α_4可由α_1，α_2，α_3线性表示，且

$$\alpha_4 = -\frac{1+5a}{1-a}\alpha_1 + \frac{2+a}{1-a}\alpha_2 + \frac{3}{1-a}\alpha_3.$$

- 当$k \neq 2$或$a=1$时，α_4不能由α_1，α_2，α_3线性表示。

例5

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知$\mathrm{r}(\mathbf{A})=2$，求t。

例5

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知$\mathrm{r}(\mathbf{A})=2$，求t。

解:

$$\mathbf{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{B}$$

例5

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知$\mathrm{r}(\mathbf{A})=2$，求t。

解:

$$\mathbf{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{B}$$

由于$\mathrm{r}(\mathbf{B})=\mathrm{r}(\mathbf{A})$，故$\mathbf{B}$中第2、3行必须成比例，即

$$\frac{-2}{2+t}=\frac{-4}{6},$$

即得$t=1$。

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，考察以$\mathbf{A}$为系数矩阵的齐次线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，考察以$\mathbf{A}$为系数矩阵的齐次线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

若将$\mathbf{A}$按列分块为

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

齐次方程组(12)可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}.$$

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，考察以$\mathbf{A}$为系数矩阵的齐次线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}. \tag{12}$$

若将$\mathbf{A}$按列分块为

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n),$$

齐次方程组(12)可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}.$$

齐次方程组(12)有非零解的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$线性相关，即

$$\mathrm{R}(\mathbf{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)<n.$$

定理3.4.1

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，则

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}\text{有非零解} \iff \mathrm{R}(\mathbf{A}) < n.$$

定理3.4.1的等价命题

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，则

$$\underline{\mathbf{Ax} = \mathbf{0}\text{只有零解}} \iff \underline{\mathrm{R}(\mathbf{A}) = n = \mathbf{A}\text{的列数}}.$$

例1

设$\mathbf{A}$为n阶矩阵，证明：存在$n\times s$矩阵$\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$，使得$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$的充分必要条件是

$$|\mathbf{A}|=0.$$

例1

设$\mathbf{A}$为n阶矩阵，证明：存在$n \times s$矩阵$\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$，使得$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$的充分必要条件是

$$|\mathbf{A}| = 0.$$

证明: $|\mathbf{A}| = 0 \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$有非零解。

例1

设$\mathbf{A}$为n阶矩阵，证明：存在$n \times s$矩阵$\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$，使得$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$的充分必要条件是

$$|\mathbf{A}| = 0.$$

证明: $|\mathbf{A}| = 0 \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$有非零解。下证

$$\text{存在}n \times s\text{矩阵}\mathbf{B} \neq 0\text{使得}\mathbf{AB} = \mathbf{0} \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\text{有非零解}.$$

例1

设$\mathbf{A}$为n阶矩阵，证明：存在$n \times s$矩阵$\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$，使得$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$的充分必要条件是

$$|\mathbf{A}| = 0.$$

证明: $|\mathbf{A}| = 0 \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$有非零解。下证

$$\text{存在} n \times s \text{矩阵} \mathbf{B} \neq 0 \text{使得} \mathbf{AB} = \mathbf{0} \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{有非零解}.$$

$(\Longrightarrow)$ 设$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$，则$\mathbf{B}$的解向量为$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$的解。又$\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$，则$\mathbf{B}$至少有一个非零列向量，从而$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$至少有一个非零解。

例1

设$\mathbf{A}$为n阶矩阵，证明：存在$n\times s$矩阵$\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$，使得$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$的充分必要条件是

$$|\mathbf{A}|=0.$$

证明: $|\mathbf{A}|=0 \iff \mathbf{Ax}=\mathbf{0}$有非零解。下证

存在$n\times s$矩阵$\mathbf{B}\neq 0$使得$\mathbf{AB}=\mathbf{0} \iff \mathbf{Ax}=\mathbf{0}$有非零解.

$(\Longrightarrow)$ 设$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$，则$\mathbf{B}$的解向量为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解。又$\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$，则$\mathbf{B}$至少有一个非零列向量，从而$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$至少有一个非零解。

$(\Longleftarrow)$ 设$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$有非零解，任取一个非零解β，令

$$\mathbf{B}=(\beta,\ \mathbf{0},\ \cdots,\ \mathbf{0})$$

则$\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$，且$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$。

定理3.4.2

若$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$为齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的两个解，则

$$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2 \quad (k_1，k_2\text{为任意常数})$$

也是它的解。

定理3.4.2

若$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$为齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的两个解，则

$$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2 \quad (k_1,\ k_2\text{为任意常数})$$

也是它的解。

证明： 因为

$$\mathbf{A}(k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2)=k_1\mathbf{Ax}_1+k_2\mathbf{Ax}_2=k_1\mathbf{0}+k_2\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

故$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2$也为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解。

定义(基础解系)

设$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解向量，若

(1) $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$线性无关

(2) $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的任一解向量可由$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$线性表示。

则称$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系。

定义(基础解系)

设$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解向量，若

(1) $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$线性无关

(2) $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的任一解向量可由$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$线性表示。

则称$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系。

注

(1) 基础解系即全部解向量的极大无关组。

定义(基础解系)

设$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解向量，若

(1) $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$线性无关

(2) $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的任一解向量可由$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$线性表示。

则称$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系。

注

(1) 基础解系即全部解向量的极大无关组。

(2) 找到了基础解系，就找到了齐次线性方程组的全部解：

$$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2+\cdots+k_p\mathbf{x}_p \quad (k_1,k_2,\cdots,k_p\text{为任意常数}).$$

定义(基础解系)

设$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解向量，若

(1) $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$线性无关

(2) $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的任一解向量可由$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$线性表示。

则称$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$\mathbf{x}_p$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系。

注

(1) 基础解系即全部解向量的极大无关组。

(2) 找到了基础解系，就找到了齐次线性方程组的全部解：

$$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2+\cdots+k_p\mathbf{x}_p \quad (k_1,k_2,\cdots,k_p\text{为任意常数}).$$

(3) 基础解系不唯一。

例

求方程组

$$x + y + z = 0$$

的全部解。

例

求方程组

$$x + y + z = 0$$

的全部解。

解:

(1) 选取y, z为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2\text{为任意常数})$$

(2) 选取x, z为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = x \\ y = -x - z \\ z = z \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2\text{为任意常数})$$

(2) 选取x, z为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = x \\ y = -x - z \\ z = z \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2\text{为任意常数})$$

(3) 选取x, y为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - y \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2\text{为任意常数})$$

三个不同的基础解系为

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

定理3.4.3

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，若$\mathrm{R}(\mathbf{A})=r<n$，则齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$存在基础解系，且基础解系含$n-r$个解向量。

定理3.4.3

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，若$\mathrm{R}(\mathbf{A}) = r < n$，则齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$存在基础解系，且基础解系含$n - r$个解向量。

注

- r为$\mathbf{A}$的秩，也是$\mathbf{A}$的行阶梯形矩阵的非零行行数，是非自由未知量的个数。

定理3.4.3

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，若$\mathrm{R}(\mathbf{A}) = r < n$，则齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$存在基础解系，且基础解系含$n - r$个解向量。

注

- r为$\mathbf{A}$的秩，也是$\mathbf{A}$的行阶梯形矩阵的非零行行数，是非自由未知量的个数。
- n为未知量的个数，故$n - r$为自由未知量的个数。

定理3.4.3

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵，若$\mathrm{R}(\mathbf{A}) = r < n$，则齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$存在基础解系，且基础解系含$n - r$个解向量。

注

- r为$\mathbf{A}$的秩，也是$\mathbf{A}$的行阶梯形矩阵的非零行行数，是非自由未知量的个数。
- n为未知量的个数，故$n - r$为自由未知量的个数。有多少自由未知量，基础解系里就对应有多少个向量。

例2

求齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系，其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

例2

求齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系，其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & 24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div 4]{r_3\div 8} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例3

求齐次线性方程组

$$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$$

的基础解系。

例3

求齐次线性方程组

$$nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$$

的基础解系。

解: 原方程等价于$x_n=-nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}$，

例3

求齐次线性方程组

$$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$$

的基础解系。

解: 原方程等价于$x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}$，即

$$\begin{cases} x_1 &= & x_1 & & & \\ x_2 &= & & x_2 & & \\ & \vdots & & & & \\ x_{n-1} &= & & & & x_{n-1} \\ x_n &= & -nx_1 & -(n-1)x_2 & \cdots & -2x_{n-1} \end{cases}$$

例3

求齐次线性方程组

$$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0$$

的基础解系。

解: 原方程等价于$x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}$，即

$$\begin{cases} x_1 & = & x_1 & & & \\ x_2 & = & & x_2 & & \\ & \vdots & & & & \\ x_{n-1} & = & & & & x_{n-1} \\ x_n & = & -nx_1 & -(n-1)x_2 & \cdots & -2x_{n-1} \end{cases}$$

基础解系为

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

例3

设$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$分别为$m \times n$和$n \times s$矩阵，且$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$。证明：

$$\mathrm{R}(\mathbf{A}) + \mathrm{R}(\mathbf{B}) \leq n.$$

例3

设$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$分别为$m \times n$和$n \times s$矩阵，且$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$。证明：

$$\mathrm{R}(\mathbf{A}) + \mathrm{R}(\mathbf{B}) \leq n.$$

证明: 由$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$知，$\mathbf{B}$的列向量是$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$的解。

例3

设$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$分别为$m \times n$和$n \times s$矩阵，且$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$。证明：

$$\mathrm{R}(\mathbf{A}) + \mathrm{R}(\mathbf{B}) \le n.$$

证明: 由$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$知，$\mathbf{B}$的列向量是$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$的解。故$\mathbf{B}$的列向量组的秩，不超过$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$的基础解系的秩，即

$$\mathrm{R}(\mathbf{B}) \le n - \mathrm{R}(\mathbf{A}),$$

即

$$\mathrm{R}(\mathbf{A}) + \mathrm{R}(\mathbf{B}) \le n.$$

例

设n元齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$与$\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$同解，证明

$$\mathrm{R}(\mathbf{A}) = \mathrm{R}(\mathbf{B}).$$

例

设n元齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$与$\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$同解，证明

$$\mathrm{R}(\mathbf{A})=\mathrm{R}(\mathbf{B}).$$

解: $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$与$\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$同解，故它们有相同的基础解系，而基础解系包含的向量个数相等，即

$$n-\mathrm{R}(\mathbf{A})=n-\mathrm{R}(\mathbf{B}),$$

从而

$$\mathrm{R}(\mathbf{A})=\mathrm{R}(\mathbf{B}).$$

例4

设$\mathbf{A}$为$m \times n$实矩阵，证明$\mathrm{R}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathrm{R}(\mathbf{A})$。

例4

设$\mathbf{A}$为$m \times n$实矩阵，证明$\mathrm{R}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathrm{R}(\mathbf{A})$。

解: 只需证明$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$与$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$同解。

例4

设$\mathbf{A}$为$m\times n$实矩阵，证明$\mathrm{R}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=\mathrm{R}(\mathbf{A})$。

解: 只需证明$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$与$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$同解。

(1) 若$\mathbf{x}$满足$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$，则有$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{A}^T(\mathbf{Ax})=\mathbf{0}$。

例4

设$\mathbf{A}$为$m \times n$实矩阵，证明$\mathrm{R}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathrm{R}(\mathbf{A})$。

解: 只需证明$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$与$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$同解。

(1) 若$\mathbf{x}$满足$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$，则有$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^T(\mathbf{Ax}) = \mathbf{0}$。

(2) 若$\mathbf{x}$满足$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$，则

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = 0,$$

即

$$(\mathbf{Ax})^T\mathbf{Ax} = 0,$$

故$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$。

定理3.5.1

对于非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，以下命题等价：

(i) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解；

(ii) $\mathbf{b}$可由$\mathbf{A}$的列向量组线性表示；

(iii) $\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\mathrm{r}(\mathbf{A})$。

定理3.5.1

对于非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，以下命题等价：

(i) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解；

(ii) $\mathbf{b}$可由$\mathbf{A}$的列向量组线性表示；

(iii) $\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\mathrm{r}(\mathbf{A})$。

证明:

(i)⇔(ii) 记$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$等价于

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{b}.$$

(ii)⇔(iii) 若$\mathbf{b}$可由$\mathbf{A}$的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，则$(\mathbf{A},\mathbf{b})$的列向量组与$\mathbf{A}$的列向量组等价，故$\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\mathrm{r}(\mathbf{A})$。

定理3.5.1

对于非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，以下命题等价：

(i) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解；

(ii) $\mathbf{b}$可由$\mathbf{A}$的列向量组线性表示；

(iii) $\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\mathrm{r}(\mathbf{A})$。

证明:

(i)⇔(ii) 记$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$等价于

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{b}.$$

(ii)⇔(iii) 若$\mathbf{b}$可由$\mathbf{A}$的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，则$(\mathbf{A},\mathbf{b})$的列向量组与$\mathbf{A}$的列向量组等价，故$\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\mathrm{r}(\mathbf{A})$。

反之，若$\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\mathrm{r}(\mathbf{A})$，则$\mathbf{b}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，否则$\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\mathrm{r}(\mathbf{A})+1$，导致矛盾。

注

$\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\mathrm{r}(\mathbf{A})+1$会导致矛盾方程的出现

记$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r$，若$\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\mathrm{r}(\mathbf{A})+1$，则增广矩阵$(\mathbf{A},\mathbf{b})$经过初等行变换所得的行阶梯形矩阵形如

$$\left(\begin{array}{cccccc:c}
1 & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

其中$d_{r+1}\neq 0$（否则$\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathbf{b})=r$）。这意味着出现了矛盾方程

$$0=d_{r+1}.$$

推论

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\text{有唯一解} \iff \mathrm{r}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\text{的列数}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \cdots & 0 & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

定理3.5.2

若$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$是$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的解，则$\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$是$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解。

定理3.5.2

若$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$是$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的解，则$\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$是$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解。

证明:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)=\mathbf{Ax}_1-\mathbf{Ax}_2=\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{0},$$

故$\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$是$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解。

定理3.5.3

若$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解，则其一般解（或称通解）为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\bar{\mathbf{x}}$$

其中$\mathbf{x}_0$是$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的一个特解，而

$$\bar{\mathbf{x}}=k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2+\cdots+k_p\mathbf{x}_p$$

为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一般解。

定理3.5.3

若$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解，则其一般解（或称通解）为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\bar{\mathbf{x}}$$

其中$\mathbf{x}_0$是$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的一个特解，而

$$\bar{\mathbf{x}}=k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2+\cdots+k_p\mathbf{x}_p$$

为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一般解。

证明:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_0+\bar{\mathbf{x}})=\mathbf{Ax}_0+\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{b}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{x}_0+\bar{\mathbf{x}}\text{是}\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\text{的解}$$

设$\mathbf{x}^*$是$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的任意一个解，则$\mathbf{x}^*-\mathbf{x}_0$是$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解，而

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{x}_0+(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}_0).$$

故$\mathbf{x}^*$可表示为$\mathbf{x}_0+\bar{\mathbf{x}}$的形式。

非齐次线性方程组

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

的通解为

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_p\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_0$$

其中$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_p$为$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$的基础解系，$\mathbf{x}_0$为$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的一个特解。

注

“$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的通解” $=$ “$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$的通解” $+$ “$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的特解”

例1

求非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的一般解，其中增广矩阵为

$$(\mathbf{A},\mathbf{b})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

例1

求非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的一般解，其中增广矩阵为

$$(\mathbf{A},\mathbf{b})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div 2]{r_1-r_3,r_3+\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

故通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

例2（重要题型）

设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问λ取何值时，此方程组

(1) 有唯一解?

(2) 无解?

(3) 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解。

例2（重要题型）

设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问λ取何值时，此方程组

(1) 有唯一解？

(2) 无解？

(3) 有无穷多解？ 并在有无穷多解时求其通解。

解:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2.$$

故当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq -3$时，有唯一解。

当$\lambda = 0$时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

当$\lambda=0$时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

当$\lambda=-3$时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_3-1 \\ x_2=x_3-2 \\ x_3=x_3 \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c\in\mathbb{R}$$

例3

设$\boldsymbol{\eta}^*$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$为对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：

- $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关
- $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关

例3

设$\boldsymbol{\eta}^*$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$为对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：

- $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关
- $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关

证明:

(1) 假设$\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性相关，而$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关，故$\boldsymbol{\eta}^*$可由$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性表示，从而$\boldsymbol{\eta}^*$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解，这与$\boldsymbol{\eta}^*$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的解矛盾。故假设不成立，即$\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关。

例3

设$\boldsymbol{\eta}^*$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$为对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：

- $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关
- $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关

证明:

(1) 假设$\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性相关，而$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关，故$\boldsymbol{\eta}^*$可由$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性表示，从而$\boldsymbol{\eta}^*$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解，这与$\boldsymbol{\eta}^*$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的解矛盾。故假设不成立，即$\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关。

(2) 显然，

$$\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r} \text{ 等价于 } \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

例3

设$\boldsymbol{\eta}^*$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$为对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：

- $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关
- $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关

证明:

(1) 假设$\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性相关，而$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关，故$\boldsymbol{\eta}^*$可由$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性表示，从而$\boldsymbol{\eta}^*$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解，这与$\boldsymbol{\eta}^*$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的解矛盾。故假设不成立，即$\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关。

(2) 显然，

$$\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r} \text{ 等价于 } \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

由题(1)结论可知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}) = n-r+1$$

从而结论成立。

例3

设$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_s$为$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的s个解，k_1，k_2，$\cdots$，k_s为实数，满足$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 1$。证明：

$$\mathbf{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解。

例3

设$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_s$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的s个解，k_1，k_2，$\cdots$，k_s为实数，满足$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。证明：

$$\mathbf{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解。

证明:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s) &= k_1\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_1+k_2\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_s\\ &= k_1\mathbf{b}+k_2\mathbf{b}+\cdots+k_s\mathbf{b}\\ &= \mathbf{b}.\end{aligned}$$

例3

对于$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$为它的$n-r+1$个线性无关的解。证明它的任一解可表示为

$$\mathbf{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$

例3

对于$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$为它的$n-r+1$个线性无关的解。证明它的任一解可表示为

$$\mathbf{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$

证明: 取向量组

$$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1.$$

下证该向量组为$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$的一个基础解系。

例3

对于$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$为它的$n-r+1$个线性无关的解。证明它的任一解可表示为

$$\mathbf{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$

证明: 取向量组

$$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1.$$

下证该向量组为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系。

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1})\xrightarrow[j=2,\cdots,n-r+1]{c_j-c_1}(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)$$

例3

对于$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r$，$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$为它的$n-r+1$个线性无关的解。证明它的任一解可表示为

$$\mathbf{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$

证明: 取向量组

$$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1.$$

下证该向量组为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系。

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}) \xrightarrow[j=2,\cdots,n-r+1]{c_j-c_1} (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)$$

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$线性无关

例3

对于$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r$，$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$为它的$n-r+1$个线性无关的解。证明它的任一解可表示为

$$\mathbf{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$

证明: 取向量组

$$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1.$$

下证该向量组为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系。

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}) \xrightarrow[j=2,\cdots,n-r+1]{c_j-c_1} (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)$$

$$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\text{线性无关}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{线性无关}$$

例3

对于$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$为它的$n-r+1$个线性无关的解。证明它的任一解可表示为

$$\mathbf{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$

证明: 取向量组

$$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1.$$

下证该向量组为$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系。

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})\xrightarrow[j=2,\cdots,n-r+1]{c_j-c_1}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)$$

$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$线性无关

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$线性无关

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$线性无关

例3

对于$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$，$\mathrm{r}(\mathbf{A})=r$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$为它的$n-r+1$个线性无关的解。证明它的任一解可表示为

$$\mathbf{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$

证明: 取向量组

$$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1.$$

下证该向量组为$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$的一个基础解系。

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1})\xrightarrow[j=2,\cdots,n-r+1]{c_j-c_1}(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\text{线性无关}\\ \Rightarrow\quad&\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{线性无关}\\ \Rightarrow\quad&\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{线性无关}\end{aligned}$$

于是$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的任意一个解$\mathbf{x}$可表示为

$$\mathbf{x}=k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)+\boldsymbol{\eta}_1$$

于是$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的任意一个解$\mathbf{x}$可表示为

$$\mathbf{x} = k_2(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + \cdots + k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1} - \boldsymbol{\eta}_1) + \boldsymbol{\eta}_1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = (1 - k_2 - \cdots - k_{n+r-1})\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$$

于是$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的任意一个解$\mathbf{x}$可表示为

$$\mathbf{x} = k_2(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + \cdots + k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1} - \boldsymbol{\eta}_1) + \boldsymbol{\eta}_1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = (1 - k_2 - \cdots - k_{n+r-1})\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$$

例

设四元齐次线性方程组

$$\mathrm{I}:\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0; \end{cases} \qquad \mathrm{II}:\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$$

求

(1) 方程组I与II的基础解系

(1) 方程组I与II的公共解

例

设四元齐次线性方程组

$$\mathrm{I}: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \qquad \mathrm{II}: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

求

(1) 方程组I与II的基础解系

(1) 方程组I与II的公共解

解:

(1) 因为 $\mathrm{I} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \qquad x_3 \\ x_4 = x_2 \end{cases}$

例

设四元齐次线性方程组

$$\mathrm{I}:\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0; \end{cases} \qquad \mathrm{II}:\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$$

求

(1) 方程组I与II的基础解系

(1) 方程组I与II的公共解

解:

(1) 因为 $\mathrm{I} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_2 \end{cases}$

故(I)的基础解系为

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因为 II $\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_4 = -x_2 + x_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -x_2 + x_3 \end{cases}$

因为 II $\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_4 = -x_2 + x_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -x_2 + x_3 \end{cases}$

故(I)的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) 方程I与II的公共解，即联立I和II所得新方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(2) 方程I与II的公共解，即联立I和II所得新方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_4+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_3+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 方程I与II的公共解，即联立I和II所得新方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_4+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_3+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases}$$

(2) 方程I与II的公共解，即联立I和II所得新方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_4 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_3 + r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}.$$