线性代数

分块矩阵

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 4 月 26 日

1. 矩阵分块

1. 矩阵分块

矩阵分块

矩阵

$$\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

可记为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

定义 (矩阵的按行分块)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in})$$

矩阵分块

定义 (矩阵的按列分块)

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_2, & \cdots, & \mathbf{b}_s \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

当 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中非零元素都集中在主对角线附近，有时可分块成如下对角块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 r_i 阶方阵 $(i=1,2,\cdots,m)$，且

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n.$$

矩阵分块

如

$$
\left(\begin{array}{cc|ccc|c}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right)
$$

定义 (分块矩阵的加法)　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 为同型矩阵，则

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} + \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} + \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} + \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的数乘)

$$\lambda \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的乘法)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{is}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{sj}$ 的行数，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rt}\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}.$$

矩阵分块

例　用分块矩阵的乘法计算 $\boldsymbol{AB}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵分块

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0}_{2\times 3} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{I}_2 \\ -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_{3\times 2} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

则

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{I}_2 \\ -\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{I}_2 \\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 按列分块成 $1 \times s$ 分块矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 看成 1×1 分块矩阵，则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_s) = (\boldsymbol{A}\mathbf{b}_1, \boldsymbol{A}\mathbf{b}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\mathbf{b}_s)$$

若已知 $\boldsymbol{AB} = 0$，则显然

$$\boldsymbol{A}\mathbf{b}_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

因此，$\boldsymbol{B}$ 的每一列 $\mathbf{b}_j$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = 0$ 的解。

例　设 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

例　设 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，证明 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$.

证明.　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把 $\boldsymbol{A}$ 用列向量表示为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$$

矩阵分块

例　设 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明.　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把 $\boldsymbol{A}$ 用列向量表示为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，故

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j=0, \quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

矩阵分块

例　设 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明.　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把 $\boldsymbol{A}$ 用列向量表示为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，故

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\boldsymbol{\alpha}_j^T\boldsymbol{\alpha}_j=0,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0\ \Rightarrow\ a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}.$$

□

矩阵分块

例　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 可以分块成同型对角块矩阵，即

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \boldsymbol{C}_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_1 & & & \\ & \boldsymbol{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \boldsymbol{D}_m\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}_i$ 和 $\boldsymbol{D}_i$ 为同阶方阵（$i=1,2,\cdots,m$），则

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{D}_1 & & & \\ & \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \boldsymbol{C}_m\boldsymbol{D}_m\end{pmatrix}$$

矩阵分块

例　证明：若方阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的上三角阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为上三角阵。

矩阵分块

证明. 对阶数 n 用数学归纳法。

矩阵分块

证明. 对阶数 n 用数学归纳法。

1 当 $n=1$ 时，$(a)^{-1}=(\frac{1}{a})$，结论成立。

证明. 对阶数 n 用数学归纳法。

1 当 $n=1$ 时，$(a)^{-1}=(\frac{1}{a})$，结论成立。

2 假设命题对 $n-1$ 阶可逆上三角矩阵成立，考虑 n 阶情况，设

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为 $n-1$ 阶可逆上三角阵。

□

矩阵分块

续. 设 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

矩阵分块

续. 设 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\boldsymbol{\alpha\gamma} & a_{11}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha B}_1 \\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

矩阵分块

续. 于是

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{I}_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

续. 于是

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{I}_1 \Rightarrow \boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

由归纳假设，$\boldsymbol{B}_1$ 为 $n-1$ 阶上三角矩阵，因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。 □

定义 (分块矩阵的转置)　分块矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{B}_{lk})_{t\times s},$$

其中 $\boldsymbol{B}_{lk} = \boldsymbol{A}_{kl}$.

矩阵分块

定义 (分块矩阵的转置)　分块矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{B}_{lk})_{t\times s},$$

其中 $\boldsymbol{B}_{lk} = \boldsymbol{A}_{kl}$.

例

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^T & \boldsymbol{A}_{21}^T \\ \boldsymbol{A}_{12}^T & \boldsymbol{A}_{22}^T \\ \boldsymbol{A}_{13}^T & \boldsymbol{A}_{23}^T \end{pmatrix}$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的转置)　分块矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{B}_{lk})_{t\times s},$$

其中 $\boldsymbol{B}_{lk} = \boldsymbol{A}_{kl}$.

例

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^T & \boldsymbol{A}_{21}^T \\ \boldsymbol{A}_{12}^T & \boldsymbol{A}_{22}^T \\ \boldsymbol{A}_{13}^T & \boldsymbol{A}_{23}^T \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} \xlongequal{\text{按行分块}} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T & \mathbf{b}_2^T & \cdots & \mathbf{b}_m^T \end{pmatrix}$$

矩阵分块

定义 (可逆分块矩阵的逆矩阵) 对角块矩阵（准对角矩阵）

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix}$$

的行列式为 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_m|$，因此，$\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件为

$$|\boldsymbol{A}_i|\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

其逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m^{-1}\end{pmatrix}$$

矩阵分块

分块矩阵的作用：

- 用分块矩阵求逆矩阵，可将高阶矩阵的求逆转化为低阶矩阵的求逆。
- 一个 2×2 的分块矩阵求逆，可以根据逆矩阵的定义，用解矩阵方程的方法解得。

矩阵分块

例　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 皆为可逆矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　因 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{D}| \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

解　因 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{D}| \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。设 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{BX} & \boldsymbol{BY} \\ \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY} + \boldsymbol{DT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

解　因 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{D}| \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。设 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{BX} & \boldsymbol{BY} \\ \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY} + \boldsymbol{DT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{BX} &= \boldsymbol{I} & &\Rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{BY} &= \boldsymbol{0} & &\Rightarrow \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DZ} &= \boldsymbol{0} & &\Rightarrow \boldsymbol{Z} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1} \\ \boldsymbol{CY} + \boldsymbol{DT} &= \boldsymbol{I} & &\Rightarrow \boldsymbol{T} = \boldsymbol{D}^{-1} \end{aligned}$$

解　因 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{D}|\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。设 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{BX} & \boldsymbol{BY} \\ \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DT} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{BX}=\boldsymbol{I} \quad & \Rightarrow \boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0} \quad & \Rightarrow \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DZ}=\boldsymbol{0} \quad & \Rightarrow \boldsymbol{Z}=-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1} \\ \boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DT}=\boldsymbol{I} \quad & \Rightarrow \boldsymbol{T}=\boldsymbol{D}^{-1} \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

矩阵分块

定义 (分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵) 对于分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

同样可以定义它的 3 类初等行变换与列变换，并相应地定义 3 类分块矩阵：

(i) 分块倍乘矩阵（C_1, C_2 为可逆阵）

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

(ii) 分块倍加矩阵

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ C_3 & I_n \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} I_m & C_4 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

(iii) 分块对换矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

例　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}$ 为方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆。证明：$\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

矩阵分块

解　构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式可知

$$|\boldsymbol{A}| = |\mathbf{P}_1\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_{11}| \cdot |\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}|$$

故 $\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 可逆。

矩阵分块

解 (续)

$$\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix} \overset{\mathbf{Q} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

解 (续)

$$\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix} \xlongequal{\mathbf{Q} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & -\boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

解 (续)

$$\mathbf{P}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\end{pmatrix}\xlongequal{\mathbf{Q}=\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}\end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_1 & -\boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}\end{pmatrix}$$

矩阵分块

解 (续)

$$\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix} \xlongequal{\mathbf{Q} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & -\boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & -\boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例　设 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

例　设 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

证明.　构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

例　设 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

证明.　构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例　设 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

证明.　构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得

$$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

□

矩阵分块

例 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶分块矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$$

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

证明.

将分块矩阵 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

总之有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得结论。 $\square$