线性代数

线性方程组

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 5 月 1 日

1. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

1. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，考察以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{1}$$

若将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

齐次方程组 (1) 可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0}.$$

而齐次方程组 (1) 有非零解的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，即

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) < n.$$

定理 1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则

$$\underline{\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\text{有非零解}} \iff \underline{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) < n}.$$

定理 2 (定理 1 的等价命题)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则

$$\underline{\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\text{只有零解}} \iff \underline{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n = \boldsymbol{A}\text{的列数}}.$$

例 1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明：存在 $n \times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是

$$|\boldsymbol{A}| = 0.$$

例 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明：存在 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是

$$|\boldsymbol{A}|=0.$$

证明. $|\boldsymbol{A}|=0 \iff \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解。下证

$$存在 n\times s 矩阵 \boldsymbol{B}\neq 0 使得 \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0} 有非零解.$$

$(\Longrightarrow)$ 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的解向量为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解。又 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B}$ 至少有一个非零列向量，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 至少有一个非零解。

$(\Longleftarrow)$ 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，任取一个非零解 $\boldsymbol{\beta}$，令

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{0},\ \cdots,\ \boldsymbol{0})$$

则 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$。

□

定理 3 若 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的两个解，则

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 \quad (k_1，k_2\text{为任意常数})$$

也是它的解。

定理 3 若 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个解，则

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2 \quad (k_1，k_2\text{为任意常数})$$

也是它的解。

证明. 因为

$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2)=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=k_1\boldsymbol{0}+k_2\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},$$

故 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$ 也为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。 □

定义 1 (基础解系) 设 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，若

(1) $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 线性无关；

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任一解向量可由 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 线性表示。

则称 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

注　关于基础解系，请注意以下几点：

(1) 基础解系即全部解向量的极大无关组。

(2) 找到了基础解系，就找到了齐次线性方程组的全部解：

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{x}_p \quad (k_1, k_2, \cdots, k_p \text{为任意常数}).$$

(3) 基础解系不唯一。

例 2　求方程组

$$x + y + z = 0$$

的全部解。

解

(1) 选取 y, z 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{为任意常数})$$

解 (续)

(2) 选取 x, z 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = x \\ y = -x - z \\ z = z \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{为任意常数})$$

(3) 选取 x, y 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - y \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{为任意常数})$$

定理 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r<n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 存在基础解系，且基础解系含 $n-r$ 个解向量。

注 注意以下两点：

- r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，也是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵的非零行行数，是非自由未知量的个数。
- n 为未知量的个数，故 $n-r$ 为自由未知量的个数。有多少自由未知量，基础解系里就对应有多少个向量。

例 3　求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & 24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div 4]{r_3\div 8} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 4　求齐次线性方程组

$$nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$$

的基础解系。

例 4　求齐次线性方程组

$$nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$$

的基础解系。

解　原方程等价于 $x_n=-nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}$，即

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = \qquad x_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = \qquad\qquad x_{n-1} \\ x_n = -nx_1 \quad -(n-1)x_2 \quad \cdots \quad -2x_{n-1} \end{cases}$$

基础解系为

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}$$

例 5 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$。证明:

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B}) \leq n.$$

例 5 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$。证明：

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B}) \leq n.$$

证明. 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ 知，$\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解。故 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩，不超过 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系的秩，即

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{B}) \leq n - \mathrm{R}(\boldsymbol{A}),$$

即

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B}) \leq n.$$

□

例 6　设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，证明

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

例 6　设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，证明

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

解　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，故它们有相同的基础解系，而基础解系包含的向量个数相等，即

$$n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-\mathrm{R}(\boldsymbol{B}),$$

从而

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

例 7　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$。

例 7 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$。

证明. 只需证明 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 同解。

(1) 若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$，则有 $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{Ax}) = \boldsymbol{0}$。

(2) 若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = 0,$$

即

$$(\boldsymbol{Ax})^T\boldsymbol{Ax} = 0,$$

故 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$。

□