线性代数

矩阵

张晓平

数学与统计学院
Email: xpzhang.math@whu.edu.cn
Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

矩阵的定义

由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$排成的$m$行$n$列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列矩阵，简称$m\times n$矩阵，记作

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

这$m\times n$个数称为$\mathbf{A}$的元素，数a_{ij}位于矩阵$\mathbf{A}$的第i行第j列，称为矩阵的(i,j)元。可简记为(a_{ij})、$(a_{ij})_{m\times n}$或$\mathbf{A}_{m\times n}$。

矩阵的定义

由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$排成的$m$行$n$列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列矩阵，简称$m\times n$矩阵，记作

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

这$m\times n$个数称为$\mathbf{A}$的元素，数a_{ij}位于矩阵$\mathbf{A}$的第i行第j列，称为矩阵的(i,j)元。可简记为(a_{ij})、$(a_{ij})_{m\times n}$或$\mathbf{A}_{m\times n}$。

说明

- 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵。
- 行数与列数都等于n的矩阵称为n阶矩阵或n阶方阵。n阶矩阵$\mathbf{A}$也记作$\mathbf{A}_n$
- 只有一行的矩阵
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$
称为行矩阵，又称行向量，也记为
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{pmatrix}$$
- 只有一列的矩阵
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
称为列矩阵，又称列向量。

说明

- 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵。
- 行数与列数都等于n的矩阵称为n阶矩阵或n阶方阵。n阶矩阵$\mathbf{A}$也记作$\mathbf{A}_n$
- 只有一行的矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

称为行矩阵，又称行向量，也记为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{pmatrix}$$

- 只有一列的矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，又称列向量。

说明

- 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵。
- 行数与列数都等于n的矩阵称为n阶矩阵或n阶方阵。n阶矩阵$\mathbf{A}$也记作$\mathbf{A}_n$
- 只有一行的矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

称为行矩阵，又称行向量，也记为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{pmatrix}$$

- 只有一列的矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，又称列向量。

说明

- 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵。
- 行数与列数都等于n的矩阵称为n阶矩阵或n阶方阵。n阶矩阵$\mathbf{A}$也记作$\mathbf{A}_n$
- 只有一行的矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

称为行矩阵，又称行向量，也记为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{pmatrix}$$

- 只有一列的矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，又称列向量。

说明［续］

- 两行矩阵的行数相等、列数也相等时，称它们为同型矩阵。
- 如果$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$是同型矩阵， 且它们的对应元素相等， 即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

  则称矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相等， 记作

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}.$$

- 元素都为0的矩阵称为零矩阵， 记作$\mathbf{O}$。

  注意不同型的零矩阵是不同的。

说明［续］

- 两行矩阵的行数相等、列数也相等时，称它们为同型矩阵。
- 如果$\mathbf{A} = (a_{ij})$和$\mathbf{B} = (b_{ij})$是同型矩阵， 且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij} = b_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n),$$

则称矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相等，记作

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

- 元素都为0的矩阵称为零矩阵，记作$\mathbf{O}$。

注意不同型的零矩阵是不同的。

说明［续］

- 两行矩阵的行数相等、列数也相等时，称它们为同型矩阵。
- 如果$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$是同型矩阵，且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相等，记作

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}.$$

- 元素都为0的矩阵称为零矩阵，记作$\mathbf{O}$。

注意不同型的零矩阵是不同的。

说明［续］

- 两行矩阵的行数相等、列数也相等时，称它们为同型矩阵。
- 如果$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$是同型矩阵，且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相等，记作

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}.$$

- 元素都为0的矩阵称为零矩阵，记作$\mathbf{O}$。

注意不同型的零矩阵是不同的。

例1

某厂向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 产品1 \\ 产品2 \\ 产品3 \\ 产品4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 商店1 & 商店2 & 商店3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \end{array}$$

其中a_{ij}为工厂向第j店发送第i种产品的数量。

例1［续］

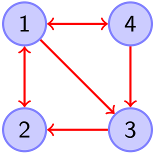
这四种产品的单价及单件重量也可列成矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ 产品1 \\ 产品2 \\ 产品3 \\ 产品4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 单价 & 单件重量 \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \end{array}$$

其中b_{i1}为第i种产品的单价，b_{i2}为第i种产品的单件重量。

例2

四个城市间的单向航线如图所示



若令

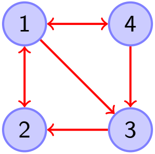
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从}i\text{市到}j\text{市有1条单向航线} \\ 0, & \text{从}i\text{市到}j\text{市没有单向航线} \end{cases}$$

则该航线图可用矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \text{城市1} \\ \text{城市2} \\ \text{城市3} \\ \text{城市4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{城市1} & \text{城市2} & \text{城市3} & \text{城市4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

例2

四个城市间的单向航线如图所示



若令

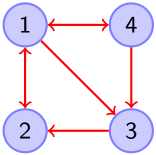
$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从}i\text{市到}j\text{市有1条单向航线}\\ 0, & \text{从}i\text{市到}j\text{市没有单向航线}\end{cases}$$

则该航线图可用矩阵表示为

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \\ \text{城市1}\\ \text{城市2}\\ \text{城市3}\\ \text{城市4}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{城市1} & \text{城市2} & \text{城市3} & \text{城市4}\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

例2

四个城市间的单向航线如图所示



若令

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从}i\text{市到}j\text{市有1条单向航线} \\ 0, & \text{从}i\text{市到}j\text{市没有单向航线} \end{cases}$$

则该航线图可用矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \text{城市1} \\ \text{城市2} \\ \text{城市3} \\ \text{城市4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{城市1} & \text{城市2} & \text{城市3} & \text{城市4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

例3

设变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$与变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$满足：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

它表示一个从变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$的**线性变换**， 其系数a_{ij}构成矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$。

- 给定了线性变换(1)，其系数矩阵也就确定。
- 反之，若给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定。
- 从这个意义上讲，线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系。

例3

设变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$与变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$满足：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

它表示一个从变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$的线性变换， 其系数a_{ij}构成矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$。

- 给定了线性变换(1)，其系数矩阵也就确定。
- 反之，若给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定。
- 从这个意义上讲，线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系。

例3

设变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$与变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$满足：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

它表示一个从变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$的线性变换，其系数a_{ij}构成矩阵$A = (a_{ij})_{m \times n}$。

- 给定了线性变换(1)，其系数矩阵也就确定。
- 反之，若给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定。
- 从这个意义上讲，线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系。

例3

设变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$与变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$满足：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

它表示一个从变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$的线性变换，其系数a_{ij}构成矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$。

- 给定了线性变换(1)，其系数矩阵也就确定。
- 反之，若给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定。
- 从这个意义上讲，线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系。

线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

称为恒等变换，它对应n阶方阵

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

该方阵称为n阶单位矩阵，简称单位阵。其(i,j)元为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

称为恒等变换，它对应n阶方阵

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

该方阵称为n阶单位矩阵，简称单位阵。其(i,j)元为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \qquad \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

称为恒等变换，它对应n阶方阵

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

该方阵称为n阶单位矩阵，简称单位阵。其(i,j)元为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1, \\ y_2 = \lambda_2 x_2, \\ \quad \vdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}$$

它对应n阶方阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

这种方阵称为对角矩阵，简称对角阵，记作

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1, \\ y_2 = \lambda_2 x_2, \\ \qquad \vdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}$$

它对应n阶方阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

这种方阵称为对角矩阵，简称对角阵，记作

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1, \\ y_2 = \lambda_2 x_2, \\ \qquad \vdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}$$

它对应n阶方阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

这种方阵称为对角矩阵，简称对角阵，记作

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所对应的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

是一个投影变换。

矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所对应的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

是一个投影变换。

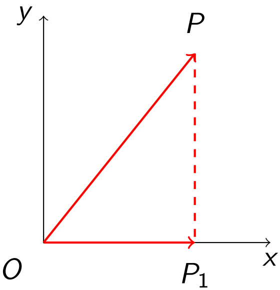
矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所对应的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

是一个投影变换。



矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

设$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$x_1 = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta+\varphi),$$
$$y_1 = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = r\sin(\theta+\varphi),$$

这表明经过上述变换，将向量$\vec{OP}$逆时针旋转φ角得到向量$\vec{OP_1}$。

矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

设$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，　则

$$\begin{aligned} x_1 &= r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta+\varphi), \\ y_1 &= r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = r\sin(\theta+\varphi), \end{aligned}$$

这表明经过上述变换，将向量$\vec{OP}$逆时针旋转φ角得到向量$\vec{OP_1}$。

矩阵

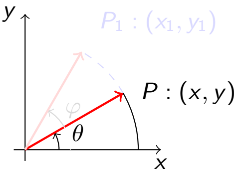
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

设$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，　则

$$x_1 = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta+\varphi),$$
$$y_1 = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = r\sin(\theta+\varphi),$$



这表明经过上述变换，将向量$\vec{OP}$逆时针旋转φ角得到向量$\vec{OP_1}$。

矩阵

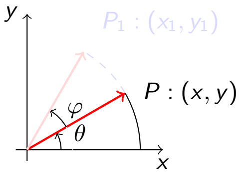
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

设$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$， 则

$$x_1 = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta+\varphi),$$
$$y_1 = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = r\sin(\theta+\varphi),$$



这表明经过上述变换，将向量$\vec{OP}$逆时针旋转φ角得到向量$\vec{OP}_1$。

矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

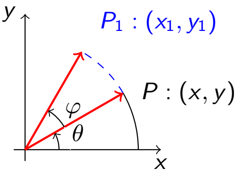
对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

设$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$x_1 = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta+\varphi),$$

$$y_1 = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = r\sin(\theta+\varphi),$$



这表明经过上述变换，将向量$\vec{OP}$逆时针旋转φ角得到向量$\vec{OP_1}$。

高斯消去法

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2 \end{cases}$$

高斯消去法

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2 \end{cases}$$

解：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

高斯消去法

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2 \end{cases}$$

解：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \\ -3x_3 + 9x_4 = 3 \end{cases}$$

高斯消去法

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2 \end{cases}$$

解：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_3 + 9x_4 = 3 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$

高斯消去法

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2 \end{cases}$$

解：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

如此形状的方程组称为阶梯形线性方程组.

高斯消去法

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2 \end{cases}$$

该方程组可写成矩阵形式

$$\left(A \mid b \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array} \right)$$

图: 增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array}\right) \xlongequal{r_1\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3+(-3)\times r_1,\ r_4+(-5)\times r_1]{r_2+(-2)\times r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array}\right) \xlongequal{r_1\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal[r_3+(-3)\times r_1,\ r_4+(-5)\times r_1]{r_2+(-2)\times r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\
2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\
3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\
5 & -3 & 1 & 20 & -2
\end{array}\right)
\xlongequal{r_1 \times \frac{1}{2}}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\
3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\
5 & -3 & 1 & 20 & -2
\end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal[r_3+(-3)\times r_1,\ r_4+(-5)\times r_1]{r_2+(-2)\times r_1}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 9 & 3
\end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array}\right) \xlongequal{r_1\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3+(-3)\times r_1,\ r_4+(-5)\times r_1]{r_2+(-2)\times r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{cccc:c}
2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\
2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\
3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\
5 & -3 & 1 & 20 & -2
\end{array}\right)
\xlongequal{r_1\times\frac{1}{2}}
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\
3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\
5 & -3 & 1 & 20 & -2
\end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal[r_3+(-3)\times r_1,\ r_4+(-5)\times r_1]{r_2+(-2)\times r_1}
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 9 & 3
\end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_3 \div (-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 9 & 3
\end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal{r_3 \div (-3)}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 9 & 3
\end{array}\right)
\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4}
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal{r_3 \div (-3)}
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_3 \div (-3)} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

例

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$$

其增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

例

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$$

其增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+(-2)\times r_2]{r_3+(-2)\times r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div(-3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right) \xlongequal[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3+(-2)\times r_2]{r_3+(-2)\times r_2} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div(-3)} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right) \xlongequal[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3+(-2)\times r_2]{r_3+(-2)\times r_2} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div(-3)} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\
3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2
\end{array}\right)
\xlongequal[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3
\end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal[r_3+(-2)\times r_2]{r_3+(-2)\times r_2}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3
\end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div(-3)}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right) \xlongequal[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3+(-2)\times r_2]{r_3+(-2)\times r_2} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_4 \div (-3)} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right) \xlongequal[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3+(-2)\times r_2]{r_3+(-2)\times r_2} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div(-3)} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\
3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2
\end{array}\right)
\xlongequal[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3
\end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal[r_3+(-2)\times r_2]{r_3+(-2)\times r_2}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3
\end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div(-3)}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\xlongequal{r_2+(-2)\times r_3}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal{r_1+r_2}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

该矩阵称为行简化阶梯矩阵，对应的线性方程组为

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\
x_3 + 4x_5 = 2 \\
x_4 - 3x_5 = -1
\end{cases}
$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xlongequal{r_2+(-2)\times r_3} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

该矩阵称为行简化阶梯矩阵，对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\ x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\xlongequal{r_2+(-2)\times r_3}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xlongequal{r_1+r_2}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & -1 & 0 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

该矩阵称为**行简化阶梯矩阵**，对应的线性方程组为

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\
x_3 + 4x_5 = 2 \\
x_4 - 3x_5 = -1
\end{cases}
$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xlongequal{r_2+(-2)\times r_3} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

该矩阵称为行简化阶梯矩阵，对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\ x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\ x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

注

该方程组有5个未知量，其中x_1, x_3, x_4为基本未知量，x_2, x_5为自由未知量。

任取$x_2 = k_1, x_5 = k_2$，可得线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 = 1 + k_1 - 7k_2, \\ x_2 = k_1, \\ x_3 = 2 - 4k_2, \\ x_4 = -1 + 3k_2, \\ x_5 = k_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\qquad + 7x_5 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad + 4x_5 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

注

该方程组有5个未知量，其中x_1, x_3, x_4为基本未知量，x_2, x_5为自由未知量。

任取$x_2 = k_1, x_5 = k_2$，可得线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 = 1 + k_1 - 7k_2, \\ x_2 = k_1, \\ x_3 = 2 - 4k_2, \\ x_4 = -1 + 3k_2, \\ x_5 = k_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\ x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

注

该方程组有5个未知量，其中x_1, x_3, x_4为基本未知量，x_2, x_5为自由未知量。

任取$x_2 = k_1, x_5 = k_2$，可得线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 = 1 + k_1 - 7k_2, \\ x_2 = k_1, \\ x_3 = 2 - 4k_2, \\ x_4 = -1 + 3k_2, \\ x_5 = k_2. \end{cases}$$

例

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

由第三行可以看出，该线性方程组无解。

例

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

由第三行可以看出，该线性方程组无解。

例

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \xlongequal[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_3+(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

由第三行可以看出，该线性方程组无解。

例

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \xlongequal[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_3+(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

由第三行可以看出，该线性方程组无解。

例

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \xlongequal[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_3+(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

由第三行可以看出，该线性方程组无解。

例

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \xlongequal[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_3+(-1)\times r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

由第三行可以看出，该线性方程组无解。

- 含有矛盾方程而无解的方程组称为**不相容方程组**
- 有解的方程组称为**相容方程组**
- **多余方程**

对于一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & \vdots & d_1 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & \vdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & \vdots & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ii} = 1 \ (i = 1, 2, \cdots, r)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & \vdots & d_1 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & \vdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & \vdots & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ii} = 1 \ (i = 1, 2, \cdots, r)$.

$$
\left(\begin{array}{cccc:c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
\Rightarrow
\left(\begin{array}{ccccccc:c}
c_1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & c_2 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

其中$c_{ii} = 1 \ (i = 1, 2, \cdots, r)$.

1 线性方程组有解$\Leftrightarrow$ $d_{r+1}=0$；

2 在有解的情况下：

- 当$r=n$时，有唯一解$x_1=d_1$，$x_2=d_2$，$\cdots$，$x_n=d_n$；
- 当$r<n$时，有无穷多解

$$\begin{cases} x_1 & = & d_1-c_{1,r+1}k_1-\cdots-c_{1n}k_{n-r}, \\ x_2 & = & d_2-c_{2,r+1}k_1-\cdots-c_{2n}k_{n-r}, \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & d_r-c_{r,r+1}k_1-\cdots-c_{rn}k_{n-r}, \\ x_{r+1} & = & k_1, \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & k_{n-r}. \end{cases}$$

1 矩阵

2 矩阵的计算
- 矩阵的加法
- 矩阵的数乘
- 矩阵的乘法
- 一些特殊矩阵及其运算

3 矩阵的转置、对称矩阵

4 逆矩阵

5 矩阵的初等变换与初等矩阵

6 矩阵分块

矩阵的加法

设有两个$m \times n$矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$和$\mathbf{B} = (b_{ij})$，则矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$之和记为$\mathbf{A} + \mathbf{B}$，规定为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

注

只有当两个矩阵同型时才能进行加法运算。

矩阵的加法

设有两个$m \times n$矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$和$\mathbf{B} = (b_{ij})$，则矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$之和记为$\mathbf{A} + \mathbf{B}$，规定为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

注

只有当两个矩阵同型时才能进行加法运算。

矩阵加法运算律

(i) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

设$\mathbf{A}=(a_{ij})$，称

$$-\mathbf{A}=(-a_{ij}),$$

为$\mathbf{A}$的负矩阵，显然有

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}.$$

由此规定矩阵的减法为

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}).$$

矩阵加法运算律

(i) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

设$\mathbf{A}=(a_{ij})$，称

$$-\mathbf{A}=(-a_{ij}),$$

为$\mathbf{A}$的负矩阵，显然有

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}.$$

由此规定矩阵的减法为

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}).$$

矩阵的数乘

数k与矩阵$\mathbf{A}$的乘积记作$k\mathbf{A}$或$\mathbf{A}k$，规定为

$$k\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

注

用数k乘一个矩阵，需要把数k乘矩阵的每一个元素，这与行列式的数乘性质不同。

矩阵的数乘

数k与矩阵$\mathbf{A}$的乘积记作$k\mathbf{A}$或$\mathbf{A}k$，规定为

$$k\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

注

用数k乘一个矩阵，需要把数k乘矩阵的每一个元素，这与行列式的数乘性质不同。

矩阵数乘运算律

(i) $(kl)\mathbf{A} = k(l\mathbf{A})$

(ii) $(k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$

(iii) $k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$

矩阵加法与矩阵数乘统称为矩阵的线性运算

矩阵数乘运算律

(i) $(kl)\mathbf{A} = k(l\mathbf{A})$

(ii) $(k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$

(iii) $k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$

矩阵加法与矩阵数乘统称为矩阵的线性运算

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2, \end{cases} \tag{3}$$

若想求从t_1, t_2到y_1, y_2的线性变换，可将(3)代入(2)，便得

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2. \end{cases} \tag{4}$$

线性变换(4)可看成是先作线性变换(3)再作线性变换(2)的结果。

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2, \end{cases} \tag{3}$$

若想求从t_1, t_2到y_1, y_2的线性变换，可将(3)代入(2)，便得

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2. \end{cases} \tag{4}$$

线性变换(4)可看成是先作线性变换(3)再作线性变换(2)的结果。

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2, \end{cases} \tag{3}$$

若想求从t_1, t_2到y_1, y_2的线性变换，可将(3)代入(2)，便得

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2. \end{cases} \tag{4}$$

线性变换(4)可看成是先作线性变换(3)再作线性变换(2)的结果。

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2, \end{cases} \tag{3}$$

若想求从t_1, t_2到y_1, y_2的线性变换，可将(3)代入(2)，便得

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2. \end{cases} \tag{4}$$

线性变换(4)可看成是先作线性变换(3)再作线性变换(2)的结果。

把线性变换（4）叫做线性变换（2）和（3）的乘积，相应地把线性变换（4）对应的矩阵定义为线性变换（2）与（3）所对应矩阵的乘积，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

设A为$m \times n$矩阵，B为$n \times s$矩阵，即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

则A与B之乘积AB（记为$C = (c_{ij})$）为$m \times s$矩阵，且

$$c_{ij} = c_{i1}b_{1j} + c_{i2}b_{2j} + \cdots + c_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

注

两个矩阵A与B相乘有意义的前提是A的列数等于B的行数。

矩阵乘法

设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times s$矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

则A与B之乘积AB（记为$C=(c_{ij})$）为$m\times s$矩阵，且

$$c_{ij}=c_{i1}b_{1j}+c_{i2}b_{2j}+\cdots+c_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

注

两个矩阵A与B相乘有意义的前提是A的列数等于B的行数。

$$a_{21}\times b_{12} + a_{22}\times b_{22} + \cdots + a_{2n}\times b_{n2}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$$a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + \cdots + a_{2n} \times b_{n2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}; & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$$a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + \cdots + a_{2n} \times b_{n2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$a_{21} \times b_{12}$ $\times$ $a_{22} \times b_{22}$ $\times \cdots \times$ $a_{2n} \times b_{n2}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$$a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + \cdots + a_{2n} \times b_{n2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$a_{21} \times b_{12}$

$a_{22} \times b_{22}$

$a_{2n} \times b_{n2}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

$$a_{21}\times b_{12}+a_{22}\times b_{22}+\cdots+a_{2n}\times b_{n2}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}; & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$$a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + \cdots + a_{2n} \times b_{n2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}; & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

例1

求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ 的乘积$\mathbf{AB}$

解：

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1\times5+2\times(-5)+(-1)\times6 & 1\times6+2\times(-6)+(-1)\times0 \\ (-1)\times5+3\times(-5)+4\times6 & (-1)\times6+3\times(-6)+4\times0 \\ 1\times5+1\times(-5)+1\times6 & 1\times6+1\times(-6)+1\times0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 4 & -24 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

例1

求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ 的乘积$\mathbf{AB}$

解：

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1\times 5+2\times(-5)+(-1)\times 6 & 1\times 6+2\times(-6)+(-1)\times 0 \\ (-1)\times 5+3\times(-5)+4\times 6 & (-1)\times 6+3\times(-6)+4\times 0 \\ 1\times 5+1\times(-5)+1\times 6 & 1\times 6+1\times(-6)+1\times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 4 & -24 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

例1

求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ 的乘积$\mathbf{AB}$

解：

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1\times 5+2\times(-5)+(-1)\times 6 & 1\times 6+2\times(-6)+(-1)\times 0 \\ (-1)\times 5+3\times(-5)+4\times 6 & (-1)\times 6+3\times(-6)+4\times 0 \\ 1\times 5+1\times(-5)+1\times 6 & 1\times 6+1\times(-6)+1\times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 4 & -24 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

例1

求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ 的乘积$\mathbf{AB}$

解：

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1\times 5+2\times(-5)+(-1)\times 6 & 1\times 6+2\times(-6)+(-1)\times 0 \\ (-1)\times 5+3\times(-5)+4\times 6 & (-1)\times 6+3\times(-6)+4\times 0 \\ 1\times 5+1\times(-5)+1\times 6 & 1\times 6+1\times(-6)+1\times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 4 & -24 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

例2

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

计算**AB**与**BA**.

解:

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

例2

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

计算**AB**与**BA**.

解:

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

例2

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

计算**AB**与**BA**.

解:

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

例2

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

计算**AB**与**BA**.

解:

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

例3

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

计算**AB**，**AC**和**BA**.

解：

$$\mathbf{AB}=\mathbf{AC}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ -2ab & -2ab \end{pmatrix}$$

例3

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

计算**AB**, **AC**和**BA**.

解：

$$\mathbf{AB}=\mathbf{AC}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ -2ab & -2ab \end{pmatrix}$$

例3

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

计算$\mathbf{AB}$，$\mathbf{AC}$和$\mathbf{BA}$.

解：

$$\mathbf{AB}=\mathbf{AC}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ -2ab & -2ab \end{pmatrix}$$

由以上例题可以看出一些结论：

1 矩阵乘法不满足交换律。

若$AB \neq BA$，则称A与B不可交换。

若$AB = BA$，则称A与B可交换。

2 $AB = 0 \nRightarrow A = 0$或$B = 0$

$A \neq 0$且$B \neq 0 \xRightarrow{\text{有可能}} AB = 0$

3 矩阵乘法不满足消去律，即当$A \neq 0$时，

$$AB = AC \nRightarrow B = C$$

当A为非奇异矩阵，即$|A| \neq 0$时，

$$AB = 0 \Rightarrow B = 0; \quad AB = AC \Rightarrow B = C.$$

由以上例题可以看出一些结论：

1 矩阵乘法不满足交换律。

若$AB \neq BA$，则称A与B不可交换。

若$AB = BA$，则称A与B可交换。

2 $AB = 0 \;\not\Rightarrow\; A = 0$或$B = 0$

$A \neq 0$且$B \neq 0 \xRightarrow{\text{有可能}} AB = 0$

3 矩阵乘法不满足消去律，即当$A \neq 0$时，

$$AB = AC \;\not\Rightarrow\; B = C$$

当A为非奇异矩阵，即$|A| \neq 0$时，

$$AB = 0 \;\Rightarrow\; B = 0; \quad AB = AC \;\Rightarrow\; B = C.$$

由以上例题可以看出一些结论：

1 矩阵乘法不满足交换律。

若$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$不可交换。

若$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$可交换。

2 $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \not\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$或$\mathbf{B} = \mathbf{0}$

$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$且$\mathbf{B} \neq \mathbf{0} \xrightarrow{\text{有可能}} \mathbf{AB} = \mathbf{0}$

3 矩阵乘法不满足消去律，即当$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$时，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \not\Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

当$\mathbf{A}$为非奇异矩阵，即$|\mathbf{A}| \neq 0$时，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{AB} = \mathbf{AC} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

由以上例题可以看出一些结论：

1. 矩阵乘法不满足交换律。

   若$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$不可交换。

   若$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$可交换。

2. $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \nRightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$或$\mathbf{B} = \mathbf{0}$

   $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$且$\mathbf{B} \neq \mathbf{0} \xRightarrow{\text{有可能}} \mathbf{AB} = \mathbf{0}$

3. 矩阵乘法不满足消去律，即当$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$时，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \nRightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

   当$\mathbf{A}$为非奇异矩阵，即$|\mathbf{A}| \neq 0$时，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{AB} = \mathbf{AC} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

由以上例题可以看出一些结论：

1 矩阵乘法不满足交换律。

若$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$，则称**A与B不可交换**。

若$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，则称**A与B可交换**。

2 $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \nRightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$或$\mathbf{B} = \mathbf{0}$

$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$且$\mathbf{B} \neq \mathbf{0} \xRightarrow{\text{有可能}} \mathbf{AB} = \mathbf{0}$

3 矩阵乘法不满足消去律，即当$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$时，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \nRightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

当$\mathbf{A}$为非奇异矩阵，即$|\mathbf{A}| \neq 0$时，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{AB} = \mathbf{AC} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

由以上例题可以看出一些结论：

1 矩阵乘法不满足交换律。

若$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$不可交换。

若$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$可交换。

2 $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \nRightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$或$\mathbf{B} = \mathbf{0}$

$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$且$\mathbf{B} \neq \mathbf{0} \xrightarrow{\text{有可能}} \mathbf{AB} = \mathbf{0}$

3 矩阵乘法不满足消去律，即当$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$时，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \nRightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

当$\mathbf{A}$为非奇异矩阵，即$|\mathbf{A}| \neq 0$时，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{AB} = \mathbf{AC} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

由以上例题可以看出一些结论：

1 矩阵乘法不满足交换律。

若$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$不可交换。

若$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$可交换。

2 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}\ \not\Rightarrow\ \mathbf{A}=\mathbf{0}$或$\mathbf{B}=\mathbf{0}$

$\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$且$\mathbf{B}\neq\mathbf{0}\ \xRightarrow{\text{有可能}}\ \mathbf{AB}=\mathbf{0}$

3 矩阵乘法不满足消去律，即当$\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$时，

$$\mathbf{AB}=\mathbf{AC}\ \not\Rightarrow\ \mathbf{B}=\mathbf{C}$$

当$\mathbf{A}$为非奇异矩阵，即$|\mathbf{A}|\neq 0$时，

$$\mathbf{AB}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{B}=\mathbf{0};\quad \mathbf{AB}=\mathbf{AC}\ \Rightarrow\ \mathbf{B}=\mathbf{C}.$$

由以上例题可以看出一些结论：

1 矩阵乘法不满足交换律。

若$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$不可交换。

若$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$可交换。

2 $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \;\not\Rightarrow\; \mathbf{A} = \mathbf{0}$或$\mathbf{B} = \mathbf{0}$

$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$且$\mathbf{B} \neq \mathbf{0} \xRightarrow{\text{有可能}} \mathbf{AB} = \mathbf{0}$

3 矩阵乘法不满足消去律，即当$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$时，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \;\not\Rightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

当$\mathbf{A}$为非奇异矩阵，即$|\mathbf{A}| \neq 0$时，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{AB} = \mathbf{AC} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

矩阵乘法运算律

(i) 结合律

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

(ii) 数乘结合律

$$k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

(iii) 左结合律

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$

右结合律

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}$$

单位矩阵与数量矩阵

1 主对角元全为1，其余元素全为零的n阶方阵，称为n阶单位矩阵，记为$\mathbf{I}_n, \mathbf{I}, \mathbf{E}$

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2 主对角元全为非零数k，其余元素全为零的n阶方阵，称为n阶数量矩阵，记为$k\mathbf{I}_n, k\mathbf{I}, k\mathbf{E}$

$$k\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$$

注

1 单位阵在矩阵乘法中的作用相当于数1在数的乘法中的作用。

2

$$(k\mathbf{I})\mathbf{A} = k(\mathbf{I}\mathbf{A}) = k\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}(k\mathbf{I}) = k(\mathbf{A}\mathbf{I}) = k\mathbf{A}.$$

单位矩阵与数量矩阵

1 主对角元全为1，其余元素全为零的n阶方阵，称为n阶单位矩阵，记为$\mathbf{I}_n, \mathbf{I}, \mathbf{E}$

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2 主对角元全为非零数k，其余元素全为零的n阶方阵，称为n阶数量矩阵，记为$k\mathbf{I}_n, k\mathbf{I}, k\mathbf{E}$

$$k\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$$

注

1 单位阵在矩阵乘法中的作用相当于数1在数的乘法中的作用。

2

$$(k\mathbf{I})\mathbf{A} = k(\mathbf{I}\mathbf{A}) = k\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}(k\mathbf{I}) = k(\mathbf{A}\mathbf{I}) = k\mathbf{A}.$$

单位矩阵与数量矩阵

1 主对角元全为1，其余元素全为零的n阶方阵，称为n阶单位矩阵，记为$\mathbf{I}_n, \mathbf{I}, \mathbf{E}$

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2 主对角元全为非零数k，其余元素全为零的n阶方阵，称为n阶数量矩阵，记为$k\mathbf{I}_n, k\mathbf{I}, k\mathbf{E}$

$$k\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$$

注

1 单位阵在矩阵乘法中的作用相当于数1在数的乘法中的作用。

2

$$(k\mathbf{I})\mathbf{A} = k(\mathbf{I}\mathbf{A}) = k\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}(k\mathbf{I}) = k(\mathbf{A}\mathbf{I}) = k\mathbf{A}.$$

单位矩阵与数量矩阵

1 主对角元全为1，其余元素全为零的n阶方阵，称为n阶单位矩阵，记为$\mathbf{I}_n, \mathbf{I}, \mathbf{E}$

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2 主对角元全为非零数k，其余元素全为零的n阶方阵，称为n阶数量矩阵，记为$k\mathbf{I}_n, k\mathbf{I}, k\mathbf{E}$

$$k\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$$

注

1 单位阵在矩阵乘法中的作用相当于数1在数的乘法中的作用。

2

$$(k\mathbf{I})\mathbf{A} = k(\mathbf{I}\mathbf{A}) = k\mathbf{A}, \ \ \mathbf{A}(k\mathbf{I}) = k(\mathbf{A}\mathbf{I}) = k\mathbf{A}.$$

对角矩阵

非对角元皆为零的n阶方阵称为n阶对角矩阵，记作$\mathbf{\Lambda}$，即

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

或记作$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

注

1 用对角阵$\mathbf{\Lambda}$左乘$\mathbf{A}$，就是用$\lambda_i(i=1,\cdots,n)$乘$\mathbf{A}$中第i行的每个元素；

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 用对角阵$\mathbf{\Lambda}$右乘$\mathbf{A}$，就是用$\lambda_i(i=1,\cdots,n)$乘$\mathbf{A}$中第i列的每个元素；

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

注

1 用对角阵$\mathbf{\Lambda}$左乘$\mathbf{A}$，就是用$\lambda_i(i=1,\cdots,n)$乘$\mathbf{A}$中第i行的每个元素；

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 用对角阵$\mathbf{\Lambda}$右乘$\mathbf{A}$，就是用$\lambda_i(i=1,\cdots,n)$乘$\mathbf{A}$中第i列的每个元素；

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

注

1 用对角阵$\mathbf{\Lambda}$左乘$\mathbf{A}$，就是用$\lambda_i(i=1,\cdots,n)$乘$\mathbf{A}$中第i行的每个元素；

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 用对角阵$\mathbf{\Lambda}$右乘$\mathbf{A}$，就是用$\lambda_i(i=1,\cdots,n)$乘$\mathbf{A}$中第i列的每个元素；

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

注

1 用对角阵$\mathbf{\Lambda}$左乘$\mathbf{A}$，就是用$\lambda_i(i=1,\cdots,n)$乘$\mathbf{A}$中第i行的每个元素；

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 用对角阵$\mathbf{\Lambda}$右乘$\mathbf{A}$，就是用$\lambda_i(i=1,\cdots,n)$乘$\mathbf{A}$中第i列的每个元素；

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

三角矩阵

1 主对角线以上的元素全为零的n阶方阵称为上三角矩阵（$a_{ij}=0,\ i>j$）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2 主对角线以下的元素全为零的n阶方阵称为下三角矩阵（$a_{ij}=0,\ i<j$）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例4

证明：两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵。

证明: 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{ij})$，则当$i > j$时，

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{\substack{\Downarrow \\ 0}} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{\substack{\Downarrow \\ 0}} = 0.$$

注

两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

例4

证明：两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵。

证明: 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=(c_{ij})$，则当$i>j$时，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}\underbrace{a_{ik}}_{\substack{\Downarrow\\0}}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\underbrace{b_{kj}}_{\substack{\Downarrow\\0}}=0.$$

注

两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

例4

证明：两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵。

证明: 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=(c_{ij})$， 则当$i>j$时，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}\underbrace{a_{ik}}_{\Downarrow\atop 0}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\underbrace{b_{kj}}_{\Downarrow\atop 0}=0.$$

注

两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

例4

证明：两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵。

证明： 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=(c_{ij})$，则当$i>j$时，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}\underbrace{a_{ik}}_{\Downarrow \atop 0}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\underbrace{b_{kj}}_{\Downarrow \atop 0}=0.$$

注

两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

例4

证明：两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵。

证明： 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{ij})$，则当$i > j$时，

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{\Downarrow \atop 0} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{\Downarrow \atop 0} = 0.$$

注

两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

例4

证明：两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵。

证明: 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=(c_{ij})$，则当$i>j$时，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}\underbrace{a_{ik}}_{\Downarrow\atop 0}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\underbrace{b_{kj}}_{\Downarrow\atop 0}=0.$$

注

两个下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵。

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

第i个方程可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此上述线性方程组可表示为

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

第i个方程可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此上述线性方程组可表示为

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

第i个方程可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此上述线性方程组可表示为

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

第i个方程可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此上述线性方程组可表示为

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

定理

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$是两个n阶方阵，则
$$|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

证明：设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

定理

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$是两个n阶方阵，则

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

证明： 设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_1+a_{1i}r_{n+i}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_1+a_{1i}r_{n+i}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_1+a_{1i}r_{n+i}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

仿照上述步骤，可将行列式的左上角元素全消为零，即得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}||\mathbf{B}| &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{I} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n |\mathbf{AB}||-\mathbf{I}_n| = (-1)^n |\mathbf{AB}|(-1)^n \\
&= |\mathbf{AB}|.
\end{aligned}
$$

仿照上述步骤，可将行列式的左上角元素全消为零，即得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}||\mathbf{B}| &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{I} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n |\mathbf{AB}||-\mathbf{I}_n| = (-1)^n |\mathbf{AB}|(-1)^n \\
&= |\mathbf{AB}|.
\end{aligned}
$$

仿照上述步骤，可将行列式的左上角元素全消为零，即得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}||\mathbf{B}| &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{I} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n|\mathbf{AB}||-\mathbf{I}_n| = (-1)^n|\mathbf{AB}|(-1)^n \\
&= |\mathbf{AB}|.
\end{aligned}
$$

仿照上述步骤，可将行列式的左上角元素全消为零，即得

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}||\mathbf{B}| &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{I} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n |\mathbf{AB}||-\mathbf{I}_n| = (-1)^n |\mathbf{AB}|(-1)^n \\ &= |\mathbf{AB}|.\end{aligned}$$

仿照上述步骤，可将行列式的左上角元素全消为零，即得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}||\mathbf{B}| &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{I} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n|\mathbf{AB}||-\mathbf{I}_n| = (-1)^n|\mathbf{AB}|(-1)^n \\
&= |\mathbf{AB}|.
\end{aligned}
$$

仿照上述步骤，可将行列式的左上角元素全消为零，即得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}||\mathbf{B}| &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{I} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n |\mathbf{AB}||-\mathbf{I}_n| = (-1)^n |\mathbf{AB}|(-1)^n \\
&= |\mathbf{AB}|.
\end{aligned}
$$

例

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}是行列式$|\mathbf{A}|$中元素a_{ij}的代数余子式。 证明：当$|\mathbf{A}|\neq 0$时，$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$.

证明: 设$\mathbf{AA}^*=\mathbf{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}|\mathbf{A}|$$

于是

$$\mathbf{AA}^*=\begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & & & \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\mathbf{A}| \end{pmatrix}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}_n,$$

因此，

$$|\mathbf{A}||\mathbf{A}^*|=|\mathbf{AA}^*|=|\mathbf{A}|^n,$$

由于$|\mathbf{A}|\neq 0$，故$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$.

例

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}是行列式$|\mathbf{A}|$中元素a_{ij}的代数余子式。证明：当$|\mathbf{A}|\neq 0$时，$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$.

证明： 设$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}|\mathbf{A}|$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & & & \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\mathbf{A}| \end{pmatrix}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}_n,$$

因此，

$$|\mathbf{A}||\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^n,$$

由于$|\mathbf{A}|\neq 0$，故$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$.

例

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}是行列式$|\mathbf{A}|$中元素a_{ij}的代数余子式。证明：当$|\mathbf{A}|\neq 0$时，$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$.

证明： 设$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}|\mathbf{A}|$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & & & \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\mathbf{A}| \end{pmatrix}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}_n,$$

因此，

$$|\mathbf{A}||\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^n,$$

由于$|\mathbf{A}|\neq 0$，故$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$.

例

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}是行列式$|\mathbf{A}|$中元素a_{ij}的代数余子式。 证明：当$|\mathbf{A}|\neq 0$时，$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$.

证明: 设$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}|\mathbf{A}|$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & & & \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\mathbf{A}| \end{pmatrix}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}_n,$$

因此，

$$|\mathbf{A}||\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^n,$$

由于$|\mathbf{A}|\neq 0$，故$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$.

例

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}是行列式$|\mathbf{A}|$中元素a_{ij}的代数余子式。证明：当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

证明: 设$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{C} = (c_{ij})$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij}|\mathbf{A}|$$

于是

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & & & \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_n,$$

因此，

$$|\mathbf{A}||\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^n,$$

由于$|\mathbf{A}| \neq 0$，故$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

矩阵幂

设$\mathbf{A}$是n阶矩阵，k个$\mathbf{A}$的连乘积称为$\mathbf{A}$的k次幂，记作$\mathbf{A}^k$，即

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\cdots\,\mathbf{A}}_{k}$$

矩阵幂的运算律

1 当m,k为正整数时，

$$\mathbf{A}^m\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{m+k}, \quad (\mathbf{A}^m)^k = \mathbf{A}^{mk}.$$

2 当$\mathbf{AB}$不可交换时，一般情况下，

$$(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$$

3 当$\mathbf{AB}$可交换时，

$$(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k = \mathbf{B}^k\mathbf{A}^k.$$

矩阵幂

设$\mathbf{A}$是n阶矩阵，k个$\mathbf{A}$的连乘积称为$\mathbf{A}$的k次幂，记作$\mathbf{A}^k$，即

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\cdots\,\mathbf{A}}_{k}$$

矩阵幂的运算律

1 当m, k为正整数时，

$$\mathbf{A}^m\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{m+k}, \quad (\mathbf{A}^m)^k = \mathbf{A}^{mk}.$$

2 当$\mathbf{AB}$不可交换时，一般情况下，

$$(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$$

3 当$\mathbf{AB}$可交换时，

$$(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k = \mathbf{B}^k\mathbf{A}^k.$$

矩阵幂

设$\mathbf{A}$是n阶矩阵，k个$\mathbf{A}$的连乘积称为$\mathbf{A}$的k次幂，记作$\mathbf{A}^k$，即

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\cdots\,\mathbf{A}}_{k}$$

矩阵幂的运算律

1 当m,k为正整数时，

$$\mathbf{A}^m\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{m+k}, \quad (\mathbf{A}^m)^k = \mathbf{A}^{mk}.$$

2 当$\mathbf{AB}$不可交换时，一般情况下，

$$(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$$

3 当$\mathbf{AB}$可交换时，

$$(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k = \mathbf{B}^k\mathbf{A}^k.$$

矩阵幂

设$\mathbf{A}$是n阶矩阵，k个$\mathbf{A}$的连乘积称为$\mathbf{A}$的k次幂，记作$\mathbf{A}^k$，即

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\cdots\,\mathbf{A}}_{k}$$

矩阵幂的运算律

1 当m, k为正整数时，

$$\mathbf{A}^m\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{m+k}, \quad (\mathbf{A}^m)^k = \mathbf{A}^{mk}.$$

2 当$\mathbf{AB}$不可交换时，一般情况下，

$$(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$$

3 当$\mathbf{AB}$可交换时，

$$(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k = \mathbf{B}^k\mathbf{A}^k.$$

矩阵多项式

设$f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$是$x$的$k$次多项式，$\mathbf{A}$是$n$阶矩阵，则

$$f(\mathbf{A})=a_k\mathbf{A}^k+a_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}+\cdots+a_1\mathbf{A}+a_0\mathbf{I}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的k次多项式。

注

1 若$f(x),g(x)$为多项式，$\mathbf{A},\mathbf{B}$皆是n阶矩阵，则

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})=g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}).$$

2 当$\mathbf{AB}$不可交换时，一般

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{B})\neq g(\mathbf{B})f(\mathbf{A})$$

矩阵多项式

设$f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$是$x$的$k$次多项式，$\mathbf{A}$是$n$阶矩阵，则

$$f(\mathbf{A})=a_k\mathbf{A}^k+a_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}+\cdots+a_1\mathbf{A}+a_0\mathbf{I}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的k次多项式。

注

1 若$f(x),g(x)$为多项式，$\mathbf{A},\mathbf{B}$皆是n阶矩阵，则

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})=g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}).$$

2 当$\mathbf{AB}$不可交换时，一般

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{B})\neq g(\mathbf{B})f(\mathbf{A})$$

转置矩阵

把一个$m \times n$矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到的一个$n \times m$矩阵，称之为$\mathbf{A}$的**转置矩阵**，记为$\mathbf{A}^T$或$\mathbf{A}'$，即

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵转置的运算律

(i) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(iii) $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$

(iv) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

证明： 只证(iv)。 设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times s}, \mathbf{A}^T = (a^T_{ij})_{n\times m}, \mathbf{B}^T = (b^T_{ij})_{s\times n}$， 注意到

$$a_{ij} = a^T_{ji}, b_{ij} = b^T_{ji},$$

有

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b^T_{jk}a^T_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = (\mathbf{AB})_{ij} = (\mathbf{AB})^T_{ji},$$

于是$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

矩阵转置的运算律

(i) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(iii) $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$

(iv) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

证明： 只证(iv)。设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times s}, \mathbf{A}^T = (a_{ij}^T)_{n\times m}, \mathbf{B}^T = (b_{ij}^T)_{s\times n}$，注意到

$$a_{ij} = a_{ji}^T, b_{ij} = b_{ji}^T,$$

有

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}^T a_{ki}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = (\mathbf{AB})_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji}^T,$$

于是$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

矩阵转置的运算律

(i) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(iii) $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$

(iv) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

证明： 只证(iv)。设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times s}, \mathbf{A}^T = (a_{ij}^T)_{n\times m}, \mathbf{B}^T = (b_{ij}^T)_{s\times n}$，注意到

$$a_{ij} = a_{ji}^T, b_{ij} = b_{ji}^T,$$

有

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}^T a_{ki}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = (\mathbf{AB})_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji}^T,$$

于是$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

矩阵转置的运算律

(i) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(iii) $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$

(iv) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

证明： 只证(iv)。设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times s}, \mathbf{A}^T = (a_{ij}^T)_{n\times m}, \mathbf{B}^T = (b_{ij}^T)_{s\times n}$，注意到

$$a_{ij} = a_{ji}^T, b_{ij} = b_{ji}^T,$$

有

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}^T a_{ki}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = (\mathbf{AB})_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji}^T,$$

于是$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

矩阵转置的运算律

(i) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(iii) $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$

(iv) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

证明: 只证(iv)。设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times s}, \mathbf{A}^T = (a_{ij}^T)_{n\times m}, \mathbf{B}^T = (b_{ij}^T)_{s\times n}$，注意到

$$a_{ij} = a_{ji}^T, b_{ij} = b_{ji}^T,$$

有

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}^T a_{ki}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = (\mathbf{AB})_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji}^T,$$

于是$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

矩阵转置的运算律

(i) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(iii) $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$

(iv) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

证明： 只证(iv)。设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times s}, \mathbf{A}^T = (a_{ij}^T)_{n\times m}, \mathbf{B}^T = (b_{ij}^T)_{s\times n}$，注意到

$$a_{ij} = a_{ji}^T, b_{ij} = b_{ji}^T,$$

有

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}^T a_{ki}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = (\mathbf{AB})_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji}^T,$$

于是$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

矩阵转置的运算律

(i) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(iii) $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$

(iv) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

证明： 只证(iv)。设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times s}, \mathbf{A}^T = (a_{ij}^T)_{n\times m}, \mathbf{B}^T = (b_{ij}^T)_{s\times n}$，注意到

$$a_{ij} = a_{ji}^T, b_{ij} = b_{ji}^T,$$

有

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}^T a_{ki}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = (\mathbf{A}\mathbf{B})_{ij} = (\mathbf{A}\mathbf{B})_{ji}^T,$$

于是$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

对称矩阵、反对称矩阵

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个n阶矩阵。

1. 如果
$$a_{ij} = a_{ji},$$
则称$\mathbf{A}$为对称矩阵；
2. 如果
$$a_{ij} = -a_{ji},$$
则称$\mathbf{A}$为反对称矩阵。

注

1. $\mathbf{A}$为对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$；
2. $\mathbf{A}$为反对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$；
3. 反对称矩阵的主对角元全为零。
4. 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。
5. 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

   设$\mathbf{A}$为一n阶方阵，则
   $$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}+\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$$
   容易验证$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}$为对称阵，$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$为反对称阵。
6. 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

   若$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为对称矩阵，则$\mathbf{AB}$对称的充分必要条件是$\mathbf{AB}$可交换。

注

1. $\mathbf{A}$为对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$；
2. $\mathbf{A}$为反对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$；
3. 反对称矩阵的主对角元全为零。
4. 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。
5. 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

   设$\mathbf{A}$为一n阶方阵，则

$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}+\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$$

   容易验证$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}$为对称阵，$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$为反对称阵。
6. 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

   若$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为对称矩阵，则$\mathbf{AB}$对称的充分必要条件是$\mathbf{AB}$可交换。

注

1 $\mathbf{A}$为对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$；

2 $\mathbf{A}$为反对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$；

3 反对称矩阵的主对角元全为零。

4 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。

5 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

设$\mathbf{A}$为一n阶方阵，则

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}$$

容易验证$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}$为对称阵，$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$为反对称阵。

6 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

若$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为对称矩阵，则$\mathbf{AB}$对称的充分必要条件是$\mathbf{AB}$可交换。

注

1 $\mathbf{A}$为对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$；

2 $\mathbf{A}$为反对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$；

3 反对称矩阵的主对角元全为零。

4 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。

5 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

设$\mathbf{A}$为一n阶方阵，则

$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}+\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$$

容易验证$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}$为对称阵，$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$为反对称阵。

6 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

若$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为对称矩阵，则$\mathbf{AB}$对称的充分必要条件是$\mathbf{AB}$可交换。

注

1 $\mathbf{A}$为对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$；

2 $\mathbf{A}$为反对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$；

3 反对称矩阵的主对角元全为零。

4 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。

5 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

设$\mathbf{A}$为一n阶方阵，则

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}$$

容易验证$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}$为对称阵，$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$为反对称阵。

6 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

若$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为对称矩阵，则$\mathbf{AB}$对称的充分必要条件是$\mathbf{AB}$可交换。

注

1 $\mathbf{A}$为对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$；

2 $\mathbf{A}$为反对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$；

3 反对称矩阵的主对角元全为零。

4 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。

5 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

设$\mathbf{A}$为一n阶方阵，则

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}$$

容易验证$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}$为对称阵，$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$为反对称阵。

6 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

若$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为对称矩阵，则$\mathbf{AB}$对称的充分必要条件是$\mathbf{AB}$可交换。

注

1 $\mathbf{A}$为对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$;

2 $\mathbf{A}$为反对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$;

3 反对称矩阵的主对角元全为零。

4 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。

5 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

设$\mathbf{A}$为一n阶方阵，则

$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}+\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$$

容易验证$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}$为对称阵，$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$为反对称阵。

6 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

若$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为对称矩阵，则$\mathbf{AB}$对称的充分必要条件是$\mathbf{AB}$可交换。

注

1 $\mathbf{A}$为对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$；

2 $\mathbf{A}$为反对称矩阵的充分必要条件是$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$；

3 反对称矩阵的主对角元全为零。

4 奇数阶反对称矩阵的行列式为零。

5 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

设$\mathbf{A}$为一n阶方阵，则

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}$$

容易验证$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}$为对称阵，$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$为反对称阵。

6 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

若$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为对称矩阵，则$\mathbf{AB}$对称的充分必要条件是$\mathbf{AB}$可交换。

例1

设$\mathbf{A}$是一个$m \times n$矩阵，则$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$都是对称矩阵。

证明:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

例1

设$\mathbf{A}$是一个$m \times n$矩阵，则$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$都是对称矩阵。

证明:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

例1

设$\mathbf{A}$是一个$m \times n$矩阵，则$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$都是对称矩阵。

证明:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

例1

设$\mathbf{A}$是一个$m \times n$矩阵，则$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$都是对称矩阵。

证明:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

例1

设$\mathbf{A}$是一个$m \times n$矩阵，则$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$都是对称矩阵。

证明:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

例1

设$\mathbf{A}$是一个$m \times n$矩阵，则$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$都是对称矩阵。

证明:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

例1

设$\mathbf{A}$是一个$m \times n$矩阵，则$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$都是对称矩阵。

证明:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

例2

设$\mathbf{A}$为n阶反对称矩阵，$\mathbf{B}$为n阶对称矩阵，则$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$为n阶反对称矩阵。

证明:

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})^T &= (\mathbf{AB})^T+(\mathbf{BA})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T+\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T\\ &= \mathbf{B}(-\mathbf{A})+(-\mathbf{A}^T)\mathbf{B}=-(\mathbf{AB}+\mathbf{BA}).\end{aligned}$$

例2

设$\mathbf{A}$为n阶反对称矩阵，$\mathbf{B}$为n阶对称矩阵，则$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$为n阶反对称矩阵。

证明:

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})^T &= (\mathbf{AB})^T+(\mathbf{BA})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T+\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T \\ &= \mathbf{B}(-\mathbf{A})+(-\mathbf{A}^T)\mathbf{B}=-(\mathbf{AB}+\mathbf{BA}).\end{aligned}$$

例2

设$\mathbf{A}$为n阶反对称矩阵，$\mathbf{B}$为n阶对称矩阵，则$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$为n阶反对称矩阵。

证明:

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})^T &= (\mathbf{AB})^T+(\mathbf{BA})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T+\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T \\ &= \mathbf{B}(-\mathbf{A})+(-\mathbf{A}^T)\mathbf{B} = -(\mathbf{AB}+\mathbf{BA}).\end{aligned}$$

例2

设$\mathbf{A}$为n阶反对称矩阵，$\mathbf{B}$为n阶对称矩阵，则$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$为n阶反对称矩阵。

证明:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})^T &= (\mathbf{AB})^T+(\mathbf{BA})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T+\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T \\
&= \mathbf{B}(-\mathbf{A})+(-\mathbf{A}^T)\mathbf{B} = -(\mathbf{AB}+\mathbf{BA}).
\end{aligned}
$$

例2

设$\mathbf{A}$为n阶反对称矩阵，$\mathbf{B}$为n阶对称矩阵，则$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$为n阶反对称矩阵。

证明:

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})^T &= (\mathbf{AB})^T+(\mathbf{BA})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T+\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T \\ &= \mathbf{B}(-\mathbf{A})+(-\mathbf{A}^T)\mathbf{B} = -(\mathbf{AB}+\mathbf{BA}).\end{aligned}$$

例2

设$\mathbf{A}$为n阶反对称矩阵，$\mathbf{B}$为n阶对称矩阵，则$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$为n阶反对称矩阵。

证明:

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})^T &= (\mathbf{AB})^T+(\mathbf{BA})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T+\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T \\ &= \mathbf{B}(-\mathbf{A})+(-\mathbf{A}^T)\mathbf{B} = -(\mathbf{AB}+\mathbf{BA}).\end{aligned}$$

给定一个从$\mathbf{x}$到$\mathbf{y}$的线性变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{5}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用$\mathbf{A}$的伴随阵$\mathbf{A}^*$左乘(5)，得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = |\mathbf{A}|\mathbf{x}$$

当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{y}$$

记

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{6}$$

它表示一个从$\mathbf{y}$到$\mathbf{x}$的线性变换，称为线性变换(5)的逆变换。

给定一个从$\mathbf{x}$到$\mathbf{y}$的线性变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{5}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用$\mathbf{A}$的伴随阵$\mathbf{A}^*$左乘(5)，得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = |\mathbf{A}|\mathbf{x}$$

当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{y}$$

记

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{6}$$

它表示一个从$\mathbf{y}$到$\mathbf{x}$的线性变换，称为线性变换(5)的逆变换。

给定一个从$\mathbf{x}$到$\mathbf{y}$的线性变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{5}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用$\mathbf{A}$的伴随阵$\mathbf{A}^*$左乘(5)，得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = |\mathbf{A}|\mathbf{x}$$

当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{y}$$

记

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{6}$$

它表示一个从$\mathbf{y}$到$\mathbf{x}$的线性变换，称为线性变换(5)的逆变换。

给定一个从$\mathbf{x}$到$\mathbf{y}$的线性变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{5}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用$\mathbf{A}$的伴随阵$\mathbf{A}^*$左乘(5)，得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = |\mathbf{A}|\mathbf{x}$$

当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{y}$$

记

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{6}$$

它表示一个从$\mathbf{y}$到$\mathbf{x}$的线性变换，称为线性变换(5)的逆变换。

给定一个从$\mathbf{x}$到$\mathbf{y}$的线性变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{5}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用$\mathbf{A}$的伴随阵$\mathbf{A}^*$左乘(5)，得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = |\mathbf{A}|\mathbf{x}$$

当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{y}$$

记

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{6}$$

它表示一个从$\mathbf{y}$到$\mathbf{x}$的线性变换，称为线性变换(5)的逆变换。

A与B的关系

1. 将(6)代入(5)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{y}$$

可见AB为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

2. 将(5)代入(6)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}$$

可见BA为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

A与B的关系

1 将(6)代入(5)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{y}$$

可见**AB**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

2 将(5)代入(6)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}$$

可见**BA**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

A与B的关系

1 将(6)代入(5)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{y}$$

可见**AB**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

2 将(5)代入(6)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}$$

可见**BA**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

A与B的关系

1 将(6)代入(5)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{y}$$

可见**AB**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

2 将(5)代入(6)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}$$

可见**BA**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

逆矩阵

对于n阶矩阵$\mathbf{A}$，如果有一个n阶矩阵$\mathbf{B}$，使

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

则称$\mathbf{A}$是可逆的，并把$\mathbf{B}$称为$\mathbf{A}$的逆矩阵。

注

1. 可逆矩阵与其逆矩阵为同阶方阵。
2. $\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$地位相等，也可称$\mathbf{A}$为$\mathbf{B}$的逆矩阵。

逆矩阵

对于n阶矩阵$\mathbf{A}$，如果有一个n阶矩阵$\mathbf{B}$，使

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

则称$\mathbf{A}$是可逆的，并把$\mathbf{B}$称为$\mathbf{A}$的逆矩阵。

注

1. 可逆矩阵与其逆矩阵为同阶方阵。
2. $\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$地位相等，也可称$\mathbf{A}$为$\mathbf{B}$的逆矩阵。

定理1

若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}$的逆阵惟一。

证明:

$\mathbf{A}$的矩阵记作$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

定理1

若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}$的逆阵惟一。

证明:

$\mathbf{A}$的矩阵记作$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

定理1

若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}$的逆阵惟一。

证明:

$\mathbf{A}$的矩阵记作$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

定理2

若$\mathbf{A}$可逆，则$|\mathbf{A}| \neq 0$.

证明:

定理2

若$\mathbf{A}$可逆，则$|\mathbf{A}| \neq 0$.

证明:

代数余子式矩阵，伴随矩阵

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$为行列式$|\mathbf{A}|$中元素$a_{ij}$的代数余子式，称

$$\mathrm{coef}\mathbf{A}=(A_{ij})_{n\times n}$$

为$\mathbf{A}$的代数余子式矩阵，并称coef$\mathbf{A}$的转置矩阵为$\mathbf{A}$的伴随矩阵，记为$\mathbf{A}^*$，即

$$\mathbf{A}^*=(\mathrm{coef}\mathbf{A})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

之前已证

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

同理可证

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

代数余子式矩阵，伴随矩阵

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$为行列式$|\mathbf{A}|$中元素$a_{ij}$的代数余子式，称

$$\mathrm{coef}\,\mathbf{A}=(A_{ij})_{n\times n}$$

为$\mathbf{A}$的代数余子式矩阵，并称coef$\mathbf{A}$的转置矩阵为$\mathbf{A}$的伴随矩阵，记为$\mathbf{A}^*$， 即

$$\mathbf{A}^*=(\mathrm{coef}\,\mathbf{A})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

之前已证

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

同理可证

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

代数余子式矩阵，伴随矩阵

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$为行列式$|\mathbf{A}|$中元素$a_{ij}$的代数余子式，称

$$\mathrm{coef}\,\mathbf{A}=(A_{ij})_{n\times n}$$

为$\mathbf{A}$的代数余子式矩阵，并称coef$\mathbf{A}$的转置矩阵为$\mathbf{A}$的伴随矩阵，记为$\mathbf{A}^*$， 即

$$\mathbf{A}^*=(\mathrm{coef}\,\mathbf{A})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

之前已证

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

同理可证

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

定理3

若$|\mathbf{A}| \neq 0$，则$\mathbf{A}$可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$$

证明:

该定理提供了求$\mathbf{A}^{-1}$的一种方法。

定理3

若$|\mathbf{A}| \neq 0$，则$\mathbf{A}$可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$$

证明:

该定理提供了求$\mathbf{A}^{-1}$的一种方法。

定理3

若$|\mathbf{A}| \neq 0$，则$\mathbf{A}$可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$$

证明:

该定理提供了求$\mathbf{A}^{-1}$的一种方法。

推论

若$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$（或$\mathbf{BA} = \mathbf{I}$），则

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

证明:

该推论告诉我们，判断$\mathbf{B}$是否为$\mathbf{A}$的逆，只需验证$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$或$\mathbf{BA} = \mathbf{I}$的一个等式成立即可。

推论

若$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$（或$\mathbf{BA}=\mathbf{I}$），则

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}.$$

证明:

该推论告诉我们，判断$\mathbf{B}$是否为$\mathbf{A}$的逆，只需验证$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$或$\mathbf{BA}=\mathbf{I}$的一个等式成立即可。

推论

若$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$（或$\mathbf{BA}=\mathbf{I}$），则

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}.$$

证明:

该推论告诉我们，判断$\mathbf{B}$是否为$\mathbf{A}$的逆，只需验证$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$或$\mathbf{BA}=\mathbf{I}$的一个等式成立即可。

奇异阵与非奇异阵

当$|\mathbf{A}| = 0$时，$\mathbf{A}$称为**奇异矩阵**，否则称为**非奇异矩阵**。

注

可逆矩阵就是非奇异矩阵。

奇异阵与非奇异阵

当$|\mathbf{A}| = 0$时，$\mathbf{A}$称为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵。

注

可逆矩阵就是非奇异矩阵。

可逆矩阵的运算规律

1. 若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}^{-1}$亦可逆，且
$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$
2. 若$\mathbf{A}$可逆，$k \neq 0$，则$k\mathbf{A}$可逆，且
$$(k\mathbf{A})^{-1} = k^{-1}A^{-1}.$$
3. 若$\mathbf{A}, \mathbf{B}$为同阶矩阵且均可逆，则$\mathbf{AB}$可逆，且
$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$
   若$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_m$皆可逆，则
$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$
4. 若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}^T$亦可逆，且
$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$
5. 若$\mathbf{A}$可逆，则
$$|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$$

例1

已知$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}^{-1}$。

解:

$$|\mathbf{A}|=ad-bc, \quad |\mathbf{A}^*|=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1. 当$|\mathbf{A}|=ad-bc=0$时，逆阵不存在；
2. 当$|\mathbf{A}|=ad-bc\neq 0$时，

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例1

已知$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}^{-1}$。

解:

$$|\mathbf{A}|=ad-bc, \quad |\mathbf{A}^*|=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1. 当$|\mathbf{A}|=ad-bc=0$时，逆阵不存在；
2. 当$|\mathbf{A}|=ad-bc\neq 0$时，

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例1

已知$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}^{-1}$。

解:

$$|\mathbf{A}|=ad-bc,\quad |\mathbf{A}^*|=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1 当$|\mathbf{A}|=ad-bc=0$时，逆阵不存在；

2 当$|\mathbf{A}|=ad-bc\neq 0$时，

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例1

已知$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}^{-1}$。

解:

$$|\mathbf{A}| = ad - bc, \quad |\mathbf{A}^*| = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1 当$|\mathbf{A}| = ad - bc = 0$时，逆阵不存在；

2 当$|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$时，

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆阵。

解： $|\mathbf{A}| = 2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11} = 2 & M_{12} = 3 & M_{13} = 2 \\ M_{21} = -6 & M_{22} = -6 & M_{23} = -2 \\ M_{31} = -4 & M_{32} = -5 & M_{33} = -2 \end{array}$$

$$\mathrm{coef}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆阵。

解: $|\mathbf{A}|=2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2\\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2\\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2\end{array}$$

$$\mathrm{coef}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&2\\6&-6&2\\-4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆阵。

解： $|\mathbf{A}|=2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2\\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2\\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2\end{array}$$

$$\operatorname{coef}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&2\\6&-6&2\\-4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆阵。

解: $|\mathbf{A}|=2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2 \\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2 \\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2 \end{array}$$

$$\mathrm{coef}\,\mathbf{A}=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&2\\6&-6&2\\-4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆阵。

解: $|\mathbf{A}| = 2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11} = 2 & M_{12} = 3 & M_{13} = 2 \\ M_{21} = -6 & M_{22} = -6 & M_{23} = -2 \\ M_{31} = -4 & M_{32} = -5 & M_{33} = -2 \end{array}$$

$$\mathrm{coef}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆阵。

解: $|\mathbf{A}|=2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll}M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2\\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2\\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2\end{array}$$

$$\mathrm{coef}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&2\\6&-6&2\\-4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

证明：$\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 10\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\right] = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = 6\mathbf{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^{-1} = \dfrac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$.

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

证明：$\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 10\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\right] = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = 6\mathbf{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^{-1} = \dfrac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$.

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程
$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0},$$
证明：$\mathbf{A},\mathbf{A}-4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})=10\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\right]=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ (\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=6\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \frac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}-4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^{-1}=\dfrac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$.

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

证明：$\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 10\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\right] = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = 6\mathbf{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^{-1} = \dfrac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$.

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0},$$

证明：$\mathbf{A},\mathbf{A}-4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})=10\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\right]=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ (\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=6\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \frac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}-4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^{-1}=\dfrac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$.

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

证明：$\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 10\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\right] = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = 6\mathbf{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$.

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程
$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$
证明：$\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:
$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 10\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\right] = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = 6\mathbf{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^{-1} = \dfrac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$.

例4

证明：可逆对称矩阵的逆矩阵仍为对称矩阵；可逆反对称矩阵的逆矩阵仍为反对称矩阵。

例5

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为非零实矩阵，证明：若$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$，则$\mathbf{A}$可逆。

证明： 欲证$\mathbf{A}$可逆，只需证$|\mathbf{A}|\neq 0$。

由$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$及$\mathbf{A}^*$的定义可知，$\mathbf{A}$的元素$a_{ij}$等于自身的代数余子式$A_{ij}$。再根据行列式的按行展开定义，有

$$|\mathbf{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

由于$\mathbf{A}$为非零实矩阵，故$|\mathbf{A}|\neq 0$，即$\mathbf{A}$可逆。

例5

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为非零实矩阵，证明：若$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$，则$\mathbf{A}$可逆。

证明: 欲证$\mathbf{A}$可逆，只需证$|\mathbf{A}|\neq 0$。

由$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$及$\mathbf{A}^*$的定义可知，$\mathbf{A}$的元素$a_{ij}$等于自身的代数余子式$A_{ij}$。再根据行列式的按行展开定义，有

$$|\mathbf{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

由于$\mathbf{A}$为非零实矩阵，故$|\mathbf{A}|\neq 0$，即$\mathbf{A}$可逆。

例5

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为非零实矩阵，证明：若$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$，则$\mathbf{A}$可逆。

证明： 欲证$\mathbf{A}$可逆，只需证$|\mathbf{A}|\neq 0$。

由$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$及$\mathbf{A}^*$的定义可知，$\mathbf{A}$的元素$a_{ij}$等于自身的代数余子式$A_{ij}$。再根据行列式的按行展开定义，有

$$|\mathbf{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

由于$\mathbf{A}$为非零实矩阵，故$|\mathbf{A}|\neq 0$，即$\mathbf{A}$可逆。

例5

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为非零实矩阵，证明：若$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$，则$\mathbf{A}$可逆。

证明: 欲证$\mathbf{A}$可逆，只需证$|\mathbf{A}|\neq 0$。

由$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$及$\mathbf{A}^*$的定义可知，$\mathbf{A}$的元素$a_{ij}$等于自身的代数余子式$A_{ij}$。再根据行列式的按行展开定义，有

$$|\mathbf{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

由于$\mathbf{A}$为非零实矩阵，故$|\mathbf{A}|\neq 0$，即$\mathbf{A}$可逆。

例6

设$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^*\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}$，证明$\mathbf{B}$可逆，当$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$时，求$\mathbf{B}$.

解:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B} \Rightarrow (\mathbf{A}^* - \mathbf{I})\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow |\mathbf{A}^* - \mathbf{I}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}^{-1}| \neq 0$$

故$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}^* - \mathbf{I}$可逆。

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}^* - \mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{A}(\mathbf{A}^* - \mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^* - \mathbf{A})^{-1} = (|\mathbf{A}|\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

其中

$$|\mathbf{A}|\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & & \\ & 8 & \\ & & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

易算得

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例6

设$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}$，证明$\mathbf{B}$可逆，当$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}$时，求$\mathbf{B}$.

解:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}\Rightarrow(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\Rightarrow|\mathbf{A}^*-\mathbf{I}|\cdot|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^{-1}|\neq 0$$

故$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}^*-\mathbf{I}$可逆。

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^{-1}=[\mathbf{A}(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}\mathbf{A}^*-\mathbf{A})^{-1}=(|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}.$$

其中

$$|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8&&\\&8&\\&&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

易算得

$$\mathbf{B}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例6

设$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}$，证明$\mathbf{B}$可逆，当$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}$时，求$\mathbf{B}$.

解:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}\Rightarrow(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\Rightarrow|\mathbf{A}^*-\mathbf{I}|\cdot|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^{-1}|\neq 0$$

故$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}^*-\mathbf{I}$可逆。

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^{-1}=[\mathbf{A}(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}\mathbf{A}^*-\mathbf{A})^{-1}=(|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}.$$

其中

$$|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8&&\\&8&\\&&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

易算得

$$\mathbf{B}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例6

设$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}$，证明$\mathbf{B}$可逆，当$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}$时，求$\mathbf{B}$.

解:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}\Rightarrow(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\Rightarrow|\mathbf{A}^*-\mathbf{I}|\cdot|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^{-1}|\neq 0$$

故$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}^*-\mathbf{I}$可逆。

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^{-1}=[\mathbf{A}(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}\mathbf{A}^*-\mathbf{A})^{-1}=(|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}.$$

其中

$$|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8&&\\&8&\\&&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

易算得

$$\mathbf{B}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明：(1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设**A**, **B**均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知**AB**可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘**A**得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设**A**, **B**均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘**A**得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}| = 2, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P\Lambda P}^{-1}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1} = \mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1}, \quad \cdots, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

结论

令

$$\varphi(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_m\mathbf{A}^m.$$

(i) 若$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$，则$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}$，从而

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{A}) &= a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_m\mathbf{A}^m \\
&= \mathbf{P}a_0\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}a_1\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} + \cdots + \mathbf{P}a_m\mathbf{\Lambda}^m\mathbf{P}^{-1} \\
&= \mathbf{P}\varphi(\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-1}.
\end{aligned}$$

结论

令

$$\varphi(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_m\mathbf{A}^m.$$

(ii) 若$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$为对角阵，则$\mathbf{\Lambda}^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$，从而

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{\Lambda}) &= a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{\Lambda} + \cdots + a_m\mathbf{\Lambda}^m \\ &= a_0\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} + \cdots + a_m\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行

(ii) 以非零常数k乘矩阵的某一行

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数k并加到另一行

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，其中

(i) 对换变换 $r_i \leftrightarrow r_j$

(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$

(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$

对应的还有初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行

(ii) 以非零常数k乘矩阵的某一行

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数k并加到另一行

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，其中

(i) 对换变换 $r_i \leftrightarrow r_j$

(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$

(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$

对应的还有初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行

(ii) 以非零常数k乘矩阵的某一行

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数k并加到另一行

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，其中

(i) 对换变换 $r_i \leftrightarrow r_j$

(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$

(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$

对应的还有初等列变换。 初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换。

Table: 初等变换及其逆变换

初等变换	逆变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	$r_i \times \dfrac{1}{k}$
$r_i + r_j \times k$	$r_i - r_j \times k$

矩阵的等价

(i) 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等行变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$行等价，记为$\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B}$

(ii) 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等列变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$列等价，记为$\mathbf{A} \overset{c}{\sim} \mathbf{B}$

(iii) 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$等价，记为$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

矩阵等价的性质

(i) 反身性：$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$

(ii) 对称性：若$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$，则$\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$

(iii) 传递性：若$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$，则$\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$

矩阵的等价

(i) 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等行变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$行等价，记为$\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B}$

(ii) 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等列变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$列等价，记为$\mathbf{A} \overset{c}{\sim} \mathbf{B}$

(iii) 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$等价，记为$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

矩阵等价的性质

(i) 反身性：$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$

(ii) 对称性：若$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$，则$\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$

(iii) 传递性：若$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$，则$\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$

初等矩阵

将单位矩阵**I**做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵。

对应于3类初等行、列变换，有3种类型的初等矩阵。

(i) 对调两行或对调两列（初等对换矩阵）

$$
\begin{array}{cc}
\mathbf{E}_{ij} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & 0 & & \cdots & & 1 & & \\
& & & 1 & & & & & \\
& & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
& & & & & 1 & & & \\
& & 1 & & \cdots & & 0 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l}
\\ \\ \text{第}\,i\,\text{行} \\ \\ \\ \\ \text{第}\,j\,\text{行} \\ \\ \\
\end{array} \\
\qquad\qquad \text{第}\,i\,\text{列} \qquad\qquad \text{第}\,j\,\text{列} &
\end{array}
$$

用m阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$左乘$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}=\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 第i行 \\ \\ 第j行 \\ \\ \\ \end{array}$$

其结果相当于：

把$\mathbf{A}$的第i行与第j行对调（$r_i\leftrightarrow r_j$）.

用n阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$右乘$\mathbf{A}$，且结果相当于

把$\mathbf{A}$的第i列与第j列对调（$c_i\leftrightarrow c_j$）.

用m阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$左乘$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，得

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A} = \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}\,i\,\text{行} \\ \\ \text{第}\,j\,\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

其结果相当于：

把$\mathbf{A}$的第i行与第j行对调（$r_i \leftrightarrow r_j$）.

用n阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$右乘$\mathbf{A}$，且结果相当于

把$\mathbf{A}$的第i列与第j列对调（$c_i \leftrightarrow c_j$）.

用m阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$左乘$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

其结果相当于：

把$\mathbf{A}$的第i行与第j行对调（$r_i\leftrightarrow r_j$）.

用n阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$右乘$\mathbf{A}$，且结果相当于

把$\mathbf{A}$的第i列与第j列对调（$c_i\leftrightarrow c_j$）.

(ii) 以非零常数k乘某行或某列（初等倍乘矩阵）

$$
\begin{array}{cl}
\mathbf{E}_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\text{第 } i \text{ 列} &
\end{array}
$$

(1) 以m阶初等矩阵$\mathbf{E}_i(k)$左乘$\mathbf{A}$，其结果相当于以数k乘$\mathbf{A}$的第i行（$r_i \times k$）

(2) 以n阶初等矩阵$\mathbf{E}_i(k)$右乘$\mathbf{A}$，其结果相当于以数k乘$\mathbf{A}$的第i列（$c_i \times k$）

(ii) 以非零常数k乘某行或某列（初等倍乘矩阵）

$$\mathbf{E}_{ij}(k)=\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&\cdots&k&& \\ &&&\ddots&\vdots&& \\ &&&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第}\,i\,\text{行} \\ \\ \text{第}\,j\,\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

(1) 以m阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}(k)$左乘$\mathbf{A}$，其结果相当于把$\mathbf{A}$的第j行乘以数k加到第i行上（$r_i + r_j \times k$）

(2) 以n阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}(k)$右乘$\mathbf{A}$，其结果相当于把$\mathbf{A}$的第i列乘以数k加到第j列上（$c_j + c_i \times k$）

定理

设$\mathbf{A}$为一个$m \times n$矩阵，

- 对$\mathbf{A}$施行一次初等行变换，相当于在$\mathbf{A}$的左边乘以相应的m阶初等矩阵；
- 对$\mathbf{A}$施行一次初等列变换，相当于在$\mathbf{A}$的右边乘以相应的n阶初等矩阵。

总结

$\mathbf{E}_i(k)\mathbf{A}$

$\mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{A}$

$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_i(k)$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}(k)$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$

定理

设$\mathbf{A}$为一个$m \times n$矩阵，

- 对$\mathbf{A}$施行一次初等行变换，相当于在$\mathbf{A}$的左边乘以相应的m阶初等矩阵；
- 对$\mathbf{A}$施行一次初等列变换，相当于在$\mathbf{A}$的右边乘以相应的n阶初等矩阵。

总结

$\mathbf{E}_i(k)\mathbf{A}$

$\mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{A}$

$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_i(k)$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}(k)$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换$r_i \leftrightarrow r_j$的逆变换为其本身可知

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$$

(ii) 由变换$r_i \times k$的逆变换为$r_i \times \frac{1}{k}$可知

$$\mathbf{E}_i(k)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换$r_i + r_j \times k$的逆变换为$r_i - r_j \times k$可知

$$\mathbf{E}_{ij}(k)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换$r_i \leftrightarrow r_j$的逆变换为其本身可知

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$$

(ii) 由变换$r_i \times k$的逆变换为$r_i \times \frac{1}{k}$可知

$$\mathbf{E}_i(k)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换$r_i + r_j \times k$的逆变换为$r_i - r_j \times k$可知

$$\mathbf{E}_{ij}(k)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换$r_i \leftrightarrow r_j$的逆变换为其本身可知

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$$

(ii) 由变换$r_i \times k$的逆变换为$r_i \times \frac{1}{k}$可知

$$\mathbf{E}_i(k)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换$r_i + r_j \times k$的逆变换为$r_i - r_j \times k$可知

$$\mathbf{E}_{ij}(k)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换$r_i \leftrightarrow r_j$的逆变换为其本身可知

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$$

(ii) 由变换$r_i \times k$的逆变换为$r_i \times \frac{1}{k}$可知

$$\mathbf{E}_i(k)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换$r_i + r_j \times k$的逆变换为$r_i - r_j \times k$可知

$$\mathbf{E}_{ij}(k)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换$r_i \leftrightarrow r_j$的逆变换为其本身可知

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$$

(ii) 由变换$r_i \times k$的逆变换为$r_i \times \frac{1}{k}$可知

$$\mathbf{E}_i(k)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换$r_i + r_j \times k$的逆变换为$r_i - r_j \times k$可知

$$\mathbf{E}_{ij}(k)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\0&k&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\0&k&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\0&k&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\0&k&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\ \ \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\ \ \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\ \ \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\ \ \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例2

将三对角矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 分解成主对角元为1的下三角矩阵**L**和上三角阵**U**的乘积$\mathbf{A}=\mathbf{LU}$（称为矩阵的LU分解）。

解:

$$\begin{pmatrix}1&&&\\-\frac{1}{2}&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_1$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&-\frac{2}{3}&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_2$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-\frac{3}{4}&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&0&\frac{5}{4}\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{U}$$

例2

将三对角矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 分解成主对角元为1的下三角矩阵$\mathbf{L}$和上三角阵$\mathbf{U}$的乘积$\mathbf{A}=\mathbf{LU}$（称为矩阵的LU分解）。

解:

$$\begin{pmatrix}1&&&\\-\frac{1}{2}&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_1$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&-\frac{2}{3}&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_2$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-\frac{3}{4}&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&0&\frac{5}{4}\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{U}$$

例2

将三对角矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 分解成主对角元为1的下三角矩阵$\mathbf{L}$和上三角阵$\mathbf{U}$的乘积$\mathbf{A}=\mathbf{LU}$（称为矩阵的LU分解）。

解:

$$\begin{pmatrix}1&&&\\-\frac{1}{2}&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_1$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&-\frac{2}{3}&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_2$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-\frac{3}{4}&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&0&\frac{5}{4}\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{U}$$

例2

将三对角矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 分解成主对角元为1的下三角矩阵**L**和上三角阵**U**的乘积$\mathbf{A}=\mathbf{LU}$（称为矩阵的LU分解）。

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{A}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{A}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{U}$$

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{LU}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

定理2

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明: 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做3类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此，对于任何矩阵$\mathbf{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

当$\mathbf{A}$为n阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而$\mathbf{U}$必为单位矩阵$\mathbf{I}$.

定理2

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明: 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做3类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此，对于任何矩阵$\mathbf{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

当$\mathbf{A}$为n阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而$\mathbf{U}$必为单位矩阵$\mathbf{I}$.

定理2

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明: 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做3类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此，对于任何矩阵$\mathbf{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

当$\mathbf{A}$为n阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而$\mathbf{U}$必为单位矩阵$\mathbf{I}$.

定理2

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明: 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做3类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此，对于任何矩阵$\mathbf{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

当$\mathbf{A}$为n阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而$\mathbf{U}$必为单位矩阵$\mathbf{I}$.

推论1

可逆矩阵$\mathbf{A}$可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明：由上述定理，必存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1)^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1}$$

推论1

可逆矩阵$\mathbf{A}$可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明： 由上述定理，必存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1)^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1}$$

推论1

如果对可逆矩阵$\mathbf{A}$与同阶单位矩阵$\mathbf{I}$做同样的初等行变换，那么当$\mathbf{A}$变为单位阵时，$\mathbf{I}$就变为$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

推论1

如果对可逆矩阵$\mathbf{A}$与同阶单位矩阵$\mathbf{I}$做同样的初等行变换，那么当$\mathbf{A}$变为单位阵时， $\mathbf{I}$就变为$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

例3

求$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

解:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例3

求$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

解:

$$\left(\begin{array}{c:c} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例3

求$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

解:

$$\left(\mathbf{A} \;\vdots\; \mathbf{I} \right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例3

求$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

解:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1+r_2\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1+r_2\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3\times(-2)}
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1+r_2\times(-\frac{1}{2})}
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}\Rightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T=\mathbf{I}\Rightarrow\mathbf{BA}^T=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1}=[\mathbf{A}^T(\mathbf{A}-2\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&-2\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}\Rightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T=\mathbf{I}\Rightarrow\mathbf{BA}^T=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1}=[\mathbf{A}^T(\mathbf{A}-2\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&-2\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 2\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 2\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{A}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}\Rightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T=\mathbf{I}\Rightarrow\mathbf{BA}^T=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1}=[\mathbf{A}^T(\mathbf{A}-2\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&-2\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 2\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 2\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{A}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}\Rightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T=\mathbf{I}\Rightarrow\mathbf{BA}^T=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1}=[\mathbf{A}^T(\mathbf{A}-2\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&-2\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{BA}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{BA}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

推论

对于n个未知数n个方程的线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b},$$

如果增广矩阵

$$(\mathbf{A},\ \mathbf{b})\ \overset{r}{\sim}\ (\mathbf{I},\mathbf{x}),$$

则$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$为惟一解。

例5

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_1$与$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_2$的解。

解:

$$(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2 \\ r_2-2r_1 \\ r_3+r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2 \\ r_2\div 5 \\ r_3+3r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例5

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$与$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$的解。

解:

$$(\mathbf{A} \ \ \mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \div 5 \\ r_3 + 3r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1 - 2r_2 + 2r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例5

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_1$与$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_2$的解。

解:

$$(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2 \\ r_2-2r_1 \\ r_3+r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2 \\ r_2\div 5 \\ r_3+3r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例5

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-3\\-1&3&2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix},$$

求$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_1$与$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_2$的解。

解:

$$(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2)=\begin{pmatrix}2&1&3&1&-1\\1&2&-2&2&0\\-1&3&2&-2&5\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&-3&1&-3&-1\\0&5&0&0&5\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\ r_2\div 5\\ r_3+3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}$$

例5

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_1$与$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_2$的解。

解:

$$(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2 \\ r_2-2r_1 \\ r_3+r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2 \\ r_2\div 5 \\ r_3+3r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX}=\mathbf{A}+\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$

解: 原方程等价于

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}-\mathbf{I} & \mathbf{A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX}=\mathbf{A}+\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$

解： 原方程等价于

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I}\ \ \mathbf{A})=\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX}=\mathbf{A}+\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解: 原方程等价于

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I}\ \ \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_3\div(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_3\div(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX} = \mathbf{A} + \mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解： 原方程等价于

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I} \ \ \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3 + 4r_2 \\ r_3 \div (-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3 + 4r_2 \\ r_3 \div (-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX}=\mathbf{A}+\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解： 原方程等价于

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I}\ \ \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_3\div(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_3\div(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX}=\mathbf{A}+\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解: 原方程等价于

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I}\ \ \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_3\div(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_3\div(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例7

当a,b满足什么条件时，矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$不可逆。

解：

$$\mathbf{A} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{r_2+r_1\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\times(-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

例7

当a,b满足什么条件时，矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$不可逆。

解:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{c_1\leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{r_2+r_1\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\times(-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

例7

当a,b满足什么条件时，矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$不可逆。

解:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{r_2+r_1\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\times(-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

例7

当a,b满足什么条件时，矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$不可逆。

解:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{r_2+r_1\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\times(-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

记为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵的按行分块

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in})$$

矩阵的按列分块

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_2, & \cdots, & \mathbf{b}_s \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

当n阶矩阵$\mathbf{A}$中非零元素都集中在主对角线附近，有时可分块成如下对角块矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_i$为r_i阶方阵$(i = 1, 2, \cdots, m)$，且

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n.$$

$$\left(\begin{array}{cc:ccc:c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

分块矩阵的加法

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{sr}\end{pmatrix},$$

其中$\mathbf{A}_{ij}$与$\mathbf{B}_{ij}$为同型矩阵，则

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r}+\mathbf{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \mathbf{A}_{s1}+\mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}+\mathbf{B}_{sr}\end{pmatrix}.$$

分块矩阵的数乘

$$\lambda \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{A}_{11} & \cdots & \lambda \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \lambda \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法

设$\mathbf{A}$为$m \times n$矩阵, $\mathbf{B}$为$n \times s$矩阵，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{r1} & \cdots & \mathbf{A}_{rs} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{st} \end{pmatrix},$$

其中$\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, \cdots, A_{is}$的列数分别等于$\mathbf{B}_{1j}, \mathbf{B}_{2j}, \cdots, \mathbf{B}_{sj}$的行数，则

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{r1} & \cdots & \mathbf{C}_{rt} \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}.$$

例1

用分块矩阵的乘法计算**AB**，其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解:

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times 3} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}$$

例1

用分块矩阵的乘法计算**AB**，其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解:

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times 3} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}$$

$$
\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times 2} \end{pmatrix}
$$

则

$$
\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 - \mathbf{I}_3 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}
$$

其中

$$
\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times 2} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 - \mathbf{I}_3 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times 2} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 - \mathbf{I}_3 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

例2

设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{B}$为$n\times s$矩阵，$\mathbf{B}$按列分块成$1\times s$分块矩阵， 将$\mathbf{A}$看成1×1分块矩阵，则

$$\mathbf{AB}=\mathbf{A}(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_s)=(\mathbf{Ab}_1,\mathbf{Ab}_2,\cdots,\mathbf{Ab}_s)$$

若已知$\mathbf{AB}=0$，则显然

$$\mathbf{Ab}_j=0,\quad j=1,2,\cdots,s.$$

因此，$\mathbf{B}$的每一列$\mathbf{b}_j$都是线性方程组$\mathbf{Ax}=0$的解。

例3

设$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

证明：设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把$\mathbf{A}$用列向量表示为$\mathbf{A}=(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \cdots,\ \mathbf{a}_n)$，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1^T\\ \mathbf{a}_2^T\\ \cdots\\ \mathbf{a}_n^T\end{pmatrix}(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \cdots,\ \mathbf{a}_n)=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_n\\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

因为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，故

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_j=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\mathbf{a}_j^T\mathbf{a}_j=0,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0\ \Rightarrow\ a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0\ \Rightarrow\ \mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

例3

设$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

证明： 设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把$\mathbf{A}$用列向量表示为$\mathbf{A}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

因为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，故

$$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{a}_j=0, \quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{a}_j=0, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0 \;\Rightarrow\; a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

例3

设$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

证明： 设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把$\mathbf{A}$用列向量表示为$\mathbf{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)$，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\ \boldsymbol{a}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{a}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n\\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$$

因为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，故

$$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{a}_j=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{a}_j=0,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0\ \Rightarrow\ a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0\ \Rightarrow\ \mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

例3

设$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

证明: 设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把$\mathbf{A}$用列向量表示为$\mathbf{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)$，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\ \boldsymbol{a}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{a}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n\\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$$

因为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，故

$$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{a}_j=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{a}_j=0,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0\ \Rightarrow\ a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0\ \Rightarrow\ \mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

例3

设$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

证明： 设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把$\mathbf{A}$用列向量表示为$\mathbf{A}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

因为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，故

$$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{a}_j=0, \quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{a}_j=0, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0 \Rightarrow a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0 \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

例3

设$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

证明： 设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把$\mathbf{A}$用列向量表示为$\mathbf{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)$，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\ \boldsymbol{a}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{a}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n\\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$$

因为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，故

$$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{a}_j=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{a}_j=0,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0\ \Rightarrow\ a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0\ \Rightarrow\ \mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

例3

设$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，证明$\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

证明： 设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把$\mathbf{A}$用列向量表示为$\mathbf{A}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

因为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$，故

$$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{a}_j=0, \quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{a}_j=0, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0 \Rightarrow a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0 \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

例4

若n阶矩阵$\mathbf{C},\mathbf{D}$可以分块成同型对角块矩阵，即

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_1 & & & \\ & \mathbf{C}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \mathbf{C}_m\end{pmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{D}_1 & & & \\ & \mathbf{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \mathbf{D}_m\end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{C}_i$和$\mathbf{D}_i$为同阶方阵（$i=1,2,\cdots,m$），则

$$\mathbf{CD}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_1\mathbf{D}_1 & & & \\ & \mathbf{C}_2\mathbf{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \mathbf{C}_m\mathbf{D}_m\end{pmatrix}$$

例5

证明：若方阵$\mathbf{A}$为可逆的上三角阵，则$\mathbf{A}^{-1}$也为上三角阵。

证明: 对阶数n用数学归纳法。

1 当$n=1$时，$(a)^{-1}=(\frac{1}{a})$，结论成立。

2 假设命题对$n-1$阶可逆上三角矩阵成立，考虑n阶情况，设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_1$为$n-1$阶可逆上三角阵。

例5

证明：若方阵$\mathbf{A}$为可逆的上三角阵，则$\mathbf{A}^{-1}$也为上三角阵。

证明： 对阶数n用数学归纳法。

1 当$n=1$时，$(a)^{-1}=(\frac{1}{a})$，结论成立。

2 假设命题对$n-1$阶可逆上三角矩阵成立，考虑n阶情况，设

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c:cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_1$为$n-1$阶可逆上三角阵。

例5

证明：若方阵$\mathbf{A}$为可逆的上三角阵，则$\mathbf{A}^{-1}$也为上三角阵。

证明： 对阶数n用数学归纳法。

1 当$n=1$时，$(a)^{-1}=(\frac{1}{a})$，结论成立。

2 假设命题对$n-1$阶可逆上三角矩阵成立，考虑n阶情况，设

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_1$为$n-1$阶可逆上三角阵。

设**A**的逆阵为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \boldsymbol{\alpha\gamma} & a_{11}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_1\boldsymbol{\gamma} & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}_1\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_1 \ \Rightarrow \ \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}.$$

由归纳假设，$\mathbf{B}_1$为$n-1$阶上三角矩阵，因此

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。

设$\mathbf{A}$的逆阵为

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \gamma & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T,\quad \gamma=\begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_1=\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\alpha\gamma & a_{11}\beta+\alpha\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_1\gamma & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}_1\gamma=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \gamma=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1=\mathbf{I}_1\ \Rightarrow\ \mathbf{B}_1=\mathbf{A}_1^{-1}.$$

由归纳假设，$\mathbf{B}_1$为$n-1$阶上三角矩阵，因此

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。

设$\mathbf{A}$的逆阵为

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \gamma & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T,\quad \gamma=\begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_1=\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \gamma & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\boldsymbol{\alpha}\gamma & a_{11}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_1\gamma & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}_1\gamma=\mathbf{0} \ \Rightarrow\ \gamma=0,$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1=\mathbf{I}_1 \ \Rightarrow\ \mathbf{B}_1=\mathbf{A}_1^{-1}.$$

由归纳假设，$\mathbf{B}_1$为$n-1$阶上三角矩阵，因此

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。

设$\mathbf{A}$的逆阵为

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \gamma & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T,\quad \gamma=\begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_1=\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \gamma & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\boldsymbol{\alpha}\gamma & a_{11}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_1\gamma & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}_1\gamma=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \gamma=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1=\mathbf{I}_1\ \Rightarrow\ \mathbf{B}_1=\mathbf{A}_1^{-1}.$$

由归纳假设，$\mathbf{B}_1$为$n-1$阶上三角矩阵，因此

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。

设$\mathbf{A}$的逆阵为

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \gamma & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T,\quad \gamma=\begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_1=\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \gamma & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\boldsymbol{\alpha}\gamma & a_{11}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_1\gamma & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}_1\gamma=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \gamma=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1=\mathbf{I}_1\ \Rightarrow\ \mathbf{B}_1=\mathbf{A}_1^{-1}.$$

由归纳假设，$\mathbf{B}_1$为$n-1$阶上三角矩阵，因此

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。

分块矩阵的转置

分块矩阵$\mathbf{A}=(\mathbf{A}_{kl})_{s\times t}$的转置矩阵为

$$\mathbf{A}^T=(\mathbf{B}_{lk})_{t\times s},$$

其中$\mathbf{B}_{lk}=\mathbf{A}_{kl}$.

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23}\end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T\\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T\\ \mathbf{A}_{13}^T & \mathbf{A}_{23}^T\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}\xlongequal{\text{按行分块}}\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{B}^T=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1^T & \mathbf{b}_2^T & \cdots & \mathbf{b}_m^T\end{pmatrix}$$

分块矩阵的转置

分块矩阵$\mathbf{A}=(\mathbf{A}_{kl})_{s\times t}$的转置矩阵为

$$\mathbf{A}^T=(\mathbf{B}_{lk})_{t\times s},$$

其中$\mathbf{B}_{lk}=\mathbf{A}_{kl}$.

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23}\end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T\\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T\\ \mathbf{A}_{13}^T & \mathbf{A}_{23}^T\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}\xlongequal{\text{按行分块}}\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{B}^T=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1^T & \mathbf{b}_2^T & \cdots & \mathbf{b}_m^T\end{pmatrix}$$

分块矩阵的转置

分块矩阵$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{kl})_{s\times t}$的转置矩阵为

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{B}_{lk})_{t\times s},$$

其中$\mathbf{B}_{lk} = \mathbf{A}_{kl}$.

例

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T \\ \mathbf{A}_{13}^T & \mathbf{A}_{23}^T \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \xlongequal{\text{按行分块}} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T & \mathbf{b}_2^T & \cdots & \mathbf{b}_m^T \end{pmatrix}$$

可逆分块矩阵的逆矩阵

对角块矩阵（准对角矩阵）

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix}$$

的行列式为$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_2|\cdots|\mathbf{A}_m|$，因此，$\mathbf{A}$可逆的充分必要条件为

$$|\mathbf{A}_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

其逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m^{-1} \end{pmatrix}$$

可逆分块矩阵的逆矩阵

对角块矩阵（准对角矩阵）

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix}$$

的行列式为$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_2|\cdots|\mathbf{A}_m|$，因此，$\mathbf{A}$可逆的充分必要条件为

$$|\mathbf{A}_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

其逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m^{-1} \end{pmatrix}$$

- 用分块矩阵求逆矩阵，可将高阶矩阵的求逆转化为低阶矩阵的求逆。
- 一个2×2的分块矩阵求逆，可以根据逆矩阵的定义，用解矩阵方程的方法解得。

例6

设$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$，其中$\mathbf{B}, \mathbf{D}$皆为可逆矩阵，证明$\mathbf{A}$可逆并求$\mathbf{A}^{-1}$.

解：因$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}||\mathbf{D}| \neq 0$，故$\mathbf{A}$可逆。设$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{BX} & \mathbf{BY} \\ \mathbf{CX}+\mathbf{DZ} & \mathbf{CY}+\mathbf{DT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{aligned} \mathbf{BX} &= \mathbf{I} && \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{BY} &= \mathbf{0} && \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{CX}+\mathbf{DZ} &= \mathbf{0} && \Rightarrow \mathbf{Z} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{CY}+\mathbf{DT} &= \mathbf{I} && \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{D}^{-1} \end{aligned}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

例6

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{0}\\\mathbf{C}&\mathbf{D}\end{pmatrix}$，其中$\mathbf{B},\mathbf{D}$皆为可逆矩阵，证明$\mathbf{A}$可逆并求$\mathbf{A}^{-1}$.

解： 因$|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}||\mathbf{D}|\neq 0$，故$\mathbf{A}$可逆。设$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}&\mathbf{Y}\\\mathbf{Z}&\mathbf{T}\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{0}\\\mathbf{C}&\mathbf{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{X}&\mathbf{Y}\\\mathbf{Z}&\mathbf{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{BX}&\mathbf{BY}\\\mathbf{CX}+\mathbf{DZ}&\mathbf{CY}+\mathbf{DT}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{I}\end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
&\mathbf{BX}=\mathbf{I} &&\Rightarrow \mathbf{X}=\mathbf{B}^{-1}\\
&\mathbf{BY}=\mathbf{0} &&\Rightarrow \mathbf{Y}=\mathbf{0}\\
&\mathbf{CX}+\mathbf{DZ}=\mathbf{0} &&\Rightarrow \mathbf{Z}=-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}\\
&\mathbf{CY}+\mathbf{DT}=\mathbf{I} &&\Rightarrow \mathbf{T}=\mathbf{D}^{-1}
\end{aligned}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1}&\mathbf{0}\\-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}&\mathbf{D}^{-1}\end{pmatrix}.$$

例6

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}$，其中$\mathbf{B},\mathbf{D}$皆为可逆矩阵，证明$\mathbf{A}$可逆并求$\mathbf{A}^{-1}$.

解: 因$|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}||\mathbf{D}|\neq 0$，故$\mathbf{A}$可逆。设$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z} & \mathbf{T}\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z} & \mathbf{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{BX} & \mathbf{BY}\\ \mathbf{CX}+\mathbf{DZ} & \mathbf{CY}+\mathbf{DT}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
\mathbf{BX}&=\mathbf{I} &&\Rightarrow \mathbf{X}=\mathbf{B}^{-1}\\
\mathbf{BY}&=\mathbf{0} &&\Rightarrow \mathbf{Y}=\mathbf{0}\\
\mathbf{CX}+\mathbf{DZ}&=\mathbf{0} &&\Rightarrow \mathbf{Z}=-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}\\
\mathbf{CY}+\mathbf{DT}&=\mathbf{I} &&\Rightarrow \mathbf{T}=\mathbf{D}^{-1}
\end{aligned}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} & \mathbf{D}^{-1}\end{pmatrix}.$$

例6

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}$，其中$\mathbf{B},\mathbf{D}$皆为可逆矩阵，证明$\mathbf{A}$可逆并求$\mathbf{A}^{-1}$.

解: 因$|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}||\mathbf{D}|\neq 0$，故$\mathbf{A}$可逆。设$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z} & \mathbf{T}\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z} & \mathbf{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{BX} & \mathbf{BY}\\ \mathbf{CX}+\mathbf{DZ} & \mathbf{CY}+\mathbf{DT}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
\mathbf{BX}&=\mathbf{I} && \Rightarrow\ \mathbf{X}=\mathbf{B}^{-1}\\
\mathbf{BY}&=\mathbf{0} && \Rightarrow\ \mathbf{Y}=\mathbf{0}\\
\mathbf{CX}+\mathbf{DZ}&=\mathbf{0} && \Rightarrow\ \mathbf{Z}=-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}\\
\mathbf{CY}+\mathbf{DT}&=\mathbf{I} && \Rightarrow\ \mathbf{T}=\mathbf{D}^{-1}
\end{aligned}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} & \mathbf{D}^{-1}\end{pmatrix}.$$

分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵

对于分块矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

同样可以定义它的3类初等行变换与列变换，并相应地定义3类分块矩阵：

(i) 分块倍乘矩阵（$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$为可逆阵）

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix}$$

(ii) 分块倍加矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{C}_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$$

(iii) 分块对换矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

例7

设n阶矩阵$\mathbf{A}$分块表示为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_{11},\mathbf{A}_{22}$为方阵，且$\mathbf{A}$与$\mathbf{A}_{11}$可逆。证明：$\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$可逆，并求$\mathbf{A}^{-1}$。

解：构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_1 & \mathbf{0}\\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2\end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\end{pmatrix}$$

两边同时取行列式可知

$$|\mathbf{A}|=|\mathbf{P}_1\mathbf{A}|=|\mathbf{A}_{11}|\cdot|\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}|$$

故$\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$可逆。

例7

设n阶矩阵$\mathbf{A}$分块表示为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{A}_{11},\mathbf{A}_{22}$为方阵，且$\mathbf{A}$与$\mathbf{A}_{11}$可逆。证明：$\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$可逆，并求$\mathbf{A}^{-1}$。

解： 构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式可知

$$|\mathbf{A}|=|\mathbf{P}_1\mathbf{A}|=|\mathbf{A}_{11}|\cdot|\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}|$$

故$\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$可逆。

$$P_1A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} \xlongequal{Q = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$P_2 = \begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

则

$$P_2P_1A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 + A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{12}Q^{-1} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1} \\ -Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \overset{\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \overset{\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \xlongequal{\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \xlongequal{\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \xlongequal{\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\end{pmatrix}\xlongequal{\mathbf{Q}=\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}\end{pmatrix}$$

构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2\end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1}&=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_1 & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_1 & \mathbf{0}\\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_1+\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}^{-1}+\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\\ -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{Q}^{-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例8

设$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}$，且$\mathbf{A}$可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$$

解：构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_1 & \mathbf{0}\\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I}_2\end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得

$$|\mathbf{Q}|=|\mathbf{P}_1\mathbf{Q}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|.$$

例8

设$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}$，且$\mathbf{A}$可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$$

解: 构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_1 & \mathbf{0}\\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I}_2\end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得

$$|\mathbf{Q}|=|\mathbf{P}_1\mathbf{Q}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|.$$

例8

设$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$，且$\mathbf{A}$可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$$

解： 构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得

$$|\mathbf{Q}|=|\mathbf{P}_1\mathbf{Q}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|.$$

例8

设$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$，且$\mathbf{A}$可逆，证明：

$$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$$

解： 构造分块倍加矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得

$$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|.$$

例9

设$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为n阶分块矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}+\mathbf{B}|\,|\mathbf{A}-\mathbf{B}|$$

解：将分块矩阵$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}+\mathbf{B} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}+\mathbf{B} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

总之有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得结论。

例9

设$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为n阶分块矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}+\mathbf{B}|\,|\mathbf{A}-\mathbf{B}|$$

解： 将分块矩阵$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}+\mathbf{B} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}+\mathbf{B} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

总之有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得结论。

例9

设**A**与**B**均为n阶分块矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}+\mathbf{B}|\,|\mathbf{A}-\mathbf{B}|$$

解： 将分块矩阵$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}+\mathbf{B} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}+\mathbf{B} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

总之有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得结论。

例9

设$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$均为n阶分块矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}+\mathbf{B}|\,|\mathbf{A}-\mathbf{B}|$$

解： 将分块矩阵$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}+\mathbf{B} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}+\mathbf{B} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

总之有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得结论。