线性方程组的解

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 11 月 17 日

目录

本章主要讨论线性方程组的解的基本理论，包括

- 非齐次线性方程组有解的充分必要条件以及解的结构；
- 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件以及解的结构。

1. n 维向量及其线性相关性

2. 向量组的秩及其极大线性无关组

3. 矩阵的秩　相抵标准形

4. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

5. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

考察三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

我们用向量工具给出其几何解释。记

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} = a_{i1}\boldsymbol{i} + a_{i2}\boldsymbol{j} + a_{i3}\boldsymbol{k}, \quad i = 1,2,3,$$

且

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$$

定义 1 (向量的内积) 两个向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 的内积定义为

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

定义 2 (向量的垂直) 两个向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 垂直的充分必要条件是

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0.$$

由以上方程组可看出，解向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都垂直。故

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面，只有零向量与三者都垂直，即线性方程组 (1) 只有零解；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面但不共线，则与该平面垂直的向量都是线性方程组 (1) 的解，故 (1) 有无穷多个彼此平行的解向量；

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共线，则过原点且与该直线垂直的平面上的全体向量都是 (1) 的解向量，此时任一解向量均可表示为

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{x}^{(1)} + k_2\boldsymbol{x}^{(2)},$$

其中 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)}$ 为 (1) 的某两个不共线的非零解向量，k_1,k_2 为任意常数。

定义 3 (n 维向量) 数域 F 上的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的有序数组称为数域 F 上的一个 n 维向量，记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

其中 a_i 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量。

- 形如 (2) 的向量称为行向量；
- 形如

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

  的向量称为列向量。

数域 F 上全体 n 维向量组成的集合，记作 F^n。设 $\boldsymbol{\alpha} \in F^n$，则

- 当 F 取为 $\mathbb{R}$ 时，$\boldsymbol{\alpha}$ 为实向量；
- 当 F 取为 $\mathbb{C}$ 时，$\boldsymbol{\alpha}$ 为复向量。

定义 4 向量运算 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in F^n$，$k\in F$，定义

(i) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 当且仅当 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$；

(ii) 向量加法

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

(iii) 向量数乘

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

- 在 (iii) 中取 $k=-1$，得

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

右端的向量称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

- 向量的减法定义为

$$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\alpha})$$

定义 5 (向量的 8 条运算规则) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in F^n, 1, k, l\in F$，则

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$

(3) 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$

(4) 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，存在负向量 $-\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

定义 6 (向量空间) 数域 F 上的 n 维向量，在其中定义了上述加法与数乘运算，就称之为 F 上的 n 维向量空间，仍记为 F^n。当 $F = \mathbb{R}$ 时，叫做 n 维实向量空间，记作 $\mathbb{R}^n$。

定义 7 (线性表示) 设 $\boldsymbol{\alpha}_i \in F^n, k_i \in F(i=1,2,\cdots,m)$，则向量

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 在数域 F 上的一个线性组合。如果记

$$\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{\alpha}_i,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示（或线性表出）。

设有线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵。记

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{b}$$

于是线性方程组可等价的表述为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$$

注 1　向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，等价于方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b}$$

有解。

定义 8 (线性相关与线性无关) 若对 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$，有 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \tag{3}$$

成立，则称$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关**；否则，称$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关**。

注 2　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，指的是

- 没有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 (3) 成立；
- 只有当 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 全为零时，才使 (3) 成立；
- 若 (3) 成立，则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 必须全为零。

定理 1　以下两组等价关系成立:

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，等价于齐次方程组
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$
有非零解。
- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，等价于齐次方程组
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$
只有零解。

对于只含有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量组，若存在不为零的数 k 使得

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

则

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

若 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，要使

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

必须 $k = 0$.

- 当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关
- 当 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关

定理 2　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出。

定理 2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出。

证明. $(\Rightarrow)$ 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

定理 2　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出。

证明.　$(\Rightarrow)$　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

不妨设 $k_1 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1} \boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1} \boldsymbol{\alpha}_m$$

必要性得证。

定理 2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出。

证明. $(\Rightarrow)$ 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

不妨设 $k_1 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1} \boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1} \boldsymbol{\alpha}_m$$

必要性得证。

$(\Leftarrow)$ 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = l_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m \boldsymbol{\alpha}_m$$

定理 2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出。

证明. ($\Rightarrow$) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

不妨设 $k_1\neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m$$

必要性得证。

($\Leftarrow$) 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_1-l_2\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

显然 $1,-l_2,\cdots,-l_m$ 不全为零，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关。 □

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的基本方法为：说明齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

只有零解。也常常表述为：设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

然后说明上式成立，只能有唯一选择：

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0.$$

例 2.1　设 n 维向量 $\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$，则 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关。

例 2.1　设 n 维向量 $\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关。

解　设存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得

$$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0},$$

即

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\mathbf{0},$$

则必有 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关。

注 3　n 维向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 称为基本向量。F^n 中任何向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 都可以由 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n \boldsymbol{e}_n.$$

例 2.2　包含零向量的向量组是线性相关的。

例 2.2 包含零向量的向量组是线性相关的。

解 设该向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$。则存在 m 个不全为零的数 $1,0,\cdots,0$ 使得

$$1\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

故该向量组线性相关。

注 4

- 单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 为零向量；
- 单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零向量。

例 2.3　如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关。

例 2.3 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关。

证明. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r < m)$ 线性相关，则存在 r 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

从而有 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + 0\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关。 □

注 5

- 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则其中任一部分向量组也线性无关。
- 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

注 6 该定理不能理解为：线性相关的向量组中，每一个向量都能由其余向量线性表示。

如 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1)$ 线性相关（因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关），但 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示。

定理 3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r \in F^n$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},\ a_{21},\ \cdots,\ a_{n1})^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(a_{12},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{n2})^T,$$
$$\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r=(a_{1r},\ a_{2r},\ \cdots,\ a_{nr})^T,$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{4}$$

有非零解，其中

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr}. \end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

证明. 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}, \tag{5}$$

即

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_r\begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

此即齐次线性方程组 (4)。

($\Rightarrow$) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则必有不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 使得 (5) 成立，即齐次线性方程组 (4) 有非零解。

($\Leftarrow$) 若方程组 (4) 有非零解，就是说有不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 使得 (5) 成立，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关。

□

结论 1　对于齐次线性方程组，如果

$$\text{未知量个数} \quad > \quad \text{方程个数},$$

则它必有无穷多解，从而必有非零解。

定理 4　任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的。

定理 4 任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的。

证明. 对向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \in F^n$，设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n + x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0},$$

注意到此齐次线性方程组中，未知量个数为 $n+1$，而方程个数为 n，故方程组一定有无穷多个解，从而必有非零解。得证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性相关。 □

注 7

- 向量个数 $>$ 向量维数 $\Rightarrow$ 向量组必线性相关。
- 在 $\mathbb{R}^n$ 中，任意一组线性无关的向量最多只能含 n 个向量。

定理 5 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，并且表示法惟一。

证明. 因为 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，故存在不全为零的数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

其中 $k\neq 0$ (若 $k=0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关可知 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 全为零，这与 $k,k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为零矛盾)。于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

证明. 因为 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，故存在不全为零的数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

其中 $k\neq 0$ (若 $k=0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关可知 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 全为零，这与 $k,k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为零矛盾)。于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

再证唯一性 设有两种表示法

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r,\quad \boldsymbol{\beta}=h_1\boldsymbol{\alpha}_1+h_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+h_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

于是

$$(l_1-h_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2-h_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_r-h_r)\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关可知 $l_i-h_i=0$, 即$l_i=h_i$. 故 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示的表示法惟一。 □

推论 1　如果 F^n 中的 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则 F^n 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示法惟一。

推论 1 如果 F^n 中的 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则 F^n 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示法惟一。

证明. 由" 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关'' 知，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，由前述定理可得结论成立。 □

例 2.4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关？

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？如能表示求出其表示式。

例 2.4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关？

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？如能表示求出其表示式。

解

(1) 考察 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 由 $|\boldsymbol{A}|=7$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

例 2.4　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关？

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？如能表示求出其表示式。

解

(1) 考察 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 由 $|\boldsymbol{A}|=7$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

(2) 根据推论，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法惟一。设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4\Rightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1^T+x_2\boldsymbol{\alpha}_2^T+x_3\boldsymbol{\alpha}_3^T=\boldsymbol{\alpha}_4^T$$

即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T & \boldsymbol{\alpha}_2^T & \boldsymbol{\alpha}_3^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$$

解此方程组得惟一解 $x_1=1,x_2=-1,x_3=2$，故 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

例 2.5　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

例 2.5 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

解 设有数 x_1, x_2, x_3 使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0} \tag{6}$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2) + x_3(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$$

亦即

$$(x_1 + x_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_1 - 2x_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (x_1 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

求解该方程组可得非零解 $(-1, -1, 2)$。因此，有不全为零的数 x_1, x_2, x_3 使得 (6) 成立，从而 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

例 2.6　证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

证明.　(⇒)　假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则有不全为零的数 x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_1 使得

$$(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_3+x_1)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

例 2.6 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

证明. ($\Rightarrow$) 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则有不全为零的数 $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1$ 使得

$$(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_3+x_1)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

($\Leftarrow$) 设有 x_1, x_2, x_3 使得

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0} \tag{7}$$

即

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

$$x_1+x_3=0, \quad x_1+x_2=0, \quad x_2+x_3=0,$$

该方程组只有零解。这说明若使 (7)，必有 $x_1=x_2=x_3=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关。 □

定理 6 如果一组 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，那么把这些向量各任意添加 m 个分量所得的向量（$n+m$ 维）组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s^*$ 也线性无关。亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}\text{线性无关} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix}\text{线性无关}$$

定理 7 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，那么它们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量也线性相关，亦即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{线性相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{线性相关}$$

证明. 以上两定理互为逆否命题，故只需证明第一个。设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

只有零解。设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})^T$， $i = 1, 2, \cdots, s$，即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & = & 0, \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ns}x_s & = & 0. \end{array}\right. \tag{8}$$

只有零解。

不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}, a_{n+1,i})^T, \quad ii = 1, 2, \cdots, s.$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s^* = \mathbf{0}$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & = & 0, \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ns}x_s & = & 0, \\ a_{n+1,1}x_1 & + & a_{n+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n+1,s}x_s & = & 0. \end{array}\right. \tag{9}$$

方程组 (9) 的解全是方程组 (8) 的解。而方程组 (8) 只有零解，故方程组 (9) 也只有零解。故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$ 线性无关。 $\square$

推论 2 设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

推论 2 设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

证明. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，把这些向量各任意添加 m 个全为零的分量，所得到的新向量组记为 $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$。此时方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

与方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s^* = \mathbf{0}$$

完全相同。所以新向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s^*$ 也线性相关。 □

对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。

如

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ 0 \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}$$

线性相关性一致。

例 2.7 考察以下向量组的线性相关性:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例 2.7 考察以下向量组的线性相关性:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\6\\9\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\\3\end{pmatrix}$$

解 去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

线性无关,故原向量组线性无关。

1. n 维向量及其线性相关性

2. 向量组的秩及其极大线性无关组

3. 矩阵的秩　相抵标准形

4. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

5. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

定义 9 (向量组的秩) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中，若

- 存在 r 个线性无关的向量，
- 且其中任一向量可由这 r 个线性无关的向量线性表示，

则数 r 称为向量组的秩 (rank)，记作

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$$

或

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$$

- 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = s$；
- 只含零向量的向量组的秩为零。
- 只含一个非零向量的向量组的秩为 1。

定义 10　若向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 中每个向量可由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，就称**向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示**。

如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是**等价**的。

向量组的线性表示，具备

- 自反性

  向量组自己可以由自己线性表示
- 传递性

  设向量组 A 可以被向量组 B 线性表示，向量组 B 又可以被向量组 C 线性表示，则向量组 A 可以被向量组 C 线性表示
- 不具备对称性

  向量组 A 可以被向量组 B 线性表示，不一定有向量组 B 又可以被向量组 A 线性表示。

  如：部分组总是可以由整体线性表示，但反之不成立

向量组的等价，具备

- **自反性**

  任一向量组和自身等价
- **对称性**

  向量组 A 与向量组 B 等价，当然向量组 B 与向量组 A 等价
- **传递性**

  设向量组 A 与向量组 B 等价，向量组 B 与向量组 C 等价，则向量组 A 与向量组 C 等价

定理 8 若向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且 $t>s$，则 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关。

定理 8 若向量组 B: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且 $t>s$，则 B: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关。

证明. 设 $\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\quad j=1,2,\cdots,t.$ 欲证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关，只需证：存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}, \tag{10}$$

即

$$\sum_{j=1}^{t}x_j\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{j=1}^{t}x_j\left(\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j\right)\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}.$$

当其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的系数

$$\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j=0,\quad i=1,2,\cdots,s \tag{11}$$

时，(10) 显然成立。注意到齐次线性方程组 (11) 含 t 个未知量，s 个方程，而 $t>s$，故 (11) 有非零解。即有不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 使得 (10) 成立，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关。 □

推论 3 若向量组 B： $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且 B： $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，则

$$t \le s.$$

推论 4 若 $\mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 $r+1$ 个向量都是线性相关的。

推论 4 若 $\mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 $r+1$ 个向量都是线性相关的。

证明. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的 r 个线性无关的向量，由于该向量组中任一个向量可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，由定理 3.2.1 可知，其中任意 $r+1$ 个向量都线性相关。 □

定义 11 (向量组的秩的等价定义 & 极大线性无关组) 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$。如果能从其中选出 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，满足

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；
- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关，

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为原向量组的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

极大线性无关组所含向量的个数 r，称为原向量组的秩。

注 8

- 秩为 r 的向量组中，任一个线性无关的部分组最多含有 r 个向量；
- 一般情况下，极大无关组不惟一；
- 不同的极大无关组所含向量个数相同；
- 极大无关组与原向量组是等价的；
- 极大无关组是原向量组的全权代表。

推论 5 设 $\mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=p$, $\mathscr{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$，如果向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则

$$r \le p.$$

推论 5　设 $\mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=p$, $\mathscr{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$，如果向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则

$$r \le p.$$

证明.　不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 分别为两个向量组的极大线性无关组。

(1)　$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$等价于$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$

$\Rightarrow$　$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示

(2)　$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示

(3)　$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$等价于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$

$\Rightarrow$　$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$线性表示

$\Longrightarrow$　$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$线性表示

由上述推论可知 $r \le p$。 □

推论 6 **等价向量组的秩相等**。

1. n 维向量及其线性相关性

2. 向量组的秩及其极大线性无关组

3. 矩阵的秩　相抵标准形

4. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

5. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

定义 12 (行秩 & 列秩)

- 把 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**，记为 $\mathscr{R}_r(\boldsymbol{A})$。
- 把 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**，记为 $\mathscr{R}_c(\boldsymbol{A})$。

对于 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，

- $\mathscr{R}_p(\boldsymbol{A}) \leq m$；
- $\mathscr{R}_c(\boldsymbol{A}) \leq n$。

定义 13 (阶梯形矩阵) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 零行在最下方；

(2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**阶梯形矩阵**。

例 4.1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 14 (行简化阶梯形矩阵) 若矩阵 A 满足

(1) 它是阶梯形矩阵；

(2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外，其余元素全为零，

则称 A 为行简化阶梯形矩阵。

例 4.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 15 (行最简阶梯形矩阵)　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 它是行简化阶梯形矩阵；

(2) 非零行首元为 1，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为行最简阶梯形矩阵。

例 4.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $a_{11} \neq 0, a_{23} \neq 0, a_{34} \neq 0$。验证 $\mathscr{R}_r(\boldsymbol{A}) = 3, \mathscr{R}_c(\boldsymbol{A}) = 3$。

把 $\boldsymbol{A}$ 按行和列分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$$

下证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关。

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15})+x_2(0,0,a_{23},a_{24},a_{25})+x_3(0,0,0,a_{34},a_{35})=(0,0,0,0,0)$$

比较第一个分量

$$x_1a_{11}=0\Rightarrow x_1=0.$$

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}) + x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第一个分量

$$x_1 a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

$$x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第 3 个分量

$$x_2 a_{23} = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}) + x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第一个分量

$$x_1 a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

$$x_2(0, 0, a_{23}, a_{24}, a_{25}) + x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

比较第 3 个分量

$$x_2 a_{23} = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

$$x_3(0, 0, 0, a_{34}, a_{35}) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

同理得 $x_3 = 0$。于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

(1) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

即

$$x_1(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15})+x_2(0,0,a_{23},a_{24},a_{25})+x_3(0,0,0,a_{34},a_{35})=(0,0,0,0,0)$$

比较第一个分量

$$x_1a_{11}=0\Rightarrow x_1=0.$$

$$x_2(0,0,a_{23},a_{24},a_{25})+x_3(0,0,0,a_{34},a_{35})=(0,0,0,0,0)$$

比较第 3 个分量

$$x_2a_{23}=0\Rightarrow x_2=0.$$

$$x_3(0,0,0,a_{34},a_{35})=(0,0,0,0,0)$$

同理得 $x_3=0$。于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

又 $\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，而零向量可由任何向量线性表示，此时

$$\mathbf{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大无关组，所以 $\mathscr{R}_r(\boldsymbol{A})=3$.

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 & \boldsymbol{\beta}_4 & \boldsymbol{\beta}_5 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

去掉 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4, \boldsymbol{\beta}_5$ 的最后一个分量 0，得新向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_2^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*, \boldsymbol{\beta}_5^*$。

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 & \boldsymbol{\beta}_4 & \boldsymbol{\beta}_5 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

去掉 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4, \boldsymbol{\beta}_5$ 的最后一个分量 0，得新向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_2^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*, \boldsymbol{\beta}_5^*$。

因

$$\left| \boldsymbol{\beta}_1^* \quad \boldsymbol{\beta}_3^* \quad \boldsymbol{\beta}_4^* \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{34} \end{vmatrix} = a_{11} a_{23} a_{24} \neq 0,$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关(对应位置增减零不影响线性相关性)。

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 & \boldsymbol{\beta}_4 & \boldsymbol{\beta}_5
\end{array}
$$
$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

去掉 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5$ 的最后一个分量 0，得新向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^*,\boldsymbol{\beta}_2^*,\boldsymbol{\beta}_3^*,\boldsymbol{\beta}_4^*,\boldsymbol{\beta}_5^*$。

因

$$
\left|\begin{array}{ccc}\boldsymbol{\beta}_1^* & \boldsymbol{\beta}_3^* & \boldsymbol{\beta}_4^*\end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{34} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23}a_{24} \neq 0,
$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1^*,\boldsymbol{\beta}_3^*,\boldsymbol{\beta}_4^*$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关(对应位置增减零不影响线性相关性)。

因 $\boldsymbol{\beta}_i^* \in \mathbb{R}^3$，故 $\boldsymbol{\beta}_1^*,\boldsymbol{\beta}_3^*,\boldsymbol{\beta}_4^*,\boldsymbol{\beta}_j^*(j=2\ or\ 5)$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\beta}_1^*,\boldsymbol{\beta}_3^*,\boldsymbol{\beta}_4^*$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\beta}_j^*(j=2\ or\ 5)$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1^*,\boldsymbol{\beta}_3^*,\boldsymbol{\beta}_4^*$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\beta}_j(j=2\ or\ 5)$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性表示。于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是极大无关组，从而有 $\mathscr{R}_c(\boldsymbol{A})=3$.

结论 2 阶梯形矩阵的行秩等于列秩，其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数。

定理 9　初等行变换不改变矩阵的行秩。

证明. 只需证明每做一次对换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变。设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，进行一次初等变换所得矩阵为 $\boldsymbol{B}$。记 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为

A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$.

证明. 只需证明每做一次对换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变。设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，进行一次初等变换所得矩阵为 $\boldsymbol{B}$。记 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$.

(1) 考虑对调变换 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \boldsymbol{B}$。因 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

一致，故 $\mathscr{R}_r(\boldsymbol{B}) = \mathscr{R}_r(\boldsymbol{A})$。

证明. 只需证明每做一次对换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变。设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，进行一次初等变换所得矩阵为 $\boldsymbol{B}$。记 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为

A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$.

(1) 考虑对调变换 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$。因 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$$

一致，故 $\mathscr{R}_r(\boldsymbol{B})=\mathscr{R}_r(\boldsymbol{A})$。

(2) 考虑倍乘变换 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\times c,\ c\neq 0}\boldsymbol{B}$。因 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,c\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故 $\mathscr{R}_r(\boldsymbol{B})=\mathscr{R}_r(\boldsymbol{A})$。

证明. 只需证明每做一次对换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变。设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，进行一次初等变换所得矩阵为 $\boldsymbol{B}$。记 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为
A: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$.

(1) 考虑对调变换 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \boldsymbol{B}$。因 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

一致，故 $\mathscr{R}_r(\boldsymbol{B}) = \mathscr{R}_r(\boldsymbol{A})$。

(2) 考虑倍乘变换 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i \times c,\ c \neq 0} \boldsymbol{B}$。因 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故 $\mathscr{R}_r(\boldsymbol{B}) = \mathscr{R}_r(\boldsymbol{A})$。

(3) 考虑倍乘变换 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i + r_j \times c} \boldsymbol{B}$。因 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i + c\boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故 $\mathscr{R}_r(\boldsymbol{B}) = \mathscr{R}_r(\boldsymbol{A})$。 □

定理 10　初等行变换不改变矩阵的列秩。

定理 10 初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明. 设

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m) = \boldsymbol{B}.$$

在 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 中相同位置任取 s 个列向量:

$$\underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_s}}_{A^*} \quad \text{和} \quad \underbrace{\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_s}}_{B^*}.$$

定理 10 初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明. 设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=\boldsymbol{B}.$$

在 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中相同位置任取 s 个列向量:

$$\underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}}_{A^*}\ \text{和}\ \underbrace{\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s}}_{B^*}.$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s}=\mathbf{0}, \tag{12}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s}=\mathbf{0}. \tag{13}$$

定理 10 初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明. 设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=\boldsymbol{B}.$$

在 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中相同位置任取 s 个列向量:

$$\underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}}_{A^*}\ \text{和}\ \underbrace{\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s}}_{B^*}.$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s}=\mathbf{0},\tag{12}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s}=\mathbf{0}.\tag{13}$$

注意到方程组 (13) 是方程组 (12) 经过高斯消元法得到，故两方程组同解。即向量组 A^* 和 B^* 有完全相同的线性关系，从而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列秩相等。 □

定理 10 初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明. 设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=\boldsymbol{B}.$$

在 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中相同位置任取 s 个列向量:

$$\underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}}_{A^*}\quad\text{和}\quad\underbrace{\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_s}}_{B^*}.$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s}=\mathbf{0},\tag{12}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s}=\mathbf{0}.\tag{13}$$

注意到方程组 (13) 是方程组 (12) 经过高斯消元法得到，故两方程组同解。即向量组 A^* 和 B^* 有完全相同的线性关系，从而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列秩相等。 □

上述定理提供了求向量组的秩与极大无关组的一种简便而有效的方法。

例 4.4 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解 作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$，由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div 3}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&-1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

将最后一个阶梯矩阵 $\boldsymbol{B}$ 记为 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$

易知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，故

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3,$$

且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \\ \boldsymbol{\alpha}_5 &= \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_4,\end{aligned}$$

初等列变换也不改变矩阵的列秩与行秩。

定理 11 初等变换不改变矩阵的行秩与列秩。

定理 12 矩阵的行秩等于其列秩。

定理 12 矩阵的行秩等于其列秩。

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换得到阶梯矩阵 $\boldsymbol{U}$，则有

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_r(\boldsymbol{A}) &= \mathscr{R}_r(\boldsymbol{U}) \\ &= \mathscr{R}_c(\boldsymbol{U}) = \mathscr{R}_c(\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

□

定义 16 (矩阵的秩) 矩阵的行秩或列秩的数值，称为**矩阵的秩**。记作

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) \quad \text{或} \quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}).$$

定义 17 (满秩矩阵) 对于 n 阶方阵，若

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**满秩矩阵**。

定理 13 对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$。

定理 13 对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$。

证明. 只需证明前两个表述等价。

(1)⇒(2) 设 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = n$，记 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯形矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行，由行简化阶梯形矩阵的结构知 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

定理 13 对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$。

证明. 只需证明前两个表述等价。

(1)⇒(2) 设 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = n$，记 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯形矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行，由行简化阶梯形矩阵的结构知 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

(2)⇒(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，记 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_0$，则

$$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换可以得到 $\boldsymbol{I}$，故 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{I}) = n$。

□

定义 18 (子式与主子式) 对矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，任意挑选 k 行 $(i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行$)$ 与 k 列 $(j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列$)$，其交点上的 k^2 个元素按原顺序排成的 k 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \tag{14}$$

称为 A 的k 阶子行列式，简称 A 的k 阶子式。

- 当 (14) 等于零时，称为k 阶零子式;
- 当 (14) 不等于零时，称为k 阶非零子式;
- 当 (14) 的 $j_1 = i_1$，$j_2 = i_2$，$\cdots$，$j_k = i_k$，称为 A 的k 阶主子式。

注 9　若 $\boldsymbol{A}$ 存在 r 阶非零子式，而所有 $r+1$ 阶子式 (如果有) 都等于零，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

注 9 若 $\boldsymbol{A}$ 存在 r 阶非零子式，而所有 $r+1$ 阶子式 (如果有) 都等于零，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

事实上，由行列式的按行展开可知，若所有 $r+1$ 阶子式都等于零，可得到所有更高阶的子式都等于零。

定理 14 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

定理 14 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

($\Rightarrow$) 设 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r$，即 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行构成的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的行秩为 r，其列秩也为 r；不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，于是 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子式为非零子式。

定理 14 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

($\Rightarrow$) 设 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r$，即 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行构成的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的行秩为 r，其列秩也为 r；不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，于是 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子式为非零子式。

又因为 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关，所以 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 阶子式都是零子式（因为其中有一行可由其余 r 行线性表示），因此 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

定理 14 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

($\Rightarrow$) 设 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = r$，即 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行构成的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的行秩为 r，其列秩也为 r；不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，于是 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子式为非零子式。

又因为 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关，所以 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 阶子式都是零子式（因为其中有一行可由其余 r 行线性表示），因此 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

($\Leftarrow$) 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子式 $|\boldsymbol{A}_r| \neq 0$，于是 $\boldsymbol{A}_r$ 可逆，其 r 个行向量线性无关。将它们添加分量称为 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个行向量，它们也线性无关。

定理 14 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

($\Rightarrow$) 设 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r$，即 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行构成的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的行秩为 r，其列秩也为 r；不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，于是 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子式为非零子式。

又因为 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关，所以 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 阶子式都是零子式（因为其中有一行可由其余 r 行线性表示），因此 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

($\Leftarrow$) 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子式 $|\boldsymbol{A}_r|\neq 0$，于是 $\boldsymbol{A}_r$ 可逆，其 r 个行向量线性无关。将它们添加分量称为 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个行向量，它们也线性无关。

而 $\boldsymbol{A}$ 的任何 $r+1$ 个行向量必线性相关（否则，$\boldsymbol{A}$ 中存在 $r+1$ 阶非零子式，这与题设矛盾），故 $\boldsymbol{A}$的行秩 $=\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r$.

□

关于矩阵的秩的基本结论

(1) $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}_r(\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}_c(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$的非零子式的最高阶数

(2) 初等变换不改变矩阵的秩

性质 1

$$\max\{\mathscr{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathscr{R}(\boldsymbol{B})\} \quad \le \quad \mathscr{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \quad \le \quad \mathscr{R}(\boldsymbol{A})+\mathscr{R}(\boldsymbol{B}).$$

特别地，当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}$ 为非零向量时，有

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) \quad \le \quad \mathscr{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}) \quad \le \quad \mathscr{R}(\boldsymbol{A})+1.$$

性质 1

$$\max\{\mathscr{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathscr{R}(\boldsymbol{B})\} \ \le\ \mathscr{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \ \le\ \mathscr{R}(\boldsymbol{A})+\mathscr{R}(\boldsymbol{B}).$$

特别地，当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}$ 为非零向量时，有

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) \ \le\ \mathscr{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}) \ \le\ \mathscr{R}(\boldsymbol{A})+1.$$

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{cases}\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) & \Longleftrightarrow\ \boldsymbol{b}\text{可以被}\boldsymbol{A}\text{的列向量线性表示} \ \Longleftrightarrow\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{有解}\\ \mathscr{R}(\boldsymbol{A})+1 & \Longleftrightarrow\ \boldsymbol{b}\text{不能被}\boldsymbol{A}\text{的列向量线性表示} \ \Longleftrightarrow\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{无解}.\end{cases}$$

设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(1) 因

$$(A,\ b_1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-(c_1+2c_2)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=(A,\mathbf{0}),$$

故 $\mathscr{R}(A,b_1)=\mathscr{R}(A,\mathbf{0})=\mathscr{R}(A)$，从而 b_1 可由 A 的列向量线性表示。

(2) 因

$$(A,\ b_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故 $\mathscr{R}(A,b)=\mathscr{R}(A)+1$，从而 b 不能由 A 的列向量线性表示。

证明.

- 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列线性表示，故

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) \leq \mathscr{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

同理

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{B}) \leq \mathscr{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

所以

$$\max\{\mathscr{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathscr{R}(\boldsymbol{B})\} \leq \mathscr{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

证明.

- 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列线性表示，故

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$

同理

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{B}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$

所以

$$\max\{\mathscr{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathscr{R}(\boldsymbol{B})\} \le \mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$

- 设 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = p$, $\mathscr{R}(\boldsymbol{B}) = q$， $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p \quad \text{和} \quad \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ 的列向量组可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q$ 线性表示，故

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) = \mathscr{R}_c(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q) \le p+q.$$

$\square$

注 10

- 不等式

$$\min\{\mathscr{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathscr{R}(\boldsymbol{B})\} \quad \leq \quad \mathscr{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$$

意味着：在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧添加新的列，秩会增加 (或不变)；当 $\boldsymbol{B}$ 的列向量能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示时，秩不变。

注 10

- 不等式
$$\min\{\mathscr{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathscr{R}(\boldsymbol{B})\} \quad \le \quad \mathscr{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$$
意味着：在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧添加新的列，秩会增加 (或不变)；当 $\boldsymbol{B}$ 的列向量能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示时，秩不变。

- 不等式
$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \quad \le \quad \mathscr{R}(\boldsymbol{A})+\mathscr{R}(\boldsymbol{B})$$
意味着：对 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$，有可能 $\boldsymbol{A}$ 的列向量与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量出现线性相关，合并为 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ 的秩一般会比 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})+\mathscr{R}(\boldsymbol{B})$ 要小。

性质 2

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{A})+\mathscr{R}(\boldsymbol{B}).$$

性质 2

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{A})+\mathscr{R}(\boldsymbol{B}).$$

证明. 设 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=p$, $\mathscr{R}(\boldsymbol{B})=q$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p \quad 和 \quad \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q$ 线性表示，故

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathscr{R}_c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_p,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_q) \le p+q.$$

□

注 11 由

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{A}) + \mathscr{R}(\boldsymbol{B}), \quad \mathscr{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{A}) + \mathscr{R}(\boldsymbol{B})$$

可知，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合并、相加，只可能使得秩减小 (或不变)。

性质 3

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{AB}) \le \min(\mathscr{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathscr{R}(\boldsymbol{B})).$$

性质 3

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{AB}) \le \min(\mathscr{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathscr{R}(\boldsymbol{B})).$$

证明. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n, n\times s$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，则

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{AB}) = \mathscr{R}_c(\boldsymbol{AB}) \le \mathscr{R}_c(\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{A}).$$

性质 3

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{AB}) \le \min(\mathscr{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathscr{R}(\boldsymbol{B})).$$

证明. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，则

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{AB}) = \mathscr{R}_c(\boldsymbol{AB}) \le \mathscr{R}_c(\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{A}).$$

类似地，将 $\boldsymbol{B}$ 按行分块，可得 $\mathscr{R}(\boldsymbol{AB}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{B})$. □

性质 3

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{AB}) \le \min(\mathscr{R}(\boldsymbol{A}), \ \mathscr{R}(\boldsymbol{B})).$$

证明. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n, n\times s$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，则

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ \cdots, \ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{AB}) = \mathscr{R}_c(\boldsymbol{AB}) \le \mathscr{R}_c(\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{A}).$$

类似地，将 $\boldsymbol{B}$ 按行分块，可得 $\mathscr{R}(\boldsymbol{AB}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{B})$. □

该性质告诉我们，对一个向量组进行线性组合，可能会使向量组的秩减小。

性质 4　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{PA}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{AQ}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{PAQ}).$$

性质 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=\mathscr{R}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})=\mathscr{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})=\mathscr{R}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}).$$

证明. 以下给出两种证明方法：

法一 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 可表示为若干个初等矩阵的乘积，而初等变换不改变矩阵的秩，故结论成立。

性质 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=\mathscr{R}(\boldsymbol{PA})=\mathscr{R}(\boldsymbol{AQ})=\mathscr{R}(\boldsymbol{PAQ}).$$

证明. 以下给出两种证明方法:

法一 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 可表示为若干个初等矩阵的乘积，而初等变换不改变矩阵的秩，故结论成立。

法二 因

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=\mathscr{R}(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{PA}))\le\mathscr{R}(\boldsymbol{PA})\le\mathscr{R}(\boldsymbol{A})$$

故

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=\mathscr{R}(\boldsymbol{PA}).$$

同理可证其他等式。

□

例 4.5　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$，证明：$|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}|=0$.

例 4.5 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$，证明：$|A^TA|=0$.

解 首先 $\mathscr{R}(A)=\mathscr{R}(A^T)\le\min\{m,n\}<n$，另外

$$\mathscr{R}(A^TA)\le\min\left\{\mathscr{R}(A^T),\ \mathscr{R}(A)\right\}<n,$$

而 A^TA 为 n 阶矩阵，故 $|A^TA|=0$。

小结（矩阵的秩）

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{A}) + \mathscr{R}(\boldsymbol{B}),$$

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le \mathscr{R}(\boldsymbol{A}) + \mathscr{R}(\boldsymbol{B}),$$

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{AB}) \le \min(\mathscr{R}(\boldsymbol{A}),\ \mathscr{R}(\boldsymbol{B})).$$

定义 19 (矩阵的相抵) 若矩阵 A 经过初等变换化为 B(亦即存在可逆矩阵 P 和 Q 使得 $PAQ = B$)，就称 A**相抵于**B，记作 $A \cong B$

性质 5 (相抵关系的性质)

- 反身性

$$A \cong A$$

- 对称性

$$A \cong B \quad \Rightarrow \quad B \cong A$$

- 传递性

$$A \cong B, \quad B \cong C \quad \Rightarrow \quad A \cong C$$

定理 15 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r$，则一定存在可逆的 m 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m\times n}=\boldsymbol{U}.$$

定理 15 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r$，则一定存在可逆的 m 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m\times n}=\boldsymbol{U}.$$

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换，可将 $\boldsymbol{A}$ 化为有 r 个非零行的行最简阶梯形矩阵，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_1.$$

对 $\boldsymbol{U}_1$ 做初等列变换可将 $\boldsymbol{U}_1$ 化为 $\boldsymbol{U}$，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使得

$$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{U}$$

记 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{Q}$, 则有 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{U}$. □

定义 20 (相抵标准形) 设 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = r$，则矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准形，简称标准形。

- 秩相等的同型矩阵，必有相同的标准形。
- 两个秩相等的同型矩阵是相抵的。

例 4.6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵 $(m > n)$，$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = n$，证明：存在 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n.$$

例 4.6 设 A 为 $m \times n$ 矩阵 $(m > n)$，$\mathscr{R}(A) = n$，证明：存在 $n \times m$ 矩阵 B 使得

$$BA = I_n.$$

证明. 由上述定理可知，存在 m 阶可逆矩阵 P 使得

$$PA = \begin{pmatrix} I_n \\ 0_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad PA = \begin{pmatrix} I_n \\ 0_1 \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{0}_1$ 为 $(m-n) \times n$ 零矩阵。取

$$C = (I_n \quad 0_2),$$

其中 $\mathbf{0}_2$ 为 $n \times (m-n)$ 阶零矩阵，则

$$CPA = (I_n \quad 0_2) \begin{pmatrix} I_n \\ 0_1 \end{pmatrix} = I_n.$$

故存在 $B = CP$ 使得 $BA = I_n$. □

例 4.7 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,3,1,2),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,5,3,3),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,-1,a),\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (3,10,k,4),$$

试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩，并将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

解 将 4 个向量按列排成一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，做初等变换将其化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{U}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

(1) 当 $a=1$ 或 $k=2$ 时，$\boldsymbol{U}$ 只有 3 个非零行，故

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=3.$$

(2) 当 $a\neq 1$ 且 $k\neq 2$ 时，$\mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=4.$

(3) 当 $k=2$ 且 $a\neq 1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{1+5a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2+a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{3}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(4) 当 $k\neq 2$ 或 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

例 4.8　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $\mathscr{R}(A)=2$，求 t。

例 4.8 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $\mathscr{R}(A)=2$，求 t。

解

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

由于 $\mathscr{R}(B)=\mathscr{R}(A)=2$，故 B 中第 2、3 行必须成比例，即

$$\frac{-2}{2+t}=\frac{-4}{6},$$

即得 $t=1$。

1. n 维向量及其线性相关性

2. 向量组的秩及其极大线性无关组

3. 矩阵的秩　相抵标准形

4. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

5. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

设 A 为 $m \times n$ 矩阵，考察

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{15}$$

若将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n),$$

齐次方程组 (15) 可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0}.$$

而齐次方程组 (15) 有非零解的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关，即

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n) < n.$$

定理 16 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则

$$\underline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{有非零解}} \iff \underline{\mathscr{R}(\boldsymbol{A})<n}.$$

定理 17 (定理 1 的等价命题) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则

$$\underline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{只有零解}} \iff \underline{\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=n=\boldsymbol{A}\text{的列数}}.$$

例 5.1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明：存在 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是

$$|\boldsymbol{A}|=0.$$

例 5.1　设 A 为 n 阶矩阵，证明：存在 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是

$$|\boldsymbol{A}|=0.$$

证明. $|\boldsymbol{A}|=0 \iff \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解。下证

$$\text{存在}n\times s\text{矩阵}\boldsymbol{B}\neq 0\text{使得}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{有非零解}.$$

例 5.1 设 A 为 n 阶矩阵，证明：存在 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是

$$|\boldsymbol{A}|=0.$$

证明. $|\boldsymbol{A}|=0 \iff \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解。下证

$$\text{存在}n\times s\text{矩阵}\boldsymbol{B}\neq 0\text{使得}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{有非零解}.$$

($\Longrightarrow$) 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的解向量为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解。又 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B}$ 至少有一个非零列向量，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 至少有一个非零解。

例 5.1 设 A 为 n 阶矩阵，证明：存在 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\mathbf{0}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 的充分必要条件是

$$|\boldsymbol{A}|=0.$$

证明. $|\boldsymbol{A}|=0 \iff \boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解。下证

$$\text{存在}n\times s\text{矩阵}\boldsymbol{B}\neq 0\text{使得}\boldsymbol{AB}=\mathbf{0} \iff \boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}\text{有非零解}.$$

$(\Longrightarrow)$ 设 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的解向量为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解。又 $\boldsymbol{B}\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{B}$ 至少有一个非零列向量，从而 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 至少有一个非零解。

$(\Longleftarrow)$ 设 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解，任取一个非零解 $\boldsymbol{\beta}$，令

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\ \mathbf{0},\ \cdots,\ \mathbf{0})$$

则 $\boldsymbol{B}\neq\mathbf{0}$，且 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$。

□

定理 18 若 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解，则

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2 \quad (k_1，k_2\text{为任意常数})$$

也是它的解。

定理 18 若 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个解，则

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2 \quad (k_1，k_2\text{为任意常数})$$

也是它的解。

证明. 因为

$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2)=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=k_1\boldsymbol{0}+k_2\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},$$

故 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$ 也为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。 □

定义 21 (基础解系) 设 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，若

(1) $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 线性无关；

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任一解向量可由 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 线性表示。

则称 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

注 12　关于基础解系，请注意以下几点：

(1) 基础解系即全部解向量的极大无关组。

(2) 找到了基础解系，就找到了齐次线性方程组的全部解：

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{x}_p \quad (k_1,k_2,\cdots,k_p\text{为任意常数}).$$

(3) 基础解系不唯一。

例 5.2 求方程组

$$x + y + z = 0$$

的全部解。

解

(1) 选取 y, z 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{为任意常数})$$

解 (续)

(2) 选取 x, z 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = x \\ y = -x - z \\ z = z \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{为任意常数})$$

解 (续)

(3) 选取 x, y 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - y \end{cases}$$

则方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{为任意常数})$$

三个不同的基础解系为

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

定理 19 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，若 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) = r < n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 存在基础解系，且基础解系含 $n - r$ 个解向量。

定理 19 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，若 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r<n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 存在基础解系，且基础解系含 $n-r$ 个解向量。

注 13 注意以下两点：

- r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，也是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵的非零行行数，是非自由未知量的个数。
- n 为未知量的个数，故 $n-r$ 为自由未知量的个数。

  有多少自由未知量，基础解系里就对应有多少个向量。

例 5.3　求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & 24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div 4]{r_3\div 8} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解（续） 原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 5.4　求齐次线性方程组

$$nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$$

的基础解系。

例 5.4 求齐次线性方程组

$$nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$$

的基础解系。

解 原方程等价于 $x_n=-nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}$，即

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} x_1 & = & x_1 & & & & \\ x_2 & = & & & x_2 & & \\ & \vdots & & & & & \\ x_{n-1} & = & & & & & x_{n-1} \\ x_n & = & -nx_1 & & -(n-1)x_2 & \cdots & -2x_{n-1} \end{array}\right.$$

基础解系为

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}$$

例 5.5 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$。证明：

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A}) + \mathscr{R}(\boldsymbol{B}) \leq n.$$

例 5.5 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$ 和 $n\times s$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$。证明：

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A})+\mathscr{R}(\boldsymbol{B})\le n.$$

证明. 由 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 知，$\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解。故 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩，不超过 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系的秩，即

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{B})\le n-\mathscr{R}(\boldsymbol{A}),$$

即

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A})+\mathscr{R}(\boldsymbol{B})\le n.$$

□

例 5.6　设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，证明

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=\mathscr{R}(\boldsymbol{B}).$$

例 5.6　设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，证明

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=\mathscr{R}(\boldsymbol{B}).$$

解　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，故它们有相同的基础解系，而基础解系包含的向量个数相等，即

$$n-\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=n-\mathscr{R}(\boldsymbol{B}),$$

从而

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=\mathscr{R}(\boldsymbol{B}).$$

例 5.7 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，证明 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{A})$。

例 5.7 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵，证明 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \mathscr{R}(\boldsymbol{A})$。

证明. 只需证明 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 同解。

(1) 若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$，则有 $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{Ax}) = \boldsymbol{0}$。

(2) 若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0},$$

即

$$(\boldsymbol{Ax})^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$。

□

1. n 维向量及其线性相关性

2. 向量组的秩及其极大线性无关组

3. 矩阵的秩　相抵标准形

4. 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

5. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

定理 20 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，以下命题等价：

(i) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

(ii) $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示；

(iii) $\mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathscr{R}(\boldsymbol{A})$。

证明. 分两步证明:

(i)$\Leftrightarrow$(ii) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价于

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.$$

证明. 分两步证明:

(i)⇔(ii) 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则 $Ax=b$ 等价于

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$$

(ii)⇔(iii) 若 b 可由 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，则 (A,b) 的列向量组与 A 的列向量组等价，故 $\mathscr{R}(A,b)=\mathscr{R}(A)$。反之，若 $\mathscr{R}(A,b)=\mathscr{R}(A)$，则 b 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，否则 $\mathscr{R}(A,b)=\mathscr{R}(A)+1$，导致矛盾。

□

注 14 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathscr{R}(\boldsymbol{A})+1$ 会导致矛盾方程的出现

记 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r$，若 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathscr{R}(\boldsymbol{A})+1$，则增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 经过初等行变换所得的行阶梯形矩阵形如

$$\left(\begin{array}{ccccccc:c}
1 & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & & d_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & & d_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & d_{r+1} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0
\end{array}\right)$$

其中 $d_{r+1}\neq 0$（否则 $\mathscr{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r$）。这意味着出现了矛盾方程

$$0=d_{r+1}.$$

推论 7

$$Ax=b\text{有唯一解} \iff \mathscr{R}(A,b)=\mathscr{R}(A)=A\text{的列数}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & \cdots & 0 & d_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & d_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

定理 21　若 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。

定理 21 若 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。

证明.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。 $\square$

定理 22 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则其一般解（或称通解）为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}}$$

其中 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，而

$$\bar{\boldsymbol{x}}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{x}_p$$

为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一般解。

定理 22 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则其一般解（或称通解）为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}}$$

其中 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，而

$$\bar{\boldsymbol{x}}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{x}_p$$

为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一般解。

证明.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{Ax}_0+\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}}\text{是}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\text{的解}$$

设 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解，则 $\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，而

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}_0+(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}_0).$$

故 $\boldsymbol{x}^*$ 可表示为 $\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}}$ 的形式。 □

非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

的通解为

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_0$$

其中 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{x}_0$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解。

注 15 “$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解” $=$ “$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解” $+$ “$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解”

例 6.1　求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一般解，其中增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div 2]{r_1-r_3,r_3+\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

故通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

例 6.2 (重要题型) 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +(1+\lambda)x_3 & = & \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组

(1) 有唯一解？

(2) 无解？

(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

解

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}=(3+\lambda)\lambda^2.$$

故当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，有唯一解。当 $\lambda=0$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

当 $\lambda=-3$ 时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_3-1 \\ x_2=x_3-2 \\ x_3=x_3 \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

例 6.3　设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：

(1) $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关；

(2) $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关。

证明.

(1) 假设 $\boldsymbol{\eta}^*$, $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\eta}^*$ 可由 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，这与 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解矛盾。故假设不成立，即 $\boldsymbol{\eta}^*$, $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关。

(2) 显然，

$$\boldsymbol{\eta}^*,\ \boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r}\quad \text{等价于}\quad \boldsymbol{\eta}^*,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

由题 (1) 结论可知

$$\begin{aligned}&\mathscr{R}(\boldsymbol{\eta}^*,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r})\\ =&\mathscr{R}(\boldsymbol{\eta}^*,\ \boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r})=n-r+1\end{aligned}$$

从而结论成立。

$\square$

例 6.4　设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_s$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解，k_1，k_2，$\cdots$，k_s 为实数，满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。证明：

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解。

例 6.4 设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_s$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解，k_1，k_2，$\cdots$，k_s 为实数，满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。证明：

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解。

证明.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s) &= k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_s\\ &= k_1\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}+\cdots+k_s\boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

□

例 6.5 对于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，$\mathscr{R}(\boldsymbol{A})=r$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 为它的 $n-r+1$ 个线性无关的解。证明它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$

证明. 取向量组 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1$， $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1$， $\cdots$， $\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$. 下证该向量组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}) \xrightarrow[j=2,\cdots,n-r+1]{c_j-c_1} (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)$$

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\text{线性无关} \\
\Rightarrow\quad & \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{线性无关} \\
\Rightarrow\quad & \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{线性无关} \\
\Rightarrow\quad & \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{为}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{的基础解系.}
\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解 $\boldsymbol{x}$ 可表示为

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{x}=k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)+\boldsymbol{\eta}_1 \\
\Rightarrow\quad & \boldsymbol{x}=(1-k_2-\cdots-k_{n+r-1})\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1} \\
\Rightarrow\quad & \boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}
\end{aligned}$$

□

例 6.6 设四元齐次线性方程组

$$(I):\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0; \end{cases} \qquad (II):\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$$

求

(1) 方程组 (I) 与 (II) 的基础解系

(2) 方程组 (I) 与 (II) 的公共解

解 (1)、因为

$$(I) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \qquad x_3 \\ x_4 = x_2 \end{cases}$$

故 (I) 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解 (续) 因为

$$(II) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x_1 & = & x_2 & -x_3 \\ x_4 & = & -x_2 & +x_3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x_1 & = & x_2 & -x_3 \\ x_2 & = & x_2 & \\ x_3 & = & & x_3 \\ x_4 & = & -x_2 & +x_3 \end{array}\right.$$

故 (II) 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解 (续)　(2)、方程 (I) 与 (II) 的公共解即为联立 (I) 与 (II) 所得新方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解 (续)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_4+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_3+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}.$$