线性代数

线性方程组

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 5 月 24 日

1. 向量空间

2. 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

3. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间

4. 标准正交基

5. 施密特（Schmidt）正交化方法

6. 正交矩阵及其性质

1. 向量空间

向量空间

定义 1 (向量空间) 设 V 是非空的 n 维向量集合，如果集合 V 对于向量的加法和数乘运算满足以下条件：

(1) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$，有 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V$；

(2) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$，有 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V$，

则称 V 为向量空间。

向量空间

定义 1 (向量空间)　设 V 是非空的 n 维向量集合，如果集合 V 对于向量的加法和数乘运算满足以下条件：

(1) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$，有 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V$；

(2) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$，有 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V$，

则称 V 为向量空间。

定义中的 (1) 表示该集合中向量对加法运算封闭；(2) 表示该集合中向量对数乘运算封闭。因此，向量空间也可表述为：对加法和数乘运算封闭的非空集合。

向量空间

例 1　设三维向量的全体

$$\mathbb{R}^3 = \{\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)^T | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

以及三维向量集合

$$V_1 = \{\boldsymbol{\alpha} = (0, x_2, x_3)^T | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

和

$$V_2 = \{\boldsymbol{\alpha} = (1, x_2, x_3)^T | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

验证 $\mathbb{R}^3, V_1$ 是向量空间，而 V_2 不是向量空间。

向量空间

例 1　设三维向量的全体

$$\mathbb{R}^3 = \{\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)^T | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

以及三维向量集合

$$V_1 = \{\boldsymbol{\alpha} = (0, x_2, x_3)^T | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

和

$$V_2 = \{\boldsymbol{\alpha} = (1, x_2, x_3)^T | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

验证 $\mathbb{R}^3, V_1$ 是向量空间，而 V_2 不是向量空间。

类似地，n 维向量的全体 $\mathbb{R}^n$ 也是一个向量空间。

向量空间

例 2　验证齐次线性方程组的全体

$$S = \{x | Ax = 0\}$$

是向量空间。

例 2　验证齐次线性方程组的全体

$$S=\{x|Ax=0\}$$

是向量空间。

解　因 $0\in S$，S 为非空集合，由齐次线性方程组解的性质知，对任意的 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\in S,\lambda\in R$，有 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2\in S$ 且 $\lambda\boldsymbol{\xi}_1\in S$，故 S 中的向量关于加法与数乘运算封闭，称这个向量空间为齐次线性方程组的解空间。

向量空间

例 3　验证非齐次线性方程组解的全体

$$S = \{x|Ax = b, b \neq 0\}$$

不是向量空间。

例 3　验证非齐次线性方程组解的全体

$$S = \{x | Ax = b, b \neq 0\}$$

不是向量空间。

解　因对任意的 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in S, \lambda \in \mathbb{R}$，有

$$A(\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2) = A\boldsymbol{\eta}_1 + A\boldsymbol{\eta}_2 = b + b = 2b,$$

故 $\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 \notin S$，即 S 关于向量的加法与数乘运算不封闭。

例 4　设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 n 维向量，验证集合

$$V(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \{\boldsymbol{\eta} = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

是向量空间。

例 4　设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 n 维向量，验证集合

$$V(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \{\boldsymbol{\eta} = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

是向量空间。

解　因 $0 = 0\boldsymbol{\alpha} + 0\boldsymbol{\beta} \in V$，故 V 为非空集合。另外，对任意的 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in V, k \in \mathbb{R}$，有

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha} + \mu_1\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\alpha} + \mu_2\boldsymbol{\beta}$$

从而

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{\alpha} + (\mu_1 + \mu_2)\boldsymbol{\beta} \in V, \\ k\boldsymbol{\eta}_1 = (k\lambda_1)\boldsymbol{\alpha} + (k\mu_1)\boldsymbol{\beta} \in V, \end{aligned}$$

称该向量空间为由向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 生成的向量空间。

向量空间

定义 2 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$生成的向量空间可表示为

$$V(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = \{\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m | \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

向量空间

例 5 证明：等价向量组生成的向量空间等价。

例 5 证明：等价向量组生成的向量空间等价。

证明. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 等价，记

$$V_1 = \{x = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m | \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}\},$$

$$V_2 = \{x = \mu_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mu_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \mu_m\boldsymbol{\beta}_m | \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m \in \mathbb{R}\},$$

需证明 $V_1 = V_2$。

例 5　证明：等价向量组生成的向量空间等价。

证明.　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 等价，记

$$V_1 = \{x = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m | \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}\},$$

$$V_2 = \{x = \mu_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \mu_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \mu_m \boldsymbol{\beta}_m | \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m \in \mathbb{R}\},$$

需证明 $V_1 = V_2$。

设 $x \in V_1$，则 x 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示。因 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示，故 x 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示，即 $x \in V_2$，于是 $V_1 \subset V_2$。同理可证 $V_2 \subset V_1$。 $\square$

2. 向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

定义 3 设 V 是向量空间，如果

(1) 在 V 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(2) V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一组基，r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间。

注 1 只含一个零向量的集合 $\{0\}$ 也是一个向量空间，该向量空间没有基，规定它的维数为 0，并称之为 0 维向量空间。

注 2 如果把向量空间 V 看做是一个向量组，则 V 的基就是它的一个极大无关组，V 的维数就是向量组的秩。于是，V 的基不唯一，但它的维数是唯一确定的。设 V 是 r 维向量空间，则 V 中任意 r 个线性无关的向量就是 V 的一个基。

例 6　在向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中，基本单位向量组

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = (0, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{\epsilon}_3 = (0, 0, 1)^T$$

线性无关，且任一向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ 可由 $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$ 表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + x_2\boldsymbol{\epsilon}_2 + x_3\boldsymbol{\epsilon}_3.$$

此时，$\mathbb{R}^3$ 可表示为

$$\mathbb{R}^3 = \{x = x_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + x_2\boldsymbol{\epsilon}_2 + x_3\boldsymbol{\epsilon}_3 | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

事实上，在 $\mathbb{R}^3$ 中，任一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，只要它们线性无关，就构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

事实上，在 $\mathbb{R}^3$ 中，任一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，只要它们线性无关，就构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

例如，在 $\mathbb{R}^3$ 中，向量组

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{\epsilon}_3 = (1, 1, 1)^T$$

线性无关，构成 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基。对任一向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$，

$$\boldsymbol{\alpha} = (x_1 - x_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 - x_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

此时，$\mathbb{R}^3$ 可表示为

$$\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1 - x_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 - x_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

定义 4　$\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由线性无关向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\beta}_1 + a_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

称 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标，记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{\alpha}_B = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

并称之为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标向量。

注 3

- $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的
- 基本向量组

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基或标准基。

- 一般来说，对于向量及其坐标，都采用列向量的形式，即

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

例 7　设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基为自然基 B_1 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$，其中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= (\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 0)^T, \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= (\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 0)^T, \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{\beta}_{n-1} &= (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ -1)^T, \\
\boldsymbol{\beta}_n &= (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 1)^T.
\end{aligned} \tag{1}
$$

求向量组 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 分别在两组基下的坐标。

定理 1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\eta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{\eta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关的充要条件是

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \neq 0.$$

向量空间的基、维数与向量关于基的坐标

定义 5　设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵。

定理 2 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad 和 \quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T,$$

由基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x} \quad 或 \quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

例 8　已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基为 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

例 9 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^T,\quad \boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^T.$$

(1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 α 在基 B_1 的坐标为 $(1,-2,-1)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标。

3. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间

$\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间

定义 6　在 $\mathbb{R}^n$ 中，对于 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为列向量时，

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}.$$

性质 1 (内积的运算性质) 对于 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{R}$,

(i) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$

(ii) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

(iv) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

$\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间

定义 7 (向量长度) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$$

定理 3 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

定理 3 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

证明. $\forall t \in \mathbb{R}$，有

$$(\boldsymbol{\alpha} + t\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} + t\boldsymbol{\beta}) \geq 0$$

即

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})t^2 + 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})t + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$$

此为关于 t 的二次函数，由一元二次方程理论可知

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 - 4(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \leq 0$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 \leq (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})$$

亦即

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

□

$\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间

定义 8 (向量之间的夹角) 向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角定义为

$$< \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} >= \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|}$$

定理 4

$$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \iff (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

注 4 零向量与任何向量的内积为零，从而零向量与任何向量正交。

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

证明.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\ &\le (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\ &\le \|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2\end{aligned}$$

□

定理 5 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

证明.

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
&\leq (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+2|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})|+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
&\leq \|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2
\end{aligned}$$

□

注 5 当 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$ 时，$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| = \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$。

$\mathbb{R}^n$ 中向量的内积，欧式空间

定义 9 (欧几里得空间) 定义了内积运算的 n 维实向量空间，称为 n 维欧几里得空间（简称欧氏空间），仍记为 $\mathbb{R}^n$。

4. 标准正交基

标准正交基

定理 6 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的。

标准正交基

定理 6 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的。

证明. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0,$$

则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$

即

$$k_j(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

由于 $(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) > 0$，故

$$k_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关。 □

标准正交基

定义 10 (标准正交基) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$，若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基。

标准正交基

例 10　设 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基，求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标。

解

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

$$\Longrightarrow\quad (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_j)=x_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)$$

$$\Longrightarrow\quad x_j=\frac{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)}$$

5. 施密特（Schmidt）正交化方法

施密特（Schmidt）正交化方法

本小节的目标是：从一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 出发，构造一组标准正交向量组。

施密特（Schmidt）正交化方法 I

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$；

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$，

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

施密特（Schmidt）正交化方法 II

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$,

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_i, && (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow \quad & (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_i) = 0, && (i = 1, 2) \\ \Longrightarrow \quad & k_{3i} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)} && (i = 1, 2) \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

施密特（Schmidt）正交化方法 III

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + + k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1},$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\alpha}_j + k_{ji}\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1)$$

$$\Longrightarrow \quad k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1}, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}\boldsymbol{\beta}_{j-1}.$$

施密特（Schmidt）正交化方法 IV

(5) 单位化

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m \xrightarrow{\eta_j = \frac{\boldsymbol{\beta}_j}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}} \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$$

施密特（Schmidt）正交化方法 I

例 11 已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

施密特（Schmidt）正交化方法 I

解　1、正交化过程：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&= (1,0,1)^T - \frac{1}{2}(1,-1,0)^T = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\
&= (1,-1,1)^T - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T - \frac{2}{2}(1,-1,0)^T = \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

施密特（Schmidt）正交化方法 II

2、单位化过程:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

6. 正交矩阵及其性质

正交矩阵及其性质

定义 11 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，如果

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

正交矩阵及其性质

定理 7

$$\boldsymbol{A}\text{为正交矩阵} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

正交矩阵及其性质

定理 7

$$\boldsymbol{A}\text{为正交矩阵} \iff \boldsymbol{A}\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

证明. 将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \iff \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_i = 1, & i = 1, 2, \cdots, n \\ \boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j = 0, & j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\iff \boldsymbol{A}\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

$\square$

正交矩阵及其性质

定理 8 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶正交矩阵，则

(1) $|\boldsymbol{A}| = 1$ 或 -1

(2) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$

(3) $\boldsymbol{A}^T$ 也是正交矩阵

(4) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵

正交矩阵及其性质

定理 9 若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$，则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变，即

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \quad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|,$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle.$$