第一讲、行列式

July 8, 2017

1 行列式的定义

1.1 二阶行列式

例 1. 用消元法求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

消去x_2得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

消去x_1得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{11}.$$

若$\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0}$，则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

定义 1 (二阶行列式)**.** 由$2^2 = 4$个数，按下列形式排成*2*行*2*列的方形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

其被定义成一个数

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \equiv D,$$

该数称为由这四个数构成的二阶行列式。

a_{ij}表示行列式的元素。i为行标，表明该元素位于第i行；j为列标，表明该元素位于第j列。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & & \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1: 对角线法则

类似地，

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \equiv D_1$$

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \equiv D_2$$

则上述方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 2. 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解：因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

因此，

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -3.$$

1.2 三阶行列式

定义 2 (三阶行列式)**.** 由$3^2 = 9$个数组成的*3*行*3*列的三阶行列式，则按如下形式定义一个数

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

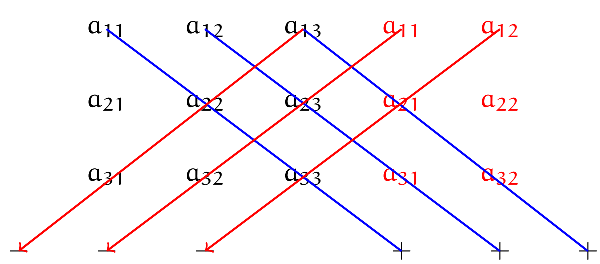

图 2: 沙路法

例 3. 计算

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解. 由沙路法可知，

$$\begin{aligned} D_3 &= 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-2) \times 4 \times (-4) \\ &\quad -2 \times (-2) \times (-2) - (-4) \times 2 \times (-3) + 1 \times 1 \times 4 \\ &= -14. \end{aligned}$$

例 4. 求方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

解. 行列式

$$D=3x^2+18+4x-2x^2-12-9x=x^2-5x+6$$

由此可知$x=2$或3。

如果三元一次方程组

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3,\end{aligned}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$$

则用消元法求解可得

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

从二、三阶行列式的展开式中可发现：

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\\&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\&=a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix}a_{22}&a_{33}\\a_{23}&a_{32}\end{vmatrix}}_{M_{11}}-a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}}_{M_{12}}+a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}}_{M_{13}}\end{aligned}$$

这里，M_{11},M_{12},M_{13}分别称为a_{11},a_{12},a_{13}的余子式，并称

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12},\quad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}$$

分别称为a_{11},a_{12},a_{13}的代数余子式。 这样，D可表示为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{11}A_{13}+a_{13}A_{13}.$$

同样地，

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12},$$

其中

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|a_{22}|=a_{22},\quad A_{11}=(-1)^{1+2}|a_{21}|=-a_{21}.$$

注意这里的$|a_{22}|$, $|a_{21}|$是一阶行列式，而不是绝对值。 我们把一阶行列式$|a|$定义为a。

1.3 n阶行列式的定义

定义 3 (n阶行列式). 由n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\tag{1}$$

是一个数。

- 当$n=1$时，定义$D=|a_{11}|=a_{11}$；
- 当$n\geqslant 2$时，定义
$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \tag{2}$$
其中
$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$
而M_{1j}是D中划去第1行第j列后，按原顺序排成的$n-1$阶行列式，即
$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$
并称M_{1j}为a_{1j}的余子式，A_{1j}为a_{1j}的代数余子式.

注 1. 需注意以下两点：

1 在D中，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$所在的对角线称为行列式的主对角线，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$称为主对角元。

2 行列式D是由n^2个元素构成的n次齐次多项式：

- 二阶行列式的展开式有$2!$项；
- 三阶行列式的展开式有$3!$项；
- n阶行列式的展开式有$n!$项，其中每一项都是不同行不同列的n个元素的乘积，带正号的项与带负号的项各占一半。

由行列式的定义可知，一个n阶行列式可以展开成n个n阶行列式之和，即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$+\cdots+\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

例 5. 证明：n阶下三角行列式
$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明. 用数学归纳法证明。

1. 当$n=2$时，结论成立。
2. 假设结论对$n-1$阶下三角阵成立，则由定义
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}). \qquad \square \end{aligned}$$

综上所述，结论成立。 □

同理可证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 6. 计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix}$$

解. 由行列式定义，

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}a_n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1}a_nD_{n-1}. \end{aligned}$$

同理递推，

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1}a_nD_{n-1} = (-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-2}a_{n-1}D_{n-2} \\ &\cdots\cdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1. \end{aligned}$$

例如，

$$D_2 = -a_1a_2, \quad D_3 = -a_1a_2a_3, \quad D_4 = a_1a_2a_3a_4, \quad D_5 = a_1a_2a_3a_4a_5.$$

2 行列式的性质

性质 1. 互换行列式的行与列，值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

证明. 将等式两端的行列式分别记为D和D'，对阶数n用归纳法。

1. 当$n = 2$时，$D = D'$显然成立。
2. 假设结论对于阶数小于n的行列式都成立，以下考虑阶数为n的情况。由定义可知，

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

$$D' = a_{11}A'_{11} + a_{21}A'_{21} + \cdots + a_{n1}A'_{n1}$$

显然，$A_{11}=A'_{11}$。于是

$$
\begin{aligned}
D' =&a_{11}A_{11}+(-1)^{1+2}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{42} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+\cdots+(-1)^{1+n}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n-1,2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

对上式中的$n-1$个行列式按第一行展开，并将含a_{12}的项进行合并，可得

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{1+2}a_{21}a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{31}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\qquad\qquad+\cdots+(-1)^{1+n}a_{n1}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \\
=&(-1)^{1+2}a_{12}\left((-1)^{1+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{31}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{4n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right. \\
&\qquad\qquad\left.+\cdots+(-1)^{1+n-1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{n-1,3} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2,n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}\right) \\
=&(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(-1)^{1+2}a_{12}M'_{12}=a_{12}A'_{12}=a_{12}A_{12}.
\end{aligned}
$$

同理，含a_{13}的项合并后其值等于$a_{13}A_{13}$，$\cdots$， 含a_{1n}的项合并后其值等于$a_{1n}A_{1n}$. 因此，$D=D'$.

□

注 2. 有了这个性质，行列式对行成立的性质都适用于列。

性质 2. 行列式对任一行按下式展开，其值相等，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

而M_{ij}为a_{ij}的余子式，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式.

证明. 对n用归纳法证明。

1. 当$n=2$时，结论显然成立。

2. 假设结论对阶数$\leqslant n-1$的行列式成立，以下考虑阶数为n的情况。

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{24} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

由归纳假设，按第i行展开后合并含a_{i1}的项得，

$$(-1)^{(i-1)+1}a_{i1}\left((-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n-1} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \right)$$

即

$$(-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} = a_{i1}A_{i1}.$$

同理可证，含a_{i2}的项合并后其值为$a_{i2}A_{i2}$，$\ldots$，含a_{in}的项合并后其值为$a_{in}A_{in}$.

□

性质 3 (线性性质). *1* 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个数k，等于用数k乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

2 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

注 3. 一些记号：

- $r_i \times k$（$c_i \times k$）：第i行（列）乘以k
- $r_i \div k$（$c_i \div k$）：第i行（列）提取公因子k

定义 4 (反对称行列式)**.** 如果行列式$D = |a_{ij}|_n$的元素$a_{ij} = -a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，就称$D$是反对称行列式（其中$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0, i = 1, 2, \cdots, n$）.

例 7. 证明：奇数阶反对称行列式的值为0.

证明.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质1}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{将每行提取公因子}-1]{\text{性质3-1}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D.$$

由于n为奇数，故$D = -D$，从而$D = 0$. □

推论 1. *若行列式的某行元素全为0，其值为0.*

例 8.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 4. *若行列式有两行（列）完全相同，其值为0.*

证明. 不妨设D的第i和j行元素全部相等，即对

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有$a_{il} = a_{jl}(i \neq j, l = 1, 2, \cdots, n)$. 对阶数$n$用数学归纳法。

- 当$n = 2$时，结论显然成立。

- 假设结论对阶数为$n-1$的行列式成立，在n阶的情况下，对第$k(k\neq i,j)$行展开，有

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}.$$

注意到余子式$M_{kl}(l=1,2,\cdots,n)$是$n-1$阶行列式，且其中有两行元素相同，故

$$A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}=0\quad(l=1,2,\cdots,n),$$

从而$D=0$.

□

例 9.

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\2&3&4\end{vmatrix}=0.$$

推论 2. 若行列式中有两行（列）元素成比例，则行列式的值为0.

例 10.

$$\begin{vmatrix}2&0&-2\\1&0&-1\\2&3&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\2&3&4\end{vmatrix}=0.$$

性质 5. 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

证明. 将数k乘以第j行加到第i行，有

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}+ka_{j1}&a_{i2}+ka_{j2}&\cdots&a_{in}+ka_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{性质3-2}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{j1}&ka_{j2}&\cdots&ka_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{推论2}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

□

注 4. 一些记号：

- $r_i + r_j \times k$：将第j行乘以k加到第i行；
- $c_i + c_j \times k$：将第j列乘以k加到第i列。

性质 6. 互换行列式的两行（列），行列式变号。

证明.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_i+r_j]{\text{性质5}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_j-r_i]{\text{性质5}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[r_i+r_j]{\text{性质5}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质3-1}} -D.$$

□

注 5. 一些记号:

- $r_i \leftrightarrow r_j$：互换第i,j行
- $c_i \leftrightarrow c_j$：互换第i,j列

例 11.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

性质 7. 行列式某一行的元素乘以另一行对应元素的代数余子式之和等于0，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j).$$

证明. 由性质2，对D的第j行展开得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}$$

因此，将D中第j行的元素$a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}$换成$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$后所得的行列式，其展开式就是$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质4}} 0.$$

□

结论 1.

- 对行列式D按行展开，有
$$\sum_{k=1} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}D,$$
其中δ_{ij}为克罗内克（*Kronecker*）记号，表示为
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$
- 对行列式D按列展开，有
$$\sum_{k=1} a_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}D,$$

3 行列式的计算

例 12. 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解.

$$\begin{aligned} D & \xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40. \end{aligned}$$

例 13. 计算

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解.

$$D \xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

例 14. 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解.

$$D_n \xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i\div n} n^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} n^{n-1} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i-1}^{n-1}\frac{i}{n} & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n^{n-1}\left[1+\frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right](-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^{n-1} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

例 15. 计算行列式

$$D_{20} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 18 & 19 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 17 & 18 & 19 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 16 & 17 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 20 & 19 & 18 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解.

$$D_{20} \xlongequal[i=19,\cdots,1]{c_{i+1}-c_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 20 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,20]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 21 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 21 \times (-1)^{20+1} \times 2^{18} = -21 \times 2^{18}.$$

例 16. 计算元素为$a_{ij} = |i-j|$的n阶行列式。

解.

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n-1,\cdots,1]{c_{i+1}-c_i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

例 17. 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解.

$$D \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1-r_i} \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=2}^n i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (1-\sum_{i=2}^n i) \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = \left[2 - \frac{(n+1)n}{2}\right] n!$$

如何计算“爪形”行列式 其解法固定，即从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。请自行验证以下行列式（假定$a_i \neq 0$）

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}) a_1 a_2 \cdots a_n.$$

类似的方式还可用于求解如下形式的“爪型行列式”