线性代数

矩阵

张晓平

数学与统计学院
Email: xpzhang.math@whu.edu.cn
Homepage: http://staff.whu.edu.cn/show.jsp?n=Zhang%20Xiaoping

目录

1 逆矩阵

2 矩阵的初等变换与初等矩阵

1 逆矩阵

2 矩阵的初等变换与初等矩阵

给定一个从$\mathbf{x}$到$\mathbf{y}$的线性变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用$\mathbf{A}$的伴随阵$\mathbf{A}^*$左乘(1)，得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = |\mathbf{A}|\mathbf{x}$$

当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{y}$$

记

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{2}$$

它表示一个从$\mathbf{y}$到$\mathbf{x}$的线性变换，称为线性变换(1)的逆变换。

给定一个从$\mathbf{x}$到$\mathbf{y}$的线性变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用$\mathbf{A}$的伴随阵$\mathbf{A}^*$左乘(1)，得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = |\mathbf{A}|\mathbf{x}$$

当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{y}$$

记

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{2}$$

它表示一个从$\mathbf{y}$到$\mathbf{x}$的线性变换，称为线性变换(1)的逆变换。

给定一个从$\mathbf{x}$到$\mathbf{y}$的线性变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用$\mathbf{A}$的伴随阵$\mathbf{A}^*$左乘(1)，得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = |\mathbf{A}|\mathbf{x}$$

当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{y}$$

记

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{2}$$

它表示一个从$\mathbf{y}$到$\mathbf{x}$的线性变换，称为线性变换(1)的逆变换。

给定一个从$\mathbf{x}$到$\mathbf{y}$的线性变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用$\mathbf{A}$的伴随阵$\mathbf{A}^*$左乘(1)，得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = |\mathbf{A}|\mathbf{x}$$

当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{y}$$

记

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{2}$$

它表示一个从$\mathbf{y}$到$\mathbf{x}$的线性变换，称为线性变换(1)的逆变换。

给定一个从$\mathbf{x}$到$\mathbf{y}$的线性变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用$\mathbf{A}$的伴随阵$\mathbf{A}^*$左乘(1)，得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = |\mathbf{A}|\mathbf{x}$$

当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，有

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{y}$$

记

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*,$$

则上式可记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{2}$$

它表示一个从$\mathbf{y}$到$\mathbf{x}$的线性变换，称为线性变换(1)的逆变换。

A与B的关系

1. 将(2)代入(1)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y}) = (\mathbf{AB})\mathbf{y}$$

可见**AB**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}.$$

2. 将(1)代入(2)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{BA})\mathbf{x}$$

可见**BA**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

A与B的关系

1. 将(2)代入(1)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{y}$$

可见**AB**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

2. 将(1)代入(2)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}$$

可见**BA**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

A与B的关系

1. 将(2)代入(1)
$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{y}$$
可见**AB**为恒等变换对应的矩阵，故
$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

2. 将(1)代入(2)
$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}$$
可见**BA**为恒等变换对应的矩阵，故
$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

A与B的关系

1 将(2)代入(1)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{y}$$

可见**AB**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

2 将(1)代入(2)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}$$

可见**BA**为恒等变换对应的矩阵，故

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

逆矩阵

对于n阶矩阵$\mathbf{A}$，如果有一个n阶矩阵$\mathbf{B}$，使

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

则称$\mathbf{A}$是可逆的，并把$\mathbf{B}$称为$\mathbf{A}$的逆矩阵。

注

1. 可逆矩阵与其逆矩阵为同阶方阵。
2. $\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$地位相等，也可称$\mathbf{A}$为$\mathbf{B}$的逆矩阵。

逆矩阵

对于n阶矩阵$\mathbf{A}$，如果有一个n阶矩阵$\mathbf{B}$，使

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

则称$\mathbf{A}$是可逆的，并把$\mathbf{B}$称为$\mathbf{A}$的逆矩阵。

注

1. 可逆矩阵与其逆矩阵为同阶方阵。
2. $\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$地位相等，也可称$\mathbf{A}$为$\mathbf{B}$的逆矩阵。

定理1

若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}$的逆阵惟一。

证明:

$\mathbf{A}$的矩阵记作$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

定理1

若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}$的逆阵惟一。

证明:

$\mathbf{A}$的矩阵记作$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

定理1

若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}$的逆阵惟一。

证明:

$\mathbf{A}$的矩阵记作$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

定理2

若$\mathbf{A}$可逆，则$|\mathbf{A}| \neq 0$.

证明:

定理2

若$\mathbf{A}$可逆，则$|\mathbf{A}| \neq 0$.

证明:

代数余子式矩阵，伴随矩阵

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$为行列式$|\mathbf{A}|$中元素$a_{ij}$的代数余子式，称

$$\operatorname{coef}\mathbf{A}=(A_{ij})_{n\times n}$$

为$\mathbf{A}$的代数余子式矩阵，并称coef$\mathbf{A}$的转置矩阵为$\mathbf{A}$的伴随矩阵，记为$\mathbf{A}^*$， 即

$$\mathbf{A}^*=(\operatorname{coef}\mathbf{A})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

之前已证

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

同理可证

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

代数余子式矩阵，伴随矩阵

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$为行列式$|\mathbf{A}|$中元素$a_{ij}$的代数余子式，称

$$\mathrm{coef}\,\mathbf{A}=(A_{ij})_{n\times n}$$

为$\mathbf{A}$的代数余子式矩阵，并称coef$\mathbf{A}$的转置矩阵为$\mathbf{A}$的伴随矩阵，记为$\mathbf{A}^*$， 即

$$\mathbf{A}^*=(\mathrm{coef}\,\mathbf{A})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

之前已证

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

同理可证

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

代数余子式矩阵，伴随矩阵

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$为行列式$|\mathbf{A}|$中元素$a_{ij}$的代数余子式，称

$$\mathrm{coef}\,\mathbf{A}=(A_{ij})_{n\times n}$$

为$\mathbf{A}$的代数余子式矩阵，并称coef$\mathbf{A}$的转置矩阵为$\mathbf{A}$的伴随矩阵，记为$\mathbf{A}^*$， 即

$$\mathbf{A}^*=(\mathrm{coef}\,\mathbf{A})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

之前已证

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

同理可证

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

定理3

若$|\mathbf{A}| \neq 0$，则$\mathbf{A}$可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$$

证明:

该定理提供了求$\mathbf{A}^{-1}$的一种方法。

定理3

若$|\mathbf{A}| \neq 0$，则$\mathbf{A}$可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$$

证明:

该定理提供了求$\mathbf{A}^{-1}$的一种方法。

定理3

若$|\mathbf{A}| \neq 0$，则$\mathbf{A}$可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$$

证明:

该定理提供了求$\mathbf{A}^{-1}$的一种方法。

推论

若$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$（或$\mathbf{BA} = \mathbf{I}$），则

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

证明:

该推论告诉我们，判断$\mathbf{B}$是否为$\mathbf{A}$的逆，只需验证$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$或$\mathbf{BA} = \mathbf{I}$的一个等式成立即可。

推论

若$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$（或$\mathbf{BA}=\mathbf{I}$），则
$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}.$$

证明:

该推论告诉我们，判断$\mathbf{B}$是否为$\mathbf{A}$的逆，只需验证$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$或$\mathbf{BA}=\mathbf{I}$的一个等式成立即可。

推论

若$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$（或$\mathbf{BA} = \mathbf{I}$），则

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

证明:

该推论告诉我们，判断$\mathbf{B}$是否为$\mathbf{A}$的逆，只需验证$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$或$\mathbf{BA} = \mathbf{I}$的一个等式成立即可。

奇异阵与非奇异阵

当$|\mathbf{A}| = 0$时，$\mathbf{A}$称为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵。

注

可逆矩阵就是非奇异矩阵。

奇异阵与非奇异阵

当$|\mathbf{A}| = 0$时，$\mathbf{A}$称为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵。

注

可逆矩阵就是非奇异矩阵。

可逆矩阵的运算规律

1 若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}^{-1}$亦可逆，且

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

2 若$\mathbf{A}$可逆，$k \neq 0$，则$k\mathbf{A}$可逆，且

$$(k\mathbf{A})^{-1} = k^{-1}A^{-1}.$$

3 若$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$为同阶矩阵且均可逆，则$\mathbf{AB}$可逆，且

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

若$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_m$皆可逆，则

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$

4 若$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}^T$亦可逆，且

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

5 若$\mathbf{A}$可逆，则

$$|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$$

例1

已知$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}^{-1}$。

解：

$$|\mathbf{A}| = ad-bc, \quad |\mathbf{A}^*| = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1. 当$|\mathbf{A}| = ad-bc = 0$时，逆阵不存在；
2. 当$|\mathbf{A}| = ad-bc \neq 0$时，

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例1

已知$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}^{-1}$。

解:

$$|\mathbf{A}|=ad-bc, \quad |\mathbf{A}^*|=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1 当$|\mathbf{A}|=ad-bc=0$时，逆阵不存在；

2 当$|\mathbf{A}|=ad-bc\neq 0$时，

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例1

已知$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}^{-1}$。

解:

$$|\mathbf{A}|=ad-bc,\quad |\mathbf{A}^*|=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1. 当$|\mathbf{A}|=ad-bc=0$时，逆阵不存在；
2. 当$|\mathbf{A}|=ad-bc\neq 0$时，

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例1

已知$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}^{-1}$。

解:

$$|\mathbf{A}| = ad - bc, \quad |\mathbf{A}^*| = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1. 当$|\mathbf{A}| = ad - bc = 0$时，逆阵不存在；
2. 当$|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$时，

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆阵。

解: $|\mathbf{A}|=2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{matrix}M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2\\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2\\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2\end{matrix}$$

$$\mathrm{coef}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&2\\6&-6&2\\-4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆阵。

解： $|\mathbf{A}|=2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2\\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2\\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2 \end{array}$$

$$\mathrm{coef}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&2\\6&-6&2\\-4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆阵。

解： $|\mathbf{A}|=2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2\\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2\\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2\end{array}$$

$$\mathrm{coef}\,\mathbf{A}=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&2\\6&-6&2\\-4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆阵。

解： $|\mathbf{A}|=2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2\\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2\\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2\end{array}$$

$$\mathrm{coef}\,\mathbf{A}=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&2\\6&-6&2\\-4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆阵。

解： $|\mathbf{A}|=2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll} M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2 \\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2 \\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2 \end{array}$$

$$\mathrm{coef}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例2

求方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆阵。

解: $|\mathbf{A}|=2$，故$\mathbf{A}$可逆。计算$\mathbf{A}$的余子式

$$\begin{array}{lll}M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2\\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2\\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2\end{array}$$

$$\mathrm{coef}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&2\\6&-6&2\\-4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程
$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$
证明：$\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:
$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 10\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\right] = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = 6\mathbf{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$.

例3

设方阵**A**满足方程

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

证明：**A**, $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 10\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\right] = \mathbf{I}$$

故**A**可逆，且$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = 6\mathbf{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$.

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程
$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0},$$
证明：$\mathbf{A},\mathbf{A}-4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:
$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})=10\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\right]=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ (\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=6\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \frac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}-4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^{-1}=\dfrac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$.

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程
$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0},$$
证明：$\mathbf{A},\mathbf{A}-4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})=10\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\right]=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ (\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=6\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \frac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}-4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^{-1}=\frac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$.

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0},$$

证明：$\mathbf{A},\mathbf{A}-4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})=10\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\right]=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ (\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=6\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \frac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}-4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^{-1}=\dfrac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$.

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

证明：$\mathbf{A}, \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 10\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\right] = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = 6\mathbf{I} \Rightarrow \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

故$\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$.

例3

设方阵$\mathbf{A}$满足方程
$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0},$$
证明：$\mathbf{A},\mathbf{A}-4\mathbf{I}$都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明:
$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})=10\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}\left[\frac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\right]=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ (\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=6\mathbf{I}\ \Rightarrow\ \frac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=\mathbf{I}$$

故$\mathbf{A}-4\mathbf{I}$可逆，且$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^{-1}=\frac{1}{6}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$.

例4

证明：可逆对称矩阵的逆矩阵仍为对称矩阵；可逆反对称矩阵的逆矩阵仍为反对称矩阵。

例5

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为非零实矩阵，证明：若$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$，则$\mathbf{A}$可逆。

证明: 欲证$\mathbf{A}$可逆，只需证$|\mathbf{A}|\neq 0$。

由$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$及$\mathbf{A}^*$的定义可知，$\mathbf{A}$的元素$a_{ij}$等于自身的代数余子式$A_{ij}$。再根据行列式的按行展开定义，有

$$|\mathbf{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

由于$\mathbf{A}$为非零实矩阵，故$|\mathbf{A}|\neq 0$，即$\mathbf{A}$可逆。

例5

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为非零实矩阵，证明：若$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$，则$\mathbf{A}$可逆。

证明： 欲证$\mathbf{A}$可逆，只需证$|\mathbf{A}|\neq 0$。

由$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$及$\mathbf{A}^*$的定义可知，$\mathbf{A}$的元素$a_{ij}$等于自身的代数余子式$A_{ij}$。再根据行列式的按行展开定义，有

$$|\mathbf{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

由于$\mathbf{A}$为非零实矩阵，故$|\mathbf{A}|\neq 0$，即$\mathbf{A}$可逆。

例5

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为非零实矩阵，证明：若$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$，则$\mathbf{A}$可逆。

证明： 欲证$\mathbf{A}$可逆，只需证$|\mathbf{A}|\neq 0$。

由$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$及$\mathbf{A}^*$的定义可知，$\mathbf{A}$的元素$a_{ij}$等于自身的代数余子式$A_{ij}$。再根据行列式的按行展开定义，有

$$|\mathbf{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

由于$\mathbf{A}$为非零实矩阵，故$|\mathbf{A}|\neq 0$，即$\mathbf{A}$可逆。

例5

设$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为非零实矩阵，证明：若$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$，则$\mathbf{A}$可逆。

证明： 欲证$\mathbf{A}$可逆，只需证$|\mathbf{A}|\neq 0$。

由$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$及$\mathbf{A}^*$的定义可知，$\mathbf{A}$的元素$a_{ij}$等于自身的代数余子式$A_{ij}$。再根据行列式的按行展开定义，有

$$|\mathbf{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

由于$\mathbf{A}$为非零实矩阵，故$|\mathbf{A}|\neq 0$，即$\mathbf{A}$可逆。

例6

设$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}$，证明$\mathbf{B}$可逆，当$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}$时，求$\mathbf{B}$.

解:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}\Rightarrow(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\Rightarrow|\mathbf{A}^*-\mathbf{I}|\cdot|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^{-1}|\neq 0$$

故$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}^*-\mathbf{I}$可逆。

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^{-1}=[\mathbf{A}(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}\mathbf{A}^*-\mathbf{A})^{-1}=(|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}.$$

其中

$$|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8&&\\&8&\\&&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

易算得

$$\mathbf{B}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例6

设$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}$，证明$\mathbf{B}$可逆，当$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$时，求$\mathbf{B}$.

解:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}\Rightarrow(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\Rightarrow|\mathbf{A}^*-\mathbf{I}|\cdot|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^{-1}|\neq 0$$

故$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}^*-\mathbf{I}$可逆。

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^{-1}=[\mathbf{A}(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}\mathbf{A}^*-\mathbf{A})^{-1}=(|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}.$$

其中

$$|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 8 & & \\ & 8 & \\ & & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

易算得

$$\mathbf{B}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例6

设$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}$，证明$\mathbf{B}$可逆，当$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}$时，求$\mathbf{B}$.

解:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}\Rightarrow(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\Rightarrow|\mathbf{A}^*-\mathbf{I}|\cdot|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^{-1}|\neq 0$$

故$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}^*-\mathbf{I}$可逆。

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^{-1}=[\mathbf{A}(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}\mathbf{A}^*-\mathbf{A})^{-1}=(|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}.$$

其中

$$|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8&&\\&8&\\&&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

易算得

$$\mathbf{B}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例6

设$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}$，证明$\mathbf{B}$可逆，当$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$时，求$\mathbf{B}$.

解:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}\Rightarrow(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\Rightarrow|\mathbf{A}^*-\mathbf{I}|\cdot|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^{-1}|\neq 0$$

故$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}^*-\mathbf{I}$可逆。

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^{-1}=[\mathbf{A}(\mathbf{A}^*-\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}\mathbf{A}^*-\mathbf{A})^{-1}=(|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}.$$

其中

$$|\mathbf{A}|\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 8 & & \\ & 8 & \\ & & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

易算得

$$\mathbf{B}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明：(1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例7

设$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均为n阶可逆矩阵，证明：

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

(2) $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$

知识点

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

证明: (1) 由$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \neq 0$可知$\mathbf{AB}$可逆，且有$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{I}$。故

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^* &= |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\ &= |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

(2) 由$(\mathbf{A}^*)^*\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}^*|\mathbf{I}$，得

$$(\mathbf{A}^*)^*|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{I}$$

两边同时右乘$\mathbf{A}$得

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \\ & 2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n & 2^n-1\\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}| = 2, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P\Lambda P}^{-1}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1} = \mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1}, \quad \cdots, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \\ & 2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n & 2^n-1\\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \\ & 2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n & 2^n-1\\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

例8

设$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$.

解:

$$|\mathbf{P}|=2,\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1},\quad \cdots,\quad \mathbf{A}^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

$$\mathbf{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

结论

令

$$\varphi(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_m\mathbf{A}^m.$$

(i) 若$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$，则$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}$，从而

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{A}) &= a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_m\mathbf{A}^m \\ &= \mathbf{P}a_0\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}a_1\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} + \cdots + \mathbf{P}a_m\mathbf{\Lambda}^m\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}\varphi(\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-1}.\end{aligned}$$

结论

令

$$\varphi(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_m\mathbf{A}^m.$$

(ii) 若$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$为对角阵，则$\mathbf{\Lambda}^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$，从而

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{\Lambda}) &= a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{\Lambda} + \cdots + a_m\mathbf{\Lambda}^m \\
&= a_0\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} + \cdots + a_m\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1 逆矩阵

2 矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行

(ii) 以非零常数k乘矩阵的某一行

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数k并加到另一行

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，其中

(i) 对换变换 $r_i \leftrightarrow r_j$

(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$

(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$

对应的还有初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行

(ii) 以非零常数k乘矩阵的某一行

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数k并加到另一行

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，其中

(i) 对换变换 $r_i \leftrightarrow r_j$

(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$

(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$

对应的还有初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

(i) 对调两行

(ii) 以非零常数k乘矩阵的某一行

(iii) 将矩阵的某一行乘以常数k并加到另一行

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换，其中

(i) 对换变换 $r_i \leftrightarrow r_j$

(ii) 倍乘变换 $r_i \times k$

(iii) 倍加变换 $r_i + r_j \times k$

对应的还有初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换。

Table: 初等变换及其逆变换

初等变换	逆变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	$r_i \times \frac{1}{k}$
$r_i + r_j \times k$	$r_i - r_j \times k$

矩阵的等价

(i) 如果**A**经过有限次初等行变换变成**B**，就称**A**与**B**行等价，记为$\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B}$

(ii) 如果**A**经过有限次初等列变换变成**B**，就称**A**与**B**列等价，记为$\mathbf{A} \overset{c}{\sim} \mathbf{B}$

(iii) 如果**A**经过有限次初等变换变成**B**，就称**A**与**B**等价，记为$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

矩阵等价的性质

(i) 反身性：$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$

(ii) 对称性：若$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$，则$\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$

(iii) 传递性：若$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$，则$\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$

矩阵的等价

(i) 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等行变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$行等价，记为$\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B}$

(ii) 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等列变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$列等价，记为$\mathbf{A} \overset{c}{\sim} \mathbf{B}$

(iii) 如果$\mathbf{A}$经过有限次初等变换变成$\mathbf{B}$，就称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$等价，记为$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

矩阵等价的性质

(i) 反身性：$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$

(ii) 对称性：若$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$，则$\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$

(iii) 传递性：若$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$，则$\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$

初等矩阵

将单位矩阵$\mathbf{I}$做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵。

对应于3类初等行、列变换，有3种类型的初等矩阵。

(i) 对调两行或对调两列（初等对换矩阵）

$$
\mathbf{E}_{ij} = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & 0 & & \cdots & & 1 & & \\
& & & 1 & & & & & \\
& & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
& & & & & 1 & & & \\
& & 1 & & \cdots & & 0 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \text{第}\,i\,\text{行} \\ \\ \\ \\ \text{第}\,j\,\text{行} \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cc}
\text{第}\,i\,\text{列} & \qquad\qquad \text{第}\,j\,\text{列}
\end{array}
&
\end{array}
$$

用m阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$左乘$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}=\begin{array}{@{}c@{}l}\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

其结果相当于：

把$\mathbf{A}$的第i行与第j行对调（$r_i \leftrightarrow r_j$）.

用n阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$右乘$\mathbf{A}$，且结果相当于

把$\mathbf{A}$的第i列与第j列对调（$c_i \leftrightarrow c_j$）.

用m阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$左乘$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

其结果相当于：

把$\mathbf{A}$的第i行与第j行对调（$r_i \leftrightarrow r_j$）.

用n阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$右乘$\mathbf{A}$，且结果相当于

把$\mathbf{A}$的第i列与第j列对调（$c_i \leftrightarrow c_j$）.

用m阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$左乘$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

其结果相当于：

把$\mathbf{A}$的第i行与第j行对调（$r_i \leftrightarrow r_j$）.

用n阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}$右乘$\mathbf{A}$，且结果相当于

把$\mathbf{A}$的第i列与第j列对调（$c_i \leftrightarrow c_j$）.

(ii) 以非零常数k乘某行或某列（初等倍乘矩阵）

$$\mathbf{E}_i(k) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \text{第}\,i\,\text{行} \\ \text{第}\,i\,\text{列} & \end{array}$$

(1) 以m阶初等矩阵$\mathbf{E}_i(k)$左乘$\mathbf{A}$，其结果相当于以数k乘$\mathbf{A}$的第i行（$r_i \times k$）

(2) 以n阶初等矩阵$\mathbf{E}_i(k)$右乘$\mathbf{A}$，其结果相当于以数k乘$\mathbf{A}$的第i列（$c_i \times k$）

(ii) 以非零常数k乘某行或某列（初等倍乘矩阵）

$$\begin{array}{c} \mathbf{E}_{ij}(k)=\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(1) 以m阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}(k)$左乘$\mathbf{A}$，其结果相当于把$\mathbf{A}$的第j行乘以数k加到第i行上（$r_i + r_j \times k$）

(2) 以n阶初等矩阵$\mathbf{E}_{ij}(k)$右乘$\mathbf{A}$，其结果相当于把$\mathbf{A}$的第j列乘以数k加到第i列上（$c_i + c_j \times k$）

定理

设$\mathbf{A}$为一个$m \times n$矩阵，

- 对$\mathbf{A}$施行一次初等行变换，相当于在$\mathbf{A}$的左边乘以相应的m阶初等矩阵；
- 对$\mathbf{A}$施行一次初等列变换，相当于在$\mathbf{A}$的右边乘以相应的n阶初等矩阵。

总结

$\mathbf{E}_i(k)\mathbf{A}$

$\mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{A}$

$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_i(k)$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}(k)$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$

定理

设$\mathbf{A}$为一个$m \times n$矩阵，

- 对$\mathbf{A}$施行一次初等行变换，相当于在$\mathbf{A}$的左边乘以相应的m阶初等矩阵；
- 对$\mathbf{A}$施行一次初等列变换，相当于在$\mathbf{A}$的右边乘以相应的n阶初等矩阵。

总结

$\mathbf{E}_i(k)\mathbf{A}$

$\mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{A}$

$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_i(k)$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}(k)$

$\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换$r_i \leftrightarrow r_j$的逆变换为其本身可知

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$$

(ii) 由变换$r_i \times k$的逆变换为$r_i \times \frac{1}{k}$可知

$$\mathbf{E}_i(k)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换$r_i + r_j \times k$的逆变换为$r_i - r_j \times k$可知

$$\mathbf{E}_{ij}(k)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换$r_i \leftrightarrow r_j$的逆变换为其本身可知

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$$

(ii) 由变换$r_i \times k$的逆变换为$r_i \times \frac{1}{k}$可知

$$\mathbf{E}_i(k)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换$r_i + r_j \times k$的逆变换为$r_i - r_j \times k$可知

$$\mathbf{E}_{ij}(k)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换$r_i \leftrightarrow r_j$的逆变换为其本身可知

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$$

(ii) 由变换$r_i \times k$的逆变换为$r_i \times \dfrac{1}{k}$可知

$$\mathbf{E}_i(k)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换$r_i + r_j \times k$的逆变换为$r_i - r_j \times k$可知

$$\mathbf{E}_{ij}(k)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换$r_i \leftrightarrow r_j$的逆变换为其本身可知

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$$

(ii) 由变换$r_i \times k$的逆变换为$r_i \times \dfrac{1}{k}$可知

$$\mathbf{E}_i(k)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换$r_i + r_j \times k$的逆变换为$r_i - r_j \times k$可知

$$\mathbf{E}_{ij}(k)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换$r_i \leftrightarrow r_j$的逆变换为其本身可知

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$$

(ii) 由变换$r_i \times k$的逆变换为$r_i \times \frac{1}{k}$可知

$$\mathbf{E}_i(k)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换$r_i + r_j \times k$的逆变换为$r_i - r_j \times k$可知

$$\mathbf{E}_{ij}(k)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$$

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(\frac{1}{k}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}_{ij}(k)\mathbf{E}_{ij}(-k) = \mathbf{I}.$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\0&k&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\0&k&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\0&k&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\0&k&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

解:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\0&k&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3=\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\ \ \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例1

设初等矩阵

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

求$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$及$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}=\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}=\mathbf{P}_1,\quad \mathbf{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\-c&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\frac{1}{k}&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&\frac{1}{k}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-c&1\end{pmatrix}$$

例2

将三对角矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 分解成主对角元为1的下三角矩阵$\mathbf{L}$和上三角阵$\mathbf{U}$的乘积$\mathbf{A}=\mathbf{LU}$（称为矩阵的LU分解）。

解:

$$\begin{pmatrix}1&&&\\-\frac{1}{2}&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_1$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&-\frac{2}{3}&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_2$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-\frac{3}{4}&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&0&\frac{5}{4}\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{U}$$

例2

将三对角矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 分解成主对角元为1的下三角矩阵$\mathbf{L}$和上三角阵$\mathbf{U}$的乘积$\mathbf{A}=\mathbf{LU}$（称为矩阵的LU分解）。

解:

$$\begin{pmatrix}1&&&\\-\frac{1}{2}&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_1$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&-\frac{2}{3}&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_2$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-\frac{3}{4}&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&0&\frac{5}{4}\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{U}$$

例2

将三对角矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 分解成主对角元为1的下三角矩阵**L**和上三角阵**U**的乘积$\mathbf{A}=\mathbf{LU}$（称为矩阵的LU分解）。

解:

$$\begin{pmatrix}1&&&\\-\frac{1}{2}&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_1$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&-\frac{2}{3}&1&\\&&&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{A}_2$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-\frac{3}{4}&1\end{pmatrix}\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&1\\0&0&0&\frac{5}{4}\end{pmatrix}\triangleq\mathbf{U}$$

例2

将三对角矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 分解成主对角元为1的下三角矩阵$\mathbf{L}$和上三角阵$\mathbf{U}$的乘积$\mathbf{A}=\mathbf{LU}$（称为矩阵的LU分解）。

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\triangleq \mathbf{A}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\triangleq \mathbf{A}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}\triangleq \mathbf{U}$$

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$，则

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{U} \triangleq \mathbf{L}\mathbf{U}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= (\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

定理2

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明: 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做3类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此，对于任何矩阵$\mathbf{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

当$\mathbf{A}$为n阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而$\mathbf{U}$必为单位矩阵$\mathbf{I}$.

定理2

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明: 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做3类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此，对于任何矩阵$\mathbf{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

当$\mathbf{A}$为n阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而$\mathbf{U}$必为单位矩阵$\mathbf{I}$.

定理2

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明: 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做3类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此，对于任何矩阵$\mathbf{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

当$\mathbf{A}$为n阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而$\mathbf{U}$必为单位矩阵$\mathbf{I}$.

定理2

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明: 对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做3类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此，对于任何矩阵$\mathbf{A}$，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵，即存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

当$\mathbf{A}$为n阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而$\mathbf{U}$必为单位矩阵$\mathbf{I}$.

推论1

可逆矩阵$\mathbf{A}$可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明：由上述定理，必存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1)^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1}$$

推论1

可逆矩阵$\mathbf{A}$可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明： 由上述定理，必存在初等矩阵$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_s$使得

$$\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

于是

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1)^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1}$$

推论1

如果对可逆矩阵$\mathbf{A}$与同阶单位矩阵$\mathbf{I}$做同样的初等行变换，那么当$\mathbf{A}$变为单位阵时，$\mathbf{I}$就变为$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

推论1

如果对可逆矩阵$\mathbf{A}$与同阶单位矩阵$\mathbf{I}$做同样的初等行变换，那么当$\mathbf{A}$变为单位阵时，$\mathbf{I}$就变为$\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

例3

求$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

解:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例3

求$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

解:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \,\vdots\, \mathbf{I} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例3

求$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

解:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例3

求$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

解:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1+r_2\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1+r_2\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1+r_2\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{BA}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{BA}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 2\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 2\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{A}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T = 2\mathbf{BA}^T + \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{BA}^T = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})]^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}\Rightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T=\mathbf{I}\Rightarrow\mathbf{BA}^T=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1}=[\mathbf{A}^T(\mathbf{A}-2\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&-2\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}\Rightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T=\mathbf{I}\Rightarrow\mathbf{BA}^T=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1}=[\mathbf{A}^T(\mathbf{A}-2\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&-2\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

例4

已知$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}$，求$\mathbf{B}$，其中$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

证明:

$$\mathbf{ABA}^T=2\mathbf{BA}^T+\mathbf{I}\Rightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{BA}^T=\mathbf{I}\Rightarrow\mathbf{BA}^T=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}$$

故

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1}=[\mathbf{A}^T(\mathbf{A}-2\mathbf{I})]^{-1}=(\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T)^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}-2\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

可求得

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&-2\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

推论

对于n个未知数n个方程的线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

如果增广矩阵

$$(\mathbf{A},\ \mathbf{b}) \overset{r}{\sim} (\mathbf{I}, \mathbf{x}),$$

则$\mathbf{A}$可逆，且$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$为惟一解。

例5

设
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-3\\-1&3&2\end{pmatrix},\ \mathbf{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix},$$
求$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_1$与$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_2$的解。

解:

$$(\mathbf{A},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)=\begin{pmatrix}2&1&3&1&-1\\1&2&-2&2&0\\-1&3&2&-2&5\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\r_2-2r_1\\r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&-3&1&-3&-1\\0&5&0&0&5\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\r_2\div 5\\r_3+3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}$$

例5

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-3\\-1&3&2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix},$$

求$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_1$与$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_2$的解。

解:

$$(\mathbf{A},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)=\begin{pmatrix}2&1&3&1&-1\\1&2&-2&2&0\\-1&3&2&-2&5\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&-3&1&-3&-1\\0&5&0&0&5\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\ r_2\div 5\\ r_3+3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}$$

例5

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-3\\-1&3&2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix},$$

求$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}_1$与$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}_2$的解。

解:

$$(\mathbf{A},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)=\begin{pmatrix}2&1&3&1&-1\\1&2&-2&2&0\\-1&3&2&-2&5\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&-3&1&-3&-1\\0&5&0&0&5\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\ r_2\div 5\\ r_3+3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}$$

例5

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-3\\-1&3&2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix},$$

求$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_1$与$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}_2$的解。

解:

$$(\mathbf{A},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)=\begin{pmatrix}2&1&3&1&-1\\1&2&-2&2&0\\-1&3&2&-2&5\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&-3&1&-3&-1\\0&5&0&0&5\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\ r_2\div 5\\ r_3+3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}$$

例5

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-3\\-1&3&2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix},$$

求$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}_1$与$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}_2$的解。

解:

$$(\mathbf{A},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)=\begin{pmatrix}2&1&3&1&-1\\1&2&-2&2&0\\-1&3&2&-2&5\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\r_2-2r_1\\r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&-3&1&-3&-1\\0&5&0&0&5\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\r_2\div 5\\r_3+3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX}=\mathbf{A}+\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解：原方程等价于

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I},\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_3\div(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_3\div(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX} = \mathbf{A} + \mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解： 原方程等价于

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}, \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3 + 4r_2 \\ r_3 \div (-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3 + 4r_2 \\ r_3 \div (-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX} = \mathbf{A} + \mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解： 原方程等价于

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}, \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_3 \div (-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_3 \div (-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX}=\mathbf{A}+\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$

解: 原方程等价于

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I},\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX} = \mathbf{A} + \mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解: 原方程等价于

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}, \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3 + 4r_2 \\ r_3 \div (-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3 + 4r_2 \\ r_3 \div (-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例6

求解矩阵方程$\mathbf{AX}=\mathbf{A}+\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$

解： 原方程等价于

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I},\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2\\r_3\div(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

例7

当a, b满足什么条件时，矩阵$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$不可逆。

解:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_1 \times (-2)]{r_2 + r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_2 \times (-1)]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例7

当a,b满足什么条件时，矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$不可逆。

解:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{r_2+r_1\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\times(-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

例7

当a,b满足什么条件时，矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$不可逆。

解:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{c_1\leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{r_2+r_1\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\times(-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

例7

当a,b满足什么条件时，矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$不可逆。

解:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{r_2+r_1\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\times(-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$