线性代数

线性方程组

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2017 年 5 月 1 日

1. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

1. 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

定理 1 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，以下命题等价：

(i) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

(ii) $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示；

(iii) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$。

证明. 分两步证明:

(i)$\Longleftrightarrow$(ii) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价于

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.$$

证明. 分两步证明:

(i)$\Longleftrightarrow$(ii) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价于

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.$$

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii) 若 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的列向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价，故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$。反之，若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$，则 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，否则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+1$，导致矛盾。

$\square$

注　$\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+1$ 会导致矛盾方程的出现

记 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$，若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+1$，则增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 经过初等行变换所得的行阶梯形矩阵形如

$$\left(\begin{array}{cccccc:c} 1 & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中 $d_{r+1}\neq 0$（否则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r$）。这意味着出现了矛盾方程

$$0=d_{r+1}.$$

推论 1

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\text{有唯一解} \iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\text{的列数}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \cdots & 0 & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

定理 2 若 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。

定理 2 若 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。

证明.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。 $\square$

定理 3　若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则其一般解（或称通解）为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}}$$

其中 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，而

$$\bar{\boldsymbol{x}}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{x}_p$$

为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一般解。

定理 3 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则其一般解（或称通解）为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}}$$

其中 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，而

$$\bar{\boldsymbol{x}}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{x}_p$$

为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一般解。

证明.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}}\text{是}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\text{的解}$$

设 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解，则 $\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，而

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}_0+(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}_0).$$

故 $\boldsymbol{x}^*$ 可表示为 $\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{x}}$ 的形式。 □

非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

的通解为

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_p\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_0$$

其中 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{x}_0$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解。

注　"$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解" $=$ "$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解" $+$ "$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解"

例 1　求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一般解，其中增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \div 2]{r_1-r_3,r_3+\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

故通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

例 2 (重要题型)　设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +(1+\lambda)x_3 & = & \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组

(1) 有唯一解？

(2) 无解？

(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

解

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2.$$

故当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时，有唯一解。当 $\lambda = 0$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组，故无解。

当 $\lambda = -3$ 时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

例 3　设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：

(1) $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关；

(2) $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关。

证明.

(1) 假设 $\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\eta}^*$ 可由 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，这与 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解矛盾。故假设不成立，即
$\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关。

(2) 显然，

$\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 等价于 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$,

由题 (1) 结论可知

$$\begin{aligned}&\mathrm{R}(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r})\\ =&\mathrm{R}(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r})=n-r+1\end{aligned}$$

从而结论成立。

□

例 4　设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_s$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解，k_1，k_2，$\cdots$，k_s 为实数，满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。证明：

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解。

例 4 设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_s$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解，k_1，k_2，$\cdots$，k_s 为实数，满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。证明：

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解。

证明.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s) &= k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_s\\ &= k_1\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}+\cdots+k_s\boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

$\square$

例 5　对于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 为它的 $n-r+1$ 个线性无关的解。证明它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$

证明. 取向量组 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1$. 下证该向量组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1})\xrightarrow[j=2,\cdots,n-r+1]{c_j-c_1}(\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\text{线性无关}\\
\Rightarrow\quad &\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{线性无关}\\
\Rightarrow\quad &\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{线性无关}\\
\Rightarrow\quad &\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1\text{为}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{的基础解系.}
\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解 $\boldsymbol{x}$ 可表示为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}=k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)+\boldsymbol{\eta}_1\\
\Rightarrow\quad &\boldsymbol{x}=(1-k_2-\cdots-k_{n+r-1})\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\\
\Rightarrow\quad &\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}
\end{aligned}$$

□

例 6　设四元齐次线性方程组

$$(I):\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \qquad (II):\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

求

(1) 方程组 (I) 与 (II) 的基础解系

(2) 方程组 (I) 与 (II) 的公共解

解 (1)、因为

$$(I) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_2 \end{cases}$$

故 (I) 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解 (续)　因为

$$(II) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_4 = -x_2 + x_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -x_2 + x_3 \end{cases}$$

故 (II) 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解 (续)　(2)、方程 (I) 与 (II) 的公共解即为联立 (I) 与 (II) 所得新方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解 (续)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_4+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_3+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}.$$