数值计算方法

线性方程组的迭代解法

张晓平

2018 年 10 月 8 日

武汉大学数学与统计学院

Table of contents

Jacobi 迭代与 Gauss-Seidel 迭代

Jacobi 迭代与 Gauss-Seidel 迭代

Jacobi 迭代法

Jacobi 迭代法

设 $a_{ii} \neq 0$，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Jacobi 迭代法

设 $a_{ii} \neq 0$，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

Jacobi 迭代法

设 $a_{ii} \neq 0$，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(\qquad -a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + b_1) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 \qquad - a_{23}x_3 + b_2) \\ x_3 = \dfrac{1}{a_{33}}(-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \qquad + b_3) \end{cases}$$

Jacobi 迭代法

取 $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)}\right)^T$，代入上式右端得

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(\qquad\qquad -a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} + b_1\right) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{(0)} \qquad\qquad - a_{23}x_3^{(0)} + b_2\right) \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)} \qquad\qquad + b_3\right) \end{cases}$$

Jacobi 迭代法

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\big(& & -a_{12}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)} & +b_1\big) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\big(-a_{21}x_1^{(k)} & & - a_{23}x_3^{(k)} & +b_2\big) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\big(-a_{31}x_1^{(k)} & -a_{32}x_2^{(k)} & & +b_3\big)
\end{cases}
$$

Jacobi 迭代法

考察线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

令

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}$$

Jacobi 迭代法

考察线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

令

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D} &= \operatorname{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}), \quad a_{ii} \neq 0 \\
\boldsymbol{L} &= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Jacobi 迭代法

考察线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

令

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}$$

方程 (1) 可写成

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}_J\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_J &= -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}),\\ \boldsymbol{g} &= -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

定义：Jacobi 迭代格式

给定初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，可得迭代序列

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}_J\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_J &= -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) \quad \rightarrow \text{Jacobi 迭代矩阵,} \\ \boldsymbol{g} &= -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

Jacobi 迭代法

任给 $x_i^{(0)}\,(i=1,2,\cdots,n)$，对 $k=0,1,2,\cdots$，

$$
\begin{aligned}
x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\right) \\
&= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \\
& \quad i=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

Jacobi 迭代与 Gauss-Seidel 迭代

Gauss-Seidel 迭代

Jacobi 迭代

$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(& & -a_{12}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)} & +b_1) \\ x_2{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k)} & & - a_{23}x_3^{(k)} & +b_2) \\ x_3{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(-a_{31}x_1^{(k)} & -a_{32}x_2^{(k)} & & +b_3) \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代

Jacobi 迭代

$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(& & -a_{12}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)} & +b_1) \\ x_2{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k)} & & - a_{23}x_3^{(k)} & +b_2) \\ x_3{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(-a_{31}x_1^{(k)} & -a_{32}x_2^{(k)} & & +b_3) \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代

$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(& & -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} & +b_1) \\ x_2{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k+1)} & & - a_{23}x_3^{(k)} & +b_2) \\ x_3{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(-a_{31}x_1^{(k+1)} & -a_{32}x_2^{(k+1)} & & +b_3) \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代

定义：Gauss-Seidel 迭代

给定初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，可得迭代序列

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

即

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}_{GS}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{GS} &= -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}, \\ \boldsymbol{g} &= (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

Jacobi 与 Gauss-Seidel 迭代的收敛性分析

Jacobi 与 Gauss-Seidel 迭代的收敛性分析

收敛的充分必要条件

收敛的充分必要条件

定义

对于线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{2}$$

给定初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，迭代格式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

称该迭代格式代为单步线性定常迭代，其中

- $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n} \to$ 迭代矩阵
- $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{n} \to$ 常数项
- $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{n} \to$ 初始向量

收敛的充分必要条件

若对任意初始向量，由 (3) 产生的迭代序列都有极限，则称该迭代法是收敛的；否则称为发散的。

收敛的充分必要条件

- Jacobi 迭代

$$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}), \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

- Gauss-Seidel 迭代

$$\boldsymbol{M} = -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}, \quad \boldsymbol{g} = (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

收敛的充分必要条件

若 (3) 收敛，记其极限为 x^*，则两端取极限得

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{g} \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{g}. \tag{4}$$

若该式与 (2) 等价，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{G}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{b}. \tag{5}$$

当上式成立时，称迭代法 (3) 与方程组 (2)相容。

收敛的充分必要条件

称

$$\boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*$$

为 $\boldsymbol{x}^*$ 在第 k 步的误差向量。

收敛的充分必要条件

称

$$\boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{*}$$

为 $\boldsymbol{x}^{*}$ 在第 k 步的误差向量。由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{*} = \boldsymbol{b} \quad \overset{\text{同解方程}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{x}^{*} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{*} + \boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}$$

知

收敛的充分必要条件

称

$$\boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*$$

为 $\boldsymbol{x}^*$ 在第 k 步的误差向量。由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b} \xLeftrightarrow{\text{同解方程}} \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}$$

知

$$\boldsymbol{e}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{e}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{M}^k \boldsymbol{e}^{(0)}.$$

收敛的充分必要条件

称

$$\boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*$$

为 $\boldsymbol{x}^*$ 在第 k 步的误差向量。由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b} \xLeftrightarrow{\text{同解方程}} \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}$$

知

$$\boldsymbol{e}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{e}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{M}^k \boldsymbol{e}^{(0)}.$$

收敛的充分必要条件

推论

迭代法 (3) 收敛的充分必要条件是

$$\boldsymbol{M}^k \to 0.$$

收敛的充分必要条件

定理

$\boldsymbol{M}^k \to 0$ 的充分必要条件是 $\rho(\boldsymbol{M}) < 1$.

收敛的充分必要条件

定理

$\boldsymbol{M}^k \to 0$ 的充分必要条件是 $\rho(\boldsymbol{M}) < 1$.

定理

迭代法 (3) 收敛的充分必要条件是 $\rho(\boldsymbol{M}) < 1$.

收敛的充分必要条件

定理

$\boldsymbol{M}^k \to 0$ 的充分必要条件是 $\rho(\boldsymbol{M}) < 1$.

定理

迭代法 (3) 收敛的充分必要条件是 $\rho(\boldsymbol{M}) < 1$.

迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半径，而与初始向量的选取和常数项无关。

解同一方程组时，Jacobi 迭代矩阵与 Gauss-Seidel 迭代矩阵的谱半径不一定相同，且无包含关系。

例

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$$

收敛的充分必要条件

对于 $\boldsymbol{A}_1$，

$$\boldsymbol{M}_{1,J} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{1,GS} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 因 $\rho(\boldsymbol{M}_{1,J}) = 1.081 \times 10^{-5}$，故 Jacobi 迭代收敛；
- 因 $\rho(\boldsymbol{M}_{1,GS}) = 2$，故 Gauss-Seidel 迭代不收敛。

收敛的充分必要条件

对于 $\boldsymbol{A}_2$，

$$\boldsymbol{M}_{2,J} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{2,GS} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- 因 $\rho(\boldsymbol{M}_{2,J}) = 1.118$，故 Jacobi 迭代不收敛；
- 因 $\rho(\boldsymbol{M}_{2,GS}) = 1/2$，故 Gauss-Seidel 迭代不收敛。

Jacobi 与 Gauss-Seidel 迭代的收敛性分析

收敛的充分条件及误差估计

收敛的充分条件及误差估计

- 用谱半径来判断迭代格式是否收敛，显然是不方便的，因为计算谱半径非常困难。
- 我们希望能给出一些比较容易计算的条件。

定理：回顾

若 $\|\boldsymbol{A}\| < 1$ 且 $\|\boldsymbol{I}\| = 1$，则 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 非奇异，且

$$\|(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{A}\|}.$$

收敛的充分条件及误差估计

证明

若 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 奇异，则 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 有非零解，即存在 $\tilde{\boldsymbol{x}}\neq 0$ 使得

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

从而

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|=\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\|\leq\|\boldsymbol{A}\|\,\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|$$

因 $\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|>0$，故 $\|\boldsymbol{A}\|\geq 1$，这与已知矛盾，从而 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 必非奇异。

收敛的充分条件及误差估计

证明

若 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 奇异，则 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 有非零解，即存在 $\tilde{\boldsymbol{x}}\neq 0$ 使得

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

从而

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|=\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\|\leq\|\boldsymbol{A}\|\,\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|$$

因 $\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|>0$，故 $\|\boldsymbol{A}\|\geq 1$，这与已知矛盾，从而 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 必非奇异。

由 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}$ 得

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

证明

若 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 奇异，则 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 有非零解，即存在 $\tilde{\boldsymbol{x}}\neq 0$ 使得

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

从而

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\| = \|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\,\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|$$

因 $\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|>0$，故 $\|\boldsymbol{A}\|\ge 1$，这与已知矛盾，从而 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 必非奇异。

由 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}$ 得

$$
\begin{aligned}
& (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} \\
\Rightarrow \quad & \|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\| \le \|\boldsymbol{I}\|+\|\boldsymbol{A}\|\,\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\| \\
\Rightarrow \quad & \|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|\boldsymbol{A}\|}
\end{aligned}
$$

收敛的充分条件及误差估计

定理

对于迭代格式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

若 $\|\boldsymbol{M}\| = q < 1$，并假定 $\|\boldsymbol{I}\| = 1$，则

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{*}\| \leq \frac{q^k}{1-q}\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|.$$

从该估计可计算出要得到满足精度要求的近似解需要迭代多少次，但实际计算时用它控制并不方便。

收敛的充分条件及误差估计

证明

由 $\boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{M}^k \boldsymbol{e}^{(0)}$ 可知

$$\|\boldsymbol{e}^{(k)}\| = \|\boldsymbol{M}^k \boldsymbol{e}^{(0)}\| \le \|\boldsymbol{M}\|^k \|\boldsymbol{e}^{(0)}\| = q^k \|\boldsymbol{e}^{(0)}\|$$

因 $\|\boldsymbol{M}\| < 1$，故 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}$ 存在且 $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1} \boldsymbol{g}$。

证明

由 $\boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{M}^k \boldsymbol{e}^{(0)}$ 可知

$$\|\boldsymbol{e}^{(k)}\| = \|\boldsymbol{M}^k \boldsymbol{e}^{(0)}\| \leq \|\boldsymbol{M}\|^k \|\boldsymbol{e}^{(0)}\| = q^k \|\boldsymbol{e}^{(0)}\|$$

因 $\|\boldsymbol{M}\| < 1$，故 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}$ 存在且 $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{g}$。于是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^{(0)} &= \boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^{(0)} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}\left((\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})x^{(0)} - \boldsymbol{g}\right) \\
&= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}\left(\boldsymbol{x}^{(0)} - (\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{g})\right) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^{(1)})
\end{aligned}$$

从而有

$$\|\boldsymbol{e}^{(0)}\| \leq \|(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}\| \ \|\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^{(1)}\|.$$

注意到当 $\|\boldsymbol{M}\| = q < 1$ 时，有

$$\|(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{M}\|} = \frac{1}{1 - q}.$$

即知定理成立。

收敛的充分条件及误差估计

定理

若 $\|\boldsymbol{M}\| = q < 1$ 且 $\|\boldsymbol{I}\| = 1$，则

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \frac{q}{1-q}\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|.$$

该定理表明，可从相邻近似值的差来判别迭代法是否应该终止，这对实际计算是非常好用的。

收敛的充分条件及误差估计

证明

因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^* &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{g} - (\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k-1)} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^* \\
&= \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k-1)} - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{x}^{(k-1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}) \\
\Longrightarrow \quad & \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \frac{q}{1-q}\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|.
\end{aligned}
$$

即知定理成立。

收敛的充分条件及误差估计

- 用范数判定迭代法是否收敛虽然只是一个充分条件，但用起来比较方便。
- 常用 1 范数和 ∞ 范数来进行判定。
- 对 Jacobi 迭代而言，上述判别法基本令人满意，因为 Jacobi 迭代矩阵比较容易得到。
- 对 G-S 迭代而言，因为 G-S 迭代矩阵不那么好计算，故上述判别法不是那么方便。

收敛的充分条件及误差估计

若线性方程组的系数矩阵对称正定，会有一些更有意思的结论。

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 对称且 $\forall i,\ a_{ii} > 0$，则

$$\text{Jacobi 迭代收敛} \iff \boldsymbol{A},\ \ 2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}\text{皆正定}$$

证明

因 $a_{ii} > 0$，故 $\boldsymbol{D}^{-1}$ 存在。

- 由

$$\boldsymbol{M}_J = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{D}^{-1/2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1/2})\boldsymbol{D}^{1/2}$$

可知

$$\boldsymbol{M}_J \quad \sim \quad \boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1/2}.$$

- 由 $\boldsymbol{A}$ 对称可知 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{1/2}$ 也对称，从而其特征值为实数。

于是，$\boldsymbol{M}_J$ 的特征值为实数。

证明（续）：

1、先证充分性。

Jacobi 迭代收敛 $\iff \rho(\boldsymbol{M}_J) < 1 \iff \rho(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1/2}) < 1$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1/2}\text{的特征值} \in (0,2) \Longrightarrow \boldsymbol{A}\text{正定} \\ 2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1/2}\text{的特征值} \in (0,2) \end{cases}$$

又 $2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1/2} = \boldsymbol{D}^{-1/2}(2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}^{-1/2}$，故$2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$ 正定。

证明（续）：

2、再证必要性。

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{D}^{1/2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_J)\boldsymbol{D}^{-1/2}=\boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1/2} \\ \boldsymbol{A}\text{正定} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_J)>0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(\boldsymbol{M}_J)<1.$$

收敛的充分条件及误差估计

证明（续）：

2、再证必要性。

$$\left.\begin{array}{c} D^{1/2}(I-M_J)D^{-1/2}=D^{-1/2}AD^{-1/2} \\ A\text{正定} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda(I-M_J)>0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(M_J)<1.$$

$$\left.\begin{array}{l} D^{1/2}(I+M_J)D^{-1/2}=D^{-1/2}(2D-A)D^{-1/2} \\ 2D-A\text{正定} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda(I+M_J)>0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(M_J)>-1.$$

收敛的充分条件及误差估计

证明（续）：

2、再证必要性。

$$\left.\begin{array}{c} D^{1/2}(I-M_J)D^{-1/2} = D^{-1/2}AD^{-1/2} \\ A\text{正定} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda(I-M_J)>0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(M_J)<1.$$

$$\left.\begin{array}{l} D^{1/2}(I+M_J)D^{-1/2} = D^{-1/2}(2D-A)D^{-1/2} \\ 2D-A\text{正定} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda(I+M_J)>0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(M_J)>-1.$$

联立可得 $\rho(M_J)<1$，从而 Jacobi 迭代收敛。

定理

$$A\text{对称正定} \quad \Longrightarrow \quad \text{Gauss-Seidel 迭代收敛}$$

收敛的充分条件及误差估计

证明

设 λ 与 $\boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{M}_{GS}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$ 的特征值与特征向量，故有

$$-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v} \overset{\boldsymbol{U}=\boldsymbol{L}^T}{\Longleftrightarrow} -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$$

$$\Longrightarrow -\lambda(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v}\Longrightarrow -\lambda\underbrace{\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}}_{\delta}-\lambda\underbrace{\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}}_{\alpha+i\beta}=\underbrace{\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v}}_{\alpha-i\beta}$$

证明

设 λ 与 $\boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{M}_{GS}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$ 的特征值与特征向量，故有

$$-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v} \overset{\boldsymbol{U}=\boldsymbol{L}^T}{\Longleftrightarrow} -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$$

$$\Longrightarrow -\lambda(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v} \Longrightarrow -\lambda\underbrace{\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}}_{\delta}-\lambda\underbrace{\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}}_{\alpha+i\beta}=\underbrace{\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v}}_{\alpha-i\beta}$$

$$-\lambda\delta-\lambda(\alpha+i\beta)=\alpha-i\beta \xrightarrow{\text{取模}} |\lambda|^2\left((\delta+\alpha)^2+\beta^2\right)=\alpha^2+\beta^2$$

$$\Longrightarrow |\lambda|^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\delta+\alpha)^2+\beta^2} < 1?$$

证明

设 λ 与 $\boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{M}_{GS}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$ 的特征值与特征向量，故有

$$-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v} \xLeftrightarrow{\boldsymbol{U}=\boldsymbol{L}^T} -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$$

$$\Longrightarrow -\lambda(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v} \Longrightarrow -\lambda\underbrace{\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}}_{\delta}-\lambda\underbrace{\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}}_{\alpha+i\beta}=\underbrace{\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v}}_{\alpha-i\beta}$$

$$-\lambda\delta-\lambda(\alpha+i\beta)=\alpha-i\beta \xrightarrow{\text{取模}} |\lambda|^2\left((\delta+\alpha)^2+\beta^2\right)=\alpha^2+\beta^2$$

$$\Longrightarrow |\lambda|^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\delta+\alpha)^2+\beta^2} \quad <1?$$

事实上，

$$0<\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T)\boldsymbol{v}=\delta+2\alpha$$

故

$$(\delta+\alpha)^2+\beta^2=\delta^2+2\alpha\delta+\alpha^2+\beta^2=\delta(\delta+2\alpha)+\alpha^2+\beta^2>\alpha^2+\beta^2.$$

收敛的充分条件及误差估计

定义：对角占优矩阵

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，对于不等式组

$$|a_{ii}|\geq\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\quad\forall i=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

- 若至少存在一个 i，不等式严格成立，则称 $\boldsymbol{A}$弱严格对角占优；
- 若对所有 i，不等式均严格成立，则称 $\boldsymbol{A}$严格对角占优。

收敛的充分条件及误差估计

定义：不可约矩阵

若存在 n 阶置换矩阵 (permutation matrix)$\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{PAP}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & 0 \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$，$\boldsymbol{A}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$，则称 $\boldsymbol{A}$可约 (reducible)；反之，若不存在这样的置换矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$不可约 (irreducible).

收敛的充分条件及误差估计

若 $\boldsymbol{A}$ 可约，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可化为

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$$

记 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}$，则有

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{f}_1\in\mathbb{R}^r, \quad \boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{f}_2\in\mathbb{R}^{n-r}.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A_{11}\boldsymbol{y}_1 & = \boldsymbol{f}_1 \\ A_{12}\boldsymbol{y}_1+A_{22}\boldsymbol{y}_2 & = \boldsymbol{f}_2. \end{cases}$$

这样，就把一个求解 n 阶方程组的问题转化为求解两个低阶方程组的问题了。

定义：可约矩阵的等价定义

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n \geq 2$ 阶矩阵，$\mathscr{W} = \{1, 2, \cdots, n\}$。若存在 $\mathscr{W}$ 两个非空的子集 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{T}$ 满足

$$\mathscr{S} \cup \mathscr{T} = \mathscr{W}, \quad \mathscr{S} \cap \mathscr{T} = \emptyset,$$

使得

$$a_{ij} = 0, \quad i \in \mathscr{S}, \quad j \in \mathscr{T},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为可约的；否则称 $\boldsymbol{A}$ 为不可约的。

如果一个矩阵不可约，且是弱严格对角占优的，则称该矩阵是不可约对角占优的。

例

三对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

是不可约对角占优的。

定理

严格对角占优矩阵或不可约对角占优矩阵是非奇异的。

证明

1、先证严格对角占优矩阵非奇异。

若 $\boldsymbol{A}$ 奇异，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 有非零解 $\boldsymbol{x}$。不妨设 $|x_i|=\|\boldsymbol{x}\|_\infty=1$，则

$$|a_{ii}|=|a_{ii}x_i|=\left|\sum_{j=1,j\neq i} a_{ij}x_j\right|\leq\sum_{j=1,j\neq i}|a_{ij}|,$$

这与 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优矛盾。

证明

2、再证不可约对角占优矩阵非奇异。

若 $\boldsymbol{A}$ 奇异，设 x 满足 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$。令

$$\mathscr{S} = \{i : |x_i| = 1\}, \quad \mathscr{T} = \{k : |x_k| < 1\}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathscr{S} \cup \mathscr{T} = \mathscr{W}, \quad \mathscr{S} \cap \mathscr{T} = \phi, \text{且} \mathscr{T} \text{非空}$$

事实上，若 $\mathscr{T}$ 空，则 $|x_i| = 1 (\forall i)$ 则

$$|a_{ii}| = |a_{ii}x_i| = \left|\sum_{j=1, j\neq i} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i$$

这与 $\boldsymbol{A}$ 弱严格对角占优矛盾。

证明（续）：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\text{不可约} \quad &\Longrightarrow \quad \exists\ i \in \mathscr{S},\quad k \in \mathscr{T} \quad s.t. \quad a_{ik} \neq 0, \\
&\Longrightarrow \quad |a_{ik}x_k| < |a_{ik}| \\
&\Longrightarrow \quad |a_{ii}| \leq \sum_{j\in\mathscr{S}, j\neq i} |a_{ij}||x_j| + \sum_{k\in\mathscr{T}} |a_{ik}||x_k| \\
&\qquad\quad < \sum_{j\in\mathscr{S}, j\neq i} |a_{ij}| + \sum_{k\in\mathscr{T}} |a_{ik}| \\
&\qquad\quad = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|
\end{aligned}
$$

这与 $\boldsymbol{A}$ 弱严格对角占优矛盾。

推论

若 $\boldsymbol{A}$ 为对角元皆为正的对称矩阵，且严格对角占优或不可约对角占优，则 $\boldsymbol{A}$ 正定。

收敛的充分条件及误差估计

证明

设 $\lambda \le 0$，考察矩阵 $\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}$。

$\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}$只是对角元上增加了一些正数

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}$与$\boldsymbol{A}$一样，是严格对角占优的或不可约对角占优的

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}$非奇异

注意到 $\lambda \le 0$ 的任意性，知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于 0，从而 $\boldsymbol{A}$ 正定。

定理

若 $\boldsymbol{A}$严格对角占优或不可约对角占优，则 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代收敛。

证明

$$\boldsymbol{A}\text{严格对角占优或不可约对角占优} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{D}\text{可逆}$$

证明（续）：

1、先证Jacobi 迭代收敛

若 $\boldsymbol{M}_J$ 的某个特征值 $|\lambda| \geq 1$，考察 $\lambda\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{A}$严格对角占优或不可约对角占优

$\Longrightarrow \quad \lambda\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}$也严格对角占优或不可约对角占优

$\Longrightarrow \quad \lambda\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}$非奇异

而

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_J = \lambda\boldsymbol{I}+D^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{D}^{-1}(\lambda\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$$

$$\Longrightarrow \quad \det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_J) = \det(\boldsymbol{D}^{-1}) \cdot \det(\lambda\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) \neq 0$$

这与 λ 是 $\boldsymbol{M}_J$ 的特征值矛盾，从而 $\rho(\boldsymbol{M}_J) < 1 \quad \Longrightarrow \quad$ Jacobi 迭代收敛。

证明（续）：

2、再证Gauss-Seidel 迭代收敛

若 $\boldsymbol{M}_{GS}$ 的某个特征值 $|\lambda| \geq 1$，考察 $\lambda\boldsymbol{D} - \lambda\boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{A}$严格对角占优或不可约对角占优

$\Longrightarrow \quad \lambda\boldsymbol{D} + \lambda\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}$也严格对角占优或不可约对角占优

$\Longrightarrow \quad \lambda\boldsymbol{D} + \lambda\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}$非奇异

而

$$\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}_{GS} = \lambda\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}(\lambda\boldsymbol{D} + \lambda\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})$$

$$\Longrightarrow \quad \det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}_{GS}) = \det((\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}) \cdot \det(\lambda\boldsymbol{D} + \lambda\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}) \neq 0$$

这与 λ 是 $\boldsymbol{M}_{GS}$ 的特征值矛盾，从而 $\rho(\boldsymbol{M}_{GS}) < 1 \quad \Longrightarrow \quad$ Gauss-Seidel 迭代收敛。

超松弛迭代法

超松弛迭代法

超松弛迭代法 (SOR)

超松弛迭代法 (SOR)

超松弛迭代法 (SOR, Successive Over-Relax) 可看做是 G-S 迭代的加速。

超松弛迭代法 (SOR)

超松弛迭代法 (SOR, Successive Over-Relax) 可看做是 G-S 迭代的加速。

Gauss-Seidel 迭代：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

超松弛迭代法 (SOR)

超松弛迭代法 (SOR, Successive Over-Relax) 可看做是 G-S 迭代的加速。

Gauss-Seidel 迭代:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

由

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{(k+1)} &= \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{r}^{(k)}, \\
\boldsymbol{r}^{(k)} &= -\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}x^{(k+1)} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}x^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \\
&= \boldsymbol{D}^{-1}\left[\boldsymbol{b} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)}\right]
\end{aligned}$$

可看出,

超松弛迭代法 (SOR)

超松弛迭代法 (SOR, Successive Over-Relax) 可看做是 G-S 迭代的加速。

Gauss-Seidel 迭代：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

由

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(k+1)} &= \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{r}^{(k)}, \\ \boldsymbol{r}^{(k)} &= -\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}x^{(k+1)} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}x^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{D}^{-1}\left[\boldsymbol{b} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)}\right] \end{aligned}$$

可看出，对 Gauss-Seidel 迭代来说，$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 可看作对 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 加上修正项 $\boldsymbol{r}^{(k)}$ 而得到。

超松弛迭代法 (SOR)

若在$\boldsymbol{r}^{(k)}$前加一个参数 ω，便得松弛法

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(k+1)} &= \boldsymbol{x}^{(k)} + \omega \boldsymbol{r}^{(k)} \\ &= (1-\omega)\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega(-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}x^{(k+1)} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}), \end{aligned} \tag{8}$$

其中ω 叫做松弛因子。

- $\omega > 1 \quad \rightarrow \quad$ 超松弛 (SOR)
- $\omega < 1 \quad \rightarrow \quad$ 低松弛
- $\omega = 1 \quad \rightarrow \quad$ Gauss-Seidel 迭代

超松弛迭代法 (SOR)

定义：SOR

(8) 可改写为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}_\omega x^{(k)} + \omega(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_\omega = (\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}]$$

为松弛法的迭代矩阵。

超松弛迭代法 (SOR)

- 超松弛迭代法是解大型方程组，特别是大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一。
- 具有计算公式简单、程序设计容易、占用计算机内存单元较少等优点。
- 只要松弛因子 ω 选择得好，其收敛速度就会加快。

超松弛迭代法 (SOR)

例

分别用 Jacobi、Gauss-Seidel 和 SOR 求解

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- 终止条件:

$$\max|\Delta x_i| < \max|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < 10^{-5}$$

- 精确解:

$$x^\star = (1,\ -2,\ -1,\ 3)^T$$

超松弛迭代法 (SOR)

解 (Jacobi)：

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
x_1^{(k+1)} & = & x_1^{(k)} & +\frac{1}{5}(& -2 & -5x_1^{(k)} & -x_2^{(k)} & +x_3^{(k)} & +2x_4^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} & = & x_2^{(k)} & +\frac{1}{8}(& -6 & -2x_1^{(k)} & -8x_2^{(k)} & -x_3^{(k)} & -3x_4^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} & = & x_3^{(k)} & -\frac{1}{4}(& 6 & -x_1^{(k)} & +2x_2^{(k)} & +4x_3^{(k)} & +x_4^{(k)}) \\
x_4^{(k+1)} & = & x_4^{(k)} & +\frac{1}{7}(& 12 & +x_1^{(k)} & -3x_2^{(k)} & -2x_3^{(k)} & -7x_4^{(k)})
\end{array}\right.$$

解 (Jacobi)：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{1}{5}(-2 -5x_1^{(k)} -x_2^{(k)} +x_3^{(k)} +2x_4^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{1}{8}(-6 -2x_1^{(k)} -8x_2^{(k)} -x_3^{(k)} -3x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{4}(6 -x_1^{(k)} +2x_2^{(k)} +4x_3^{(k)} +x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} + \frac{1}{7}(12 +x_1^{(k)} -3x_2^{(k)} -2x_3^{(k)} -7x_4^{(k)}) \end{cases}$$

迭代 24 次后，近似解为

$$x^{(24)} = (0.9999941,\ -1.9999950,\ -1.0000040,\ 2.9999990)^T$$

超松弛迭代法 (SOR)

解 (GS)：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{1}{5}(-2 - 5x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 2x_4^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{1}{8}(-6 - 2x_1^{(k+1)} - 8x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{4}(6 - x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)} + 4x_3^{(k)} + x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} + \frac{1}{7}(12\ \ x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} - 2x_3^{(k+1)} - 7x_4^{(k)}) \end{cases}$$

超松弛迭代法 (SOR)

解 (GS)：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{1}{5}(-2 -5x_1^{(k)} -x_2^{(k)} +x_3^{(k)} +2x_4^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{1}{8}(-6 -2x_1^{(k+1)} -8x_2^{(k)} -x_3^{(k)} -3x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{4}(6 -x_1^{(k+1)} +2x_2^{(k+1)} +4x_3^{(k)} +x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} + \frac{1}{7}(12 \quad x_1^{(k+1)} -3x_2^{(k+1)} -2x_3^{(k+1)} -7x_4^{(k)}) \end{cases}$$

迭代 14 次后，近似解为

$$x^{(14)} = (0.9999966, \; -1.9999970, \; -1.0000040, \; 2.9999990)^T$$

超松弛迭代法 (SOR)

解 (SOR)：

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
x_1^{(k+1)} & = & x_1^{(k)} & +\frac{\omega}{5}(& -2 & -5x_1^{(k)} & -x_2^{(k)} & +x_3^{(k)} & +2x_4^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} & = & x_2^{(k)} & +\frac{\omega}{8}(& -6 & -2x_1^{(k+1)} & -8x_2^{(k)} & -x_3^{(k)} & -3x_4^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} & = & x_3^{(k)} & -\frac{\omega}{4}(& 6 & -x_1^{(k+1)} & +2x_2^{(k+1)} & +4x_3^{(k)} & +x_4^{(k)}) \\
x_4^{(k+1)} & = & x_4^{(k)} & +\frac{\omega}{7}(& 12 & x_1^{(k+1)} & -3x_2^{(k+1)} & -2x_3^{(k+1)} & -7x_4^{(k)})
\end{array}\right.$$

解 (SOR)：

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
x_1^{(k+1)} & = & x_1^{(k)} & +\frac{\omega}{5}(& -2 & -5x_1^{(k)} & -x_2^{(k)} & +x_3^{(k)} & +2x_4^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} & = & x_2^{(k)} & +\frac{\omega}{8}(& -6 & -2x_1^{(k+1)} & -8x_2^{(k)} & -x_3^{(k)} & -3x_4^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} & = & x_3^{(k)} & -\frac{\omega}{4}(& 6 & -x_1^{(k+1)} & +2x_2^{(k+1)} & +4x_3^{(k)} & +x_4^{(k)}) \\
x_4^{(k+1)} & = & x_4^{(k)} & +\frac{\omega}{7}(& 12 & x_1^{(k+1)} & -3x_2^{(k+1)} & -2x_3^{(k+1)} & -7x_4^{(k)})
\end{array}\right.$$

取 $\omega = 1.15$，迭代 8 次后，近似解为

$$x^{(8)} = (0.9999965,\ -1.9999970,\ -1.0000010,\ 2.9999990)^T$$

超松弛迭代法

收敛性分析

定义：超松弛迭代法

SOR 迭代格式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}_\omega \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_\omega &= (\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}] \\ \boldsymbol{g} &= \omega(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

收敛性分析

定理：充分必要条件

$$\text{SOR 收敛} \iff \rho(\boldsymbol{M}_\omega) < 1$$

收敛性分析

定理：必要条件

$$\text{SOR 收敛} \quad \Longrightarrow \quad 0 < \omega < 2.$$

收敛性分析

定理：必要条件

$$\text{SOR 收敛} \implies 0<\omega<2.$$

该定理表明，对任何系数矩阵，若要 SOR 收敛，必须选取松弛因子 $\omega \in (0,2)$。

收敛性分析

证明

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的 n 个特征值。

$$\text{SOR 收敛} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(\boldsymbol{M}_\omega) < 1$$

收敛性分析

证明

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的 n 个特征值。

$$\text{SOR 收敛} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(\boldsymbol{M}_\omega) < 1$$

$$\Longrightarrow$$

收敛性分析

证明

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的 n 个特征值。

$$\text{SOR 收敛} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(\boldsymbol{M}_\omega) < 1$$

$$\Longrightarrow \quad |\det(\boldsymbol{M}_\omega)| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n| < 1$$

收敛性分析

证明

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的 n 个特征值。

$$\text{SOR 收敛} \iff \rho(\boldsymbol{M}_\omega) < 1$$

$$\implies |\det(\boldsymbol{M}_\omega)| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n| < 1$$

$$\boldsymbol{M}_\omega = (\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1} L)^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}]$$

收敛性分析

证明

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的 n 个特征值。

$$\text{SOR 收敛} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(\boldsymbol{M}_\omega) < 1$$

$$\Longrightarrow \quad |\det(\boldsymbol{M}_\omega)| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n| < 1$$

$$\boldsymbol{M}_\omega = (\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1} L)^{-1} [(1-\omega)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{U}]$$

$$\det[(1-\omega)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{U}] = (1-\omega)^n$$

收敛性分析

证明

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的 n 个特征值。

$$\text{SOR 收敛} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(\boldsymbol{M}_\omega) < 1$$

$$\Longrightarrow \quad |\det(\boldsymbol{M}_\omega)| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n| < 1$$

$$\boldsymbol{M}_\omega = (\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1} L)^{-1} [(1-\omega)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{U}]$$

$$\det[(1-\omega)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{U}] = (1-\omega)^n$$

$$\det[(\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{L})^{-1}] = 1$$

收敛性分析

证明

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的 n 个特征值。

$$\text{SOR 收敛} \iff \rho(\boldsymbol{M}_\omega) < 1$$

$$\implies |\det(\boldsymbol{M}_\omega)| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n| < 1$$

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{M}_\omega = (\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1} L)^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}] \\ \det[(1-\omega)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}] = (1-\omega)^n \\ \det[(\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L})^{-1}] = 1 \end{array}\right\}$$

证明

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的 n 个特征值。

$$\text{SOR 收敛} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(\boldsymbol{M}_\omega) < 1$$

$$\Longrightarrow \quad |\det(\boldsymbol{M}_\omega)| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n| < 1$$

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_\omega &= (\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1} L)^{-1} [(1-\omega)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{U}] \\
\det[(1-\omega)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}] &= (1-\omega)^n \\
\det[(\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L})^{-1}] &= 1
\end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad |\det(\boldsymbol{M}_\omega)| = |(1-\omega)^n|$$

收敛性分析

证明

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的 n 个特征值。

$$\text{SOR 收敛} \iff \rho(\boldsymbol{M}_\omega) < 1$$

$$\implies |\det(\boldsymbol{M}_\omega)| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n| < 1$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M}_\omega = (\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1} L)^{-1} [(1-\omega)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{U}] \\ \det[(1-\omega)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{U}] = (1-\omega)^n \\ \det[(\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{L})^{-1}] = 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\implies |\det(\boldsymbol{M}_\omega)| = |(1-\omega)^n|$$

从而

$$|(1-\omega)^n| < 1 \implies |1-\omega| < 1 \implies 0 < \omega < 2.$$

定理

$$\left.\begin{array}{c}\text{严格对角占优或不可约对角占优}\\[2ex] \omega \in (0,1)\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{SOR 收敛}$$

收敛性分析

证明

假定 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的某个特征值 $|\lambda| \geq 1$，考察 $(\lambda - 1 + \omega)\boldsymbol{D} - \lambda\omega\boldsymbol{L} - \omega\boldsymbol{U}$

收敛性分析

证明

假定 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的某个特征值 $|\lambda| \geq 1$，考察 $(\lambda - 1 + \omega)\boldsymbol{D} - \lambda\omega\boldsymbol{L} - \omega\boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{A}$严格对角占优或不可约对角占优及$\lambda - 1 + \omega > \lambda\omega$

收敛性分析

证明

假定 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的某个特征值 $|\lambda|\geq 1$，考察 $(\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}-\lambda\omega\boldsymbol{L}-\omega\boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{A}$严格对角占优或不可约对角占优及$\lambda-1+\omega>\lambda\omega$

$\Longrightarrow\quad(\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}+\lambda\omega\boldsymbol{L}+\omega\boldsymbol{U}$也严格对角占优或不可约对角占优

收敛性分析

证明

假定 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的某个特征值 $|\lambda| \geq 1$，考察 $(\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}-\lambda\omega\boldsymbol{L}-\omega\boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{A}$严格对角占优或不可约对角占优及$\lambda-1+\omega>\lambda\omega$

$\Longrightarrow \quad (\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}+\lambda\omega\boldsymbol{L}+\omega\boldsymbol{U}$也严格对角占优或不可约对角占优

$\Longrightarrow \quad (\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}+\lambda\omega\boldsymbol{L}+\omega\boldsymbol{U}$非奇异

收敛性分析

证明

假定 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的某个特征值 $|\lambda| \geq 1$，考察 $(\lambda - 1 + \omega)\boldsymbol{D} - \lambda\omega\boldsymbol{L} - \omega\boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{A}$严格对角占优或不可约对角占优及$\lambda - 1 + \omega > \lambda\omega$

$\Longrightarrow \quad (\lambda - 1 + \omega)\boldsymbol{D} + \lambda\omega\boldsymbol{L} + \omega\boldsymbol{U}$也严格对角占优或不可约对角占优

$\Longrightarrow \quad (\lambda - 1 + \omega)\boldsymbol{D} + \lambda\omega\boldsymbol{L} + \omega\boldsymbol{U}$非奇异

而

$$\begin{aligned}
\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}_\omega = \quad & \lambda\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1 - \omega)\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{U}] \\
= \quad & (\boldsymbol{D} + \omega\boldsymbol{L})^{-1}[(\lambda - 1 + \omega)\boldsymbol{D} + \lambda\omega\boldsymbol{L} + \omega\boldsymbol{U}]
\end{aligned}$$

收敛性分析

证明

假定 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的某个特征值 $|\lambda|\ge 1$，考察 $(\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}-\lambda\omega\boldsymbol{L}-\omega\boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{A}$严格对角占优或不可约对角占优及$\lambda-1+\omega>\lambda\omega$

$$\Longrightarrow\quad(\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}+\lambda\omega\boldsymbol{L}+\omega\boldsymbol{U}\text{也严格对角占优或不可约对角占优}$$

$$\Longrightarrow\quad(\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}+\lambda\omega\boldsymbol{L}+\omega\boldsymbol{U}\text{非奇异}$$

而

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_\omega &= \lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}]\\ &= (\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}+\lambda\omega\boldsymbol{L}+\omega\boldsymbol{U}]\\ \Longrightarrow\quad & \det(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}_\omega)\neq 0\end{aligned}$$

证明

假定 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的某个特征值 $|\lambda| \geq 1$，考察 $(\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}-\lambda\omega\boldsymbol{L}-\omega\boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{A}$严格对角占优或不可约对角占优及$\lambda-1+\omega>\lambda\omega$

$\Longrightarrow \quad (\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}+\lambda\omega\boldsymbol{L}+\omega\boldsymbol{U}$也严格对角占优或不可约对角占优

$\Longrightarrow \quad (\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}+\lambda\omega\boldsymbol{L}+\omega\boldsymbol{U}$非奇异

而

$$\begin{aligned}
\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_\omega &= \lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}] \\
&= (\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(\lambda-1+\omega)\boldsymbol{D}+\lambda\omega\boldsymbol{L}+\omega\boldsymbol{U}] \\
\Longrightarrow &\quad \det(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}_\omega)\neq 0
\end{aligned}$$

这与 λ 是 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的特征值矛盾，从而 $\rho(\boldsymbol{M}_\omega)<1 \quad \Longrightarrow \quad$ 松弛法收敛。

收敛性分析

定理

对于实对称正定矩阵，

$$\omega \in (0,2) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{SOR 收敛}$$

证明

设 λ 与 $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{M}_\omega$ 的特征值与特征向量，故

$$(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}]\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v},$$

因 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{L}^T$，故

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L}^T]\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v} \\ \Longrightarrow\quad & [(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L}^T]\boldsymbol{v}=\lambda(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})\boldsymbol{v} \\ \Longrightarrow\quad & \lambda[\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}+\omega\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}]=(1-\omega)\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}-\omega\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}=\delta$$

$$\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}=\alpha+i\beta \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{v}^*\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{v}=\alpha-i\beta.$$

收敛性分析

证明（续）：

$$\lambda[\delta+\omega(\alpha+i\beta)]=(1-\omega)\delta-\omega(\alpha-i\beta)$$

收敛性分析

证明（续）：

$$\lambda[\delta+\omega(\alpha+i\beta)]=(1-\omega)\delta-\omega(\alpha-i\beta)$$

$$\xRightarrow{\text{取模}}\quad |\lambda|^2=\frac{[(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2+\omega^2\beta^2}{(\delta-\omega\alpha)^2+\omega^2\beta^2}\quad <1?$$

收敛性分析

证明（续）：

$$\lambda[\delta+\omega(\alpha+i\beta)]=(1-\omega)\delta-\omega(\alpha-i\beta)$$

$$\xRightarrow{\text{取模}}\quad |\lambda|^2=\frac{[(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2+\omega^2\beta^2}{(\delta-\omega\alpha)^2+\omega^2\beta^2}\quad <1?$$

事实上，

$$\begin{aligned}
& [(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2+\omega^2\beta^2-(\delta-\omega\alpha)^2-\omega^2\beta^2 \\
= \quad & (1-\omega)^2\delta^2-2(1-\omega)\omega\delta\alpha-\delta^2+2\omega\delta\alpha \\
= \quad & [(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2-(\delta-\omega\alpha)^2 \\
= \quad & \omega\delta(\delta-2\alpha)(\omega-2)
\end{aligned}$$

收敛性分析

证明（续）：

$$\lambda[\delta+\omega(\alpha+i\beta)]=(1-\omega)\delta-\omega(\alpha-i\beta)$$

$$\xRightarrow{\text{取模}} \quad |\lambda|^2=\frac{[(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2+\omega^2\beta^2}{(\delta-\omega\alpha)^2+\omega^2\beta^2} \quad <1?$$

事实上，

$$\begin{aligned} & [(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2+\omega^2\beta^2-(\delta-\omega\alpha)^2-\omega^2\beta^2 \\ = \quad & (1-\omega)^2\delta^2-2(1-\omega)\omega\delta\alpha-\delta^2+2\omega\delta\alpha \\ = \quad & [(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2-(\delta-\omega\alpha)^2 \\ = \quad & \omega\delta(\delta-2\alpha)(\omega-2) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}\text{正定} \quad \Longrightarrow \quad \delta>0, \quad \delta-2\alpha>0 \\ 0<\omega<2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \omega\delta(\delta-2\alpha)(\omega-2)<0$$

收敛性分析

证明（续）：

$$\lambda[\delta+\omega(\alpha+i\beta)] = (1-\omega)\delta-\omega(\alpha-i\beta)$$

$$\xRightarrow{\text{取模}} \quad |\lambda|^2 = \frac{[(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2+\omega^2\beta^2}{(\delta-\omega\alpha)^2+\omega^2\beta^2} \quad < 1?$$

事实上，

$$\begin{aligned}
& [(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2+\omega^2\beta^2-(\delta-\omega\alpha)^2-\omega^2\beta^2 \\
= \quad & (1-\omega)^2\delta^2-2(1-\omega)\omega\delta\alpha-\delta^2+2\omega\delta\alpha \\
= \quad & [(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2-(\delta-\omega\alpha)^2 \\
= \quad & \omega\delta(\delta-2\alpha)(\omega-2)
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{A}\text{正定} \quad \Longrightarrow \quad \delta>0, \quad \delta-2\alpha>0 \\ 0<\omega<2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \omega\delta(\delta-2\alpha)(\omega-2)<0 \iff |\lambda|^2<1.$$