线性代数

向量空间

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 11 月 28 日

目录

目录

向量空间

n 元向量

实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的有序数组称为 $\mathbb{R}$ 上的一个 n 元向量，记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{1}$$

其中 a_i 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量。$\mathbb{R}$ 上全体 n 元向量组成的集合，记作 $\mathbb{R}^n$。

向量运算

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$， $k \in \mathbb{R}$，定义

1. 向量加法

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

2. 向量数乘

$$k\boldsymbol{\alpha} = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$

向量空间

在 $\mathbb{R}^n$ 中定义加法与数乘运算，且 $\mathbb{R}^n$ 对加法和数乘封闭，即

- $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \implies k\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$
- $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n \implies \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$

则称 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维向量空间，仍记为 $\mathbb{R}^n$。

向量空间的 8 条运算规则

设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n, 1, k, l \in \mathbb{R}$，则

(1) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$

(2) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$

(3) 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$

(4) 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，存在负向量 $-\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$

(5) $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$

(7) $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$

(8) $(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$

目录

定义 (基)

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组 B：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，若

1. 向量组 B 线性无关；
2. $\mathbb{R}^n$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可由向量组 B 线性表示，

称向量组 B 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组 基，称 n 为 $\mathbb{R}^n$ 的 维数，记为 $\dim \mathbb{R}^n = n$。

注

- $\mathbb{R}^n$ 作为一个向量集合，基是它的极大无关组，而维数是它的秩；
- $\mathbb{R}^n$ 的任意 n 个线性无关的向量组都构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，从而 $\mathbb{R}^n$ 的基不唯一；
- 基本向量组
$$\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
称为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基或标准基。

取定一组基后，向量空间的任一向量就可以由这组基线性表示，且表示系数是唯一的，这样在向量空间就可以建立坐标的概念。

定义 (坐标)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$，且有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标。

注

1. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这组基下的坐标是唯一的；
2. 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标常表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x}.$$

例

设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基为自然基 $B_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 分别在两组基下的坐标。

解

- $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基 B_1 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$。

解（续）

- 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标为 $\boldsymbol{x}$，则它满足

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_{n-1} & \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

由

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n & \boldsymbol{\alpha}\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & a_n \end{array}\right) \xrightarrow[i=1,\cdots,n-1]{r_{i+1}+r_i} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_1+a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \end{array}\right)$$

知，$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标为 $\left(a_1, \sum\limits_{i=1}^{2} a_i, \sum\limits_{i=1}^{3} a_i, \cdots, \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)$。

目录

基变换与坐标变换

问题

在 $\mathbb{R}^n$ 中，任意 n 个线性无关的向量组都可以取作它的一个基，而同一个向量在不同基下的坐标一般是不相同的。那么，随着基的改变，向量的坐标又会发生怎样的改变呢?

定理

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \text{线性无关} \iff |\boldsymbol{C}| \neq 0.$$

证明

记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$， $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$，则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，且 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$。

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} |\boldsymbol{A}| \neq 0 \\ |\boldsymbol{B}| \neq 0 \\ |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}| \end{array}\right\} \Longrightarrow |\boldsymbol{C}| \neq 0.$$

$\Rightarrow$ 欲证 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关，只需证 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解。

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ |\boldsymbol{A}| \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ |\boldsymbol{C}| \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

定义 (过渡矩阵)

设 $\mathbb{R}^n$ 中的两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 称为由旧基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到新基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵(也称基变换矩阵)。

定理

设有 $\mathbb{R}^n$ 的旧基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与新基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$，由旧基到新基的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$，即

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}.$$

若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标分别为

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

则..

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x},$$

此即 坐标变换公式。

证明.

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}$ 知

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}$ 知

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

这意味着 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$。由坐标的唯一性知 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$。 □

例

已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基为 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 2, 1)^T,\ \boldsymbol{\beta}_2 = (1, -1, 0)^T,\ \boldsymbol{\beta}_3 = (1, 0, -1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

解.

设自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} \boldsymbol{A}$$

从而

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

例

已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(1,1,1)^T, & \boldsymbol{\alpha}_2&=(0,1,1)^T, & \boldsymbol{\alpha}_3&=(0,0,1)^T,\\ \boldsymbol{\beta}_1&=(1,0,1)^T, & \boldsymbol{\beta}_2&=(0,1,-1)^T, & \boldsymbol{\beta}_3&=(1,2,0)^T.\end{aligned}$$

(1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1 的坐标为 $(1,-2,-1)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标。

解.

设自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\,\boldsymbol{A}$. 由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\;\mid\;\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&1&-2&-2\end{array}\right)$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$

解 (续).

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标为 $\boldsymbol{y}$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} := \boldsymbol{x}$$

由

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{x}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

知

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

定义 (向量内积)

在 $\mathbb{R}^n$ 中，对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$，规定 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

注

当 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为列向量时，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}.$$

定义 (向量长度)

向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度定义为

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

内积的运算性质

对于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$ 和 $k\in\mathbb{R}$,

- $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$
- $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$
- $(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$
- $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

定义 (欧几里得空间)

定义了内积运算的 $\mathbb{R}^n$，称为 n 维欧几里得空间（简称欧氏空间），仍记为 $\mathbb{R}^n$。

定理 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

证明.

$\forall t \in \mathbb{R}$，有

$$(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}) \geq 0$$

即

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})t^2 + 2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})t + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \geq 0$$

此为关于 t 的二次函数，由一元二次方程理论可知

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 - 4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \leq 0$$

即

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$$

亦即

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

□

定理 (三角不等式)

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|.$$

证明.

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})+2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\
&\leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})+2|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|^2+2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&\leq (\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

□

由 Cauchy-Schwarz 不等式可知，当 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ 时，有

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} \leq 1$$

由此可定义

定义 (向量的夹角)

当 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ 时，称

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \arccos \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|}$$

为向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的夹角。

定义 (正交)

当 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ 时，称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交。显然，零向量与任何向量正交。

定义 (非零正交向量组)

称 $\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组为 非零正交向量组。

定理

非零正交向量组必线性无关。

证明.

对于非零正交向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}\in\mathbb{R}^n$，设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=0,$$

则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A},\boldsymbol{\alpha}_j)=0,\quad j=1,2,\cdots,n_A,$$

即

$$k_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)=0,\quad j=1,2,\cdots,n_A.$$

由于 $(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j)>0$，故

$$k_j=0,\quad j=1,2,\cdots,n_A.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关。 □

定义 (标准正交基)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$，若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基。

例

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基，求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{A}$ 下的坐标。

解

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \\ \Longrightarrow\quad & (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j) = (x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j \\ \Longrightarrow\quad & x_j = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j). \end{aligned}$$

问题

如何从一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 出发，构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$,

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \implies (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1) = 0 \implies k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(3) 令 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2$，对 $i = 1, 2$ 有

$$\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_j \implies (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_j) = (\boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_j) = 0 \implies k_{3j} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j)}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤，假设已经求出两两正交的非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j-1}$，取

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + k_{j1}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{j2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + +k_{j,j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1} = \boldsymbol{\alpha}_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}\boldsymbol{\beta}_s,$$

对 $i = 1, 2, \cdots, j-1$，有

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \implies (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \implies (\boldsymbol{\alpha}_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}\boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \implies k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)}$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1}, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}\boldsymbol{\beta}_{j-1}.$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(5) 单位化

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m \xrightarrow{\eta_j = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_j}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}} \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$$

例

已知 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T.$$

试用施密特正交化方法，由 B 构造 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1\\
&= (1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\
&= (1,-1,1)^T-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^T-\frac{2}{2}(1,-1,0)^T=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

解 (续)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

定义 (正交矩阵)

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，如果

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

定理

$$\boldsymbol{A}\text{为正交矩阵} \iff \boldsymbol{A}\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

证明.

将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \quad \iff \quad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_i = 1, & i = 1, 2, \cdots, n \\ \boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j = 0, & j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\iff \quad \boldsymbol{A}\text{的列向量组为一组标准正交基。}$$

□

定理

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶正交矩阵，则

(1) $|\boldsymbol{A}| = 1$ 或 -1

(2) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$

(3) $\boldsymbol{A}^T$ 也是正交矩阵

(4) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵

证明.

(1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$ 知

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^T| = 1 \implies |\boldsymbol{A}| = 1 \text{ 或 } -1.$$

(2) 显然成立。

(3) 由 $(\boldsymbol{A}^T)^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ 知，$\boldsymbol{A}^T$（即 $\boldsymbol{A}^{-1}$）也是正交矩阵，从而 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组也是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基。

(4) 由 $(\boldsymbol{AB})^T\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵。

$\square$

定理

设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$，则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变，即

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|,$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

证明.

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{Ax})^T(\boldsymbol{Ay}) = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

当 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ 时，有 $(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$，即 $\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|$。同理，$\|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|$。因此，

$$\cos\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \rangle = \frac{(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay})}{\|\boldsymbol{Ax}\| \cdot \|\boldsymbol{Ay}\|} = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} = \cos\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

$\square$