

数值计算方法

线性方程组的解法

张晓平

2019 年 9 月 1 日

武汉大学数学与统计学院

Table of contents

1. 高斯消去法
2. 三角形方程组和三角分解
3. 选主元三角分解

线性方程组的求解问题是一个古老的数学问题

- 《九章算术》：详细记载了消元法
- 19 世纪初，西方有了 Gauss 消去法
- 求解大型线性方程组则是在 20 世纪计算机问世后才成为可能

线性方程组数值解法的分类

- 直接法
- 迭代法

直接法

- **定义：** 在**没有舍入误差**的情况下经过**有限次**运算可求得精确解的方法
- **举例：**
 - 高斯消去法
 - 平方根法
 - 追赶法
 - ...
- **适用范围：**
 - 低阶稠密矩阵方程组
 - 某些大型稀疏方程组（如大型带状方程组）
 - ...

迭代法

- **定义：**采取**逐次逼近**的方法，亦即从一个初始向量出发，按照一定的计算格式，构造一个无穷序列，其极限才是方程组的精确解，只经过有限次运算得不到精确解
- **举例：**
 - Jacobi 迭代
 - Gauss-Seidel 迭代
 - 超松弛迭代
 - ...
- **适用范围：**
 - 大型稀疏方程组
 - ...

高斯消去法

高斯消去法

顺序消去法

顺序消去法

定义：顺序消去法

在逐步消元的过程中，把系数矩阵约化成上三角矩阵，从而将原方程组约化为容易求解的等价三角方程组，再通过回代过程逐一求出各未知数。

顺序消去法

设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$,

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} & (1) \\ \textcolor{blue}{a}_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 = b_2^{(1)} & (2) \\ \textcolor{blue}{a}_{31}^{(1)} x_1 + a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 = b_3^{(1)} & (3) \end{cases}$$

顺序消去法

设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$,

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} & (1) \\ a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 = b_2^{(1)} & (2) \\ a_{31}^{(1)} x_1 + a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 = b_3^{(1)} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (2) + (1) \times \left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right) \\ \hline (3) + (1) \times \left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right) \end{array}$$

顺序消去法

设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$,

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} & (1) \\ a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 = b_2^{(1)} & (2) \\ a_{31}^{(1)} x_1 + a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 = b_3^{(1)} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{(2)+(1) \times \left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right)} \\ \xrightarrow{(3)+(1) \times \left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right)} \end{array} \begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)} x_2 + a_{33}^{(2)} x_3 = b_3^{(2)}. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + a_{1j}^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right), \quad i, j = 2, 3, \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + b_1^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right), \quad i = 2, 3. \end{array} \right.$$

顺序消去法

设 $a_{22}^{(2)} \neq 0$,

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)} x_2 + a_{33}^{(2)} x_3 = b_3^{(2)}. \end{cases}$$

$$(3) + (2) \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \right)$$

顺序消去法

设 $a_{22}^{(2)} \neq 0$,

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)} x_2 + a_{33}^{(2)} x_3 = b_3^{(2)}. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(3) + (2) \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \right)} \begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)} x_3 = b_3^{(3)} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} + a_{23}^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \right), \\ b_3^{(3)} = b_3^{(2)} + b_2^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \right). \end{array} \right.$$

一般情形：考察 n 元线性方程组

$$A^{(1)}x = b^{(1)},$$

其中

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

顺序消去法

若约化的主元 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), 则经过

顺序消元法

```
for k = 1, 2, ..., n-1
  for i = k+1, ..., n
     $l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)},$ 
    for j = k+1, ..., n+1
       $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}$ 
    end
  end
end
```

可得

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

回代公式

$$\begin{aligned} x_n &= b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)} \\ \text{for } i &= n-1, n-2, \dots, 1 \\ x_i &= \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j \right) / a_{ii}^i \\ \text{end} \end{aligned}$$

- 若遇到 $a_{kk}^{(k)} = 0$, 则消去过程无法进行;

- 若遇到 $a_{kk}^{(k)} = 0$, 则消去过程无法进行;
- 若 $a_{kk}^{(k)}$ 不为零但很小, 尽管消去过程可以进行下去, 但用其做除数, 会引起计算结果的严重失真。

$$\begin{cases} 0.00001x_1 + 2x_2 &= 2, \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{cases}$$

高斯消去法

列主元消去法

列主元消去法

定义：列主元消去法

在消元过程中，每次选主元时，仅依次按列选取绝对值最大的元素作为主元，它只进行行交换，而不产生未知数次序的调换。

列主元消去法

定义：列主元消去法

在消元过程中，每次选主元时，**仅依次按列选取绝对值最大的元素作为主元**，它只进行**行交换**，而不产生未知数次序的调换。

列主元消去法能有效地避免顺序消元过程中的两个问题，它是直接法中最常用的一种方式。

例

用列主元消去法求解

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -4. \end{cases}$$

列主元消去法

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

列主元消去法

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array} \right) \xRightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

列主元消去法

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5}r_1]{r_2 - \frac{2}{5}r_1} \begin{pmatrix} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

列主元消去法

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5}r_1]{r_2 - \frac{2}{5}r_1} \begin{pmatrix} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \\ & \color{red}{1.4} & 1.6 & 1.8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

列主元消去法

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xRightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xRightarrow[r_3 - \frac{1}{5}r_1]{r_2 - \frac{2}{5}r_1} \begin{pmatrix} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 & \end{pmatrix} \xRightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \\ & \color{red}{1.4} & 1.6 & 1.8 \end{pmatrix} \\ & \xRightarrow{r_3 + \frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \\ & & -0.5 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

列主元消去法

```
for k = 1, 2, ..., n-1
    find  $i_k \in k, \dots, n$  s.t.  $|a_{i_k, k}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{i, k}^{(k)}|$ ;
    interchange the  $k$ ,  $i_k$ -th rows in  $[A^{(k)}, b^{(k)}]$  ;
    for i = k+1, ..., n
         $l_{ik} = a_{i, k}^{(k)} / a_{i_k, k}^{(k)}$ ;
        for j = k+1, ..., n+1
             $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} \cdot a_{i_k, j}^{(k)}$ ;
        end
    end
end
end
```


高斯消去法

全主元消去法

全主元消去法

定义：全主元消去法

全主元消去法选主元的范围更大，对于 $(A^{(1)} | b^{(1)})$ 来说，在整个系数矩阵中选主元，即将绝对值最大的元素经过行列变换使其置于 $a_{11}^{(1)}$ 的位置，然后进行消元过程得到 $(A^{(2)} | b^{(2)})$ ；

接下来在该矩阵中划掉第一行第一列后剩余的 $n-1$ 阶子系数矩阵中选主元，并通过行、列交换置其于 $a_{22}^{(2)}$ 的位置，然后进行消元；

.....

例

用全主元消去法求解

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -4. \end{cases}$$

全主元消去法

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

全主元消去法

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

全主元消去法

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array} \right) \\ \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5}r_1]{r_2 - \frac{2}{5}r_1} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array} \right) \end{array}$$

全主元消去法

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5}r_1]{r_2 - \frac{2}{5}r_1} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 & \\ \color{red}{5} & 1 & -1 & 8 \\ & \color{red}{-4.2} & -2.8 & -5.6 \\ & \color{red}{1.6} & 1.4 & 1.8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

全主元消去法

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5}r_1]{r_2 - \frac{2}{5}r_1} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 & \\ \color{red}{5} & 1 & -1 & 8 \\ & \color{red}{-4.2} & -2.8 & -5.6 \\ & \color{red}{1.6} & 1.4 & 1.8 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_3 + \frac{8}{21}r_2} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 & \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \\ & & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

高斯消去法

选主元消去法的应用

选主元消去法的应用：求逆矩阵

应用一：矩阵的求逆

$$\left(A \mid E \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan Elimination}} \left(E \mid A^{-1} \right)$$

选主元消去法的应用：求逆矩阵

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -2 \\ -23 & 11 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

选主元消去法的应用：求逆矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

选主元消去法的应用：求逆矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

选主元消去法的应用：求逆矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

选主元消去法的应用：求逆矩阵

$$\begin{pmatrix} 11 & -3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} -23 & 11 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_1 \div (-23)]{r_2 + \frac{11}{23}r_1, \quad r_3 + \frac{1}{23}r_1} \begin{pmatrix} 1 & -0.478 & -0.044 & | & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & 2.261 & -1.522 & | & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & | & 0 & 0.044 & 1 \end{pmatrix}$$

选主元消去法的应用：求逆矩阵

$$\begin{pmatrix} 11 & -3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} -23 & 11 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_1 \div (-23)]{r_2 + \frac{11}{23}r_1, \quad r_3 + \frac{1}{23}r_1} \begin{pmatrix} 1 & -0.478 & -0.044 & | & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & 2.261 & -1.522 & | & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & | & 0 & 0.044 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_2 \div (2.261)]{r_1 + \frac{478}{2261}r_2, \quad r_3 + \frac{1522}{2261}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.365 & | & 0.211 & 0.057 & 0 \\ 0 & 1 & -0.673 & | & 0.442 & 0.211 & 0 \\ 0 & 0 & 1.019 & | & 0.673 & 0.365 & 1 \end{pmatrix}$$

选主元消去法的应用：求逆矩阵

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[r_1 \div (-23)]{r_2 + \frac{11}{23}r_1, \quad r_3 + \frac{1}{23}r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.478 & -0.044 & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & 2.261 & -1.522 & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & 0 & 0.044 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[r_2 \div (2.261)]{r_1 + \frac{478}{2261}r_2, \quad r_3 + \frac{1522}{2261}r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.365 & 0.211 & 0.057 & 0 \\ 0 & 1 & -0.673 & 0.442 & 0.211 & 0 \\ 0 & 0 & 1.019 & 0.673 & 0.365 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[r_3 \div (1.019)]{r_1 + \frac{365}{1019}r_3, \quad r_2 + \frac{673}{1019}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.452 & 0.188 & 0.358 \\ 0 & 1 & 0 & 0.886 & 0.452 & 0.660 \\ 0 & 0 & 1 & 0.660 & 0.358 & 0.981 \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad A^{-1}
 \end{aligned}$$

选主元消去法的应用：求行列式

应用二：求行列式

设有矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

用主元消去法将其化为上三角矩阵, 并设对角元素为 $b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{nn}$, 故 A 的行列式为

$$\det(A) = (-1)^m b_{11} b_{22} \cdots b_{nn},$$

其中 m 为所做行、列交换的次数。

三角形方程组和三角分解

三角形方程组和三角分解

三角方程组的解法

三角方程组的解法

定义：下三角形方程组

考察

$$Ly = b \quad (1)$$

其中 $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 已知, $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 未知, 而

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix},$$

且 $l_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

三角方程组的解法

1 由方程组 (1) 的第一个方程

$$l_{11}y_1 = b_1$$

可得

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}.$$

2 由方程组 (1) 的第二个方程

$$l_{21}y_1 + l_{22}y_2 = b_2$$

可得

$$y_2 = \frac{b_2 - l_{21}y_1}{l_{22}}.$$

三角方程组的解法

3 一般地，若已求得 y_1, \dots, y_{i-1} ，则由方程组 (1) 的第 i 个方程

$$l_{i1}y_1 + l_{i2}y_2 + \dots + l_{i,i-1}y_{i-1} + l_{ii}y_i = b_i$$

可得

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j}{l_{ii}}.$$

三角方程组的解法

fs.m

```
1 function b = fs(L, b, n)
2 for j = 1:n-1
3     b(j) = b(j) / L(j,j);
4     b(j+1:n) = b(j+1:n) - b(j) * L(j+1:n, j);
5 end
6 b(n) = b(n) / L(n,n);
7 end
```


三角方程组的解法

fs.m

```
1 function b = fs(L, b, n)
2 for j = 1:n-1
3     b(j) = b(j) / L(j,j);
4     b(j+1:n) = b(j+1:n) - b(j) * L(j+1:n, j);
5 end
6 b(n) = b(n) / L(n,n);
7 end
```

该算法称为**前代法**，所需加、减、乘、除的次数：

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2,$$

即该算法的运算量为 n^2 .

三角方程组的解法

定义：上三角方程组

考察

$$Ux = y \quad (2)$$

其中 $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 已知, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 未知, 而

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix},$$

且 $u_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

三角方程组的解法

1 由方程组 (2) 的第 n 个方程

$$u_{nn}x_n = y_n$$

得

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}.$$

2 由方程组 (2) 的第 $n-1$ 个方程

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = y_n$$

得

$$x_{n-1} = \frac{y_n - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}.$$

三角方程组的解法

3 一般地, 若已求得 x_n, \cdots, x_{i+1} , 则由方程组 (2) 的第 i 个方程

$$u_{ii}x_i + u_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + u_{i,n}x_n = y_i$$

得

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j}{u_{ii}}.$$

三角方程组的解法

bs.m

```
1 function y = bs(U, y, n)
2 for j = n:-1:2
3     y(j) = y(j) / U(j,j);
4     y(1:j-1) = y(1:j-1) - y(j) * U(1:j-1, j);
5 end
6 y(1) = y(1) / U(1,1);
7 end
```

三角方程组的解法

bs.m

```
1 function y = bs(U, y, n)
2 for j = n:-1:2
3     y(j) = y(j) / U(j,j);
4     y(1:j-1) = y(1:j-1) - y(j) * U(1:j-1, j);
5 end
6 y(1) = y(1) / U(1,1);
7 end
```

该算法称为回代法，其运算量也为 n^2 .

三角方程组的解法

定义：一般线性方程组

察

$$Ax = b \quad (3)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $x, b \in \mathbb{R}^n$ 。

三角方程组的解法

定义：一般线性方程组

察

$$Ax = b \quad (3)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $x, b \in \mathbb{R}^n$ 。

若

$$A = LU,$$

即 A 能分解成一个下三角阵 L 和一个上三角阵 U 的乘积，则 (3) 的解 x 可由以下两步得到：

- 1 用前代法解 $Ly = b$ 得 y ;
- 2 用回代法解 $Ux = y$ 得 x 。

三角形方程组和三角分解

Gauss 变换

定义：矩阵三角分解

将矩阵 A 分解为一个下三角阵 L 和一个上三角阵 U 的乘积，最自然的做法是通过一系列初等变换，逐步将 A 约化为上三角阵，并且保证这些初等变换的乘积是一个下三角阵。

定义：Gauss 变换 (矩阵)

$$\mathbf{L}_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{I} - l_k \mathbf{e}_k^T$$

$$l_k = (0, \dots, 0, l_{k+1,k}, \dots, l_{nk})^T$$

定义：Gauss 变换 (矩阵)

$$\mathbf{L}_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{I} - l_k \mathbf{e}_k^T$$

$l_k = (0, \dots, 0, l_{k+1,k}, \dots, l_{nk})^T \rightarrow$ Gauss 向量

对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{L}_k \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1} - l_{k+1,k}x_k, \dots, x_n - l_{nk}x_k)^T.$$

取

$$l_{ik} = \frac{x_i}{x_k}, \quad i = k+1, \dots, n, \quad x_k \neq 0$$

便有

$$\boldsymbol{L}_k \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T.$$

性质 2.1: L_k 的逆

$$L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$$

性质 2.2: L_k 的逆

$$L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$$

证明

$$\because e_k^T l_k = 0,$$

$$\therefore (I + l_k e_k^T)(I - l_k e_k^T) = I - l_k \boxed{e_k^T l_k} e_k^T = I.$$

性质 2.3

$$L_k A = (I - l_k e_k^T) A = A - l_k (e_k^T A).$$

- $e_k^T A$ 为 A 的第 k 行。
- 类似地, $A e_k$ 为 A 的第 k 列。

性质 2.4

$$L_k A = (I - l_k e_k^T) A = A - l_k (e_k^T A).$$

- $e_k^T A$ 为 A 的第 k 行。
- 类似地, $A e_k$ 为 A 的第 k 列。

例

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -3 & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & \\ -2 & -5 & \end{bmatrix}$$

性质 2.5

若 $j < k$, 则

$$L_j L_k = (I - l_j e_j^T)(I - l_k e_k^T) = I - l_j e_j^T - l_k e_k^T.$$

性质 2.6

若 $j < k$, 则

$$L_j L_k = (I - l_j e_j^T)(I - l_k e_k^T) = I - l_j e_j^T - l_k e_k^T.$$

证明

因为当 $j < k$ 时, 有 $e_j^T l_k = 0$ 。

性质 2.7

若 $j < k$, 则

$$L_j L_k = (I - l_j e_j^T)(I - l_k e_k^T) = I - l_j e_j^T - l_k e_k^T.$$

证明

因为当 $j < k$ 时, 有 $e_j^T l_k = 0$ 。

例

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & & 1 & \\ -3 & & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_A$$

Gauss 变换

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_A \xrightarrow{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{L_1 A}$$

Gauss 变换

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_A \xrightarrow{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{L_1 A}$$

$$\xrightarrow{L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{L_2 L_1 A}$$

The diagram illustrates the Gauss transformation process. It shows three matrices, each represented as a 4x4 grid of elements. The first matrix, labeled A , contains all black asterisks. The second matrix, labeled $L_1 A$, is the result of the first transformation L_1 ; it has a black asterisk in the top-left corner, and the remaining elements are blue asterisks. The third matrix, labeled $L_2 L_1 A$, is the result of the second transformation L_2 applied to $L_1 A$; it has black asterisks in the top row, blue asterisks in the second row, and red asterisks in the third and fourth rows. The transformations are indicated by arrows labeled L_1 and L_2 .

Gauss 变换

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_A & \xrightarrow{L_1} & \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{L_1 A} \\ \xrightarrow{L_2} & & \xrightarrow{L_3} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{L_2 L_1 A} & & \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{L_3 L_2 L_1 A} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & \\ 4 & 6 & 8 & \end{bmatrix}$$

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -3 & & 1 & \\ -4 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_3 L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix} = U.$$

Gauss 变换

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & & 1 & \\ 3 & & & 1 \end{bmatrix}, L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 3 & & 1 & \\ 4 & & & 1 \end{bmatrix}, L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss 变换

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & & 1 & \\ 3 & & & 1 \end{bmatrix}, L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 3 & & 1 & \\ 4 & & & 1 \end{bmatrix}, L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss 变换

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix}}_U$$

Gauss 变换

对于一般矩阵 A , 记 $A^{(1)} = A$, 则

$$\begin{aligned}A^{(2)} &= L_1 A^{(1)} \\A^{(3)} &= L_2 A^{(2)} = L_2 L_1 A^{(1)} \\&\dots\end{aligned}$$

$$A^{(k)} = L_{k-1} \cdots L_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ & A_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

其中 $A_{11}^{(k)}$ 是 $k-1$ 阶上三角阵,

$$A_{22}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Gauss 变换

若 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, 则可确定一个 Gauss 变换 L_k , 使得 $L_k A^{(k)}$ 第 k 列的最后 $n - k$ 个元素为 0。取

$$L_k = I - l_k e_k^T,$$

$$l_k = (0, \dots, 0, l_{k+1,k}, \dots, l_{nk})^T,$$

$$l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad i = k+1, \dots, n$$

则

$$A^{(k+1)} = L_k A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

其中 $A_{11}^{(k+1)}$ 是 k 阶上三角阵。

Gauss 变换

若 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, 则可确定一个 Gauss 变换 L_k , 使得 $L_k A^{(k)}$ 第 k 列的最后 $n - k$ 个元素为 0。取

$$L_k = I - l_k e_k^T,$$

$$l_k = (0, \dots, 0, l_{k+1,k}, \dots, l_{nk})^T,$$

$$l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad i = k+1, \dots, n$$

则

$$A^{(k+1)} = L_k A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

其中 $A_{11}^{(k+1)}$ 是 k 阶上三角阵。

如此进行 $n - 1$ 步, 最终所得矩阵 $A^{(n)}$ 即为所要求的上三角形式。

上述步骤可描述为

$$L_{n-1} \cdots L_1 A = A^{(n)}.$$

令 $L = (L_{n-1} \cdots L_1)^{-1}$ 及 $U = A^{(n)}$, 则

$$A = LU,$$

其中 L 是一个单位上三角阵。事实上, 由于 $e_j^T l_i = 0$ ($j < i$), 则

$$\begin{aligned} L &= L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} \\ &= (I + l_1 e_1^T)(I + l_2 e_2^T) \cdots (I + l_{n-1} e_{n-1}^T) \\ &= I + l_1 e_1^T + l_2 e_2^T \cdots + l_{n-1} e_{n-1}^T. \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{L}_k \mathbf{A}^{(k)} = (\mathbf{I} - l_k \mathbf{e}_k^T) \mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)} - l_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}^{(k)}.$$

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{L}_k \mathbf{A}^{(k)} = (\mathbf{I} - l_k \mathbf{e}_k^T) \mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)} - l_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}^{(k)}.$$

- $\mathbf{A}^{(k+1)}$ 与 $\mathbf{A}^{(k)}$ 的前 k 行元素相同。

因为 $\mathbf{e}_k^T \mathbf{A}^{(k)}$ 是 $\mathbf{A}^{(k)}$ 的第 k 行, l_k 的前 k 个分量为 0。

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{L}_k \mathbf{A}^{(k)} = (\mathbf{I} - l_k \mathbf{e}_k^T) \mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)} - l_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}^{(k)}.$$

- $\mathbf{A}^{(k+1)}$ 与 $\mathbf{A}^{(k)}$ 的前 k 行元素相同。

因为 $\mathbf{e}_k^T \mathbf{A}^{(k)}$ 是 $\mathbf{A}^{(k)}$ 的第 k 行, l_k 的前 k 个分量为 0。

- $\mathbf{A}^{(k+1)}$ 中第 $k+1$ 到 n 行元素需要更新

$$\begin{aligned} a_{ik}^{(k+1)} &= 0, & i &= k+1, \dots, n, \\ a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)}, & i, j &= k+1, \dots, n \end{aligned}$$

存储方式:

- $A^{(k)}$ 中第 $k+1 \sim n$ 行元素在计算出 $A^{(k+1)}$ 以后不再有用, 故 $A^{(k)}$ 中相应位置上的元素可用新值更新。
- 由于 $A^{(k+1)}$ 中的第 k 列对角线以下的元素均为 0, 无需存储, 故这些位置可用于存储 l_k 中的非 0 元。

LU 分解的 matlab 代码

```
function A = GsLU(A)
[m n] = size(A);
for k = 1:n-1
    A(k+1:n, k) = A(k+1:n, k) / A(k, k);
    A(k+1:n, k+1:n) = A(k+1:n, k+1:n)
        - A(k+1:n, k) * A(k, k+1:n);
end
end
```

运算次数:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + 2(n-k)^2] &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} \\ &= \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)\end{aligned}$$

$a_{kk}^{(k)}$ ($k = 1, \dots, n-1$) 称作主元。

定义：三角分解的条件

当且仅当主元 $a_{kk}^{(k)}$ ($k = 1, \dots, n-1$) 均不为 0 时，算法 1 才能进行到底。

定理

主元 $a_{ii}^{(i)} (i = 1, \dots, k)$ 均不为0

$\iff A$ 的 i 阶顺序主子阵 $A_i (i = 1, \dots, k)$ 非奇异。

定理

主元 $a_{ii}^{(i)} (i = 1, \dots, k)$ 均不为0

$\iff A$ 的 i 阶顺序主子阵 $A_i (i = 1, \dots, k)$ 非奇异。

证明 (用数学归纳法) :

1° 当 $k = 1$ 时, $a_{11}^{(1)} \neq 0 \iff A_1$ 非奇异。

定理

主元 $a_{ii}^{(i)} (i = 1, \dots, k)$ 均不为0

$\iff A$ 的 i 阶顺序主子阵 $A_i (i = 1, \dots, k)$ 非奇异。

证明 (用数学归纳法) :

1° 当 $k = 1$ 时, $a_{11}^{(1)} \neq 0 \iff A_1$ 非奇异。

2° 假设定理直到 $k-1$ 成立, 下证: 若 A_1, \dots, A_{k-1} 非奇异, 则 A_k 非奇异 $\iff a_{kk}^{(k)} \neq 0$ 。

证明 (续) :

由归纳假设, $a_{ii}^{(i)} \neq 0 (i = 1, \dots, k-1)$, 故

$$\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{L}_{k-1} \cdots \mathbf{L}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(k)} & \mathbf{A}_{12}^{(k)} \\ & \mathbf{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{A}_{11}^{(k)}$ 是 $k-1$ 阶上三角阵, 而 $\mathbf{A}^{(k)}$ 的 k 阶顺序主子阵形如

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(k)} & * \\ & a_{kk}^{(k)} \end{bmatrix}$$

证明 (续) :

记 L_1, \dots, L_{k-1} 的 k 阶顺序主子阵为 $(L_1)_k, \dots, (L_{k-1})_k$, 则

$$(L_{k-1})_k \cdots (L_1)_k A_k = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & * \\ & a_{kk}^{(k)} \end{bmatrix}$$

证明 (续) :

记 L_1, \dots, L_{k-1} 的 k 阶顺序主子阵为 $(L_1)_k, \dots, (L_{k-1})_k$, 则

$$(L_{k-1})_k \cdots (L_1)_k A_k = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & * \\ & a_{kk}^{(k)} \end{bmatrix}$$

从而有

$$\det A_k = a_{kk}^{(k)} \det A_{11}^{(k)},$$

证明 (续) :

记 L_1, \dots, L_{k-1} 的 k 阶顺序主子阵为 $(L_1)_k, \dots, (L_{k-1})_k$, 则

$$(L_{k-1})_k \cdots (L_1)_k A_k = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & * \\ & a_{kk}^{(k)} \end{bmatrix}$$

从而有

$$\det A_k = a_{kk}^{(k)} \det A_{11}^{(k)},$$

于是, A_k 非奇异当且仅当 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ 。

推论：矩阵三角分解的条件

A 的各阶顺序主子阵均非奇异

\implies 存在唯一的单位下三角阵 L 和上三角阵 U , 使得 $A = LU$.

三角形方程组和三角分解

Doolittle 分解

Doolittle 分解

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Doolittle 分解

图 1: Doolittle 分解运算次序: 先行后列, 先 U 后 L

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Doolittle 分解

图 1: Doolittle 分解运算次序: 先行后列, 先 U 后 L

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Doolittle 分解

图 1: Doolittle 分解运算次序: 先行后列, 先 U 后 L

$$\begin{pmatrix}
 u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\
 l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\
 l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\
 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
 l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & u_{nn}
 \end{pmatrix}$$

Doolittle 分解

图 1: Doolittle 分解运算次序: 先行后列, 先 U 后 L

$$\begin{pmatrix}
 u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\
 l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\
 l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\
 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
 l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & u_{nn}
 \end{pmatrix}$$

Doolittle 分解

图 1: Doolittle 分解运算次序: 先行后列, 先 U 后 L

$$\begin{pmatrix}
 u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\
 l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\
 l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\
 & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
 l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & u_{nn}
 \end{pmatrix}$$

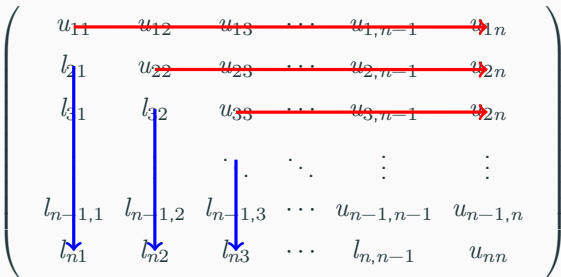
Doolittle 分解

图 1: Doolittle 分解运算次序: 先行后列, 先 U 后 L

$$\left(\begin{array}{cccccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ & \downarrow & \downarrow & & & \\ & l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & u_{nn} \end{array} \right)$$

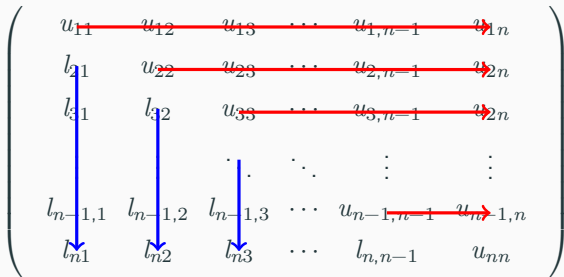
Doolittle 分解

图 1: Doolittle 分解运算次序: 先行后列, 先 U 后 L



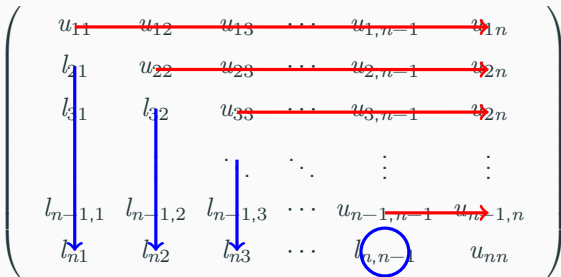
Doolittle 分解

图 1: Doolittle 分解运算次序: 先行后列, 先 U 后 L



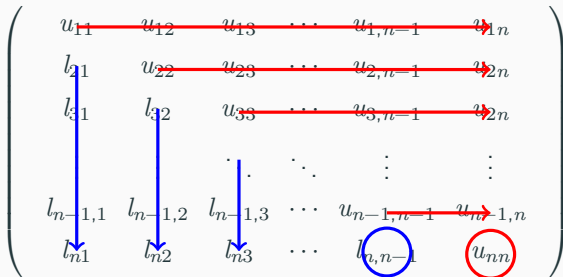
Doolittle 分解

图 1: Doolittle 分解运算次序: 先行后列, 先 U 后 L



Doolittle 分解

图 1: Doolittle 分解运算次序: 先行后列, 先 U 后 L



Crout 分解

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Crout 分解

图 2: Crout 分解运算次序: 先列后行, 先 L 后 U

$$\begin{pmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & l_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Crout 分解

图 2: Crout 分解运算次序: 先列后行, 先 L 后 U

$$\begin{pmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & l_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Crout 分解

图 2: Crout 分解运算次序: 先列后行, 先 L 后 U

$$\begin{pmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & l_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Crout 分解

图 2: Crout 分解运算次序: 先列后行, 先 L 后 U

$$\begin{pmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & l_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Crout 分解

图 2: Crout 分解运算次序: 先列后行, 先 L 后 U

$$\begin{pmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & l_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Crout 分解

图 2: Crout 分解运算次序: 先列后行, 先 L 后 U

$$\begin{pmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & l_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Crout 分解

图 2: Crout 分解运算次序: 先列后行, 先 L 后 U

$$\left(\begin{array}{cccccc} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdot & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ & & \cdot & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & l_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ & l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{array} \right)$$

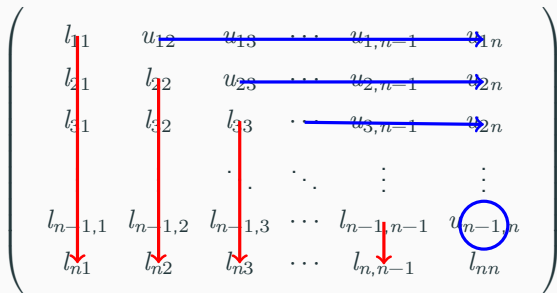
Crout 分解

图 2: Crout 分解运算次序: 先列后行, 先 L 后 U

$$\left(\begin{array}{cccccc} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdot & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & l_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{array} \right)$$

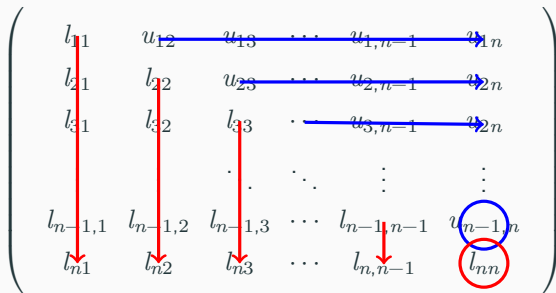
Crout 分解

图 2: Crout 分解运算次序: 先列后行, 先 L 后 U



Crout 分解

图 2: Crout 分解运算次序: 先列后行, 先 L 后 U



Doolittle 分解

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$l_{ii} = 1, \quad l_{ij} = 0 (j > i), \quad u_{ij} = 0 (i > j)$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$l_{ii} = 1, \quad l_{ij} = 0 (j > i), \quad u_{ij} = 0 (i > j)$$

- 先算 U 的第 k 行 ($j \geq k$)

$$a_{kj} = \sum_{r=1}^n l_{kr} u_{rj} = \sum_{r=1}^k l_{kr} u_{rj} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj} + l_{kk} u_{kj}$$

Doolittle 分解

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$l_{ii} = 1, \quad l_{ij} = 0 (j > i), \quad u_{ij} = 0 (i > j)$$

- 先算 U 的第 k 行 ($j \geq k$)

$$a_{kj} = \sum_{r=1}^n l_{kr} u_{rj} = \sum_{r=1}^k l_{kr} u_{rj} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj} + l_{kk} u_{kj}$$

$$\Rightarrow u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj}$$

Doolittle 分解

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$l_{ii} = 1, \quad l_{ij} = 0 (j > i), \quad u_{ij} = 0 (i > j)$$

Doolittle 分解

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$l_{ii} = 1, \quad l_{ij} = 0 (j > i), \quad u_{ij} = 0 (i > j)$$

- 再算 L 的第 k 列 ($i > k$)

$$a_{ik} = \sum_{r=1}^n l_{ir} u_{rk} = \sum_{r=1}^k l_{ir} u_{rk} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk} + l_{ik} u_{kk}$$

Doolittle 分解

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$l_{ii} = 1, \quad l_{ij} = 0 (j > i), \quad u_{ij} = 0 (i > j)$$

- 再算 L 的第 k 列 ($i > k$)

$$a_{ik} = \sum_{r=1}^n l_{ir} u_{rk} = \sum_{r=1}^k l_{ir} u_{rk} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk} + l_{ik} u_{kk}$$

$$\Rightarrow l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk}}{u_{kk}}$$

先行后列

```
for k = 1:n
    for j = k, ..., n % 计算第 k 行
        
$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj}$$

    end
    for i = k+1, ..., n % 计算第 k 列
        
$$l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk}) / u_{kk}$$

    end
end
```

例

利用 Doolittle 分解求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解

1 计算 U 的第一行, L 的第一列, 得

$$u_{11} = 1, \quad u_{12} = 2, \quad u_{13} = 3, \quad u_{14} = -4,$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = -3, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = 2, \quad l_{41} = \frac{a_{41}}{u_{11}} = 4.$$

解

2 计算 U 的第二行, L 的第二列, 得

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2, \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -3,$$

$$u_{24} = a_{24} - l_{21}u_{14} = 1,$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = 3, \quad l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}u_{12}}{u_{22}} = 3.$$

解

3 计算 U 的第三行, L 的第三列, 得

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3,$$

$$u_{34} = a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24} = 2,$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}}{u_{33}} = 2.$$

解

3 计算 U 的第三行, L 的第三列, 得

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3,$$

$$u_{34} = a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24} = 2,$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}}{u_{33}} = 2.$$

4 计算 U 的第四行, 得

$$u_{44} = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} = -4,$$

Doolittle 分解

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -3 & 1 & & \\ 2 & 3 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ & 2 & -3 & 1 \\ & & 3 & 2 \\ & & & -4 \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -3 & 1 & & \\ & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

求得

$$\mathbf{y} = (-2, -1, 17, -16)^T.$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ & 2 & -3 & 1 \\ & & 3 & 2 \\ & & & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 17 \\ -16 \end{pmatrix}$$

求得

$$\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^T.$$

三角形方程组和三角分解

对称矩阵的三角分解

定理

若 A 为 n 阶对称矩阵, 且 A 的各阶顺序主子式都不为 0, 则 A 可惟一分解为

$$A = LDL^T,$$

其中 L 为单位下三角阵, D 为对角阵。

对称矩阵的三角分解

证明

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

因为 $u_{ii} \neq 0 (i = 1, \dots, n)$, 故 U 可分解为

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} = DU_1$$

其中 D 为对角矩阵, U_1 为单位上三角阵。

对称矩阵的三角分解

证明

于是

$$A = LDU_1 = L(DU_1),$$

因为 A 为对角阵, 故

$$A = A^T = U_1^T D^T L = U_1^T (DL^T).$$

由 LU 分解的惟一性即得

$$L = U_1^T.$$

证毕。



选主元三角分解

例

求

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的 LU 分解

例

求

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的 LU 分解

A 非奇异，但 Gauss 消去第一步就会失效。

例

求

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的 LU 分解

例

求

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的 LU 分解

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{20} \end{bmatrix}$$

设 $\epsilon_{machine} \approx 10^{-16}$, 则

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}\tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

选主元三角分解

例

设

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

求

$$Ax = b$$

例

设

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

求

$$Ax = b$$

近似解:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

精确解:

$$x \approx \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

选主元三角分解

交换方程次序

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10^{-20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 + 10^{-20} \end{bmatrix}$$

近似解

$$\hat{x} \approx \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

图 3: 置换矩阵

$$\begin{aligned}
 I_{pq} &= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & & & & \\ & & \vdots & & \vdots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \\
 &= \begin{pmatrix} & & & p & & q & & & & \\ e_1 & \cdots & e_{p-1} & e_q & e_{p+1} & \cdots & e_{q-1} & e_p & e_{q+1} & \cdots & e_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

选主元三角分解

具体步骤:

- 1 假定消去过程已经进行到了 $k-1$ 步, 即已经确定了 $k-1$ 个 Gauss 变换

$$L_1, \dots, L_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

和 $2(k-1)$ 个初等置换矩阵

$$P_1, \dots, P_{k-1}, Q_1, \dots, Q_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

使得

$$A^{(k)} = L_{k-1} P_{k-1} \cdots L_1 P_1 A Q_1 \cdots Q_{k-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

选主元三角分解

2 第 k 步: 选 $|a_{pq}^{(k)}| = \max \left\{ |a_{ij}^{(k)}| : k \leq i, j \leq n \right\}$

选主元三角分解

2 第 k 步: 选 $|a_{pq}^{(k)}| = \max \left\{ |a_{ij}^{(k)}| : k \leq i, j \leq n \right\}$

2.1 若 $a_{pq}^{(k)} = 0$, 则 $R(A) = k - 1$, 停止!

选主元三角分解

2 第 k 步: 选 $|a_{pq}^{(k)}| = \max \left\{ |a_{ij}^{(k)}| : k \leq i, j \leq n \right\}$

2.1 若 $a_{pq}^{(k)} = 0$, 则 $R(A) = k - 1$, 停止!

- 若 $a_{pq}^{(k)} \neq 0$, 交换 $A^{(k)}$ 的第 k 、 p 行及第 k 、 q 列, 记交换后的 $A_{22}^{(k)}$ 为

$$\tilde{A}_{22}^{(k)} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{kk}^{(k)} & \cdots & \tilde{a}_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{nk}^{(k)} & \cdots & \tilde{a}_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

选主元三角分解

2 第 k 步: 选 $|a_{pq}^{(k)}| = \max \left\{ |a_{ij}^{(k)}| : k \leq i, j \leq n \right\}$

选主元三角分解

2 第 k 步: 选 $|a_{pq}^{(k)}| = \max \left\{ |a_{ij}^{(k)}| : k \leq i, j \leq n \right\}$

2.2 计算 Gauss 变换

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{I} - \mathbf{l}_k \mathbf{e}_k^T$$

$$\mathbf{l}_k = (0, \dots, 0, \tilde{l}_{k+1,k}, \dots, \tilde{l}_{n,k})^T$$

$$\tilde{l}_{i,k} = \tilde{a}_{ik}^{(k)} / \tilde{a}_{kk}^{(k)}, \quad i = k+1, \dots, n.$$

选主元三角分解

2 第 k 步: 选 $|a_{pq}^{(k)}| = \max \left\{ |a_{ij}^{(k)}| : k \leq i, j \leq n \right\}$

2.2 计算 Gauss 变换

$$L_k = I - l_k e_k^T$$

$$l_k = (0, \dots, 0, \tilde{l}_{k+1,k}, \dots, \tilde{l}_{n,k})^T$$

$$\tilde{l}_{i,k} = \tilde{a}_{ik}^{(k)} / \tilde{a}_{kk}^{(k)}, \quad i = k+1, \dots, n.$$

则

$$\begin{aligned} A^{(k+1)} &= L_k P_k A^{(k-1)} Q_k \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ 0 & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中 $A_{11}^{(k+1)}$ 为 k 阶上三角阵, $P_k = I_{kp}$, $Q_k = I_{kq} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。

选主元三角分解

全主元 Gauss 消去法的矩阵表述

存在置换矩阵 P_k , Q_k 和初等下三角阵 L_k , $k = 1, \dots, n-1$, 使得

$$L_{n-1}P_{n-1} \cdots L_1P_1AQ_1 \cdots Q_{n-1} = U$$

为上三角阵。改写上式为

$$L_{n-1}P_{n-1} \cdots L_1P_2 \cdots P_{n-1}P_{n-1} \cdots P_2P_1AQ_1 \cdots Q_{n-1} = U$$

即

$$P_{n-1} \cdots P_2P_1AQ_1 \cdots Q_{n-1} = (L_{n-1}P_{n-1} \cdots L_1P_2 \cdots P_{n-1})^{-1}U$$

选主元三角分解

全主元 Gauss 消去法的矩阵表述

存在置换矩阵 P_k , Q_k 和初等下三角阵 L_k , $k = 1, \dots, n-1$, 使得

$$L_{n-1}P_{n-1} \cdots L_1P_1AQ_1 \cdots Q_{n-1} = U$$

为上三角阵。改写上式为

$$L_{n-1}P_{n-1} \cdots L_1P_2 \cdots P_{n-1}P_{n-1} \cdots P_2P_1AQ_1 \cdots Q_{n-1} = U$$

即

$$P_{n-1} \cdots P_2P_1AQ_1 \cdots Q_{n-1} = (L_{n-1}P_{n-1} \cdots L_1P_2 \cdots P_{n-1})^{-1}U$$

记

$$Q = Q_1 \cdots Q_{n-1}, P = P_{n-1} \cdots P_1$$
$$L = P_{n-1} \cdots P_2L_1^{-1} \cdots P_n^{-1}L_{n-1}^{-1}$$

则有

$$PAQ = LU$$

以下举例说明 L 为一个单位下三角阵。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 13 & 1 \end{bmatrix},$$

选主元三角分解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{bmatrix}}_{P_1 = I_{14}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 10 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & \mathbf{13} & 1 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{Q_1 = I_{13}}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 10 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^{(1)}}$$

选主元三角分解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -0.2 & 1 & & \\ -0.1 & & 1 & \\ -0.2 & & & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 10 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^{(1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 3 & 2 & 1 \\ & 1.3 & 8.5 & 0.8 \\ & 2.8 & 1.9 & 11.9 \\ & 9.3 & 2.5 & 0.8 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

选主元三角分解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{P_2 = I_{23}} \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 3 & 2 & 1 \\ & 1.3 & 8.5 & 0.8 \\ & 2.8 & 1.9 & 11.9 \\ & 9.3 & 2.5 & 0.8 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{bmatrix}}_{Q_2 = I_{24}} \\ = \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 1 & 2 & 3 \\ & 11.9 & 1.9 & 2.8 \\ & 0.8 & 8.5 & 1.3 \\ & 0.8 & 2.5 & 9.3 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^{(2)}}$$

选主元三角分解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & -0.1 & 1 & \\ & -0.1 & & 1 \end{bmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 1 & 2 & 3 \\ & 11.9 & 1.9 & 2.8 \\ & 0.8 & 8.5 & 1.3 \\ & 0.8 & 2.5 & 9.3 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^{(2)}} \\ = \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 1 & 2 & 3 \\ & 11.9 & 1.9 & 2.8 \\ & & 8.4 & 1.1 \\ & & 2.4 & 9.1 \end{bmatrix}}_{A^{(3)}}$$

选主元三角分解

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{P_3 = I_{34}} \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 1 & 2 & 3 \\ & 11.9 & 1.9 & 2.8 \\ & & 8.4 & 1.1 \\ & & 2.4 & \mathbf{9.1} \end{bmatrix}}_{A^{(3)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{Q_3 = I_{34}} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 1 & 3 & 2 \\ & 11.9 & 2.7 & 1.9 \\ & & 9.1 & 2.4 \\ & & 1.1 & 8.4 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^{(3)}}
 \end{aligned}$$

选主元三角分解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -0.1 & 1 \end{bmatrix}}_{L_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 1 & 3 & 2 \\ & 11.9 & 2.8 & 1.9 \\ & & 9.1 & 2.4 \\ & & 1.1 & 8.4 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^{(3)}} \\ = \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 1 & 3 & 2 \\ & 11.9 & 2.8 & 1.9 \\ & & 9.1 & 2.4 \\ & & & 8.1 \end{bmatrix}}_{A^{(4)}}$$

选主元三角分解

将上述步骤合并，即得

$$L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A Q_1 Q_2 Q_3 = A^{(4)} = U$$

$$\Rightarrow L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_2 P_3 \underbrace{P_3 P_2 P_1}_P A \underbrace{Q_1 Q_2 Q_3}_Q = U$$

$$\Rightarrow PAQ = (L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_2 P_3)^{-1} U$$

$$\Rightarrow PAQ = P_3 P_2 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} P_3 L_3^{-1} U$$

$$\Rightarrow PAQ = LU$$

选主元三角分解

观察 $L = P_3 P_2 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} P_3 L_3^{-1}$, 设

$$P_2 = I_{23}, \quad P_3 = I_{34}$$

以及

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *_2 & 1 & & \\ *_3 & & 1 & \\ *_4 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ @_3 & & 1 & \\ @_4 & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \#_4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1^{-1}$$

选主元三角分解

$$L_1^{-1} \xrightarrow{P_2 \bullet} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & & 1 & \\ *2 & 1 & & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix}$$

选主元三角分解

$$L_1^{-1} \xrightarrow{P_2 \bullet} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & & & 1 \\ *2 & 1 & & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\bullet P_2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & & 1 & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix}$$

选主元三角分解

$$\begin{aligned}
 L_1^{-1} &\xrightarrow{P_2 \bullet} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & & 1 & \\ *2 & 1 & & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\bullet L_2^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & @_3 & 1 & \\ *4 & @_4 & & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \qquad
 \xrightarrow{\bullet P_2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & & 1 & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix}$$

选主元三角分解

$$\begin{array}{ccc}
 L_1^{-1} \xrightarrow{P_2 \bullet} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & & 1 & \\ *2 & 1 & & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\bullet P_2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & & 1 & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow{\bullet L_2^{-1}} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & @_3 & 1 & \\ *4 & @_4 & & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{P_3 \bullet} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *4 & @_4 & 1 & \\ *2 & @_3 & 1 & \end{bmatrix}
 \end{array}$$

选主元三角分解

$$\begin{aligned}
 L_1^{-1} &\xrightarrow{\bullet P_2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & & 1 & \\ *2 & 1 & & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\bullet P_2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & & 1 & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\bullet L_2^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & @_3 & 1 & \\ *4 & @_4 & & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{P_3 \bullet} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *4 & @_4 & & 1 \\ *2 & @_3 & 1 & \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\bullet P_3} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *4 & @_4 & 1 & \\ *2 & @_3 & & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

选主元三角分解

$$\begin{array}{ccc}
 L_1^{-1} \xrightarrow{\bullet P_2} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & & 1 & \\ *2 & 1 & & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\bullet P_2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & & 1 & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow{\bullet L_2^{-1}} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & @_3 & 1 & \\ *4 & @_4 & & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{P_3 \bullet} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *4 & @_4 & 1 & \\ *2 & @_3 & & 1 \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow{\bullet P_3} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *4 & @_4 & 1 & \\ *2 & @_3 & & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\bullet L_3^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & @_3 & 1 & \\ *4 & @_4 & \#_4 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

选主元三角分解

$$\begin{array}{ccc}
 L_1^{-1} \xrightarrow{\bullet P_2} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & & 1 & \\ *2 & 1 & & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\bullet P_2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & & 1 & \\ *4 & & & 1 \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow{\bullet L_2^{-1}} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & @_3 & 1 & \\ *4 & @_4 & & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{P_3 \bullet} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *4 & @_4 & & 1 \\ *2 & @_3 & 1 & \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow{\bullet P_3} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *4 & @_4 & 1 & \\ *2 & @_3 & & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\bullet L_3^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ *3 & 1 & & \\ *2 & @_3 & 1 & \\ *4 & @_4 & \#_4 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

由此可以看出 L 是一个单位下三角阵。

定理

$$L = P_{n-1} \cdots P_2 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} \cdots P_{n-1} L_{n-1}^{-1}$$

是一个单位下三角阵。

定理

存在置换矩阵 P , Q 以及单位下三角阵 L 和上三角阵 U , 使得

$$PAQ = LU,$$

且 $|l_{ij}| \leq 1$, U 的非零对角元的个数正好等于 A 的秩。

选主元三角分解 i

```
function [u, v, A] = myLUFullPivot(A)
n = size(A, 1);
u = zeros(n, 1); v = zeros(n, 1);
eps = 1e-10;
for k = 1:n-1
    % find p
    [m, p1] = max(abs(A(k:n, k:n)));
    [~, q] = max(m);
    p = p1(q);
    p = p+k-1; q = q+k-1;
    % interchange k-th and p-th column
    tmp = A(k, 1:n); A(k, 1:n) = A(p, 1:n); A(p, 1:
n) = tmp;
```

选主元三角分解 ii

```
tmp = A(1:n, k); A(1:n, k) = A(1:n, q); A(1:n,  
q) = tmp;  
u(k) = p; v(k) = q;  
if abs(A(k,k)) > eps  
    A(k+1:n, k) = A(k+1:n, k) / A(k, k);  
    A(k+1:n, k+1:n) = A(k+1:n, k+1:n) - A(k+1:n  
    , k) * A(k, k+1:n);  
else  
    return  
end  
end  
end
```

选主元三角分解 i

```
n = 4;
ONE = ones(n);
A = 8*(tril(ONE,-1)-tril(ONE,-2)) ...
    + (tril(ONE, 1)-tril(ONE, 0)) ...
    + 6*eye(n);
%b = [7; 15*ones(n-2,1); 14];
b = [8 23 38 48]';

n = size(A, 1);
[u, v, A] = myLUFullPivot(A);

for k = 1:n-1
    if u(k) > k
        tmp = b(k);
```

选主元三角分解 ii

```
        b(k) = b(u(k));  
        b(u(k)) = tmp;  
    end  
end  
b = TrilForward (A,b);  
  
b = TriuBackward(A,b)  
for k = n-1:-1:1  
    if v(k) > k  
        tmp = b(k);  
        b(k) = b(v(k));  
        b(v(k)) = tmp;  
    end  
end
```

例

对如下矩阵进行列主元三角分解

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix},$$

列主元三角分解

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix},$$

列主元三角分解

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{P_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}}_{A^{(0)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^{(0)}}$$

列主元三角分解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ -\frac{1}{4} & & 1 & \\ -\frac{3}{4} & & & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^{(0)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix}}_{A^{(1)}}$$

列主元三角分解

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix},$$

列主元三角分解

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^{(1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}^{(1)}}$$

列主元三角分解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{3}{7} & 1 & \\ & \frac{2}{7} & & 1 \end{bmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^{(1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

列主元三角分解

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix},$$

列主元三角分解

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^{(2)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}^{(2)}}$$

列主元三角分解

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{3}{7} & 1 & \\ & \frac{2}{7} & & 1 \end{bmatrix}}_{L_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^{(2)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_{A^{(3)}}$$

证毕。

□

选主元三角分解 i

```
function [u, A] = myLUColPivot(A)
n = size(A, 1); u = zeros(n, 1); eps = 1e-10;
for k = 1:n-1
    % find p
    [~, p] = max(abs(A(k:n, k)));
    p = p+k-1;
    % interchange k-th and p-th column
    tmp = A(k, 1:n);
    A(k, 1:n) = A(p, 1:n);
    A(p, 1:n) = tmp;
    u(k) = p;
    if abs(A(k,k)) > eps
        A(k+1:n, k) = A(k+1:n, k) / A(k, k);
    end
end
```

```
        A(k+1:n, k+1:n) = A(k+1:n, k+1:n) - A(k+1:n  
        , k) * A(k, k+1:n);  
    else  
        return  
    end  
end  
end
```

选主元三角分解 i

```
function myLUColPivotTest()  
n = 50;  
ONE = ones(n);  
A = 8*(tril(ONE,-1)-tril(ONE,-2)) ...  
    + (tril(ONE, 1)-tril(ONE, 0)) ...  
    + 6*eye(n);  
b = [7; 15*ones(n-2,1); 14]  
  
n = size(A, 1);  
[u, A] = myLUColPivot(A);  
for k = 1:n-1  
    if u(k) > k  
        tmp = b(k);  
        b(k) = b(u(k));
```

```
        b(u(k)) = tmp;  
    end  
end  
b = TrilForward (A,b);  
b = TriuBackward(A,b)  
end
```