



# 线性代数

## 特征值问题

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 12 月 27 日



## 1 矩阵的特征值问题

- 特征值与特征向量的定义
- 特征值与特征向量的性质

## 2 相似矩阵与矩阵的对角化

## 3 实对称矩阵的对角化

## 1 矩阵的特征值问题

## 2 相似矩阵与矩阵的对角化

## 3 实对称矩阵的对角化

## 1 矩阵的特征值问题

- 特征值与特征向量的定义
- 特征值与特征向量的性质

## 2 相似矩阵与矩阵的对角化

## 3 实对称矩阵的对角化

## 定义 (特征值与特征向量)

设  $A$  为复数域  $\mathbb{C}$  上的  $n$  阶矩阵, 如果存在数  $\lambda \in \mathbb{C}$  和非零的  $n$  维向量  $x$  使得

$$Ax = \lambda x$$

则称  $\lambda$  为矩阵  $A$  的 特征值,  $x$  为  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的 特征向量。

## 注

- (1) 特征值问题是对方阵而言的;
- (2) 特征向量  $x \neq 0$ ;
- (3) 由定义,  $A$  的特征值, 就是使  $(A - \lambda I)x = 0$  有非零解的  $\lambda$  值, 即方程  $|A - \lambda I| = 0$  的根都是矩阵  $A$  的特征值。

# 特征值与特征向量的定义

## 定义 (特征多项式、特征矩阵、特征方程)

设  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$ , 则

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵  $A$  的 **特征多项式**,  $|A - \lambda I| = 0$  称为  $A$  的 **特征方程**,  $A - \lambda I$  称为  $A$  的 **特征矩阵**。

## 注

- $A$  的特征多项式是  $\lambda$  的  $n$  次多项式。
- 特征方程  $|A - \lambda I| = 0$  的  $k$  重称为  $A$  的  $k$  重特征值。

## 矩阵特征值问题的计算步骤

### ① 特征值

求解特征方程  $|A - \lambda I| = 0$ , 算得特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ;

### ② 特征向量

对  $A$  的每个互异特征值  $\lambda_i$ , 求  $(A - \lambda_i I)x = 0$  的 全部非零解, 即  $A$  的属于特征值  $\lambda_i$  的全部特征向量。

## 定义 (特征子空间)

对  $A$  的特征值  $\lambda$ ,  $(A - \lambda I)x = 0$  的解空间称为特征值  $\lambda$  的 特征子空间, 记为  $V_\lambda$ , 即

$$V_\lambda = \{\lambda \text{ 对应的全部特征向量} \} \cup \{0\}.$$

## 定义 (几何重数与代数重数)

设  $\lambda$  为  $A$  的特征值,

- 若  $\lambda$  为  $k$  重特征值, 则称  $k$  为  $\lambda$  的 代数重数;
- 称  $V_\lambda$  的维数为  $\lambda$  的 几何重数, 即  $\dim V_\lambda$ 。

## 深入理解几何重数

设  $\lambda$  为  $A$  的特征值, 则

- 其几何重数即为  $(A - \lambda I)x = 0$  的基础解系的向量个数, 即

$$l = n - r(A - \lambda I),$$

- 设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$  为  $(A - \lambda I)x = 0$  的基础解系, 则它构成  $V_\lambda$  的一组基, 且

$$V_\lambda = \text{span}\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l\}$$



## 定理

矩阵特征值的几何重数不超过代数重数。

## 证明.

略。

## 注

该定理说明：设  $\lambda$  是  $A$  的特征值，求解

$$(A - \lambda I)x = 0$$

时，基础解系中向量的个数不会超过  $\lambda$  的代数重数。

## 例

对角阵、上（下）三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的特征多项式皆为

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$$

故 对角阵、上（下）三角矩阵的  $n$  个特征值为  $n$  个主对角元。

## 例

对于数量矩阵  $kI$ ,

- 全部特征值为  $k$  ( $n$  重)。
- $\forall x \neq 0$ , 有

$$(kI)x = kx,$$

故特征值  $k$  对应的特征向量是任意非零向量。

- 特征值  $k$  的代数重数为  $n$ , 几何重数为  $n$ 。

# 特征值与特征向量的定义

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解

矩阵  $A$  的特征方程为

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 & -1 \\ 3 & 1 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 = 0$$

故  $A$  的特征值为  $\lambda_{1,2} = 2$  (二重特征值),  $\lambda_3 = 3$ 。

# 特征值与特征向量的定义

## 解 (续)

- 当  $\lambda_{1,2} = 2$  时, 解  $(A - 2I)x = 0$ , 即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系为  $\xi_1 = (1, 1, 2)^T$ , 故  $A$  的属于  $\lambda_{1,2} = 2$  的全部特征向量为

$$k_1 \xi_1 \quad (k_1 \neq 0).$$

特征值  $\lambda_{2,3} = 2$  的代数重数为 2, 而几何重数为 1。

- 当  $\lambda_3 = 3$  时, 解  $(A - 3I)x = 0$ 。由

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系为  $\xi_2 = (1, 1, 1)^T$ , 故  $A$  的属于  $\lambda_3 = 3$  的全部特征向量为

$$k_2 \xi_2 \quad (k_2 \neq 0).$$

特征值  $\lambda_3 = 3$  的代数重数为 1, 几何重数也为 1。

## 1 矩阵的特征值问题

- 特征值与特征向量的定义
- 特征值与特征向量的性质

## 2 相似矩阵与矩阵的对角化

## 3 实对称矩阵的对角化

## 性质 1

若  $x_1$  和  $x_2$  都是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量, 则  $k_1x_1 + k_2x_2$  也是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量 (其中  $k_1, k_2$  为任意常数, 但  $k_1x_1 + k_2x_2 \neq 0$ )。

## 证明.

由已知条件  $Ax_1 = \lambda x_1$ ,  $Ax_2 = \lambda x_2$  知

$$A(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2 = k_1\lambda x_1 + k_2\lambda x_2 = \lambda(k_1x_1 + k_2x_2)$$

从而  $k_1x_1 + k_2x_2 (\neq 0)$  是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量。 □

## 性质 2

$A$  的任一特征向量所属的特征值是唯一的。

## 证明.

若  $x$  是  $A$  的属于特征值  $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$  的特征向量, 即有

$$Ax = \lambda_1 x, \quad Ax = \lambda_2 x \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

这与  $x$  非零矛盾。





# 特征值与特征向量的性质

## 定义 (矩阵的迹)

对于  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$ , 其主对角元之和  $\sum_{i=1}^n a_{ii}$  称为  $A$  的 迹 (trace)。

## 性质 3

设  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  的  $n$  个特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 则

$$(1) \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A);$$

$$(2) \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)。$$

## 注

- 可逆矩阵的所有特征值皆非零;
- 奇异矩阵至少有一个零特征值。

证明.

由于  $A$  的  $n$  个特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 故

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

左边的展开式为

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| \quad (1)$$

右边的展开式为

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad (2)$$

比较 (1) 和 (2) 知

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}, \quad \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

## 性质 4

设  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 其对应的特征向量为  $x$ , 则

- $k\lambda$  是  $kA$  的特征值 ( $k$  为任意常数), 其对应的特征向量仍为  $x$ ;
- $\lambda^m$  是  $A^m$  的特征值 ( $m$  为正整数), 其对应的特征向量仍为  $x$ ;
- 当  $A$  可逆时,  $\lambda^{-1}$  是  $A^{-1}$  的特征值, 其对应的特征向量仍为  $x$ ;
- 当  $A$  可逆时,  $\lambda^{-1}|A|$  是  $A^*$  的特征值, 其对应的特征向量仍为  $x$ 。

## 证明.

由已知有  $Ax = \lambda x$ 。

- 由  $(kA)x = kAx = k\lambda x$  知  $k\lambda$  是  $kA$  的特征值, 其对应的特征向量为  $x$ 。
- 由  $A^k x = A^{k-1}(\lambda x) = \lambda A^{k-1} x$  可得  $A^k x = \lambda^k x$ , 从而  $\lambda^k$  是  $A^k$  的特征值, 对应的特征向量仍为  $x$ 。
- 设  $A$  可逆, 则其特征值皆非零, 从而  $A^{-1}x = \lambda^{-1}x$ , 从而  $\lambda^{-1}$  是  $A^{-1}$  的特征值, 对应的特征向量仍为  $x$ 。
- 由  $A^* = |A|A^{-1}$  知,  $A^*x = |A|A^{-1}x = |A|\lambda^{-1}x$ , 从而  $\lambda^{-1}|A|$  是  $A^*$  的特征值, 对应的特征向量仍为  $x$ 。

## 性质 5

设  $\lambda$  是矩阵  $A$  的特征值，其对应的特征向量是  $x$ ，则

$$g(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$$

是

$$g(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_mA^m$$

的特征值，且

$$g(A)x = g(\lambda)x.$$

## 推论

设  $g(x)$  是一个多项式, 若  $g(A) = O$ , 则  $A$  的任一特征值  $\lambda$  必满足  $g(\lambda) = 0$ 。

## 证明.

设  $\lambda$  是  $A$  的任一特征值, 其对于的特征向量为  $x$ 。由已知条件和前述定理可知

$$g(\lambda)x = g(A)x = Ox = 0.$$

由于  $x$  非零, 故  $g(\lambda) = 0$ 。



## 例

设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 = 5A - 4I$ , 试证  $A$  的特征值只能是 1 或 4。

## 证明.

记  $g(x) = x^2 - 5x + 4$ , 则  $A$  满足

$$g(A) = A^2 - 5A + 4I = 0.$$

因此, 矩阵  $A$  的特征值必满足

$$g(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0,$$

故  $A$  的特征值只能是 1 或 4。 □

## 例

设 3 阶方阵  $A$  的特征值为 1, 2, 3, 求  $|A^3 - 5A^2 + 7A|$ 。

## 解

设  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则  $g(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$  是

$$g(A) = A^3 - 5A^2 + 7A$$

的特征值。故  $g(A)$  的全部特征值为  $g(1) = 3, g(2) = 2, g(3) = 3$ , 从而

$$|A^3 - 5A^2 + 7A| = 3 \times 2 \times 3 = 18.$$

## 例

设 3 阶方阵  $A$  的特征值为  $1, -1, 2$ , 求  $A^* + 3A - 2I$  的特征值。

## 解

由题设知  $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2$ , 故  $A$  可逆, 且  $\lambda^{-1}|A| = -2\lambda^{-1}$  是  $A^*$  的特征值。因此, 若  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则

$$g(\lambda) = -2\lambda^{-1} + 3\lambda - 2$$

是  $A^* + 3A - 2I$  的特征值。于是,  $A^* + 3A - 2I$  的全部特征值为

$$g(1) = -1, g(-1) = -3, g(2) = 3.$$



## 性质 6

$A$  与  $A^T$  的特征值相同。

证明.

由

$$(A - \lambda I)^T = A^T - \lambda I$$

知

$$|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^T| = |A^T - \lambda I|$$

即  $A$  与  $A^T$  有相同的特征多项式，从而有相同的特征值。



例  
设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 求  $A$  的特征值与特征向量
- 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角阵。

解  
由

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ 2 & -2 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda + 2)$$

知  $A$  的特征值为  $\lambda_{1,2} = 0$  和  $\lambda_3 = -2$ 。

## 解 (续)

- 当  $\lambda_{1,2} = 0$  时, 解  $Ax = 0$ 。由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系  $\xi_1 = (1, 1, 0)^T$  和  $\xi_2 = (-1, 0, 1)^T$ , 故  $A$  的属于特征值 0 的全体特征向量为  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$  ( $k_1, k_2$  不全为零)。

特征值 0 的代数重数为 2, 几何重数也为 2。

- 当  $\lambda_3 = -2$  时, 解  $(A + 2I)x = 0$ 。由

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系  $\xi_3 = (-1, -2, 1)^T$ , 故  $A$  的属于特征值 -2 的全体特征向量为

$$k_3\xi_3 \quad (k_3 \neq 0).$$

特征值 -2 的代数重数为 1, 几何重数也为 1。

解 (续)

将

$$A\xi_1 = \lambda_1\xi_1, \quad A\xi_2 = \lambda_2\xi_2, \quad A\xi_3 = \lambda_3\xi_3$$

写成

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

取

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

则有

$$AP = P\Lambda.$$

由  $|P| = 2 \neq 0$  知  $P$  可逆。

1 矩阵的特征值问题

2 相似矩阵与矩阵的对角化

3 实对称矩阵的对角化

## 定义 (相似矩阵)

设  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 若存在可逆矩阵  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称  $B$  是  $A$  的 相似矩阵, 或者说  $A$  与  $B$  相似, 记为  $A \sim B$ 。

## 相似矩阵的性质

- 运算规则

$$P^{-1}(k_1A_1 + k_2A_2)P = k_1P^{-1}A_1P + k_2P^{-1}A_2P$$

$$P^{-1}(A_1A_2)P = (P^{-1}A_1P)(P^{-1}A_2P)$$

- 若  $A \sim B$ , 则

- ▶  $A^k \sim B^k$  ( $k$  为任意非负整数)

- ▶  $A$  与  $B$  都可逆或者都不可逆。当它们都可逆时,  $A^{-1} \sim B^{-1}$ 。

## 定理

相似矩阵的特征值相同。

## 证明.

设  $A \sim B$ , 即存在可逆矩阵  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得

$$P^{-1}AP = B,$$

故

$$|B - \lambda I| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}||A - \lambda I||P| = |A - \lambda I|.$$



## 推论

若  $A \sim B$ , 则

- $A$  与  $B$  有相同的秩;
- $A$  与  $B$  有相同的迹;
- $A$  与  $B$  有相同的行列式。



## 推论

若

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的特征值。

## 定义 (矩阵的对角化)

对  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  进行对角化, 就是寻找可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

换句话说, 矩阵能否对角化, 等价于矩阵是否相似于某个对角阵。

# 相似矩阵与矩阵的对角化

## 定理

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  可对角化的充分必要条件是  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量。

## 证明.

$$P^{-1}AP = \Lambda \iff AP = P\Lambda$$

将  $P$  按列分块, 即

$$P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n),$$

则

$$A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

故  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  是  $A$  分别对应于  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  的特征向量。由于  $P$  可逆, 所以它们是线性无关的。 □

# 特征值与特征向量的性质

## 定理

A 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

## 证明.

设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  是  $A$  的  $m$  个互异的特征值, 对应的特征向量分别为  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ , 下证:  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$  线性无关. 对  $m$  做数学归纳法.

1° 当  $m = 1$  时, 结论显然成立.

2° 设  $k$  个互异特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  对应的特征向量  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  线性无关. 下面考虑  $k+1$  个互异特征值的特征向量的情况. 设

$$a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_k \mathbf{x}_k + a_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\Rightarrow A(a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_k \mathbf{x}_k + a_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow a_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_k \lambda_k \mathbf{x}_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\lambda_{k+1}(1)-(2)} a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1) \mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2) \mathbf{x}_2 + \dots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\Rightarrow a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\Rightarrow a_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{x}_{k+1} \neq \mathbf{0}} a_{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} \text{ 线性无关}$$

# 相似矩阵与矩阵的对角化

## 推论

若  $n$  阶方阵  $A$  有  $n$  个互异特征值, 则  $A$  可对角化。

## 定理

设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  是  $A$  的  $m$  个互异的特征值, 对应于  $\lambda_i$  的线性无关的特征向量为  $\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \dots, \mathbf{x}_{i_{r_i}}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 则由所有这些特征向量 (共  $r_1 + r_2 + \dots + r_m$  个) 构成的向量组线性无关。

## 例证

设 3 阶方阵  $A$  有三个特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 且  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ , 且  $\lambda_1$  对应的线性无关的特征向量为  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$ , 而  $\lambda_3$  对应的特征向量为  $\mathbf{x}_3$ , 下证:  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  线性无关。

设有  $k_1, k_2, k_3$  使得

$$k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}, \quad (3)$$

则

$$k_1 A \mathbf{x}_1 + k_2 A \mathbf{x}_2 + k_3 A \mathbf{x}_3 = \mathbf{0} \iff k_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \lambda_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}, \quad (4)$$

由“ $\lambda_1 \times (3) - (4)$ ”并结合  $\lambda_1 = \lambda_2$  知

$$k_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

由  $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0, \mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$  知  $k_3 = 0$ 。代入 (3) 知  $k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ 。由  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  线性无关得  $k_1 = k_2 = 0$ , 从而  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  线性无关。

## 定理

$A$  可对角化的充分必要条件是对于  $A$  的所有互异特征值，代数重数皆等于几何重数。

## 注

判断  $A$  是否可对角化，只需检查多重特征值的代数重数是否等于几何重数，而单重特征值无需检查。

例

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

问  $A$  能否对角化？若能，则求可逆阵  $P$  和对角阵  $\Lambda$  使  $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

解

$A$  的特征方程为

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -4 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2,$$

故  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 2$ 。

## 解 (续)

- 当  $\lambda_1 = -1$ , 解  $(A + I)x = 0$ 。由

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

特征值  $-1$  的代数重数为 1, 几何重数也为 1。

- 当  $\lambda_{2,3} = 2$ , 解  $(A - 2I)x = 0$ 。由

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 4x_1 - x_2 \end{cases}$$

得对应的特征向量

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

特征值 2 的代数重数为 2, 几何重数也为 2。

解 (续)

由于对  $A$  的每个互异特征值, 代数重数等于几何重数, 故  $A$  可对角化。记

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$



1 矩阵的特征值问题

2 相似矩阵与矩阵的对角化

3 实对称矩阵的对角化

# 实对称矩阵的对角化

## 定义 (共轭矩阵)

设  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 则称  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$  为  $A$  的共轭矩阵。

## 注

- $\overline{\bar{A}} = A$
- $\overline{A^T} = (\bar{A})^T$  (共轭转置)
- 当  $A$  为实对称矩阵时,  $\overline{A^T} = \overline{A^T} = A^T = A$

## 共轭矩阵的性质

- $\overline{kA} = \bar{k} \bar{A}$
- $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$
- $\overline{AB} = \bar{A} \bar{B}$
- $\overline{(AB)^T} = \bar{B}^T \bar{A}^T$
- $\overline{A^{-1}} = \bar{A}^{-1}$
- $|\bar{A}| = \overline{|A|}$

## 定理

实对称矩阵  $A$  的任一特征值都是实数。

## 证明.

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x &\implies \overline{(Ax)}^T = \overline{\lambda x}^T \\ &\implies \bar{x}^T \overline{A}^T = \bar{\lambda} \bar{x}^T \\ &\implies \bar{x}^T \overline{A}^T x = \bar{\lambda} \bar{x}^T x \\ &\implies \bar{x}^T Ax = \bar{\lambda} \bar{x}^T x \\ &\implies \lambda \bar{x}^T x = \bar{\lambda} \bar{x}^T x \\ &\implies \lambda = \bar{\lambda} \end{aligned}$$



# 实对称矩阵的对角化

## 定理

实对称矩阵  $A$  的属于不同特征值的特征向量是正交的。

## 证明.

设  $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ ,  $Ax_2 = \lambda_2 x_2$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ),  $A^T = A$ , 则

$$\lambda_1 x_2^T x_1 = x_2^T Ax_1 = x_2^T A^T x_1 = (Ax_2)^T x_1 = (\lambda_2 x_2)^T x_1 = \lambda_2 x_2^T x_1$$

由于  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 所以

$$x_2^T x_1 = 0.$$



## 注

对于一般方阵  $A$ , 其对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

# 实对称矩阵的对角化

## 定理

对于实对称矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 必存在正交矩阵  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 使得

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda.$$

## 证明.

略



## 注

实对称矩阵一定可以对角化。

## 实对称矩阵对角化的步骤

- ① 求出  $A$  的全部互异特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , 重数分别为  $k_1, \dots, k_s$ 。
- ② 对每个  $k_i$  重特征值  $\lambda_i$ ,
  - ▶ 求  $(A - \lambda_i I)x = 0$  的基础解系, 得  $k_i$  个线性无关的特征向量。
  - ▶ 利用施密特正交化过程, 将它们正交化和标准化, 得  $k_i$  个两两正交的单位特征向量。
- ③ 把这  $n$  个两两正交的单位特征向量构成正交矩阵  $Q$ , 便有

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda.$$

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求正交矩阵  $Q$ , 使  $Q^{-1}AQ = \Lambda$  为对角阵。

解

由

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

可求得  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 1$ 。

解 (续)

对  $\lambda_1 = -2$ , 解  $(A + 2I)x = 0$ . 由

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & -x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{cases}$$

得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将其标准化得

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



## 解 (续)

对  $\lambda_{2,3} = 1$ , 解  $(A - I)x = 0$ 。由

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= & -x_2 &+ x_3 \\ x_2 &= & x_2 \\ x_3 &= & x_3 \end{cases}$$

得基础解系

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

正交化

$$\eta_2 = \xi_2, \quad \eta_3 = \xi_3 - \frac{(\eta_2, \xi_3)}{(\eta_2, \eta_2)} \eta_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

标准化

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

解 (续)

构成正交矩阵

$$Q = (q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

有

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

# 实对称矩阵的对角化

## 例

设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , 求  $A^n$ 。

## 解

由

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

知  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ 。

- 当  $\lambda_1 = 1$  时, 解  $(A - \lambda_1 I)x = 0$ 。由

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

得基础解系为  $\xi_1 = (1, 1)^T$ 。标准化得  $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ 。

- 当  $\lambda_2 = 3$  时, 解  $(A - \lambda_2 I)x = 0$ 。由

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

得基础解系为  $\xi_2 = (-1, 1)^T$ 。标准化得  $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$ 。

解 (续)

令

$$Q = (q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$A^n = Q\Lambda^n Q^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}.$$

# 实对称矩阵的对角化

## 例

设  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ , 计算  $A^{2022}$ 。

## 注

求矩阵幂时, 不要一味地使用对角化方法, 有时可以灵活地根据题目的特点求解。

## 解

注意到

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1)$$

则

$$\begin{aligned} A^{2022} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \cdots \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \\ &= (-3)^{2021} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) = (-3)^{2021} A \end{aligned}$$

# 实对称矩阵的对角化

## 例

设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$ , 对应的特征向量为  $p_1 = (0, 1, 1)^T$ ,  $p_2 = (1, 1, 1)^T$ ,  $p_3 = (1, 1, 0)^T$ , 求  $A$ .

## 解

记  $P = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , 则  $AP = P\Lambda$ , 从而

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

由

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 \div (-1)]{c_3 - c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline -2 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 - c_3]{c_1 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

知

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

# 实对称矩阵的对角化

## 例

设 3 阶实对称矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$ , 对应  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量分别为  $p_1 = (1, 2, 2)^T$ ,  $p_2 = (2, 1, -2)^T$ , 求  $A$ .

## 解

设  $\lambda_3$  对应的特征向量为  $p_3 = (x, y, z)^T$ . 由  $A$  对称及  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$  知  $p_1, p_2, p_3$  两两正交, 即

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div (-3)]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

知

$$\begin{cases} x_1 & = & 2x_3 \\ x_2 & = & -2x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{cases} \implies p_3 \text{ 可取为 } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解 (续)

由于  $p_1, p_2, p_3$  两两正交, 对它们标准化即得正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \text{diag}(1, -1, 0) := \Lambda.$$

于是

$$A = Q \Lambda Q^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



## 例

设 3 阶实对称矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ , 对应  $\lambda_1$  的特征向量为  $p_1 = (1, 1, 1)^T$ , 求  $A$ 。

## 解

设  $A$  的属于  $\lambda_2, \lambda_3$  的特征向量为  $p_2, p_3$ 。因为  $A$  对称, 故  $p_2, p_3$  与  $p_1$  正交。设  $(x, y, z)^T$  与  $p_1$  正交, 即

$$x + y + z = 0,$$

它的一组正交的基础解系为

$$(1, -1, 0)^T, (1, 1, -2)^T.$$

故可取

$$p_2 = (1, -1, 0)^T, p_3 = (1, 1, -2)^T.$$

解 (续)

由于  $p_1, p_2, p_3$  两两正交, 对它们标准化即得正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \text{diag}(6, 3, 3) := \Lambda.$$

于是

$$A = Q \Lambda Q^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$