线性代数
行列式

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 10 月 10 日

目录

目录

目录

例 (1.1)

用消元法求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

解

1. 消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

2. 消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

3. 若 $\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0}$，则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

二阶行列式

定义 (二阶行列式)

由 $2^2 = 4$ 个数，按下列形式排成 2 行 2 列的方形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

其被定义成一个数

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \triangleq D,$$

该数称为由这四个数构成的二阶行列式。

二阶行列式

注

- a_{ij} 表示行列式的元素，i 为行标，表明该元素位于第 i 行，j 为列标，表明该元素位于第 j 列.
- 对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 类似地，

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq D_1, \quad b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \triangleq D_2$$

则上述方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例

求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解

因

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

故

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -3.$$

二元线性方程组的几何意义

设有两条直线 $l_1: a_1x+b_1y=c_1$ 和 $l_2: a_2x+b_2y=c_2$，则

$$l_1 \,//\, l_2 \iff \text{斜率相等或都垂直于 } x \text{ 轴}$$

- 若 $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$，则 l_1 和 l_2 的斜率分别 $k_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$ 和 $k_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$。于是

$$k_1 = k_2 \iff \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \iff a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

- 若 $b_1 = 0, b_2 = 0$，则两条直线都垂直于 x 轴。此时，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

综上可知，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \iff l_1 \,//\, l_2 (\text{包含 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \iff l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 有唯一交点}$$

例

求平面上两直线 $l_1 : x_1 + 2x_2 = 1$ 和 $l_2 : 3x_1 + x_2 = 0$ 的交点。

解

因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{5},$$

故两直线的交点为 $(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$.

对于三元一次方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 &= b_1 \quad (1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 &= b_2 \quad (2)\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 &= b_3 \quad (3) \end{aligned}$$

- 经(1)$\times(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$+(2)$\times(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})$+(3)$\times(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$ 得

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3 \end{aligned}$$

若 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\neq 0$，则

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

- 类似地，

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-a_{12}b_1a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

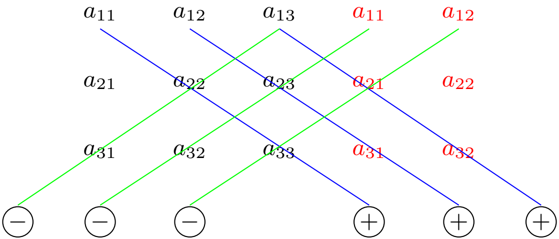
二、三阶行列式

定义 (三阶行列式)

由 $3^2=9$ 个数组成的 3 行 3 列的三阶行列式，则按如下形式定义一个数

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$



沙路法

三阶行列式

例

计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -2 & -3 & 4 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$\begin{aligned} D = \quad & 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4 \\ & -(-4) \times 2 \times (-3) - 1 \times 1 \times 4 - 2 \times (-2) \times (-2) = -14. \end{aligned}$$

例

求方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

解

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & 2 & 3 & x & 2 & 3 & \\ & 4 & 9 & x^2 & 4 & 9 & \\ - & - & - & & + & + & + \end{array}$$

$$0 = 3x^2 + 4x + 18 - 12 - 9x - 2x^2 = x^2 - 5x + 6 \implies x = 2 \text{ or } 3.$$

三阶行列式

注

如果三元一次方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3, \end{aligned}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

则其解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

目录

目录

例

用 $1, 2, 3$ 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解

百	十	个
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

例

把 n 个不同元素排成一列，共有多少种不同的排法?

解

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列。n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示。显然，

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

即 n 个不同元素的一共有 $n!$ 种不同的排法。

定义 (排列)

由自然数 $1,2,\cdots,n$ 按一定次序排成的数组称为一个 n 元排列，记为 $p_1p_2\cdots p_n$。

注

- n 元排列总共有 $n!$ 个。
- 称 $12\cdots n$ 为**自然排列**，它具有递增的次序。

定义 (逆序数)

在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，

- 若一个大的数排在一个小的数前面，则称**这两个数产生一个逆序**；
- 一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$。

例

- 自然排列没有逆序，其逆序数为 0；
- 四元排列 4312 中出现的所有逆序为 41，43，42，32，故 $\tau(4312)=4$。

逆序数的计算方法

给定 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的排列 $p_1p_2\cdots p_n$，考虑数 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的数有 t_i 个（**称为 p_i 的逆序数**），每个数的逆序数之和就是这个排列的逆序数，即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

例

求 31524 和 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数。

解

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\tau(31524) \;=\; 0+1+0+2+1 \;=\; 4$$

$$\begin{array}{cccccc} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{array}$$

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = 0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

目录

定义 (奇排列与偶排列)

称逆序数为奇数的排列为奇排列，逆序数为偶数的排列为偶排列。

例

在自然数 $1, 2, 3$ 组成的 6 个三元排列中，偶排列有 123，231 和 312，奇排列有 321、132 和 213。

定义 (对换)

- 将一个排列中的任意两个元素的位置互换，而其余的元素不动，就得到了一个新的排列，称这样的互换为一次**对换**。
- 将相邻两个元素对换，称为**相邻对换**。

定理 (逆序数的性质)

进行一次对换改变排列的奇偶性。

证明：先考察相邻对换的情形

$$t = \boxed{t_{a_1} + \cdots + t_{a_l}} + t_a + t_b + \boxed{t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}}$$

$$a_1 \quad \cdots \quad a_l \quad a \quad b \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m$$

$$\downarrow$$

$$a_1 \quad \cdots \quad a_l \quad b \quad a \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m$$

$$r = \boxed{t_{a_1} + \cdots + t_{a_l}} + r_b + r_a + \boxed{t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}}$$

注意到除 a, b 外，其他元素的逆序数不改变。

- 当 $a < b$ 时，$r_a = t_a + 1, r_b = t_b, r = t + 1$
- 当 $a > b$ 时，$r_a = t_a, r_b = t_b - 1, r = t - 1$

因此，相邻对换改变排列的奇偶性。

证明【续】：一般情形

$$a_1 \quad \cdots \quad a_l \quad a \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m \quad b \quad c_1 \quad \cdots \quad c_n$$

$$\Big\downarrow \; 2m+1 \text{ 次相邻对换}$$

$$a_1 \quad \cdots \quad a_l \quad b \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m \quad a \quad c_1 \quad \cdots \quad c_n$$

由于一次相邻对换会改变排列的奇偶性，由上图可知，一个排列中的任意两个元素对换，会导致排列的奇偶性改变。

推论

奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数。

证明.

因为自然排列 $12\cdots n$ 是偶排列（自然排列的逆序数为 0），由前述定理知，一次对换改变排列的奇偶性，当排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇（偶）排列时，必须做奇（偶）次对换才能变成自然排列，故所作的对换次数与排列具有相同的奇偶性。 □

推论

n 个元素的所有全排列中奇排列与偶排列数各占一半, 即各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

例

计算排列 217986354 的逆序数，并讨论它们的奇偶性：

解

2	1	7	9	8	6	3	5	4
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	0	0	1	3	4	4	5

逆序数为 $t = 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 3 + 4 + 4 + 5 = 18$，此排列为偶排列。

排列的奇偶性

例

计算排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$ 的逆序数，并讨论它们的奇偶性：

解

1	3	5	$\cdots$	$2n-1$	2	4	6	$\cdots$	$2n$
0	0	0		0	$n-1$	$n-2$	$n-3$		0

逆序数为

$$t=(0+0+0+\cdots+0)+[(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+0]=\frac{1}{2}n(n-1),$$

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时为奇排列。

例

选择 i 和 j 使

(1) $1245i6j97$ 为奇排列；

(2) $3972i15j4$ 为偶排列。

解

(1) 由于 $1245i6j97$ 是一个 9 元排列，故 i, j 只能是 $3, 8$。
当 $i = 3, j = 8$ 时，$\tau(124536897) = 4$，不合题意；从而 $i = 8, j = 3$ 为所求。

(2) 同理，i, j 只能是 $6, 8$。
当 $i = 6, j = 8$ 时，$\tau(397261584) = 20$，合题意，即为所求；显然，$i = 8, j = 6$ 不合题意。

目录

目录

定义 (2 阶行列式)

二阶行列式可表示为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \sum_{p_1p_2} (-1)^{\tau(p_1p_2)} a_{1p_1} a_{2p2}$$

其中 $\tau(p_1p_2)$ 表示 p_1p_2 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2}$ 表示对 $1, 2$ 的所有排列求和。

注

- 二阶行列式共有 $2!$ 项；
- 每一项都是位于不同行不同列的两个元素的乘积；
- 每一项都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p2}$，其中 p_1p_2 是 12 的某个排列；
- 当 p_1p_2 为偶排列时，取正；当 p_1p_2 为奇排列时，取负。

定义 (三阶行列式)

三阶行列式可表示为

$$
\begin{aligned}
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&= \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p2}a_{3p_3}.
\end{aligned}
$$

其中 $\tau(p_1p_2p_3)$ 表示 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 $1, 2, 3$ 的所有排列求和。

注

- 三阶行列式共有 $3! = 6$ 项；
- 每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积；
- 每一项都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p2}a_{3p_3}$，其中 $p_1p_2p_3$ 是 123 的某个排列；
- 当 $p_1p_2p_3$ 为偶排列时，取正；当 $p_1p_2p_3$ 为奇排列时，取负。

行列式的定义

定义 (n 阶行列式)

n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列可定义一个 n 阶行列式，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

它表示所有可能的取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和，即

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $12\cdots n$ 的某个 n 元排列，$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为该排列的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和。

行列式的定义：特殊行列式

上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

目录

定义 (转置)

对于行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

互换其行与列所得的新行列式称为 D 的转置行列式，记为

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1

转置不改变行列式的值，即 $D = D^T$。

证明.

记 D 的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

它的 n 个元素位于 D 的不同行不同列，也位于 D^T 的不同行不同列，所以这些元素的乘积在 D^T 中应为

$$a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

符号也为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$。因此，$D$ 与 D^T 是具有相同项的行列式。 □

注

性质 1 表面行列式的行和列具有同等地位，即行列式对行成立的性质皆适用于列。

性质 2

交换行列式的两行（列），行列式变号。

记号	含义
$r_i \leftrightarrow r_j$	互换第 i,j 行
$c_i \leftrightarrow c_j$	互换第 i,j 列

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

证明.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1$$

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} \\ &= -\sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} = -D_1 \end{aligned}$$

□

推论

若行列式中有两行（列）的对应元素相同，则行列式等于零。

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

证明.

互换行列式的两行，有 $D = -D$，即 $D = 0$。 □

行列式的性质

性质 3

行列式的某一行中所有的元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式。即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD. \tag{5}$$

证明.

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n} a_{1p_1} \cdots (ka_{ip_i}) \cdots a_{np_n} \\ &= k \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} = kD. \end{aligned}$$

□

推论

当行列式的某一行（列）有公因子时，可以把公因子提到行列式外面。

记号	含义
$r_i \div k$	第 i 行提取公因子 k
$c_j \div k$	第 j 列提取公因子 k

推论

若行列式的某一行（列）的元素全为零，则该行列式等于零。

推论

若行列式中有两行（列）的对应元素成比例，则该行列式等于零。

证明.

若行列式有两行（列）的对应元素成比例，则提出比例系数后两行（列）的对应元素完全相同，故行列式等于零。 $\square$

性质 4

若行列式的某一行（列）的各元素皆为两数之和，则该行列式等于除这一行（列）以外其余元素不变的两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots(b_{ip_i}+c_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &\qquad + \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots c_{ip_i}\cdots a_{np_n} = \text{右边} \end{aligned}$$

□

行列式的性质

性质 5

把行列式某一行的各元素乘以同一个数然后加到另一行对应的元素上去，行列式的值不变。

记号	含义
$r_i + r_j \times k$	将第 j 行乘以 k 加到第 i 行
$c_i + c_j \times k$	将第 j 列乘以 k 加到第 i 列

例

对

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 11 \end{vmatrix},$$

有

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4+2\times 2 & 5+2\times 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2\times 2 & 2\times 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = D_1.$$

证明.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

□

例

计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+\frac{1}{3}r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{3}{10}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43}{10} \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times \frac{10}{3} \times \frac{43}{10} = 43.$$

例

计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2 \div 3]{r_1 \div 2} 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 + r_1]{r_2 - r_1} 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2} 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 1 \times 1 \times (-1) = -6.$$

例

计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} = \cdots = 40$$

例

计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{c_1-2c_3}{\underset{c_4+c_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明：$D=D_1D_2$

证明

对 D_1 做运算 $r_i + \lambda r_j$ 将它转化成下三角行列式，设为

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk}.$$

对 D_2 做运算 $c_i + \lambda c_j$ 将它转化成下三角行列式，设为

$$D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$

于是，对 D 的前 k 行做运算 $r_i + \lambda r_j$，对其后 n 列做运算 $c_i + \lambda c_j$，把 D 转化为

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$$

故

$$D = p_{11} \cdots p_{kk} q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2.$$

例

计算

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$$

解

把 D_{2n} 中的第 $2n$ 行依次与第 $2n-1$ 行、...、第 2 行对调（共 $2n-2$ 次相邻对调），在把第 $2n$ 列依次与第 $2n-1$ 列、...、第 2 列对调，得

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & & & & & 0 \\ c & d & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & c & & & & & d \end{vmatrix}$$

故

$$D_{2n} = D_2 D_{2(n-1)} = (ad-bc) D_{2(n-1)} = (ad-bc)^2 D_{2(n-2)} = \cdots$$

$$= (ad-bc)^{n-1} D_2 = (ad-bc)^n.$$

例

不求行列式的值，用行列式的性质，判断以下行列式能被 17 整除：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

解

由于

$$D \xlongequal[c_3+10c_2]{c_3+100c_1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix}$$

而 $204, 527, 255$ 能被 17 整除，故最后一列能提出公因子 17，于是 D 能被 17 整除。

目录

定义 (余子式与代数余子式)

在 n 阶行列式 D 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，余下的元素按原来顺序构成的一个 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。

例

对于四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

元素 a_{34} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{34}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-M_{34}.$$

定理 (行列式按行（列）展开法则)

n 阶行列式 D 等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

证明（特殊情形（一）：D 的第一行元素除 $a_{11} \neq 0$ 外，其余元素皆为零）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此时，

$$\begin{aligned} D &= \sum_{1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(1p_2\cdots p_n)} a_{11}a_{2p_2\cdots a_{np_n}} \\ &= a_{11} \sum_{p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)} a_{2p_2\cdots a_{np_n}} = a_{11}M_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11}A_{11}. \end{aligned}$$

证明（特殊情形（二）：D 的第 i 行元素除 $a_{ij}\neq 0$ 外，其余元素皆为零）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow[\mathrm{k=i,i-1,\cdots,2}]{\mathrm{r_{k-1}\leftrightarrow r_k}} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{k=j,j-1,\cdots,2}]{\mathrm{c_{k-1}\leftrightarrow c_k}} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

共经历了 $i-1$ 次相邻行对换和 $j-1$ 次相邻列对换，由特殊情形（一）的结果知，

$$D=(-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

证明（一般情形）

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

利用特殊情形（二）的结果知

$$
D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).
$$

推论

行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j)$$

证明

- 将行列式 D 中的第 j 行元素换成第 i 行的对应元素（$i\neq j$），得到有两行元素相同的行列式 D_1，于是 $D_1=0$。
- 再将 D_1 按第 j 行展开，则

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j).$$

注

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \qquad \sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

例

计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例

计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix}$$

解

由行列式定义可知，

$$D_n = (-1)^{1+n} a_n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_n D_{n-1}.$$

于是，

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} = (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} = \cdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1. \end{aligned}$$

例

$$D_2 = -a_1 a_2, \quad D_3 = -a_1 a_2 a_3, \quad D_4 = a_1 a_2 a_3 a_4, \quad D_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5.$$

例

已知行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

将它的第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 行换成 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},1$，而其他行都不变，所得的行列式记为 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$。证明：

$$D=\sum_{i=1}^{n} D_i.$$

证明

记 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，则

$$D_i = \sum_{j=1}^{n-1} x_j A_{ij} + A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

而

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} x_j A_{ij} + \sum_{i=1}^{n} A_{in} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(x_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \right) + \sum_{i=1}^{n} A_{in}$$

将 D 中第 j 列元素都换成 1 所得的行列式记为 $B_j (j = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$B_j = 1 \times A_{1j} + 1 \times A_{2j} + \cdots + 1 \times A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} = \begin{cases} 0, & j \neq n, \\ D, & j = n. \end{cases}$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{n} A_{in} = D.$$

例

已知

$$D = \begin{vmatrix} k_1 & 2 & 1 & 2 \\ k_2 & 2 & 2 & 2 \\ k_3 & 1 & 3 & 4 \\ k_4 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 18,$$

计算 $A_{12} + A_{22}$ 和 $A_{32} + A_{42}$.

证明.

由代数余子式的性质有

$$\begin{cases} 2(A_{12} + A_{22}) + (A_{32} + A_{42}) = 18, \\ 2(A_{12} + A_{22}) + 4(A_{32} + A_{42}) = 0. \end{cases}$$

由克莱姆法则知

$$A_{12} + A_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = 12, \quad A_{32} + A_{42} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = -6.$$

目录

例

计算

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

例

计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i-c_1} \begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & n-2 & n-1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n\\ 1 & 0 & \cdots & -n & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & -n & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i\div n} n^{n-1}\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix} \xlongequal{c_1+\cdots+c_n} n^{n-1}\begin{vmatrix}\frac{n+1}{2} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=n^{n-1}\frac{n+1}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^{n-1}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

例

计算

$$D_{20}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 18 & 19 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 17 & 18 & 19 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 16 & 17 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 20 & 19 & 18 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_{20} \xlongequal[i=19,\cdots,1]{c_{i+1}-c_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 20 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,20]{r_i+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 21 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 21 \times (-1)^{20+1} \times 2^{18} = -21 \times 2^{18}.$$

例

证明范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

证明.

1. 当 $n=2$ 时,

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j),$$

结论成立。

2. 现假设结论对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，以下证明结论对 n 阶范德蒙德行列式也成立。

$$D_n \xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i-x_1r_{i-1}} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，并把每列的公因子 (x_i-x_1) 提出，就有

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

上式右端的行列式为 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，按归纳法假设，它等于所有 (x_i-x_j) 因子的乘积 $(n\geq i\geq j\geq 2)$。故

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\geq i>j\geq 2}(x_i-x_j)=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j).$$

例

设 a, b, c 为互不相同的实数，证明：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad a+b+c=0.$$

证明.

考察范德蒙德行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & y \\ a^2 & b^2 & c^2 & y^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & y^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(y-a)(y-b)(y-c)$$

注意到行列式 D 可看成是关于 y 的多项式，比较包含 y^2 的项：

$$\cdots - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} y^2 + \cdots = \cdots - (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)y^2 + \cdots$$

于是

$$(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

而 a, b, c 互不相同，故 $a+b+c=0$. □

例

计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1-r_i} \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=2}^{n} i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \left(1-\sum_{i=2}^{n} i\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = \left[2-\frac{(n+1)n}{2}\right] n!$$

如何计算“爪形”行列式?

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其解法固定：从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。

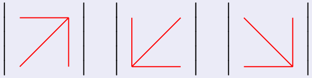
例

设 $a_i \neq 0$，则

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) a_1 a_2 \cdots a_n.$$

行列式的计算

其他形式的“爪型行列式”



(a)　(b)　(c)

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! \left(1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}\right)$$

例

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解法一

$$
D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{c_1 \div [x+(n-1)a]} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}
$$

$$
= [x+(n-1)a]\,(x-a)^{n-1}
$$

解法二

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1 + c_i} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\,(x-a)^{n-1}.$$

解法三（升阶法）

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{n+1} \xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{n+1}$$

- 若 $x = a$，则 $D_n = 0$。
- 若 $x \neq a$，则

$$D_n \xlongequal[j=2,\cdots,n+1]{c_1 + \frac{1}{x-a} c_j} \begin{vmatrix} 1 + \frac{a}{x-a} n & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= [x + (n-1)a]\,(x-a)^{n-1}.$$

解法四

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ 0 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}.$$

于是

$$\begin{cases} D_n &= (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1} \\ (x-a)D_{n-1} &= (x-a)^2 D_{n-2} + a(x-a)^{n-1} \\ \cdots & \\ (x-a)^{n-4}D_4 &= (x-a)^{n-3}D_3 + a(x-a)^{n-1} \\ (x-a)^{n-3}D_3 &= (x-a)^{n-2}D_2 + a(x-a)^{n-1} \end{cases}$$

因此

$$D_n = (x-a)^{n-2}(x^2-a^2) + (n-2)a(x-a)^{n-1} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

注

行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

经常以不同方式出现，如

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+n)\lambda^{n-1}$$

注

升阶法适用于形如 $\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ 的行列式。

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a})\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i})\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \left[a+\frac{n(n+1)}{2}\right]a^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = b^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i+b)$$

例

计算三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

对 D_n 按第一行展开

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

其中

$$D_1 = 2, \quad D_2 = 3.$$

解【续】

将

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

改写成

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}.$$

令 $\Delta_n = D_n - D_{n-1}$，它满足

$$\begin{cases} \Delta_n = \Delta_{n-1}, \\ \Delta_2 = D_2 - D_1 = 3 - 2 = 1. \end{cases}$$

由此可知

$$\Delta_n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad D_n - D_{n-1} = 1,$$

由此可知，$\{D_n\}$ 是一个首项为 2、公差为 1 的等差数列，即 $a_n = n + 1$。

目录

定义 (k 阶子式和 k 阶余子式)

对于 n 阶行列式 D,

- 在 D 中任取其 k 行 k 列 $(1 \leq k \leq n)$ 交点处的 k^2 个元素按原来的相对位置构成一个 k 阶行列式 M，称之为行列式 D 的一个**k 阶子式**；
- 在 D 中划去这 k 行和 k 列后余下的元素按照原来的相对位置构成的 $n-k$ 阶行列式 M^*，称之为 k 阶子式 M 的**余子式**；
- 设 k 阶子式 M 在 D 中所在的行标和列标分别为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_k$，称

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M^*$$

为 k 阶子式 M 的**代数余子式**。

注

- k 阶子式不唯一
  任一 n 阶行列式有 C_n^k 个 k 阶子式
- 当 $k=1$ 时，D 中每个元素都是一个 1 阶子式
  当 $k=n$ 时，D 本身就是一个 n 阶子式

例

在 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 1\end{vmatrix}$ 中，取定第一、三行，求其子式和代数余子式。

解

位于第一、三行的二阶子式为

$$M_1=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2,\quad M_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0,\quad M_3=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1$$

$$M_4=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2,\quad M_5=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6,\quad M_6=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1$$

代数余子式为

$$A_1=(-1)^{1+3+1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad A_2=(-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$A_3=(-1)^{1+3+1+4}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1,\quad A_4=(-1)^{1+3+2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$$

$$A_5=(-1)^{1+3+2+4}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6,\quad A_6=(-1)^{1+3+3+4}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1$$

定理 (拉普拉斯定理)

设在 n 阶行列式 D 中任意取 $k(1 \leq k \leq n)$ 行，由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D，即若取定 k 行后，由这 k 行得到的 k 阶子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$，它们对应的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$，则

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_t A_t,$$

其中

$$t = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

例

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明.

将左端的行列式按前 k 行展开，除左上角的 k 阶子式外，其余 k 阶子式皆为零。而左上角的 k 阶子式的余子式就是右下角的 l 阶子式，由于

$$(-1)^{(1+2+\cdots+k)+(1+2+\cdots+k)} = 1,$$

故符号为正，从而得证。 □

目录

考察 n 元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{6}$$

与二、三元线性方程组相类似，它的解可以用 n 阶行列式表示。

定理（克莱姆法则）

如果线性方程组(6)的系数行列式不等于 0，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(6)存在唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 j 列

证明

1. (存在性): 将 $x_i = D_i/D$ 代入第 i 个方程，则有

$$
\begin{aligned}
& a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n \\
=& \frac{1}{D}(a_{i1}D_1 + \cdots + a_{ii}D_i + \cdots + a_{in}D_n) \\
=& \frac{1}{D}\Big[\quad a_{i1}(b_1A_{11} + \cdots + b_nA_{n1}) + \cdots \\
& \quad + a_{ii}(b_1A_{1i} + \cdots + b_nA_{ni}) + \cdots \\
& \quad + a_{in}(b_1A_{1n} + \cdots + b_nA_{nn}) \quad \Big] \\
=& \frac{1}{D}\Big[\quad b_1(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12}\cdots + a_{in}A_{1n}) + \cdots \\
& \quad + b_i(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2}\cdots + a_{in}A_{in}) + \cdots \\
& \quad + b_n(a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2}\cdots + a_{in}A_{nn}) \quad \Big] \\
=& \frac{1}{D}b_iD = b_i.
\end{aligned}
$$

克莱姆法则

证明【续】

2. (唯一性): 设还有一组解 $y_i, i=1,2,\cdots,n$，以下证明 $y_i = D_i/D$。现构造一个新行列式

$$y_1 D = \begin{vmatrix} a_{11}y_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}y_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}y_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+y_2c_2+\cdots+y_nc_n} \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}y_k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}y_k & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}y_k & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1$$

所以 $y_1 = D_1/D$。同理可证 $y_i = D_i/D, i = 2,\cdots,n$。

求

解如下线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 + 2c_2]{c_1 + 2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27.$$

解【续】

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27$$

于是得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-4,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-1,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=1.$$

克莱姆法则

设

曲线 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 通过四点 $(1,3),(2,4),(3,3),(4,-3)$，求系数 a_0,a_1,a_2,a_3。

解

依题意可得线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3, \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4, \\ a_0 + 3a_1 + 9a_3 + 27a_3 = 3, \\ a_0 + 4a_1 + 16a_4 + 64a_3 = 3, \end{cases}$$

其系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

是一个范德蒙德行列式，其值为 $D = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 12$。

解【续】

$$D_1=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\4&2&4&8\\3&3&9&27\\-3&4&16&64\end{vmatrix}=36,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&3&1&1\\1&4&4&8\\1&3&8&27\\1&-3&16&64\end{vmatrix}=-18,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&3&1\\1&2&4&8\\1&3&3&27\\1&4&-3&64\end{vmatrix}=24,\quad D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&3\\1&2&4&4\\1&3&9&3\\1&4&16&-3\end{vmatrix}=-6.$$

于是得

$$a_0=\frac{D_1}{D}=3,\quad a_1=\frac{D_2}{D}=-3/2,\quad a_2=\frac{D_3}{D}=2,\quad a_3=\frac{D_4}{D}=-1/2.$$

即曲线方程为

$$y=3-\frac{3}{2}x+2x^2-\frac{1}{2}x^3.$$

克莱姆法则

n 元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{7}$$

定理

如果线性方程组(7)无解或有无穷多解，则它的系数行列式必为 0。

注

对于线性方程组(7)，

- 若 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为 0，则称之为非齐次线性方程组；
- 若 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为 0，则称之为齐次线性方程组。

注

对于齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\
\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0.
\end{cases} \tag{8}
$$

一定有零解，但不一定有非零解。

克莱姆法则

由克莱姆法则易知，

定理

如果齐次线性方程组(8)的系数行列式 $D \neq 0$，则它只有零解（没有非零解）。

其逆否命题为

定理

如果齐次线性方程组(8)有非零解，则它的系数行列式必为 0。

例 25

当 λ 为何值时，齐次线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl}(5-\lambda)x & + & 2y & + & 2z & = & 0,\\ 2x & + & (6-\lambda)y & & & = & 0,\\ 2x & & & + & (4-\lambda)z & = & 0.\end{array}\right.$$

有非零解?

解

由上述定理可知，若所给齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式 $D=0$。而

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)-4(4-\lambda)-4(6-\lambda) \\ &= (5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda), \end{aligned}$$

故 $\lambda=2,5$ 或 8。