

线性代数 向量空间

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023年11月28日



目录

- 1 向量空间
- 2 基、维数和坐标
- 3 基变换与坐标变换
- **4** 欧式空间

目录

- 1 向量空间
- 2 基、维数和坐标
- 3 基变换与坐标变换
- 4 欧式空间

n 元向量

实数域 \mathbb{R} 上的 n 个数 a_1, a_2, \cdots, a_n 构成的有序数组称为 \mathbb{R} 上的一个 n 元向量,记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{1}$$

其中 a_i 称为 α 的第 i 个分量。

n 元向量

实数域 \mathbb{R} 上的 n 个数 a_1, a_2, \cdots, a_n 构成的有序数组称为 \mathbb{R} 上的一个 n 元向量,记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{1}$$

其中 a_i 称为 α 的第 i 个分量。 \mathbb{R} 上全体 n 元向量组成的集合,记作 \mathbb{R}^n 。

n 元向量

实数域 \mathbb{R} 上的 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 构成的有序数组称为 \mathbb{R} 上的一个 n 元向量,记为

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{1}$$

其中 a_i 称为 α 的第 i 个分量。 \mathbb{R} 上全体 n 元向量组成的集合,记作 \mathbb{R}^n 。

向量运算

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$, 定义

● 向量加法

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

② 向量数乘

$$k\boldsymbol{\alpha} = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$

向量空间

在 \mathbb{R}^n 中定义加法与数乘运算,且 \mathbb{R}^n 对加法和数乘封闭,即

- $\bullet \ \alpha \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \implies k\alpha \in \mathbb{R}^n$
- \bullet $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \implies \alpha + \beta \in \mathbb{R}^n$

则称 \mathbb{R}^n 为 n 维向量空间,仍记为 \mathbb{R}^n 。

向量空间

在 \mathbb{R}^n 中定义加法与数乘运算,且 \mathbb{R}^n 对加法和数乘封闭,即

- $m{\circ} \ \pmb{\alpha} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \implies k \pmb{\alpha} \in \mathbb{R}^n$
- \bullet $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \implies \alpha + \beta \in \mathbb{R}^n$

则称 \mathbb{R}^n 为 n 维向量空间,仍记为 \mathbb{R}^n 。

向量空间的 8 条运算规则

设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n, 1, k, l \in \mathbb{R}$, 则

- (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- (2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- (3) 对任一向量 α , 有 $\alpha + 0 = \alpha$
- (4) 对任一向量 α ,存在负向量 $-\alpha$,使得 $\alpha+(-\alpha)=0$
- (5) $1\alpha = \alpha$
- (6) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
- (7) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$
- (8) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

目录

- 1 向量空间
- 2 基、维数和坐标
- 3 基变换与坐标变换
- 4 欧式空间

定义(基)

给定 \mathbb{R}^n 中的向量组 $B: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,若

- 向量组 B 线性无关;
- ② \mathbb{R}^n 中的任一向量 α 都可由向量组 B 线性表示,

称向量组 B 为 \mathbb{R}^n 的一组 $\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J}}$, 称 n 为 \mathbb{R}^n 的 $\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J}}$ 记为 $\dim \mathbb{R}^n = n$.

定义(基)

给定 \mathbb{R}^n 中的向量组 $B: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,若

- 向量组 B 线性无关;
- ② \mathbb{R}^n 中的任一向量 α 都可由向量组 B 线性表示,

称向量组 B 为 \mathbb{R}^n 的一组 $\overline{\mathbf{a}}$,称 n 为 \mathbb{R}^n 的 $\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{\mathbf{b}}$,记为 $\dim \mathbb{R}^n = n$ 。

注

- $\bullet \mathbb{R}^n$ 作为一个向量集合,基是它的极大无关组,而维数是它的秩;
- \mathbb{R}^n 的任意 n 个线性无关的向量组都构成 \mathbb{R}^n 的一组基,从而 \mathbb{R}^n 的基不唯一;
- 基本向量组

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

称为 \mathbb{R}^n 的自然基或标准基。

取定一组基后,向量空间的任一向量就可以由这组基线性表示,且表示系数是唯一的, 这样在向量空间就可以建立坐标的概念。

取定一组基后,向量空间的任一向量就可以由这组基线性表示,且表示系数是唯一的, 这样在向量空间就可以建立坐标的概念。

定义 (坐标)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 且有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标。

取定一组基后,向量空间的任一向量就可以由这组基线性表示,且表示系数是唯一的, 这样在向量空间就可以建立坐标的概念。

定义(坐标)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 且有

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n,$$

则称 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标。

注

取定一组基后,向量空间的任一向量就可以由这组基线性表示,且表示系数是唯一的, 这样在向量空间就可以建立坐标的概念。

定义 (坐标)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, $\alpha \in \mathbb{R}^n$,且有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标。

注

① 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是线性无关的,故 α 在这组基下的坐标是唯一的;

取定一组基后,向量空间的任一向量就可以由这组基线性表示,且表示系数是唯一的, 这样在向量空间就可以建立坐标的概念。

定义 (坐标)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, $\alpha \in \mathbb{R}^n$,且有

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n,$$

则称 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标。

注

- **①** 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是线性无关的,故 α 在这组基下的坐标是唯一的;
- ② 向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标常表示为

$$oldsymbol{lpha} = egin{bmatrix} oldsymbol{lpha}_1 & oldsymbol{lpha}_2 & \cdots & oldsymbol{lpha}_n \end{bmatrix} egin{bmatrix} x_1 \ x_2 \ dots \ x_n \end{bmatrix} = egin{bmatrix} oldsymbol{lpha}_1 & oldsymbol{lpha}_2 & \cdots & oldsymbol{lpha}_n \end{bmatrix} oldsymbol{x}.$$

例

设 \mathbb{R}^n 的两组基为自然基 $B_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 和 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$,其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 分别在两组基下的坐标。

例

设 \mathbb{R}^n 的两组基为自然基 $B_1=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 和 $B_2=\{eta_1,eta_2,\cdots,eta_n\}$,其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 分别在两组基下的坐标。

解

• α 在自然基 B_1 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 。

解 (续)

 \bullet 设 α 在基 B_2 下的坐标为 x,则它满足

$$oldsymbol{lpha} = egin{pmatrix} oldsymbol{eta}_1 & oldsymbol{eta}_1 & \cdots & oldsymbol{eta}_{n-1} & oldsymbol{eta}_n \end{pmatrix} oldsymbol{x}$$

解(续)

• 设 α 在基 B_2 下的坐标为 x,则它满足

$$\alpha = (\beta_1 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1} \quad \beta_n) x$$

由

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n \mid \alpha)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

解(续)

• 设 α 在基 B_2 下的坐标为 x,则它满足

$$\alpha = (\beta_1 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1} \quad \beta_n) x$$

庄

$$(oldsymbol{eta}_1 \quad oldsymbol{eta}_2 \quad \cdots \quad oldsymbol{eta}_n \mid oldsymbol{lpha})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & a_1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & | & a_2 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & | & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & | & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & | & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_{i+1}+r_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & | & a_1+a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & a_1+a_2+a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & | & \sum_{i=1}^{n-1} a_i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & \sum_{i=1}^{n} a_i \end{bmatrix}$$

知,

解(续)

• 设 α 在基 B_2 下的坐标为x,则它满足

$$\alpha = (\beta_1 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1} \quad \beta_n) x$$

庄

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n \mid \alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & a_1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & | & a_2 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & | & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & | & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & | & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_{i+1} + r_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & | & a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & | & \sum_{i=1}^{n-1} a_i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & \sum_{i=1}^{n} a_i \end{pmatrix}$$

知, α 在基 B_2 下的坐标为 $\left(a_1, \sum_{i=1}^2 a_i, \sum_{i=1}^3 a_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n-1} a_i, \sum_{i=1}^n a_i\right)$ 。

目录

- 1 向量空间
- 2 基、维数和坐标
- 3 基变换与坐标变换
- 4 欧式空间

问题

在 \mathbb{R}^n 中,任意 n 个线性无关的向量组都可以取作它的一个基,而同一个向量在不同基下的坐标一般是不相同的。那么,随着基的改变,向量的坐标又会发生怎样的改变呢?

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$
线性无关 $\iff |C| \neq 0.$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$
线性无关 $\iff |C| \neq 0.$

证明

$$\mbox{il } A=(\pmb{\alpha}_1,\pmb{\alpha}_2,\cdots,\pmb{\alpha}_n), \ \ B=(\pmb{\beta}_1,\pmb{\beta}_2,\cdots,\pmb{\beta}_n), \ \ \mbox{ill } B=AC, \ \ \mbox{ill } |A|\neq 0.$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$
线性无关 $\iff |C| \neq 0.$

证明

$$\label{eq:alpha} \mbox{id } A=(\pmb{\alpha}_1,\pmb{\alpha}_2,\cdots,\pmb{\alpha}_n), \ \ B=(\pmb{\beta}_1,\pmb{\beta}_2,\cdots,\pmb{\beta}_n), \ \ \mbox{\it M} \ \ B=AC, \ \ \mbox{\it I} \ \ |A|\neq 0,$$

 \Rightarrow

$$|\mathbf{A}| \neq 0$$
$$|\mathbf{B}| \neq 0$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$
线性无关 $\iff |C| \neq 0.$

证明

记
$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\;\;B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),\;\;$$
则 $B=AC,\;\;\exists\;|A|\neq 0$ 。

 \Rightarrow

$$\begin{vmatrix} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{vmatrix}$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_2, \cdots, oldsymbol{eta}_n$$
线性无关 $\iff |C|
eq 0.$

证明

记
$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\;\;B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),\;\;$$
则 $B=AC,\;\;\exists\;|A|\neq 0$ 。

 \Rightarrow

$$\begin{vmatrix} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{vmatrix} \implies |C| \neq 0.$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$
线性无关 $\iff |C| \neq 0.$

证明

$$\label{eq:alpha} \mbox{id } A=(\pmb{\alpha}_1,\pmb{\alpha}_2,\cdots,\pmb{\alpha}_n), \ \ B=(\pmb{\beta}_1,\pmb{\beta}_2,\cdots,\pmb{\beta}_n), \ \ \mbox{\it M} \ \ B=AC, \ \ \mbox{\it E} \ \ |A|\neq 0.$$

 \Rightarrow

$$\begin{vmatrix} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{vmatrix} \implies |C| \neq 0.$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$
线性无关 $\iff |C| \neq 0.$

证明

$$\label{eq:alpha} \mbox{id } A=(\pmb{\alpha}_1,\pmb{\alpha}_2,\cdots,\pmb{\alpha}_n), \ \ B=(\pmb{\beta}_1,\pmb{\beta}_2,\cdots,\pmb{\beta}_n), \ \ \mbox{\it M} \ \ B=AC, \ \ \mbox{\it E} \ \ |A|\neq 0.$$

 \Rightarrow

$$\begin{vmatrix} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{vmatrix} \implies |C| \neq 0.$$

$$Bx = 0 \implies ACx = 0$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$
线性无关 $\iff |C| \neq 0.$

证明

$$\label{eq:alpha} \mbox{id } A=(\pmb{\alpha}_1,\pmb{\alpha}_2,\cdots,\pmb{\alpha}_n), \ \ B=(\pmb{\beta}_1,\pmb{\beta}_2,\cdots,\pmb{\beta}_n), \ \ \mbox{\it M} \ \ B=AC, \ \ \mbox{\it E} \ \ |A|\neq 0.$$

 \Rightarrow

$$\begin{vmatrix} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{vmatrix} \implies |C| \neq 0.$$

$$egin{aligned} m{B}m{x} = m{0} & \Longrightarrow & m{A}m{C}m{x} = m{0} \\ |m{A}|
eq 0 & \end{aligned}$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$
线性无关 $\iff |C| \neq 0.$

证明

$$\label{eq:alpha} \mbox{id } A=(\pmb{\alpha}_1,\pmb{\alpha}_2,\cdots,\pmb{\alpha}_n), \ \ B=(\pmb{\beta}_1,\pmb{\beta}_2,\cdots,\pmb{\beta}_n), \ \ \mbox{\it M} \ \ B=AC, \ \ \mbox{\it E} \ \ |A|\neq 0.$$

 \Rightarrow

$$\begin{vmatrix} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{vmatrix} \implies |C| \neq 0.$$

$$egin{aligned} Bx=0 &\Longrightarrow ACx=0 \ |A|
eq 0 \end{aligned}
ight. egin{aligned} Cx=0 \end{aligned}$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$
线性无关 $\iff |C| \neq 0.$

证明

$$\ \, i \exists \ \, \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n), \ \, \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n), \ \, \boldsymbol{\mathbb{M}} \, \, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}, \ \, \boldsymbol{\mathbb{E}} \, \, |\boldsymbol{A}| \neq 0.$$

 \Rightarrow

$$\begin{vmatrix} |\mathbf{A}| \neq 0 \\ |\mathbf{B}| \neq 0 \\ |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||C| \end{vmatrix} \implies |C| \neq 0.$$

$$egin{aligned} m{B}m{x} = m{0} & \Longrightarrow & m{A}m{C}m{x} = m{0} \ |m{A}|
eq 0 \end{aligned} igg\} & \Longrightarrow & m{C}m{x} = m{0} \ |m{C}|
eq 0 \end{aligned}$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基,且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则

$$oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_2, \cdots, oldsymbol{eta}_n$$
线性无关 $\iff |C| \neq 0.$

证明

$$\label{eq:alpha} \mbox{id } A=(\pmb{\alpha}_1,\pmb{\alpha}_2,\cdots,\pmb{\alpha}_n), \ \ B=(\pmb{\beta}_1,\pmb{\beta}_2,\cdots,\pmb{\beta}_n), \ \ \mbox{\it M} \ \ B=AC, \ \ \mbox{\it E} \ \ |A|\neq 0.$$

 \Rightarrow

$$\begin{vmatrix} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{vmatrix} \implies |C| \neq 0.$$

$$egin{aligned} Bx=0 &\Longrightarrow ACx=0 \ |A|
eq 0 \end{aligned}
ight. egin{aligned} egin{aligned} Ex=0 \ |C|
eq 0 \end{aligned}
ight.
ight.$$

定义 (过渡矩阵)

设 \mathbb{R}^n 中的两组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则称矩阵 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 称为由旧基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到新基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵 (也称基变换矩阵)。

定理

设有 \mathbb{R}^n 的旧基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与新基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$,由旧基到新基的过渡矩阵为 C,即

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C.$$

若向量 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标分别为

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$
 \mathbf{n} $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$

则..

$$Cy = x \quad \vec{\boxtimes} \quad y = C^{-1}x,$$

此即 坐标变换公式。

定理

设有 \mathbb{R}^n 的旧基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与新基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$,由旧基到新基的过渡矩阵为 C,即

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C.$$

若向量 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标分别为

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$
 \mathbb{H} $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$

则..

$$Cy = x \quad \vec{\mathbf{y}} \quad y = C^{-1}x,$$

此即 坐标变换公式。

证明.

由 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 x 知

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)x$$

由 α 在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标为 x 知

$$\alpha = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) y = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) C y$$

这意味着 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 Cy。由坐标的唯一性知 x = Cy。

例

已知 \mathbb{R}^3 的一组基为 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, 其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 2, 1)^T, \ \boldsymbol{\beta}_2 = (1, -1, 0)^T, \ \boldsymbol{\beta}_3 = (1, 0, -1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

例

已知 \mathbb{R}^3 的一组基为 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$,其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 2, 1)^T, \ \boldsymbol{\beta}_2 = (1, -1, 0)^T, \ \boldsymbol{\beta}_3 = (1, 0, -1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

解.

设自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 A,则

$$egin{pmatrix} eta_1 & oldsymbol{eta}_2 & oldsymbol{eta}_3 \end{pmatrix} = egin{pmatrix} oldsymbol{e}_1 & oldsymbol{e}_2 & oldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} oldsymbol{A}$$

从而

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



例

已知 \mathbb{R}^3 的两组基为 $B_1=\{lpha_1,lpha_2,lpha_3\}$ 和 $B_2=\{eta_1,eta_2,eta_3\}$,其中 $oldsymbol{lpha}_1=(1,1,1)^T,\quad oldsymbol{lpha}_2=(0,1,1)^T,\quad oldsymbol{lpha}_3=(0,0,1)^T, \\ oldsymbol{eta}_1=(1,0,1)^T,\quad oldsymbol{eta}_2=(0,1,-1)^T,\quad oldsymbol{eta}_3=(1,2,0)^T.$

- (1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。
- (2) 已知 α 在基 B_1 的坐标为 $(1,-2,-1)^T$,求 α 在基 B_2 下的坐标。

例

已知 \mathbb{R}^3 的两组基为 $B_1=\{m{lpha}_1,m{lpha}_2,m{lpha}_3\}$ 和 $B_2=\{m{eta}_1,m{eta}_2,m{eta}_3\}$,其中 $m{lpha}_1=(1,1,1)^T, \quad m{lpha}_2=(0,1,1)^T, \quad m{lpha}_3=(0,0,1)^T, \\ m{eta}_1=(1,0,1)^T, \quad m{eta}_2=(0,1,-1)^T, \quad m{eta}_3=(1,2,0)^T.$

- (1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。
- (2) 已知 α 在基 B_1 的坐标为 $(1,-2,-1)^T$,求 α 在基 B_2 下的坐标。

解.

设自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 A, 则 $(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} A$. 由

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & | & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

解(续).

设 α 在基 B_2 下的坐标为 y, 则

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} := x$$

由

$$(A \quad | \quad x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & -2 \\ 1 & -2 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

知

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



目录

- 1 向量空间
- 2 基、维数和坐标
- 3 基变换与坐标变换
- **4** 欧式空间

定义 (向量内积)

在 \mathbb{R}^n 中,对于 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 和 $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,规定 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的内积为 $(\mathbf{x},\mathbf{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$

定义 (向量内积)

在
$$\mathbb{R}^n$$
 中,对于 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 和 $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,规定 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的内积为
$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

注

当 x 和 y 为列向量时,

$$(x, y) = x^T y = y^T x.$$

定义 (向量内积)

在 \mathbb{R}^n 中,对于 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$,规定 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的内积为 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$

注

当 x 和 y 为列向量时,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}.$$

定义 (向量长度)

向量 x 的长度定义为

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

内积的运算性质

对于 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{R}$,

- $\bullet (x,y) = (y,x)$
- (x + y, z) = (x, z) + (y, z)
- $\bullet (kx, y) = k(x, y)$
- $(x,x) \ge 0$, 等号成立当且仅当 x = 0.

内积的运算性质

对于 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{R}$,

- $\bullet (x,y) = (y,x)$
- (x + y, z) = (x, z) + (y, z)
- $\bullet (kx, y) = k(x, y)$
- $(x,x) \geq 0$,等号成立当且仅当 x = 0.

定义 (欧几里得空间)

定义了内积运算的 \mathbb{R}^n , 称为 n 维欧几里得空间(简称欧氏空间),仍记为 \mathbb{R}^n 。

定理 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

 $|(x, y)| \le ||x|| ||y||$

定理 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(x, y)| \le ||x|| ||y||$$

证明.

 $\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathbf{f}$

$$(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) \ge 0$$

即

$$(y, y)t^{2} + 2(x, y)t + (x, x) \ge 0$$

此为关于 t 的二次函数,由一元二次方程理论可知

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \le 0$$

即

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

亦即

$$|(x, y)| \le ||x|| ||y||$$

定理 (三角不等式)

$$||x + y|| \le ||x|| + ||y||.$$

定理 (三角不等式)

$$||x + y|| \le ||x|| + ||y||.$$

证明.

$$\begin{aligned} (x + y, x + y) &&= (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \\ &&\leq (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \\ &&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &&\leq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$



由 Cauchy-Schwarz 不等式可知,当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时,有

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} \leq 1$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可知,当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时,有

$$-1 \le \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} \le 1$$

由此可定义

定义 (向量的夹角)

当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时,称

$$\langle oldsymbol{x}, oldsymbol{y}
angle = rccos rac{(oldsymbol{x}, oldsymbol{y})}{\|oldsymbol{x}\| \cdot \|oldsymbol{y}\|}$$

为向量 x, y 的夹角。

由 Cauchy-Schwarz 不等式可知,当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时,有

$$-1 \le \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} \le 1$$

由此可定义

定义 (向量的夹角)

当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时,称

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \arccos \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|}$$

为向量 x, y 的夹角。

定义 (正交)

当 (x,y)=0 时,称 x 与 y 正交。显然,零向量与任何向量正交。

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 $\frac{1}{1}$ 零正交向量组。

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 非零正交向量组。

定理

非零正交向量组必线性无关。

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 非零正交向量组。

定理

非零正交向量组必线性无关。

证明.

对于非零正交向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_A} \in \mathbb{R}^n$, 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A} = 0,$$

则

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A}, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A,$$

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 $\frac{1}{1}$ 零正交向量组。

定理

非零正交向量组必线性无关。

证明.

对于非零正交向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_A} \in \mathbb{R}^n$, 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A} = 0,$$

则

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A}, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A,$$

即

$$k_j(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n_A.$$

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 $\frac{1}{1}$ 零正交向量组。

定理

非零正交向量组必线性无关。

证明.

对于非零正交向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_A} \in \mathbb{R}^n$, 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A} = 0,$$

则

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A}, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A,$$

即

$$k_j(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n_A.$$

由于 $(\alpha_j, \alpha_j) > 0$, 故

$$k_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n_A.$$

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 $\frac{1}{1}$ 零正交向量组。

定理

非零正交向量组必线性无关。

证明.

对于非零正交向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_A} \in \mathbb{R}^n$, 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A} = 0,$$

则

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A}, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A,$$

即

$$k_i(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n_A.$$

由于 $(\alpha_j, \alpha_j) > 0$, 故

$$k_i = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n_A.$$

因此, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_A}$ 线性无关。

Ш

定义 (标准正交基)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \left\{ egin{array}{ll} 1, & i = j, \\ 0, & i
eq j. \end{array}
ight. \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基。

定义 (标准正交基)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \left\{ egin{array}{ll} 1, & i = j, \\ 0, & i
eq j. \end{array}
ight. \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基。

例

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基,求 \mathbb{R}^n 中向量 β 在基 A 下的坐标。

定义 (标准正交基)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \left\{ egin{array}{ll} 1, & i = j, \\ 0, & i
eq j. \end{array} \right. \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基。

例

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基,求 \mathbb{R}^n 中向量 β 在基 A 下的坐标。

解

$$\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$$

$$\implies (\beta, \alpha_j) = (x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n, \alpha_j) = x_j (\alpha_j, \alpha_j) = x_j$$

$$\implies x_j = (\beta, \alpha_j).$$

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 出发,构造一组标准正交向量组?

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 出发,构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 出发,构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

给定 \mathbb{R}^n 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$,

(1) $\mathbb{R} \beta_1 = \alpha_1$

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 出发,构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

- (1) $\mathbb{R} \beta_1 = \alpha_1$
- (2) $\Rightarrow \beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$,

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 出发,构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

- (1) $\mathbb{R} \beta_1 = \alpha_1$
- (2) $\Rightarrow \beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1$$

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 出发,构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

- (1) $\mathbb{R} \beta_1 = \alpha_1$
- (2) $\Rightarrow \beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \implies (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21} \boldsymbol{\beta}_1) = 0$$

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 出发,构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

- (1) $\mathbb{R} \beta_1 = \alpha_1$
- $(2) \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1,$

$$\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \implies (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1) = 0 \implies k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}$$

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 出发,构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

给定 \mathbb{R}^n 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$,

- (1) $\mathbb{R} \beta_1 = \alpha_1$
- $(2) \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1,$

$$\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1 \implies (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + k_{21}\boldsymbol{\beta}_1) = 0 \implies k_{21} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}$$

故

$$oldsymbol{eta}_2 = oldsymbol{lpha}_2 - rac{(oldsymbol{lpha}_2, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1$$

(3)
$$\Leftrightarrow \beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$$
,

(3) 令
$$\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$$
, 对 $i = 1, 2$ 有

$$\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_j$$

(3) 令
$$\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$$
, 对 $i = 1, 2$ 有

$$\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_j \implies (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_j) = (\boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_j) = 0$$

(3) 令
$$\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$$
, 对 $i = 1, 2$ 有

$$\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_j \implies (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_j) = (\boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_j) = 0 \implies k_{3j} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j)}$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(3) 令
$$\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$$
, 对 $i = 1, 2$ 有

$$\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_j \implies (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_j) = (\boldsymbol{\alpha}_3 + k_{31}\boldsymbol{\beta}_1 + k_{32}\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_j) = 0 \implies k_{3j} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j)}$$

故

$$oldsymbol{eta}_3 = oldsymbol{lpha}_3 - rac{(oldsymbol{lpha}_3, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1 - rac{(oldsymbol{lpha}_3, oldsymbol{eta}_2)}{(oldsymbol{eta}_2, oldsymbol{eta}_2)} oldsymbol{eta}_2$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $oldsymbol{eta}_1,oldsymbol{eta}_2,\cdots,oldsymbol{eta}_{j-1}$,

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $oldsymbol{eta}_1,oldsymbol{eta}_2,\cdots,oldsymbol{eta}_{i-1}$,取

$$oldsymbol{eta}_j = oldsymbol{lpha}_j + k_{j1}oldsymbol{eta}_1 + k_{j2}oldsymbol{eta}_2 + \dots + + k_{j,j-1}oldsymbol{eta}_{j-1} = oldsymbol{lpha}_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}oldsymbol{eta}_s,$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1}$,取

$$oldsymbol{eta}_j = oldsymbol{lpha}_j + k_{j1}oldsymbol{eta}_1 + k_{j2}oldsymbol{eta}_2 + \dots + k_{j,j-1}oldsymbol{eta}_{j-1} = oldsymbol{lpha}_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}oldsymbol{eta}_s,$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $eta_1,eta_2,\cdots,eta_{i-1}$,取

$$m{eta}_j = m{lpha}_j + k_{j1} m{eta}_1 + k_{j2} m{eta}_2 + \dots + k_{j,j-1} m{eta}_{j-1} = m{lpha}_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js} m{eta}_s,$$

$${\boldsymbol{\beta}}_j \perp {\boldsymbol{\beta}}_i \implies ({\boldsymbol{\beta}}_j, {\boldsymbol{\beta}}_i) = 0$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $oldsymbol{eta}_1,oldsymbol{eta}_2,\cdots,oldsymbol{eta}_{i-1}$,取

$$m{eta}_j = m{lpha}_j + k_{j1} m{eta}_1 + k_{j2} m{eta}_2 + \dots + k_{j,j-1} m{eta}_{j-1} = m{lpha}_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js} m{eta}_s,$$

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \implies (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \implies (\boldsymbol{\alpha}_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js} \boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_i) = 0$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $oldsymbol{eta}_1,oldsymbol{eta}_2,\cdots,oldsymbol{eta}_{i-1}$,取

$$oldsymbol{eta}_j = oldsymbol{lpha}_j + k_{j1}oldsymbol{eta}_1 + k_{j2}oldsymbol{eta}_2 + \dots + k_{j,j-1}oldsymbol{eta}_{j-1} = oldsymbol{lpha}_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}oldsymbol{eta}_s,$$

$$\boldsymbol{\beta}_{j} \perp \boldsymbol{\beta}_{i} \implies (\boldsymbol{\beta}_{j}, \boldsymbol{\beta}_{i}) = 0 \implies (\boldsymbol{\alpha}_{j} + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js} \boldsymbol{\beta}_{s}, \boldsymbol{\beta}_{i}) = 0 \implies k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_{j}, \boldsymbol{\beta}_{i})}{(\boldsymbol{\beta}_{i}, \boldsymbol{\beta}_{i})}$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤,假设已经求出两两正交的非零向量 $oldsymbol{eta}_1,oldsymbol{eta}_2,\cdots,oldsymbol{eta}_{i-1}$,取

$$oldsymbol{eta}_j = oldsymbol{lpha}_j + k_{j1}oldsymbol{eta}_1 + k_{j2}oldsymbol{eta}_2 + \dots + k_{j,j-1}oldsymbol{eta}_{j-1} = oldsymbol{lpha}_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}oldsymbol{eta}_s,$$

对 $i = 1, 2, \cdots, j - 1$, 有

$$\boldsymbol{\beta}_j \perp \boldsymbol{\beta}_i \implies (\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \implies (\boldsymbol{\alpha}_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js} \boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_i) = 0 \implies k_{ji} = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i)}$$

故

$$oldsymbol{eta}_j = oldsymbol{lpha}_j - rac{(oldsymbol{lpha}_j, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1 - rac{(oldsymbol{lpha}_j, oldsymbol{eta}_2)}{(oldsymbol{eta}_2, oldsymbol{eta}_2)} oldsymbol{eta}_2 - \cdots - rac{(oldsymbol{lpha}_j, oldsymbol{eta}_{j-1})}{(oldsymbol{eta}_{j-1}, oldsymbol{eta}_{j-1})} oldsymbol{eta}_{j-1}.$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(5) 单位化

$$\boldsymbol{\beta}_{1}, \boldsymbol{\beta}_{2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{m} \xrightarrow{\boldsymbol{\eta}_{j} = \frac{\boldsymbol{\beta}_{j}}{\|\boldsymbol{\beta}_{j}\|}} \boldsymbol{\eta}_{1}, \boldsymbol{\eta}_{2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{m}$$

例

已知 $B = {\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基,其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$.

试用施密特正交化方法,由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

例

已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基,其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$.

试用施密特正交化方法,由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T,$$

例

已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基,其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$.

试用施密特正交化方法,由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$

$$oldsymbol{eta}_2 = oldsymbol{lpha}_2 - rac{(oldsymbol{lpha}_2, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1$$

例

已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基,其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$.

试用施密特正交化方法,由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$= (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2} (1, -1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

例

已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基,其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$.

试用施密特正交化方法,由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

$$\begin{split} \boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 0)^T, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 \\ &= (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2} (1, -1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \\ \boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)} \boldsymbol{\beta}_2 \end{split}$$

例

已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基,其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$$
, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$.

试用施密特正交化方法,由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

$$\begin{split} \boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 0)^T, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 \\ &= (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2} (1, -1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \\ \boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)} \boldsymbol{\beta}_2 \\ &= (1, -1, 1)^T - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T - \frac{2}{2} (1, -1, 0)^T = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right). \end{split}$$

解(续)

$$\begin{split} & \boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\ & \boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\ & \boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{split}$$

定义 (正交矩阵)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

则称 A 为正交矩阵。

定理

A为正交矩阵 \iff A的列向量组为一组标准正交基。

定理

A为正交矩阵 \iff A的列向量组为一组标准正交基。

证明.

将 A 按列分块为 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 则

$$oldsymbol{A}^Toldsymbol{A} = \left(egin{array}{c} oldsymbol{lpha}_1^T \ oldsymbol{lpha}_2^T \ dots \ oldsymbol{lpha}_n^T \end{array}
ight) (oldsymbol{lpha}_1, oldsymbol{lpha}_2, \cdots, oldsymbol{lpha}_n) = \left(egin{array}{ccc} oldsymbol{lpha}_1^T oldsymbol{lpha}_1 & oldsymbol{lpha}_1^T oldsymbol{lpha}_2 & \cdots & oldsymbol{lpha}_1^T oldsymbol{lpha}_n \ dots & dots & dots & dots & dots \ oldsymbol{lpha}_n^T oldsymbol{lpha}_1 & oldsymbol{lpha}_n^T oldsymbol{lpha}_2 & \cdots & oldsymbol{lpha}_n^T oldsymbol{lpha}_n \end{array}
ight)$$

定理

A为正交矩阵 \iff A的列向量组为一组标准正交基。

证明.

将 A 按列分块为 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T \boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T \boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

因此

$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$
 \iff
$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_{i}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{i} = 1, & i = 1, 2, \cdots, n \\ \boldsymbol{\alpha}_{i}^{T}\boldsymbol{\alpha}_{j} = 0, & j \neq i, i, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

← A的列向量组为一组标准正交基。

定理

设 A, B 皆为 n 阶正交矩阵,则

- (1) |A| = 1 或 -1
- (2) $A^{-1} = A^T$
- (3) A^T 也是正交矩阵
- (4) AB 也是正交矩阵

定理

设 A, B 皆为 n 阶正交矩阵, 则

- (1) |A| = 1 或 -1
- (2) $A^{-1} = A^T$
- (3) A^T 也是正交矩阵
- (4) AB 也是正交矩阵

证明.

(1) 由 $AA^T = I$ 知

定理

设 A, B 皆为 n 阶正交矩阵, 则

- (1) |A| = 1 或 -1
- (2) $A^{-1} = A^T$
- (3) A^T 也是正交矩阵
- (4) AB 也是正交矩阵

证明.

(1) 由
$$AA^T = I$$
 知

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^T| = 1 \implies |\boldsymbol{A}| = 1 \ \vec{\boldsymbol{y}} \ -1.$$

(2) 显然成立。

定理

设 A, B 皆为 n 阶正交矩阵,则

- (1) |A| = 1 或 -1
- (2) $A^{-1} = A^T$
- (3) A^T 也是正交矩阵
- (4) AB 也是正交矩阵

证明.

(1) 由 $AA^T = I$ 知

- (2) 显然成立。
- (3) 由 $(A^T)^TA^T=AA^T=AA^{-1}=I$ 知, A^T (即 A^{-1}) 也是正交矩阵,从而 A 的行向量组也是 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基。

定理

设 A, B 皆为 n 阶正交矩阵, 则

- (1) |A| = 1 或 -1
- (2) $A^{-1} = A^T$
- (3) A^T 也是正交矩阵
- (4) AB 也是正交矩阵

证明.

(1) 由 $AA^T = I$ 知

- (2) 显然成立。
- (3) 由 $(A^T)^TA^T=AA^T=AA^{-1}=I$ 知, A^T (即 A^{-1}) 也是正交矩阵,从而 A 的行向量组也是 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基。
- (4) 由 $(AB)^TAB = B^TA^TAB = B^TB = I$, 即 AB 也是正交矩阵。



定理

设 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 A 的作用下变换为 $Ax,Ay\in\mathbb{R}^n$,则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变,即

$$(oldsymbol{A}oldsymbol{x},oldsymbol{A}oldsymbol{y})=(oldsymbol{x},oldsymbol{y}), \ \|oldsymbol{A}oldsymbol{x}\|=\|oldsymbol{x}\|, \ \langleoldsymbol{A}oldsymbol{x},oldsymbol{A}oldsymbol{y}
angle=\langleoldsymbol{x},oldsymbol{y}
angle.$$

定理

设 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 A 的作用下变换为 $Ax,Ay\in\mathbb{R}^n$,则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变,即

$$(Ax,Ay)=(x,y),$$
 $\|Ax\|=\|x\|,$ $\langle Ax,Ay
angle =\langle x,y
angle.$

证明.

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

定理

设 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 A 的作用下变换为 $Ax,Ay\in\mathbb{R}^n$,则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变,即

$$(Ax,Ay)=(x,y),$$
 $\|Ax\|=\|x\|,$ $\langle Ax,Ay
angle =\langle x,y
angle.$

证明.

$$(Ax, Ay) = (Ax)^{T}(Ay) = x^{T}(A^{T}A)y = x^{T}y = (x, y).$$

当 y=x 时,有 (Ax,Ax)=(x,x),即 $\|Ax\|=\|x\|$ 。同理, $\|Ay\|=\|y\|$ 。

定理

设 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 A 的作用下变换为 $Ax,Ay\in\mathbb{R}^n$,则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变,即

$$(Ax,Ay)=(x,y),$$
 $\|Ax\|=\|x\|,$ $\langle Ax,Ay
angle =\langle x,y
angle.$

证明.

$$(Ax, Ay) = (Ax)^T (Ay) = x^T (A^T A)y = x^T y = (x, y).$$

当 y=x 时,有 (Ax,Ax)=(x,x),即 $\|Ax\|=\|x\|$ 。同理, $\|Ay\|=\|y\|$ 。因此,

$$\cos\langle Ax,Ay
angle = rac{(Ax,Ay)}{\|Ax\|\cdot\|Ay\|} = rac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|} = \cos\langle x,y
angle.$$

