



线性代数

向量空间

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 11 月 28 日



1 向量空间

2 基、维数和坐标

3 基变换与坐标变换

4 欧式空间

1 向量空间

2 基、维数和坐标

3 基变换与坐标变换

4 欧式空间

n 元向量

实数域 \mathbb{R} 上的 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 构成的有序数组称为 \mathbb{R} 上的一个 n 元向量, 记为

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1)$$

其中 a_i 称为 α 的第 i 个分量。

n 元向量

实数域 \mathbb{R} 上的 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 构成的有序数组称为 \mathbb{R} 上的一个 n 元向量, 记为

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1)$$

其中 a_i 称为 α 的第 i 个分量。 \mathbb{R} 上全体 n 元向量组成的集合, 记作 \mathbb{R}^n 。

n 元向量

实数域 \mathbb{R} 上的 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 构成的有序数组称为 \mathbb{R} 上的一个 n 元向量, 记为

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1)$$

其中 a_i 称为 α 的第 i 个分量。 \mathbb{R} 上全体 n 元向量组成的集合, 记作 \mathbb{R}^n 。

向量运算

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$, 定义

① 向量加法

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

② 向量数乘

$$k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

向量空间

在 \mathbb{R}^n 中定义加法与数乘运算，且 \mathbb{R}^n 对加法和数乘封闭，即

- $\alpha \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \implies k\alpha \in \mathbb{R}^n$
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \implies \alpha + \beta \in \mathbb{R}^n$

则称 \mathbb{R}^n 为 n 维向量空间，仍记为 \mathbb{R}^n 。

向量空间

在 \mathbb{R}^n 中定义加法与数乘运算, 且 \mathbb{R}^n 对加法和数乘封闭, 即

- $\alpha \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \implies k\alpha \in \mathbb{R}^n$
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \implies \alpha + \beta \in \mathbb{R}^n$

则称 \mathbb{R}^n 为 n 维向量空间, 仍记为 \mathbb{R}^n 。

向量空间的 8 条运算规则

设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n, 1, k, l \in \mathbb{R}$, 则

- (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- (2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- (3) 对任一向量 α , 有 $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$
- (4) 对任一向量 α , 存在负向量 $-\alpha$, 使得 $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$
- (5) $1\alpha = \alpha$
- (6) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
- (7) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$
- (8) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

1 向量空间

2 基、维数和坐标

3 基变换与坐标变换

4 欧式空间

定义 (基)

给定 \mathbb{R}^n 中的向量组 $B: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 若

- ① 向量组 B 线性无关;
- ② \mathbb{R}^n 中的任一向量 α 都可由向量组 B 线性表示,

称向量组 B 为 \mathbb{R}^n 的一组 基, 称 n 为 \mathbb{R}^n 的 维数, 记为 $\dim \mathbb{R}^n = n$ 。

定义 (基)

给定 \mathbb{R}^n 中的向量组 $B: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 若

- ① 向量组 B 线性无关;
- ② \mathbb{R}^n 中的任一向量 α 都可由向量组 B 线性表示,

称向量组 B 为 \mathbb{R}^n 的一组 **基**, 称 n 为 \mathbb{R}^n 的 **维数**, 记为 $\dim \mathbb{R}^n = n$ 。

注

- \mathbb{R}^n 作为一个向量集合, 基是它的极大无关组, 而维数是它的秩;
- \mathbb{R}^n 的任意 n 个线性无关的向量组都构成 \mathbb{R}^n 的一组基, 从而 \mathbb{R}^n 的基不唯一;
- 基本向量组

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

称为 \mathbb{R}^n 的自然基或标准基。

取定一组基后，向量空间的任一向量就可以由这组基线性表示，且表示系数是唯一的，这样在向量空间就可以建立坐标的概念。

基、维数和坐标

取定一组基后，向量空间的任一向量就可以由这组基线性表示，且表示系数是唯一的，这样在向量空间就可以建立坐标的概念。

定义 (坐标)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基， $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ，且有

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n,$$

则称 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标。

基、维数和坐标

取定一组基后，向量空间的任一向量就可以由这组基线性表示，且表示系数是唯一的，这样在向量空间就可以建立坐标的概念。

定义 (坐标)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基， $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ，且有

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n,$$

则称 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标。

注

基、维数和坐标

取定一组基后，向量空间的任一向量就可以由这组基线性表示，且表示系数是唯一的，这样在向量空间就可以建立坐标的概念。

定义 (坐标)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基， $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ，且有

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n,$$

则称 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标。

注

- ① 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性无关的，故 α 在这组基下的坐标是唯一的；

基、维数和坐标

取定一组基后，向量空间的任一向量就可以由这组基线性表示，且表示系数是唯一的，这样在向量空间就可以建立坐标的概念。

定义 (坐标)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基， $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ，且有

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n,$$

则称 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标。

注

- ① 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性无关的，故 α 在这组基下的坐标是唯一的；
- ② 向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标常表示为

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} x.$$

例

设 \mathbb{R}^n 的两组基为自然基 $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 和 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, 其中

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \beta_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 分别在两组基下的坐标。

例

设 \mathbb{R}^n 的两组基为自然基 $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 和 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, 其中

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \beta_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 分别在两组基下的坐标。

解

- α 在自然基 B_1 下的坐标为 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 。

解 (续)

- 设 α 在基 B_2 下的坐标为 x , 则它满足

$$\alpha = (\beta_1 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1} \quad \beta_n) x$$

解 (续)

- 设 α 在基 B_2 下的坐标为 x , 则它满足

$$\alpha = (\beta_1 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1} \quad \beta_n) x$$

由

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n \mid \alpha)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & a_n \end{array} \right)$$

解 (续)

- 设 α 在基 B_2 下的坐标为 x , 则它满足

$$\alpha = (\beta_1 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1} \quad \beta_n) x$$

由

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n \mid \alpha)$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & a_n \end{array} \right) \xrightarrow[i=1, \dots, n-1]{r_{i+1} + r_i} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \sum_{i=1}^{n-1} a_i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \sum_{i=1}^n a_i \end{array} \right)$$

知,

解 (续)

- 设 α 在基 B_2 下的坐标为 x , 则它满足

$$\alpha = (\beta_1 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1} \quad \beta_n) x$$

由

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n \mid \alpha)$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & a_n \end{array} \right) \xrightarrow[i=1, \cdots, n-1]{r_{i+1}+r_i} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \sum_{i=1}^{n-1} a_i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \sum_{i=1}^n a_i \end{array} \right)$$

知, α 在基 B_2 下的坐标为 $\left(a_1, \sum_{i=1}^2 a_i, \sum_{i=1}^3 a_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n-1} a_i, \sum_{i=1}^n a_i \right)$ 。

1 向量空间

2 基、维数和坐标

3 基变换与坐标变换

4 欧式空间

问题

在 \mathbb{R}^n 中，任意 n 个线性无关的向量组都可以取作它的一个基，而同一个向量在不同基下的坐标一般是不相同的。那么，随着基的改变，向量的坐标又会发生怎样的改变呢？

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 线性无关} \iff |C| \neq 0.$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 线性无关} \iff |C| \neq 0.$$

证明

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则 $B = AC$, 且 $|A| \neq 0$ 。

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 线性无关} \iff |C| \neq 0.$$

证明

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则 $B = AC$, 且 $|A| \neq 0$ 。

\Rightarrow

$$|A| \neq 0$$

$$|B| \neq 0$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 线性无关} \iff |C| \neq 0.$$

证明

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则 $B = AC$, 且 $|A| \neq 0$ 。

\Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{array} \right\}$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 线性无关} \iff |C| \neq 0.$$

证明

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则 $B = AC$, 且 $|A| \neq 0$ 。

\Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{array} \right\} \implies |C| \neq 0.$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 线性无关} \iff |C| \neq 0.$$

证明

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则 $B = AC$, 且 $|A| \neq 0$ 。

\Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{array} \right\} \implies |C| \neq 0.$$

\Rightarrow 欲证 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关, 只需证 $Bx = 0$ 只有零解。

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 线性无关} \iff |C| \neq 0.$$

证明

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则 $B = AC$, 且 $|A| \neq 0$ 。

\Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{array} \right\} \implies |C| \neq 0.$$

\Rightarrow 欲证 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关, 只需证 $Bx = 0$ 只有零解。

$$Bx = 0 \implies ACx = 0$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 线性无关} \iff |C| \neq 0.$$

证明

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则 $B = AC$, 且 $|A| \neq 0$.

\Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{array} \right\} \implies |C| \neq 0.$$

\Rightarrow 欲证 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关, 只需证 $Bx = 0$ 只有零解。

$$\left. \begin{array}{l} Bx = 0 \implies ACx = 0 \\ |A| \neq 0 \end{array} \right\}$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 线性无关} \iff |C| \neq 0.$$

证明

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则 $B = AC$, 且 $|A| \neq 0$.

\Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{array} \right\} \Rightarrow |C| \neq 0.$$

\Rightarrow 欲证 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关, 只需证 $Bx = 0$ 只有零解。

$$\left. \begin{array}{l} Bx = 0 \\ |A| \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ACx = 0 \Rightarrow Cx = 0$$

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 线性无关} \iff |C| \neq 0.$$

证明

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则 $B = AC$, 且 $|A| \neq 0$ 。

\Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{array} \right\} \Rightarrow |C| \neq 0.$$

\Rightarrow 欲证 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关, 只需证 $Bx = 0$ 只有零解。

$$\left. \begin{array}{l} Bx = 0 \\ |A| \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Cx = 0 \\ |C| \neq 0 \end{array} \right\}$$

基变换与坐标变换

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 线性无关} \iff |C| \neq 0.$$

证明

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则 $B = AC$, 且 $|A| \neq 0$.

\Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \\ |B| = |A||C| \end{array} \right\} \Rightarrow |C| \neq 0.$$

\Rightarrow 欲证 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关, 只需证 $Bx = 0$ 只有零解。

$$\left. \begin{array}{l} Bx = 0 \\ |A| \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Cx = 0 \\ |C| \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0.$$

定义 (过渡矩阵)

设 \mathbb{R}^n 中的两组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 满足关系式

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

则称矩阵 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 称为由旧基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到新基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的**过渡矩阵** (也称**基变换矩阵**)。

定理

设有 \mathbb{R}^n 的旧基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与新基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 由旧基到新基的过渡矩阵为 C , 即

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C.$$

若向量 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标分别为

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ 和 } y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

则..

$$Cy = x \text{ 或 } y = C^{-1}x,$$

此即 坐标变换公式。

基变换与坐标变换

定理

设有 \mathbb{R}^n 的旧基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与新基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 由旧基到新基的过渡矩阵为 C , 即

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C.$$

若向量 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标分别为

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ 和 } y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

则..

$$Cy = x \text{ 或 } y = C^{-1}x,$$

此即 坐标变换公式。

证明.

由 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 x 知

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)x$$

由 α 在 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标为 y 知

$$\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)y = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)Cy$$

这意味着 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 Cy 。由坐标的唯一性知 $x = Cy$ 。



例

已知 \mathbb{R}^3 的一组基为 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, 其中

$$\beta_1 = (1, 2, 1)^T, \beta_2 = (1, -1, 0)^T, \beta_3 = (1, 0, -1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

例

已知 \mathbb{R}^3 的一组基为 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, 其中

$$\beta_1 = (1, 2, 1)^T, \beta_2 = (1, -1, 0)^T, \beta_3 = (1, 0, -1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

解.

设自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 A , 则

$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = (e_1 \quad e_2 \quad e_3) A$$

从而

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



例

已知 \mathbb{R}^3 的两组基为 $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 和 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, 其中

$$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \quad \alpha_3 = (0, 0, 1)^T,$$

$$\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \beta_2 = (0, 1, -1)^T, \quad \beta_3 = (1, 2, 0)^T.$$

(1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 α 在基 B_1 的坐标为 $(1, -2, -1)^T$, 求 α 在基 B_2 下的坐标。

例

已知 \mathbb{R}^3 的两组基为 $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 和 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, 其中

$$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \quad \alpha_3 = (0, 0, 1)^T,$$

$$\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \beta_2 = (0, 1, -1)^T, \quad \beta_3 = (1, 2, 0)^T.$$

(1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 α 在基 B_1 的坐标为 $(1, -2, -1)^T$, 求 α 在基 B_2 下的坐标。

解.

设自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 A , 则 $(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)A$. 由

$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \mid \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

故

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

解 (续).

设 α 在基 B_2 下的坐标为 y , 则

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} := x$$

由

$$(A \mid x) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

知

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



1 向量空间

2 基、维数和坐标

3 基变换与坐标变换

4 欧式空间

定义 (向量内积)

在 \mathbb{R}^n 中, 对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 规定 \boldsymbol{x} 和 \boldsymbol{y} 的内积为

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

定义 (向量内积)

在 \mathbb{R}^n 中, 对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 规定 \boldsymbol{x} 和 \boldsymbol{y} 的内积为

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

注

当 \boldsymbol{x} 和 \boldsymbol{y} 为列向量时,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}.$$

定义 (向量内积)

在 \mathbb{R}^n 中, 对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 规定 \boldsymbol{x} 和 \boldsymbol{y} 的内积为

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

注

当 \boldsymbol{x} 和 \boldsymbol{y} 为列向量时,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}.$$

定义 (向量长度)

向量 \boldsymbol{x} 的长度定义为

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

内积的运算性质

对于 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{R}$,

- $(x, y) = (y, x)$
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- $(kx, y) = k(x, y)$
- $(x, x) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = 0$.

内积的运算性质

对于 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{R}$,

- $(x, y) = (y, x)$
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- $(kx, y) = k(x, y)$
- $(x, x) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = 0$.

定义 (欧几里得空间)

定义了内积运算的 \mathbb{R}^n , 称为 n 维欧几里得空间 (简称欧氏空间), 仍记为 \mathbb{R}^n 。

定理 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|$$

定理 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

证明.

$\forall t \in \mathbb{R}$, 有

$$(x + ty, x + ty) \geq 0$$

即

$$(y, y)t^2 + 2(x, y)t + (x, x) \geq 0$$

此为关于 t 的二次函数, 由一元二次方程理论可知

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0$$

即

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

亦即

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$



定理 (三角不等式)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

定理 (三角不等式)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

证明.

$$\begin{aligned}(x + y, x + y) &= (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \\&\leq (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \\&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\&\leq (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$



由 Cauchy-Schwarz 不等式可知, 当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时, 有

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可知, 当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时, 有

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

由此可定义

定义 (向量的夹角)

当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时, 称

$$\langle x, y \rangle = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

为向量 x, y 的夹角。

由 Cauchy-Schwarz 不等式可知, 当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时, 有

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

由此可定义

定义 (向量的夹角)

当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时, 称

$$\langle x, y \rangle = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

为向量 x, y 的夹角。

定义 (正交)

当 $(x, y) = 0$ 时, 称 x 与 y 正交。显然, 零向量与任何向量正交。

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 非零正交向量组。

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 非零正交向量组。

定理

非零正交向量组必线性无关。

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 非零正交向量组。

定理

非零正交向量组必线性无关。

证明.

对于非零正交向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_A} \in \mathbb{R}^n$, 设

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n_A} \alpha_{n_A} = 0,$$

则

$$(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n_A} \alpha_{n_A}, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A,$$

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 非零正交向量组。

定理

非零正交向量组必线性无关。

证明.

对于非零正交向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_A} \in \mathbb{R}^n$, 设

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n_A} \alpha_{n_A} = 0,$$

则

$$(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n_A} \alpha_{n_A}, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A,$$

即

$$k_j (\alpha_j, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A.$$

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 非零正交向量组。

定理

非零正交向量组必线性无关。

证明.

对于非零正交向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_A} \in \mathbb{R}^n$, 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A} = 0,$$

则

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A}, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A,$$

即

$$k_j(\alpha_j, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A.$$

由于 $(\alpha_j, \alpha_j) > 0$, 故

$$k_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A.$$

定义 (非零正交向量组)

称 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组为 非零正交向量组。

定理

非零正交向量组必线性无关。

证明.

对于非零正交向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_A} \in \mathbb{R}^n$, 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A} = 0,$$

则

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n_A}\alpha_{n_A}, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A,$$

即

$$k_j(\alpha_j, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A.$$

由于 $(\alpha_j, \alpha_j) > 0$, 故

$$k_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_A.$$

因此, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_A}$ 线性无关。



定义 (标准正交基)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基。

定义 (标准正交基)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基。

例

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基, 求 \mathbb{R}^n 中向量 β 在基 A 下的坐标。

定义 (标准正交基)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基。

例

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基, 求 \mathbb{R}^n 中向量 β 在基 A 下的坐标。

解

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$$

$$\implies (\beta, \alpha_j) = (x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n, \alpha_j) = x_j(\alpha_j, \alpha_j) = x_j$$

$$\implies x_j = (\beta, \alpha_j).$$

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 出发, 构造一组标准正交向量组?

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 出发, 构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

给定 \mathbb{R}^n 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$,

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 出发, 构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

给定 \mathbb{R}^n 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$,

(1) 取 $\beta_1 = \alpha_1$

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 出发, 构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

给定 \mathbb{R}^n 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$,

- (1) 取 $\beta_1 = \alpha_1$
- (2) 令 $\beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$,

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 出发, 构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

给定 \mathbb{R}^n 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$,

(1) 取 $\beta_1 = \alpha_1$

(2) 令 $\beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$,

$$\beta_2 \perp \beta_1$$

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 出发, 构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

给定 \mathbb{R}^n 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$,

(1) 取 $\beta_1 = \alpha_1$

(2) 令 $\beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$,

$$\beta_2 \perp \beta_1 \implies (\beta_1, \beta_2) = (\beta_1, \alpha_2 + k_{21}\beta_1) = 0$$

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 出发, 构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

给定 \mathbb{R}^n 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$,

(1) 取 $\beta_1 = \alpha_1$

(2) 令 $\beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$,

$$\beta_2 \perp \beta_1 \implies (\beta_1, \beta_2) = (\beta_1, \alpha_2 + k_{21}\beta_1) = 0 \implies k_{21} = -\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}$$

问题

如何从一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 出发, 构造一组标准正交向量组?

施密特 (Schmidt) 正交化过程

给定 \mathbb{R}^n 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$,

(1) 取 $\beta_1 = \alpha_1$

(2) 令 $\beta_2 = \alpha_2 + k_{21}\beta_1$,

$$\beta_2 \perp \beta_1 \implies (\beta_1, \beta_2) = (\beta_1, \alpha_2 + k_{21}\beta_1) = 0 \implies k_{21} = -\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}$$

故

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(3) 令 $\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$,

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(3) 令 $\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$, 对 $i = 1, 2$ 有

$$\beta_3 \perp \beta_j$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(3) 令 $\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$, 对 $i = 1, 2$ 有

$$\beta_3 \perp \beta_j \implies (\beta_3, \beta_j) = (\alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2, \beta_j) = 0$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(3) 令 $\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$, 对 $i = 1, 2$ 有

$$\beta_3 \perp \beta_j \implies (\beta_3, \beta_j) = (\alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2, \beta_j) = 0 \implies k_{3j} = -\frac{(\alpha_3, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)}$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(3) 令 $\beta_3 = \alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2$, 对 $i = 1, 2$ 有

$$\beta_3 \perp \beta_j \implies (\beta_3, \beta_j) = (\alpha_3 + k_{31}\beta_1 + k_{32}\beta_2, \beta_j) = 0 \implies k_{3j} = -\frac{(\alpha_3, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)}$$

故

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤, 假设已经求出两两正交的非零向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}$,

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤, 假设已经求出两两正交的非零向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}$, 取

$$\beta_j = \alpha_j + k_{j1}\beta_1 + k_{j2}\beta_2 + \cdots + k_{j,j-1}\beta_{j-1} = \alpha_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}\beta_s,$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤, 假设已经求出两两正交的非零向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}$, 取

$$\beta_j = \alpha_j + k_{j1}\beta_1 + k_{j2}\beta_2 + \cdots + k_{j,j-1}\beta_{j-1} = \alpha_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}\beta_s,$$

对 $i = 1, 2, \dots, j-1$, 有

$$\beta_j \perp \beta_i$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤, 假设已经求出两两正交的非零向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}$, 取

$$\beta_j = \alpha_j + k_{j1}\beta_1 + k_{j2}\beta_2 + \cdots + k_{j,j-1}\beta_{j-1} = \alpha_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}\beta_s,$$

对 $i = 1, 2, \dots, j-1$, 有

$$\beta_j \perp \beta_i \implies (\beta_j, \beta_i) = 0$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤, 假设已经求出两两正交的非零向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}$, 取

$$\beta_j = \alpha_j + k_{j1}\beta_1 + k_{j2}\beta_2 + \dots + k_{j,j-1}\beta_{j-1} = \alpha_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}\beta_s,$$

对 $i = 1, 2, \dots, j-1$, 有

$$\beta_j \perp \beta_i \implies (\beta_j, \beta_i) = 0 \implies (\alpha_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}\beta_s, \beta_i) = 0$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤, 假设已经求出两两正交的非零向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}$, 取

$$\beta_j = \alpha_j + k_{j1}\beta_1 + k_{j2}\beta_2 + \dots + k_{j,j-1}\beta_{j-1} = \alpha_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}\beta_s,$$

对 $i = 1, 2, \dots, j-1$, 有

$$\beta_j \perp \beta_i \implies (\beta_j, \beta_i) = 0 \implies (\alpha_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}\beta_s, \beta_i) = 0 \implies k_{ji} = -\frac{(\alpha_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(4) 继续以上步骤, 假设已经求出两两正交的非零向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}$, 取

$$\beta_j = \alpha_j + k_{j1}\beta_1 + k_{j2}\beta_2 + \dots + k_{j,j-1}\beta_{j-1} = \alpha_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}\beta_s,$$

对 $i = 1, 2, \dots, j-1$, 有

$$\beta_j \perp \beta_i \implies (\beta_j, \beta_i) = 0 \implies (\alpha_j + \sum_{s=1}^{j-1} k_{js}\beta_s, \beta_i) = 0 \implies k_{ji} = -\frac{(\alpha_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}$$

故

$$\beta_j = \alpha_j - \frac{(\alpha_j, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_j, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_j, \beta_{j-1})}{(\beta_{j-1}, \beta_{j-1})}\beta_{j-1}.$$

施密特 (Schmidt) 正交化过程 [续]

(5) 单位化

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \xrightarrow[\eta_j = \frac{\beta_j}{\|\beta_j\|}]{} \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$$

例

已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, -1, 1)^T.$$

试用施密特正交化方法, 由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

例

已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, -1, 1)^T.$$

试用施密特正交化方法, 由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T,$$

例

已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, -1, 1)^T.$$

试用施密特正交化方法, 由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

例

已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, -1, 1)^T.$$

试用施密特正交化方法, 由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$= (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(1, -1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T,$$

例

已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, -1, 1)^T.$$

试用施密特正交化方法, 由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T,$$

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ &= (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(1, -1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),\end{aligned}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

例

已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, -1, 1)^T.$$

试用施密特正交化方法, 由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T,$$

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ &= (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(1, -1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 \\ &= (1, -1, 1)^T - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T - \frac{2}{2}(1, -1, 0)^T = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T.\end{aligned}$$

解 (续)

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

$$\eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right),$$

$$\eta_3 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

定义 (正交矩阵)

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果

$$A^T A = I$$

则称 A 为正交矩阵。

定理

A 为正交矩阵 $\iff A$ 的列向量组为一组标准正交基。

定理

A 为正交矩阵 $\iff A$ 的列向量组为一组标准正交基。

证明.

将 A 按列分块为 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{pmatrix}$$

定理

A 为正交矩阵 $\iff A$ 的列向量组为一组标准正交基。

证明.

将 A 按列分块为 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{pmatrix}$$

因此

$$A^T A = I \iff \begin{cases} \alpha_i^T \alpha_i = 1, & i = 1, 2, \dots, n \\ \alpha_i^T \alpha_j = 0, & j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$\iff A$ 的列向量组为一组标准正交基。



定理

设 A, B 皆为 n 阶正交矩阵, 则

- (1) $|A| = 1$ 或 -1
- (2) $A^{-1} = A^T$
- (3) A^T 也是正交矩阵
- (4) AB 也是正交矩阵

定理

设 A, B 皆为 n 阶正交矩阵, 则

- (1) $|A| = 1$ 或 -1
- (2) $A^{-1} = A^T$
- (3) A^T 也是正交矩阵
- (4) AB 也是正交矩阵

证明.

- (1) 由 $AA^T = I$ 知

$$|A|^2 = |A||A^T| = 1 \implies |A| = 1 \text{ 或 } -1.$$

定理

设 A, B 皆为 n 阶正交矩阵, 则

- (1) $|A| = 1$ 或 -1
- (2) $A^{-1} = A^T$
- (3) A^T 也是正交矩阵
- (4) AB 也是正交矩阵

证明.

- (1) 由 $AA^T = I$ 知

$$|A|^2 = |A||A^T| = 1 \implies |A| = 1 \text{ 或 } -1.$$

- (2) 显然成立。

定理

设 A, B 皆为 n 阶正交矩阵, 则

- (1) $|A| = 1$ 或 -1
- (2) $A^{-1} = A^T$
- (3) A^T 也是正交矩阵
- (4) AB 也是正交矩阵

证明.

- (1) 由 $AA^T = I$ 知

$$|A|^2 = |A||A^T| = 1 \implies |A| = 1 \text{ 或 } -1.$$

- (2) 显然成立。

- (3) 由 $(A^T)^T A^T = AA^T = I$ 知, A^T (即 A^{-1}) 也是正交矩阵, 从而 A 的行向量组也是 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基。

定理

设 A, B 皆为 n 阶正交矩阵, 则

- (1) $|A| = 1$ 或 -1
- (2) $A^{-1} = A^T$
- (3) A^T 也是正交矩阵
- (4) AB 也是正交矩阵

证明.

- (1) 由 $AA^T = I$ 知

$$|A|^2 = |A||A^T| = 1 \implies |A| = 1 \text{ 或 } -1.$$

- (2) 显然成立。

- (3) 由 $(A^T)^T A^T = AA^T = I$ 知, A^T (即 A^{-1}) 也是正交矩阵, 从而 A 的行向量组也是 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基。

- (4) 由 $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = I$, 即 AB 也是正交矩阵。



定理

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 A 的作用下变换为 $Ax, Ay \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变, 即

$$(Ax, Ay) = (x, y),$$

$$\|Ax\| = \|x\|,$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle.$$

定理

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 A 的作用下变换为 $Ax, Ay \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变, 即

$$(Ax, Ay) = (x, y),$$

$$\|Ax\| = \|x\|,$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle.$$

证明.

$$(Ax, Ay) = (Ax)^T (Ay) = x^T (A^T A) y = x^T y = (x, y).$$

定理

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 A 的作用下变换为 $Ax, Ay \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变, 即

$$(Ax, Ay) = (x, y),$$

$$\|Ax\| = \|x\|,$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle.$$

证明.

$$(Ax, Ay) = (Ax)^T (Ay) = x^T (A^T A) y = x^T y = (x, y).$$

当 $y = x$ 时, 有 $(Ax, Ax) = (x, x)$, 即 $\|Ax\| = \|x\|$ 。同理, $\|Ay\| = \|y\|$ 。

定理

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 A 的作用下变换为 $Ax, Ay \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变, 即

$$(Ax, Ay) = (x, y),$$

$$\|Ax\| = \|x\|,$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle.$$

证明.

$$(Ax, Ay) = (Ax)^T (Ay) = x^T (A^T A) y = x^T y = (x, y).$$

当 $y = x$ 时, 有 $(Ax, Ax) = (x, x)$, 即 $\|Ax\| = \|x\|$ 。同理, $\|Ay\| = \|y\|$ 。因此,

$$\cos \langle Ax, Ay \rangle = \frac{(Ax, Ay)}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos \langle x, y \rangle.$$

