线性代数

矩阵的初等变换与分块矩阵

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 10 月 31 日

目录

目录

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

1. 交换两行
2. 以非零常数 k 乘矩阵的某一行
3. 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行

表: 矩阵的初等行变换

交换变换	$r_i \leftrightarrow r_j$
倍乘变换	$r_i \times k$
倍加变换	$r_i + r_j \times k$

对应的还有初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换。

表: 初等变换及其逆变换

初等变换	逆变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	$r_i \div k$
$r_i + r_j \times k$	$r_i - r_j \times k$

定义 (矩阵的等价)

1. 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价，记为 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$
2. 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价，记为 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$
3. 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

矩阵等价的性质

- 反身性：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$
- 对称性：若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$
- 传递性：若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$

定义 (初等矩阵)

将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵。对应于 3 类初等行、列变换，有 3 种类型的初等矩阵：

- 初等交换矩阵
- 初等倍乘矩阵
- 初等倍加矩阵

定义 (初等交换矩阵)

将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 交换两行或交换两列所得的矩阵，被称为**初等交换矩阵**。

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{ccccccccc}
1 &&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&& \\
&& 0 && \cdots && 1 && \\
&&& 1 &&&&& \\
&& \vdots && \ddots && \vdots && \\
&&&&& 1 &&& \\
&& 1 && \cdots && 0 && \\
&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&& 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccccc} &&\text{第 } i \text{ 列}&&&&\text{第 } j \text{ 列}&& \end{array} &
\end{array}$$

初等交换矩阵的作用

- $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘 m 阶初等交换矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$，其结果相当于：把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对调（$r_i \leftrightarrow r_j$）
- $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘 n 阶初等交换矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$，其结果相当于：把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列对调（$c_i \leftrightarrow c_j$）

定义 (初等倍乘矩阵)

用非零常数 k 乘单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的某行或某列所得的矩阵，被称为初等倍乘矩阵。

$$\boldsymbol{E}_i(k)=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \text{第 } i \text{ 列} & \end{array}$$

初等倍乘矩阵的作用

- $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘 m 阶初等倍乘矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$，其结果相当于：用数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行（$r_i \times k$）
- $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘 n 阶初等倍乘矩阵 $\boldsymbol{E}_i(k)$，其结果相当于：用数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列（$c_i \times k$）

定义 (初等倍加矩阵)

用非零常数 k 乘单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的某行 (某列) 然后加至另一行 (列) 所得的矩阵，被称为**初等倍加矩阵**。

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}\\ \text{第 } i \text{ 列第 } j \text{ 列}\end{array}$$

初等倍加矩阵的作用

- $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘 m 阶初等倍加矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$，其结果相当于 把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以数 k 加到第 i 行上（$r_i + r_j \times k$）
- $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘 n 阶初等倍加矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)$，其结果相当于 把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以数 k 加到第 j 列上（$c_j + c_i \times k$）

定理

设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m \times n$ 矩阵,

- 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵;
- 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

表: 矩阵初等变换总结

初等变换	含义
$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$	交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行
$\boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 k
$\boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以 k 加至第 i 行
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$	交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_i(k)$	$\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以 k
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k)$	$\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以 k 加至第 j 列

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

1. 变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换为其本身 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \frac{1}{k}$ $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{E}_i(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_i(\frac{1}{k})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. 变换 $r_i + r_j \times k$ 的逆变换为 $r_i - r_j \times k$ $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{E}_{ij}(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}(-k)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{E}_i(k)\boldsymbol{E}_i(\frac{1}{k}) = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{E}_{ij}(-k) = \boldsymbol{I}.$$

例

设初等矩阵

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求 $P_1P_2P_3$ 及 $(P_1P_2P_3)^{-1}$.

解

$$P_2P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1P_2P_3 = P_1(P_2P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解【续】

$$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)^{-1} = \boldsymbol{P}_3^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}$$

$$\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_1,\quad \boldsymbol{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_3^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

定理

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

证明.

对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换，并一定可以将其化为行最简形。因此，对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可经过初等行变换将其化为行最简形 $\boldsymbol{U}$，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}$$

由于可逆矩阵的行最简形必为单位阵，即 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$. $\square$

推论

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

证明

由上述定理，必存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1)^{-1} = \boldsymbol{P}_1^{-1} \boldsymbol{P}_2^{-1} \cdots \boldsymbol{P}_s^{-1}$$

推论

如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与同阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换，那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

同理，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

例

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解

$$(\ \boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{I}\ )=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3\times(-2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1+r_2\times(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

例

已知 $\boldsymbol{ABA}^T = 2\boldsymbol{BA}^T + \boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$

解

由

$$\boldsymbol{ABA}^T = 2\boldsymbol{BA}^T + \boldsymbol{I} \Rightarrow (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^T = \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{BA}^T = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}$$

知

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}^T)^{-1}.$$

而

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{B} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

推论

对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

如果增广矩阵

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{x}),$$

则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 为惟一解。

例

设

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix},\quad b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix},$$

求 $Ax=b_1$ 与 $Ax=b_2$ 的解。

解

$$(A\mid b_1\quad b_2)=\left(\begin{array}{ccc|cc}2&1&-3&1&-1\\1&2&-2&2&0\\-1&3&2&-2&5\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&-2&2&0\\2&1&-3&1&-1\\-1&3&2&-2&5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&-2&2&0\\0&-3&1&-3&-1\\0&5&0&0&5\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\div 5]{r_3\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&-3&1&-3&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+3r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&-2&2&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-4&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{array}\right)$$

例

求解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$

解

原方程等价于 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+4r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&-1&-2&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\div(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&2&-1&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{array}\right)$$

例

当 a, b 满足什么条件时，矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 不可逆。

解

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_1 \times (-2)]{r_2 + r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_2 \times (-1)]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，$|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & b-2 \\ a-1 & 0 \end{vmatrix} = (a-1)(b-2)$。于是，当 $(a-1)(b-2) = 0$，即 $a = 1$ 或 $b = 2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 不可逆。

目录

矩阵分块

设有 3×4 矩阵

$$\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

它可表示为分块矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

矩阵的按行分块

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

矩阵的按列分块

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_s \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

准对角矩阵 (quasi-diagonal matrix)

当 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中非零元素都集中在主对角线附近，有时可分块成如下准对角矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 r_i 阶方阵 $(i = 1, 2, \cdots, m)$，且

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n.$$

例

$$\left(\begin{array}{cc:ccc:c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

分块矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 为同型矩阵，则

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} + \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} + \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} + \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的数乘

$$\lambda \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n \times s$ 矩阵,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1}, \boldsymbol{A}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{A}_{is}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j}, \boldsymbol{B}_{2j}, \cdots, \boldsymbol{B}_{sj}$ 的行数，则

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rt} \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{A}_{ik} \boldsymbol{B}_{kj}.$$

例

用分块矩阵的乘法计算 $\boldsymbol{AB}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\-1&2&1&0&0\\1&1&0&1&0\\-2&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&2&0&1&0\\1&3&0&0&1\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{0}_{2\times3}\\\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{I}_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\\-2&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{I}_2\\-\boldsymbol{I}_3&\boldsymbol{0}_{3\times2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}3&2&0\\1&3&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{I}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{I}_2\\-\boldsymbol{I}_3&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{I}_2\\\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{I}_3&\boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{I}_3=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&0\\1&3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&0\\4&4&0\\-6&-4&-1\end{pmatrix}$$

例

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times s$ 矩阵。

- 将 $\boldsymbol{B}$ 按列分块成 $1 \times s$ 分块矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 看成 1×1 分块矩阵，则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s) = (\boldsymbol{Ab}_1, \boldsymbol{Ab}_2, \cdots, \boldsymbol{Ab}_s)$$

- 若已知 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$，则显然

$$\boldsymbol{Ab}_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

因此，$\boldsymbol{B}$ 的每一列 $\boldsymbol{b}_j$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = 0$ 的解。

例

设 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵且 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把 $\boldsymbol{A}$ 用列向量表示为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\ \boldsymbol{a}_2^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{a}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n\\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，故

$$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{a}_j=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，有

$$\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{a}_j=0,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0\ \Rightarrow\ a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}.$$

□

例

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 可以分块成同型准对角矩阵，即

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \boldsymbol{C}_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & & & \\ & \boldsymbol{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \boldsymbol{D}_m \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}_i$ 和 $\boldsymbol{D}_i$ 为同阶方阵（$i=1,2,\cdots,m$），则

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{D}_1 & & & \\ & \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \boldsymbol{C}_m\boldsymbol{D}_m \end{pmatrix}$$

例

证明：若方阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的上三角阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为上三角阵。

证明

对阶数 n 用数学归纳法。

1 当 $n=1$ 时，$(a)^{-1}=(\frac{1}{a})$，结论成立。

2 假设命题对 $n-1$ 阶可逆上三角矩阵成立，考虑 n 阶情况，设

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为 $n-1$ 阶可逆上三角阵。

证明【续】

设 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T,\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\boldsymbol{\alpha\gamma} & a_{11}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha B}_1 \\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{I}_1\ \Rightarrow\ \boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

由归纳假设，$\boldsymbol{B}_1$ 为 $n-1$ 阶上三角矩阵，因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。

分块矩阵的转置

分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^T=(\boldsymbol{B}_{lk})_{t\times s},$$

其中 $\boldsymbol{B}_{lk}=\boldsymbol{A}_{kl}^T$.

例

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23}\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^T & \boldsymbol{A}_{21}^T\\ \boldsymbol{A}_{12}^T & \boldsymbol{A}_{22}^T\\ \boldsymbol{A}_{13}^T & \boldsymbol{A}_{23}^T\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\xlongequal{\text{按行分块}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_m\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{B}^T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1^T & \boldsymbol{b}_2^T & \cdots & \boldsymbol{b}_m^T\end{pmatrix}$$

可逆准对角矩阵的逆矩阵

对于准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

- 由于其行列式为 $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_m|$，故准对角矩阵 A 可逆的充要条件为
$$|A_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

- 若准对角矩阵 A 可逆，则其逆矩阵为
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{-1} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

- 用分块矩阵求逆矩阵，可将高阶矩阵的求逆转化为低阶矩阵的求逆。
- 一个 2×2 的分块矩阵求逆，可以根据逆矩阵的定义，用解矩阵方程的方法解得。

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 皆为可逆矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明.

因 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{D}|\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。设 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{BX} & \boldsymbol{BY} \\ \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DT} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{I} \quad &\Rightarrow \ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^{-1} \\
\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0} \quad &\Rightarrow \ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DZ}=\boldsymbol{0} \quad &\Rightarrow \ \boldsymbol{Z}=-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \\
\boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DT}=\boldsymbol{I} \quad &\Rightarrow \ \boldsymbol{T}=\boldsymbol{D}^{-1}
\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

□

分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵

对于分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$$

同样可以定义它的 3 类初等行变换与列变换，并相应地定义 3 类分块矩阵：

- 分块交换矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

- 分块倍乘矩阵（$\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2$ 为可逆阵）

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2\end{pmatrix}$$

- 分块倍加矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{C}_4\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$$

例

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{22}$ 为方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆。证明：$\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

矩阵分块

解法 1

构造分块倍加矩阵 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_1 & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}.$$

两边同取行列式得 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_{11}|\cdot|\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}|$，故 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$ 可逆。构造分块倍加矩阵 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_1 & -\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_1 & -\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_1 & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}^{-1}\\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}+\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}^{-1}\\ -\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{Q}^{-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

解法 2

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & I & \\ A_{21} & A_{22} & & I \end{array}\right) \xrightarrow[Q=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]{r_2-A_{21}A_{11}^{-1}\cdot r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & I & 0 \\ & Q & -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-A_{12}Q^{-1}\cdot r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & & I+A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{12}Q^{-1} \\ & Q & -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{11}^{-1}\cdot r_1]{Q^{-1}\cdot r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} I & & A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1} \\ & I & -Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & Q^{-1} \end{array}\right)$$

由此可知

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1} \\ -Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

矩阵分块

例

设 $Q=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，且 A 可逆，证明：$|Q|=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|$.

证明 1

构造分块倍加矩阵 $P_1=\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -CA^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$，则

$$P_1Q=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边同取行列式得 $|Q|=|P_1Q|=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|$.

证明 2

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-CA^{-1}\cdot r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

由于分块倍加矩阵的行列式为 1，即分块倍加变换不改变矩阵的值，故

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|.$$

例

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶分块矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$$

证明 1

将分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的第一行加到第二行，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

总之有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得结论。

矩阵分块

证明 2

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

由于分块倍加矩阵的行列式为 1，即分块初等变换不改变行列式的值，故

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|.$$