线性代数

二次型

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 5 月 30 日

目录

定义

n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{array}{rcccccccccc} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & & & & & & & & & \\ a_{11}x_1^2 & + & 2a_{12}x_1x_2 & + & 2a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & 2a_{1n}x_1x_n \\ & + & a_{22}x_2^2 & + & 2a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & 2a_{2n}x_2x_n \\ & & & & \cdots & & \cdots & & \\ & & & & & & & + & a_{nn}x_n^2 \end{array}$$

当系数属于数域 $\mathbb{F}$ 时，称为数域 $\mathbb{F}$ 上的一个n 元二次型。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\multicolumn{11}{l}{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) =} \\
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}
$$

二次型与合同矩阵

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = & & & & & & & & & & \\
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}
$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} x_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j
$$

$$
= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}
$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array}$$

$$=\sum_{i=1}^n x_i(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)=\sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

二次型与合同矩阵

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)= \\
&\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_{11}x_1^2 & + & a_{12}x_1x_2 & + & a_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_1x_n \\
+ & a_{21}x_2x_1 & + & a_{22}x_2^2 & + & a_{23}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_2x_n \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
+ & a_{n1}x_nx_1 & + & a_{n2}x_nx_2 & + & a_{n3}x_2x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n^2
\end{array} \\
&=\sum_{i=1}^n x_i(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)=\sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

注

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

注

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式
$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$
其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。
- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且
$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}$$
则必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

注

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式
$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$
其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。
- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，且
$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}$$
则必有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。
- 二次型和它的矩阵是相互唯一确定的，因此研究二次型的性质可转化为研究 $\boldsymbol{A}$ 的性质。
- 二次型 f 的秩即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

例

设有二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 5x_4^2$，其矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

二次型要讨论的问题

寻找可逆的线性变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \tag{1}$$

使二次型只含平方项，即

$$f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

二次型与合同矩阵

二次型要讨论的问题

寻找可逆的线性变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \tag{1}$$

使二次型只含平方项，即

$$f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

注

- 形如(2)的只包含平方项的二次型，称为二次型的标准型。
- 若标准型的系数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 只在 $1, -1, 0$ 三个数中取值，即经过线性变换(1)，使得

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

  则称上式为二次型的规范型.

化二次型为标准型的基本做法

- 求线性变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{C} \text{ 为可逆矩阵})$$

使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

化二次型为标准型的基本做法

- 求线性变换
$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{C}\text{ 为可逆矩阵})$$
使得
$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$
- 从矩阵的角度来说，就是对于一个实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻找一个可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$。

定义 (矩阵的合同)

对于两个方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B},$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$，记作 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$。

目录

正交变换法

回顾

对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda},$$

回顾

对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda},$$

由于 $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$，故

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

正交变换法

回顾

对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda},$$

由于 $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$，故

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

定理 (主轴定理)

对于任一个 n 元二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$($\boldsymbol{Q}$ 为正交阵)，使得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，$\boldsymbol{Q}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的标准正交特征向量。

例

用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

例

用正交变换法，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解

二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

例

用正交变换法，将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

解

二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$

得特征值 $\lambda_{1,2} = 1$ 和 $\lambda_3 = 10.$

解 (续)

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.
\end{aligned}
$$

解 (续)

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T,\quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

解 (续)

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T, \quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}_3=(1,2,-2)^T.$$

解 (续)

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}_1=(-2,1,0)^T,\quad \boldsymbol{x}_2=(2,0,1)^T.$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}_3=(1,2,-2)^T.$$

对 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 用施密特正交化方法先正交化再单位化得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5},0\right)^T,\quad \boldsymbol{\xi}_2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$$

再将 $\boldsymbol{x}_3$ 单位化为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^T$$

解 (续)

取正交矩阵

$$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \mathrm{diag}(1, 1, 10).$$

解 (续)

取正交矩阵

$$Q=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(1,1,10).$$

令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$，做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，原二次型就化成标准型

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

例

判断二次曲面

$$x^2 - 2y^2 + 10z^2 + 28xy - 8yz + 20zx - 26x + 32y + 28z - 38 = 0$$

的类型。

例

判断二次曲面

$$x^2 - 2y^2 + 10z^2 + 28xy - 8yz + 20zx - 26x + 32y + 28z - 38 = 0$$

的类型。

解

二次型部分 $x^2 - 2y^2 + 10z^2 + 28xy - 8yz + 20zx$ 对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 14 & -2 & -4 \\ 10 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

同前例，可得正交阵

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \operatorname{diag}(9, 18, -18).$$

正交变换法

解 (续)

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$, $\boldsymbol{y}=(x_1,y_1,z_1)^T$，可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9{x_1}^2+18{y_1}^2-18{z_1}^2$$

解 (续)

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$, $\boldsymbol{y}=(x_1,y_1,z_1)^T$，可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9{x_1}^2+18{y_1}^2-18{z_1}^2$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$$ {x_1}^2+2{y_1}^2-2{z_1}^2-\frac{2}{3}x_1+\frac{4}{3}y_1-\frac{16}{3}z_1-\frac{28}{9}=0$$

解 (续)

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$, $\boldsymbol{y}=(x_1,y_1,z_1)^T$，可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9{x_1}^2+18{y_1}^2-18{z_1}^2$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$${x_1}^2+2{y_1}^2-2{z_1}^2-\frac{2}{3}x_1+\frac{4}{3}y_1-\frac{16}{3}z_1-\frac{28}{9}=0$$

配方得

$$\left(x_1-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(y_1+\frac{1}{3}\right)^2-2\left(z_1+\frac{4}{3}\right)^2=1$$

解 (续)

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$, $\boldsymbol{y}=(x_1,y_1,z_1)^T$，可得

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=9{x_1}^2+18{y_1}^2-18{z_1}^2$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 代入原方程即得

$${x_1}^2+2{y_1}^2-2{z_1}^2-\frac{2}{3}x_1+\frac{4}{3}y_1-\frac{16}{3}z_1-\frac{28}{9}=0$$

配方得

$$\left(x_1-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(y_1+\frac{1}{3}\right)^2-2\left(z_1+\frac{4}{3}\right)^2=1$$

再令

$$x_2=x_1-\frac{1}{3},\quad y_2=y_1+\frac{1}{3},\quad z_2=z_1+\frac{4}{3},$$

代入上式得标准方程

$${x_2}^2+2{y_2}^2-2{z_2}^2=1,$$

由此可知二次曲面为单叶双曲面.

二次曲面的分类

- 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

- 二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

- 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

- 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

目录

配方法

例

用配方法把三元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

配方法

例

用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解

先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

例

用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解

先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

例

用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解

先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

例

用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解

先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} y_1 &=& x_1 &+& x_2 &-& x_3 \\ y_2 &=& & & x_2 &-& 2x_3 \\ y_3 &=& & & & & x_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

配方法

例

用配方法把三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型。

解

先按 x_1^2 和含 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-2(x_2-x_3)^2+3x_2^2+x_3^2-8x_2x_3 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按 $x_2^2-4x_2x_3$ 配成完全平方，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2-5y_3^2.$$

配方法

例

用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准型。

配方法

例

用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$$

为标准型。

解

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$$

例

用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准型。

解

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3$$

先对含 y_1 的项配完全平方，得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 4y_2y_3$$

再对含 y_2 的项配完全平方，得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 - y_3)^2$$

配方法

解【续】

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

配方法

解【续】

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

坐标变换记为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表:

二次型	对应矩阵
$2x_1x_2+4x_1x_3$	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$
$2z_1^2-2z_2^2$	$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix}$

易验证

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(2,-2,0)$$

表:

二次型	对应矩阵
$2x_1x_2+4x_1x_3$	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2z_1^2-2z_2^2$	$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

易验证

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(2,-2,0)$$

注

任何 n 元二次型都可用配方法化为标准型，相应的变换矩阵为主对角元为 1 的上三角阵和对角块矩阵，或者是这两类矩阵的乘积。

目录

对于实对称矩阵，可通过一系列相同类型的初等行、列变换将其化为合同标准型。所谓相同类型的初等行、列变换，指的是

(1)

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_i + kc_j} \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k) \xrightarrow{r_i + kr_j} \boldsymbol{E}_{ij}(k)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k)$$

$\boldsymbol{E}_{ij}(k)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 仍为对称矩阵。

(2)

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_i \times k} \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i}(k) \xrightarrow{r_i \times k} \boldsymbol{E}_{i}(k)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i}(k)$$

$\boldsymbol{E}_{i}(k)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i}(k)$ 仍为对称矩阵。

(2)

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \boldsymbol{E}_{ij}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$$

$\boldsymbol{E}_{ij}(k)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 仍为对称矩阵。

定理

对于任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，都存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n).$$

定理

对于任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，都存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n).$$

注

由

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{I}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k$$

可知，将施加于 $\boldsymbol{A}$ 的列变换同时施加于单位阵 $\boldsymbol{I}$，当 $\boldsymbol{A}$ 变为对角阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为变换矩阵 $\boldsymbol{C}$。

例

用初等变换法将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

化为标准型，并求坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3+c_1]{c_2-c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3+\frac{2}{3}c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{2}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$$

目录

定理 (惯性定理)

设二次型 $f = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 r，且有两个可逆变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$$

使得

$$f = k_1 y_1^2 + \cdots + k_r y_r^2 \ (k_i \neq 0), \quad f = l_1 z_1^2 + \cdots + l_r z_r^2 \ (l_i \neq 0),$$

则 $k_1, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $l_1, \cdots, l_r$ 中正数的个数相等。

定理 (惯性定理)

设二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 r，且有两个可逆变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$$

使得

$$f=k_1y_1^2+\cdots+k_ry_r^2\ (k_i\neq 0),\quad f=l_1z_1^2+\cdots+l_rz_r^2\ (l_i\neq 0),$$

则 $k_1,\cdots,k_r$ 中正数的个数与 $l_1,\cdots,l_r$ 中正数的个数相等。

定义 (正惯性指数和负惯性指数)

在二次型 f 的标准型中，正系数的个数称为二次型的正惯性指数，负系数的个数称为二次型的负惯性指数。设 f 的正惯性指数为 p，负惯性指数为 q，则 f 的规范型为

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2,$$

且

$$p+q=r.$$

定义 (正定矩阵)

若对任意非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

则称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

正定二次型

定义 (正定矩阵)

若对任意非零向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0,$$

则称 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

注

正定矩阵是针对对称矩阵而言的。

定义 (正定矩阵)

若对任意非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,$$

则称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

注

正定矩阵是针对对称矩阵而言的。

定义 (负定矩阵)

如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j<0,$$

就称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为负定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵。

定理

二次型 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 正定的充分必要条件是 $\lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

正定二次型

定理

二次型 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 正定的充分必要条件是 $\lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

证明.

$\Leftarrow$ 显然

定理

二次型 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 正定的充分必要条件是 $\lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

证明.

$\Leftarrow$ 显然

$\Rightarrow$ 设 $\lambda_i \leq 0$，取 $y_i = 1, y_j = 0 (j \neq i)$，代入二次型，得

$$f(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) = \lambda_i \leq 0$$

这与二次型 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 正定矛盾。

$\square$

定理

对任意二次型 x^TAx，经过可逆的线性变换 $x=Cy$，化为 $y^T(C^TAC)y$，其正定性保持不变。即当

$$x^TAx \xLeftrightarrow{x=Cy} y^T(C^TAC)y \quad (C\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。换句话说：合同变换不会改变矩阵的正定性.

定理

对任意二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，经过可逆的线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。换句话说：合同变换不会改变矩阵的正定性.

证明.

$\forall \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{C}$可逆$)$，则 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$。若 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定，则 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$。从而有：$\forall\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$,

$$\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$$

故 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$ 是正定二次型。

定理

对任意二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，经过可逆的线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变。即当

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \xLeftrightarrow{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{C}\text{可逆})$$

时，等式两端的二次型有相同的正定性。换句话说：合同变换不会改变矩阵的正定性.

证明.

$\forall\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{C}$可逆)，则 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$。若 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定，则 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$。从而有：$\forall\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$,

$$\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$$

故 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$ 是正定二次型。反之亦然。 □

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则以下命题等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵；

(2) 二次型 $f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为 n，即 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{I}$；

(3) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$；

(4) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于零。

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则以下命题等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵；

(2) 二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为 n，即 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{I}$；

(3) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$；

(4) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于零。

例

$\boldsymbol{A}$正定 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{-1}$正定

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 正定，则

- $\boldsymbol{A}$ 的所有主对角元皆大于零；
- $|\boldsymbol{A}| > 0$。

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 正定，则

- $\boldsymbol{A}$ 的所有主对角元皆大于零；
- $|\boldsymbol{A}| > 0$。

证明.

- 取 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$，由 $\boldsymbol{A}$ 正定可知
$$a_{ii} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i > 0.$$
- 因 $\boldsymbol{A}$ 正定，故存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$，从而
$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{P}^T||\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}|^2 > 0.$$

$\square$

定理

- 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全大于零，即

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

- 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 负定的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式为负，而偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 1, \cdots, n.$$

例

判断二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

是否正定。

例

判断二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

是否正定。

解

f 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

其中

$$a_{11} = 1 > 0, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \ |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

故 f 正定.

例

判断二次型

$$f = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

是否正定。

例

判断二次型
$$f=-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$$
是否正定。

解

f 的矩阵为
$$\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$$
其中
$$a_{11}=-5<0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,\quad |\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{vmatrix}=-80<0$$
故 f 负定.