插值 (Interpolation)

张晓平

2018 年 12 月 3 日

武汉大学数学与统计学院

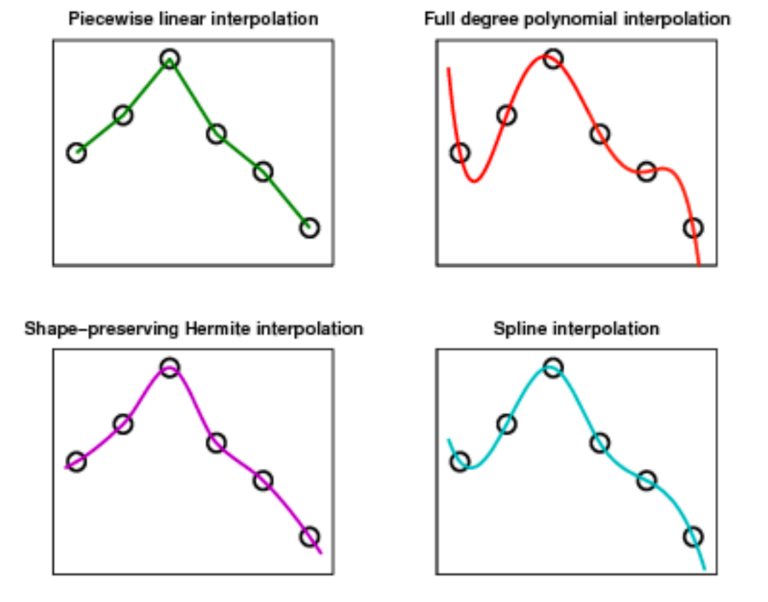
Table of contents

插值

插值

- 给定 $m+1$ 个数据点 (x_i, y_i)，构造插值函数 $\phi(x)$ 使之经过这些数据点，其中 x_i 称为插值结点。
- 插值可由 $\phi(x)$ 的形式进行分类:
  - 多项式插值：若 $\phi(x)$ 为全局多项式
  - 分片多项式插值：若 $\phi(x)$ 为局部多项式:
    - 分片线性或二次
    - Hermite 插值
    - 样条插值
  - 三角插值：若 ϕ 为三角多项式
  - 正交多项式插值 (Chebyshev, Legendre, $\cdots$)
- 高维插值相对比较复杂

插值



Piecewise linear interpolation
Full degree polynomial interpolation
Shape–preserving Hermite interpolation
Spline interpolation

1 维多项式插值

1 维多项式插值

- 插值多项式

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{m} a_j x^j = \sum_{i=0}^{m} p_j(x)$$

为次数不超过 m 的多项式，其中单项式 $p_j(x) = x^j$ 构成多项式空间中的一组基。

- 系数 $\boldsymbol{a} = \{a_0, a_1, \cdots, a_m\}$ 为线性方程组

$$\phi(x_i) = \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j = y_i, \quad j = 0, 1, \cdots, m$$

的解。

- 矩阵形式为

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$$

其中 $\boldsymbol{V} = (v_{ij})$，

$$v_{ij} = x_i^j, \quad i, j = 0, 1, \cdots, m.$$

- 注意到 $\det \boldsymbol{V}$ 为范德蒙德行列式，即

$$\det \boldsymbol{V} = \prod_{0\le j<k\le m} (x_k - x_j),$$

  这意味着：若插值结点互异，则上述线性方程组存在唯一解，从而插值多项式唯一。
- 多项式插值问题可归结为线性方程组的求解。
- 因范德蒙德矩阵是病态的，使得上述线性方程组的求解不是非常有效。

1 维多项式插值

- 可以考虑选择一些不同的多项式 $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots, \phi_m(x)\}$ 来作为次数不超过 m 的多项式空间的基函数:

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \phi_i(x).$$

- 对于给定的基，系数 $\boldsymbol{a}$ 可通过求解以下线性方程组求得:

$$\phi(x_j) = \sum_{i=0}^{m} a_i \phi_i(x_j) = y_j \quad \Rightarrow \quad \Phi \boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}.$$

Lagrange 基函数

$$\Phi \boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$$

- 最简单的方式是选取 $\Phi = \boldsymbol{I}$，即

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- 基函数 $\phi_i(x)$ 本身就是满足以上插值条件的插值多项式，即经过数据点 $(x_0, 0), \cdots, (x_i, 1), \cdots, (x_m, 0)$，从而存在唯一。
- 注意结点多项式

$$w_{m+1} = \prod_{i=0}^{m} (x - x_i)$$

在所有结点处的值为 0，次数为 $m+1$。

Lagrange 基函数

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \cdots, m$$

- 插值基函数为

$$\phi_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} = \frac{w_{m+1}(x)}{(x - x_i)\, w'_{m+1}(x)}$$

- 插值多项式为

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{m} \phi_i(x) = \sum_{i=0}^{m} \left[\frac{y_i}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} \right] \prod_{j \neq i}(x - x_j)$$

- Langrange 插值形式简洁，但计算比较不太方便，尤其是如果想增加新的插值结点，插值多项式需要重新构造。

Newton 插值

- 选择不同的基函数，可得到不同的插值形式。
- 牛顿插值的选择方式是 $\phi_i(x) = w_i(x) = \sum_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$
- 插值函数为 $\phi(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i w_i(x)$
- 系数计算：
  - 若 $m = 0$，则由插值条件 $\phi(x_i) = y_i, i = 0$ 知 $a_0 = y_0 = f(x_0)$
  - 若 $m = 1$，则由插值条件 $\phi(x_i) = y_i, i = 0, 1$ 知

$$a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1, \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} := f[x_0, x_1]$$

  - 若 $m = 2$，则由插值条件 $\phi(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2$ 知

$$a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2,$$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_0 - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0} := f[x_0, x_1, x_2].$$

收敛性

- 利用 Taylor 展开易证

$$\exists \xi \in I = (x_0, x_m) \quad \text{s.t.} \quad e_m(x) = f(x) - \phi(x) = \frac{f^{m+1}(\xi)}{(m+1)!} w_m(x)$$

- 当 $m \to \infty$ 时，是否有 $\|e_m(x)\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x)| \to 0$?
- 对于等距节点，即 $x_{i+1} = x_i + h$，有如下估计

$$\|e_m(x)\|_\infty \leq \frac{h^{m+1}}{4(m+1)} \|f^{m+1}(x)\|_\infty.$$

- 但即使是非常光滑的函数，其高阶导数也可能无界，这会导致高次 Lagrange 插值的龙格现象。

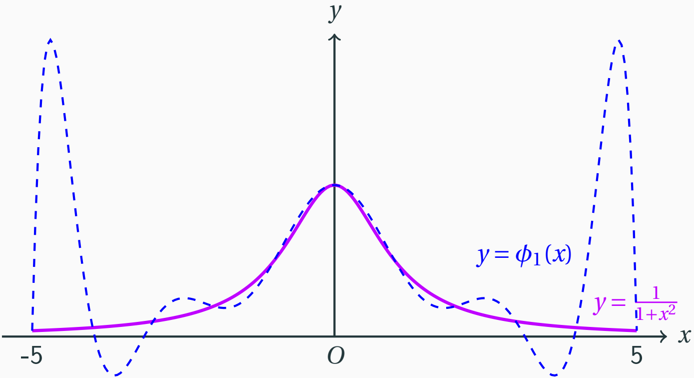


图 2: 龙格现象

分片 Lagrange 插值

- 在每个区间 $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ 上使用不同的低次多项式函数 $\phi_i(x)$
- 分片常数插值：$\phi_i^{(0)}(x) = y_i$
- 分片线性插值：

$$\phi_i^{(1)}(x) = y_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad x \in I_i$$

- 误差估计

$$\|f(x) - \phi_i^{(1)}(x)\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|f''(x)\|_\infty$$

分片 Hermite 插值

- 在插值结点上，如果既给定了函数值，还给定了一阶导数值：

$$f'(x_i) = z_i,$$

  则可在每个区间上构造一个三次多项式，满足以下插值条件：

$$\phi_i(x_i) = y_i, \quad \phi_i'(x_i) = z_i$$

  和

$$\phi_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad \phi_i'(x_{i+1}) = z_{i+1}$$

- 这称为分片三次 Hermite 插值。

样条

- Hermite 插值 $\phi(x)$ 是连续可导的，即 $\phi(x) \in C_I^1$. 在内部结点上，$\phi(x)$ 与 $\phi'(x)$ 都是连续的。
- 现在把这一条件继续加强，即希望 $\phi(x) \in C_I^2$，从而得到分片三次样条插值:
  - $\phi_i(x)$ 在每个小区间 I_i 上为三次多项式（共 $4m$ 个系数）
  - 插值条件:
    - 在内部结点 $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ 满足以下连续性条件

$$\begin{cases} \phi(x_i-) = \phi(x_i+), \\ \phi'(x_i-) = \phi'(x_i+), & \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \\ \phi''(x_i-) = \phi''(x_i+) \end{cases}$$

    - 在所有结点上满足插值条件:

$$\phi(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, m$$

    - 共计 $4m$ 个待定系数，$3 \cdot (m-1) + m = 4m - 2$ 个条件，即 $4m - 2$ 个方程。

- 为使得对应的线性方程组存在唯一解，还需要 2 个条件。
- 常用的几种选择为
  - $$\phi'(x_0) = z_0, \quad \phi'(x_m) = z_m$$
  - $$\phi''(x_0) = Z_0, \quad \phi''(x_m) = Z_m$$

    自然样条

    $$\phi''(x_0) = \phi''(x_m) = 0$$
  - Not-a-knot 条件：限定插值函数在 x_1 和 x_{m-1} 点出的三阶导数的连续性。
- 一旦样条类型确定，确定三次多项式的系数等价于求解一个三对角线性方程组。

样条的性质

- 零阶、一阶、二阶导数均收敛

$$\|f(x)-\phi(x)\| \le \frac{5}{384}\cdot h^4\cdot\|f^{(4)}(x)\|_\infty$$
$$\|f'(x)-\phi'(x)\| \le \frac{1}{24}\cdot h^3\cdot\|f^{(4)}(x)\|_\infty$$
$$\|f''(x)-\phi''(x)\| \le \frac{3}{8}\cdot h^2\cdot\|f^{(4)}(x)\|_\infty$$

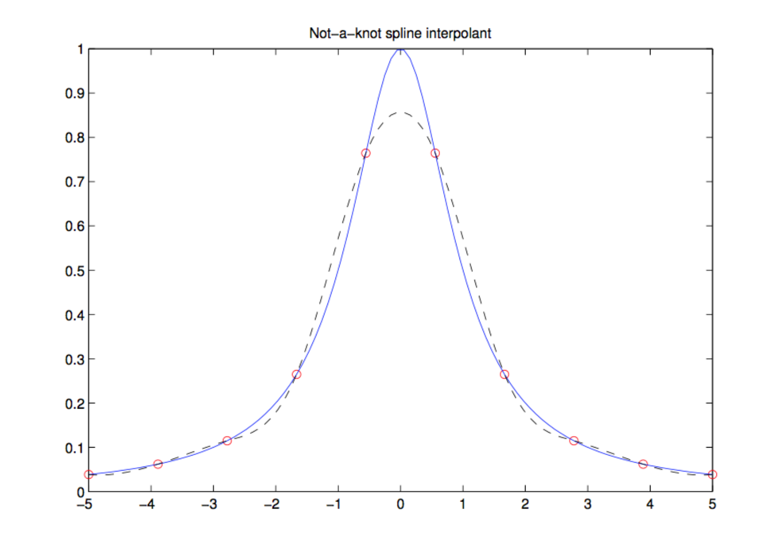


图 **3:** Not a knot 样条