线性代数

矩阵

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 10 月 17 日

目录

目录

定义 (矩阵)

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵，记作

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

这 $m \times n$ 个数称为 $\boldsymbol{A}$ 的元素，数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列，称为矩阵的 (i,j) 元。可简记为(a_{ij})、$(a_{ij})_{m\times n}$或$\boldsymbol{A}_{m\times n}$。

说明

- 元素皆是实数的矩阵称为实矩阵，元素含有复数的矩阵称为复矩阵。
- 行数与列数皆为 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_n$。
- 只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

称为行矩阵（又称行向量），也记为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{bmatrix}$$

- 只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

称为列矩阵（又称列向量）。

说明

- 若两矩阵的行数相等、列数也相等，则称它们为同型矩阵。
- 如果 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是同型矩阵，且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n),$$

  则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}.$$

- 元素都为 0 的矩阵称为零矩阵，记作$\mathbf{0}$。

  注意不同型的零矩阵是不同的。

例

- 某厂向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ \text{商店 1} \\ \text{商店 2} \\ \text{商店 3} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{产品 1} & \text{产品 2} & \text{产品 3} & \text{产品 4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \end{array}$$

其中 a_{ij} 为工厂向第 i 店发送第 j 种产品的数量。

- 这四种产品的单价及单件重量也可列成矩阵

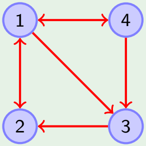
$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \\ \text{产品 1} \\ \text{产品 2} \\ \text{产品 3} \\ \text{产品 4} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{单价} & \text{单件重量} \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \end{array}$$

其中 b_{i1} 为第 i 种产品的单价，b_{i2} 为第 i 种产品的单件重量。

矩阵的定义

例

四个城市间的单向航线如图所示



若令

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有 1 条单向航线} \\ 0, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线} \end{cases}$$

则该航线图可用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ \text{城市 1} \\ \text{城市 2} \\ \text{城市 3} \\ \text{城市 4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{城市 1} & \text{城市 2} & \text{城市 3} & \text{城市 4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

矩阵的定义

例

设变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 满足:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

它表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换，其系数 a_{ij} 构成矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$。

- 给定了线性变换 (1)，其系数矩阵也就确定。
- 反之，若给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定。
- 从这个意义上讲，线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系。

恒等变换与单位矩阵

线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \qquad \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

称为恒等变换，它对应 n 阶方阵

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

该方阵称为 n 阶单位矩阵，简称单位阵。其 (i,j) 元为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

对角矩阵及其线性变换

线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1, \\ y_2 = \lambda_2 x_2, \\ \qquad \vdots \\ y_n = \lambda_n x_n \end{cases}$$

它对应 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

这种方阵称为对角矩阵，简称对角阵，记作

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

投影变换

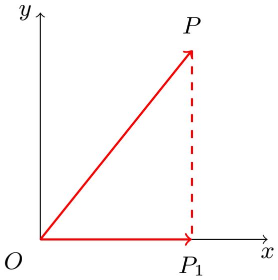
矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所对应的线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

是一个投影变换。



旋转变换

矩阵

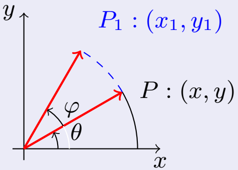
$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$x_1 = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta+\varphi),$$
$$y_1 = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = r\sin(\theta+\varphi),$$



例 (高斯消去法)

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2 \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

矩阵的定义

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \times \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-5)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4 \div (-1)]{r_3 \div (-3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

例

求解线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & + & 3x_5 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & -3 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 8x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

解

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\
3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2
\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[r_3+(-2)\times r_2]{r_3+(-2)\times r_2}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div(-3)}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{r_2+(-2)\times r_3}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{r_1+r_2}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

行简化阶梯矩阵

形如

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

的矩阵称为行简化阶梯矩阵，它对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\ x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

该方程组有 5 个未知量，其中 x_1, x_3, x_4 为基本未知量，x_2, x_5 为自由未知量。任取 $x_2 = k_1, x_5 = k_2$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$，可得线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 = 1 + k_1 - 7k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = 2 - 4k_2 \\ x_4 = -1 + 3k_2 \\ x_5 = k_2 \end{cases}$$

例

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

解

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+(-1)\times r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

由最后一个增广矩阵的第三行可以看出，该线性方程组无解。

注

- 含有矛盾方程而无解的方程组称为不相容方程组
- 有解的方程组称为相容方程组
- 多余方程

对于一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \bigg| & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \bigg| & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \bigg| & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \bigg| & b_m \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{可能的列对调}]{\text{行倍乘、倍加和对调}} \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{array}\right],$$

注

1 线性方程组有解 $\Longleftrightarrow d_{r+1} = 0$；

2 在有解的情况下：

- 当 $r = n$ 时，有唯一解 $x_1 = d_1$，$x_2 = d_2$，$\cdots$，$x_n = d_n$；
- 当 $r < n$ 时，有无穷多解

（假设无列对调）
$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}k_1 - \cdots - c_{1n}k_{n-r} \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}k_1 - \cdots - c_{2n}k_{n-r} \\ \cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}k_1 - \cdots - c_{rn}k_{n-r} \\ x_{r+1} = k_1 \\ \cdots \\ x_n = k_{n-r} \end{cases}$$

目录

目录

例

设有两种物资（单位：t）要从甲、乙、丙三个产地运往 1、2、3、4 四个销售地，其调运方案分别由矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 给出：

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & 25 & 17 & 0 \\ 20 & 0 & 14 & 23 \\ 0 & 20 & 20 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & 25 & 17 & 0 \\ 20 & 0 & 14 & 23 \\ 0 & 20 & 20 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array}$$

则从各产地运往销售地的两种物资的总量为

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 30+10 & 25+15 & 17+13 & 0+30 \\ 20+0 & 0+40 & 14+16 & 23+17 \\ 0+50 & 20+10 & 20+0 & 30+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 40 & 30 & 30 \\ 20 & 40 & 30 & 40 \\ 50 & 30 & 20 & 40 \end{bmatrix}$$

矩阵的加法

定义 (矩阵的加法)

设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

即

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$$

注

只有当两个矩阵同型时才能进行加法运算。

矩阵加法运算律

1. 交换律
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$
2. 结合律
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

注

- (负矩阵) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，称
$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij}),$$
为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵。
- (矩阵的减法) 由
$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$$
可规定矩阵的减法为
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

矩阵的加法

例

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&-5\\1&4&7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1&2\\4&3&5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3+3&0+1&-5+2\\1+4&4+3&7+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&-3\\5&7&12\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不同型，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$ 无意义。

目录

设从甲、乙、丙三个地区到另外四个地方 1、2、3、4 的距离（单位：km）由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 给出：

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \color{blue}{1} & \color{blue}{2} & \color{blue}{3} & \color{blue}{4} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 90 & 175 & 120 & 85 \\ 10 & 130 & 70 & 55 \\ 105 & 190 & 135 & 100 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \color{blue}{甲} \\ \color{blue}{乙} \\ \color{blue}{丙} \end{array}$$

已知每吨货物的运费为 2.4 元/km，要求各地之间每吨货物的运费，只需将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每个元素都乘以 2.4，即

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \color{blue}{1} & \color{blue}{2} & \color{blue}{3} & \color{blue}{4} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 2.4\times 90 & 2.4\times 175 & 2.4\times 120 & 2.4\times 85 \\ 2.4\times 10 & 2.4\times 130 & 2.4\times 70 & 2.4\times 55 \\ 2.4\times 105 & 2.4\times 190 & 2.4\times 135 & 2.4\times 100 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \color{blue}{甲} \\ \color{blue}{乙} \\ \color{blue}{丙} \end{array}$$

定义 (矩阵的数乘)

数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$，规定为

$$k\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

注

用数 k 乘一个矩阵，需要把数 k 乘矩阵的每一个元素，这与行列式的数乘性质不同。

矩阵的数乘

矩阵数乘运算律

1. 结合律
$$(kl)\boldsymbol{A} = k(l\boldsymbol{A})$$
2. 分配律 (I)
$$(k+l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$$
3. 分配律 (II)
$$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$$

注

矩阵加法与矩阵数乘统称为矩阵的线性运算。

目录

例

某厂向三个商店发送四种产品的数量以及这四种商品的单价和单间重量可分别由下列两个矩阵表示

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{产品 1} & \text{产品 2} & \text{产品 3} & \text{产品 4}\end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{商店 1}\\ \text{商店 2}\\ \text{商店 3}\end{array} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{单价} & \text{单件重量}\end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{产品 1}\\ \text{产品 2}\\ \text{产品 3}\\ \text{产品 4}\end{array}$$

则三个商店收到货物的总价和总重量可表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{总价} & \text{总重量}\end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{41} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42} \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{商店 1}\\ \text{商店 2}\\ \text{商店 3}\end{array}$$

矩阵的乘法

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \tag{2}$$

和

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2, \end{cases} \tag{3}$$

欲求从 t_1, t_2 到 y_1, y_2 的线性变换，可将（3）代入（2），得

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2. \end{cases} \tag{4}$$

线性变换 (4) 可看成是先作线性变换 (3) 再作线性变换 (2) 的结果。

说明

称线性变换（4）为线性变换（2）和（3）的乘积。相应地，把线性变换（4）对应的矩阵定义为线性变换(2)与(3)所对应矩阵的乘积，即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

定义 (矩阵乘法)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之乘积 $\boldsymbol{AB}$ 为 $m\times s$ 矩阵，记为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times s}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

注

两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘有意义的前提是A 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数。

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$$

$$a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + \cdots + a_{2n} \times b_{n2}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{bmatrix}$$

例

求 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$。

解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} 1\times 5 + 2\times(-5) + (-1)\times 6 & 1\times 6 + 2\times(-6) + (-1)\times 0 \\ (-1)\times 5 + 3\times(-5) + 4\times 6 & (-1)\times 6 + 3\times(-6) + 4\times 0 \\ 1\times 5 + 1\times(-5) + 1\times 6 & 1\times 6 + 1\times(-6) + 1\times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ 4 & -24 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

矩阵的乘法

例

设

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

计算 AB 与 BA.

解

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

例

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 2ab & 2ab \\ -2ab & -2ab \end{bmatrix}$$

注

1. 矩阵乘法不满足交换律。
   - 若 $AB \neq BA$，则称A 与 B 不可交换。
   - 若 $AB = BA$，则称A 与 B 可交换。

2. $AB = 0 \nRightarrow A = 0$或$B = 0$

   $A \neq 0$ 且 $B \neq 0 \xRightarrow{\text{有可能}} AB = 0$

3. 矩阵乘法不满足消去律，即当 $A \neq 0$ 时，

$$AB = AC \nRightarrow B = C$$

当 A 为非奇异矩阵，即 $|A| \neq 0$ 时，

$$AB = 0 \Rightarrow B = 0; \quad AB = AC \Rightarrow B = C.$$

矩阵乘法运算律

1. 结合律

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

2. 数乘结合律

$$k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$$

3. 左结合律

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$$

4. 右结合律

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$$

定理

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵，则

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

证明

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$，则

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_1+a_{1i}r_{n+i}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 (续)

重复上述步骤，可将行列式的左上角元素全消为零，即得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{I} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n |\boldsymbol{AB}||-\boldsymbol{I}_n| = (-1)^n |\boldsymbol{AB}|(-1)^n \\ &= |\boldsymbol{AB}|.\end{aligned}$$

线性方程组的矩阵表达

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

因此上述线性方程组可表示为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

目录

定义 (单位矩阵)

主对角元全为 1，其余元素全为零的 n 阶方阵，即

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

称为 n 阶单位矩阵，记为 $\boldsymbol{I}_n$，$\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{E}$。

注

1. 单位阵在矩阵乘法中的地位相当于数 1 在数的乘法中的地位。
2. 运算律

   $$\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n} \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}_{m\times n},$$

   简记为

   $$\boldsymbol{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}.$$

定义 (数量矩阵)

主对角元全为非零数 k，其余元素全为零的 n 阶方阵，即

$$k\boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix} \quad (k \neq 0)$$

称为 n 阶数量矩阵，记为 $k\boldsymbol{I}_n$，$k\boldsymbol{I}$，$k\boldsymbol{E}$。

注

1. 运算律

$$(k\boldsymbol{I})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{I}) = k\boldsymbol{A}.$$

定义 (对角矩阵)

非对角元皆为零的 n 阶方阵，即

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

称为 n 阶**对角矩阵**，记作 $\mathbf{\Lambda}$ 或 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

注

1. $\boldsymbol{A}$ 左乘对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，相当于用 λ_i 去乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. $\boldsymbol{A}$ 右乘对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，相当于用 λ_i 去乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{bmatrix}$$

定义 (三角矩阵)

1 主对角线以下的元素全为零的 n 阶方阵，即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = 0 \ (i > j)$$

称为上三角矩阵；

2 主对角线以上的元素全为零的 n 阶方阵，即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad a_{ij} = 0 \ (i < j)$$

称为下三角矩阵。

例

证明：两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵。

解

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

令 $C=AB=(c_{ij})$，则当 $i>j$ 时，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}\underbrace{a_{ik}}_{\Downarrow\atop 0}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\underbrace{b_{kj}}_{\Downarrow\atop 0}=0.$$

注

两个下三角矩阵的乘积仍为下三角矩阵。

目录

定义 (矩阵幂)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，记作 $\boldsymbol{A}^k$，即

$$\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A}}_{k}$$

矩阵幂的运算律

1 当 m, k 为正整数时，

$$\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}^{m+k}, \quad (\boldsymbol{A}^m)^k = \boldsymbol{A}^{mk}.$$

2 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不可交换，则一般来说

$$(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B}^k$$

3 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可交换，则

$$(\boldsymbol{AB})^k = \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{B}^k \boldsymbol{A}^k.$$

定义 (矩阵多项式)

设 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 x 的 k 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次多项式。

注

1 若 $f(x)$，$g(x)$ 为多项式，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 皆是 n 阶矩阵，则

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A}).$$

2 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不可交换，则一般来说

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B})\neq g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A})$$

目录

定义 (矩阵的转置)

把一个 $m \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到的一个 $n \times m$ 矩阵，称之为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^T$ 或 $\boldsymbol{A}'$，即

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的转置

矩阵转置的运算律

(1) $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

(3) $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

由（2）和（3）可推出线性运算的转置运算律

$$(k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B})^T = k\boldsymbol{A}^T + l\boldsymbol{B}^T.$$

证明

只证（4）。设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times s}, \boldsymbol{A}^T = (a_{ij}^T)_{n\times m}, \boldsymbol{B}^T = (b_{ij}^T)_{s\times n}$，注意到

$$a_{ij} = a_{ji}^T, \quad b_{ij} = b_{ji}^T,$$

有

$$(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}^T a_{ki}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})_{ij} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})_{ji}^T,$$

于是 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

定义 (对称矩阵、反对称矩阵)

对于 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

- 若
$$a_{ij}=a_{ji},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵；
$\boldsymbol{A}$ 对称的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$。
- 若
$$a_{ij}=-a_{ji},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵；
反对称矩阵的主对角元全为零；
$\boldsymbol{A}$ 对称的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$。

例

证明：奇数阶反对称矩阵的行列式为零。

证明

设 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵，则

$$\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A},$$

对上式两端同求行列式可得

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^n |\boldsymbol{A}|.$$

由此可知，当 n 为奇数时，有

$$|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|$$

即 $|\boldsymbol{A}| = 0$。

注

- 任何一个方阵都可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

  设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2} + \frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}$$

  容易验证 $\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}$ 为对称阵，$\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}$ 为反对称阵。

- 对称矩阵的乘积不一定为对称矩阵。

  若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 对称的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}$ 可交换。

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ 都是对称矩阵。

证明

$$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^T = (\boldsymbol{A}^T)^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$$

例

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 为 n 阶反对称矩阵。

证明

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^T &= (\boldsymbol{AB})^T+(\boldsymbol{BA})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T \\ &= \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A})+(-\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}).\end{aligned}$$

目录

定义 (余子式矩阵，代数余子式矩阵，伴随矩阵)

对于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，设 M_{ij} 和 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 分别为元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式。

1. 称
$$(M_{ij})_{n\times n}$$
为 $\boldsymbol{A}$ 的余子式矩阵，
2. 称
$$(A_{ij})_{n\times n}$$
为 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式矩阵，
3. 称 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式矩阵的转置矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^*$，即
$$\boldsymbol{A}^*=(A_{ij})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 (伴随阵的重要性质)

设 $\boldsymbol{A}^*$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证明.

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{C} = (c_{ij})$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij}|\boldsymbol{A}|$$

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & & & \\ & |\boldsymbol{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

类似地，可以证明 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$。 □

例

证明：当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$。

证明.

对

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$$

两端取行列式可得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^n.$$

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则

$$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}.$$

□

目录

考察一个从 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 到 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 的线性变换

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{5}$$

在（5）式的两端同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$，得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}.$$

当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，有

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}. \tag{6}$$

记

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,$$

则（6）可表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}, \tag{7}$$

它表示一个从 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 到 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 的线性变换，称为线性变换（5）的逆变换。

A 与 B 的关系

1 将（7）代入（5）

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{y}$$

可见 $\boldsymbol{AB}$ 为恒等变换对应的矩阵，故

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}.$$

2 将（5）代入（7）

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

可见 $\boldsymbol{BA}$ 为恒等变换对应的矩阵，故

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

综上，有

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

定义 (逆矩阵)

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并把 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。

注

1. 可逆矩阵与其逆矩阵为同阶方阵。
2. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 地位相等，也可称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵。

定理

若 A 可逆，则 A 的逆矩阵惟一。

证明.

设 B, C 皆为 A 的逆矩阵，则有

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C,$$

故 A 的逆矩阵惟一。 □

注

A 的矩阵记作 A^{-1}，即

$$AB = BA = I \Rightarrow B = A^{-1}.$$

定理

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

证明

由 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 及

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$$

可知

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right) = \left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

再由逆矩阵的定义及逆矩阵的惟一性可知，$\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

注

该定理提供了求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的一种方法。

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

证明.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则存在 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I},$$

于是

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{I}| = 1,$$

因此 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. $\square$

综合上述两个定理可知

定理

$\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff |\boldsymbol{A}| \neq 0$。

推论

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$（或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$），则
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

证明.

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 知 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=1$，故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，于是
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{IB}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$
$\square$

注

该推论告诉我们，判断 $\boldsymbol{B}$ 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的逆，只需验证 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$ 的一个等式成立即可。

定义 (奇异阵与非奇异阵)

当 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵。

注

可逆矩阵就是非奇异矩阵。

可逆矩阵的运算规律

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦可逆，且
$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}.$$
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$k \neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且
$$(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}A^{-1}.$$
3. 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 皆可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且
$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$
若 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 皆可逆，则
$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1} = \boldsymbol{A}_m^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$$
4. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^T$ 亦可逆，且
$$(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T.$$
5. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则
$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$$

例

已知 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解

1. 当 $|\boldsymbol{A}|=ad-bc=0$ 时，逆阵不存在；
2. 当 $|\boldsymbol{A}|=ad-bc\neq 0$ 时，由

$$(M_{ij})=\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow (A_{ij})=\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

知

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array}\right)$$

例

求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$ 的逆阵。

解

因 $|\boldsymbol{A}|=2$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆。由

$$(M_{ij})=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ -6 & -6 & -2\\ -4 & -5 & -2\end{pmatrix}\Longrightarrow(A_{ij})=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ 6 & -6 & 2\\ -4 & 5 & -2\end{pmatrix}\Longrightarrow\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

知

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

例

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明

由

$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=10\boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}$$

知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}).$$

由

$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=6\boldsymbol{I} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})\left[\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}$$

知 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}).$$

例

证明：可逆对称矩阵的逆矩阵仍为对称矩阵；可逆反对称矩阵的逆矩阵仍为反对称矩阵。

证明

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆且对称，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T.$$

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆且反对称，即 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^T$，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(-\boldsymbol{A}^T)^{-1}=-(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=-(\boldsymbol{A}^{-1})^T.$$

例

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为非零实矩阵，证明：若 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

证明.

欲证 $\boldsymbol{A}$ 可逆，只需证 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$。

由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$ 及 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义可知，$\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 等于自身的代数余子式 A_{ij}。再根据行列式的按行展开定义，有

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 为非零实矩阵，故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆。 $\square$

例

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆，当 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 时，求 $\boldsymbol{B}$.

解

由

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B} \implies (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} \implies (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I},$$

知 $\boldsymbol{B}$ 与 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 皆可逆，从而 $\boldsymbol{B} = (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$，其中

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & & \\ & 8 & \\ & & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

易算得

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，证明：

1. $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$
2. $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$

知识点

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$$

证明

1. 由 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \neq 0$ 可知 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且有 $(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|\boldsymbol{I}$。故

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB})^* \quad &= |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\\ &= |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*.\end{aligned}$$

2. 由 $(\boldsymbol{A}^*)^*\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{I}$，得

$$(\boldsymbol{A}^*)^*|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = |\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{I}$$

两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

例

设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解

由

$$|\boldsymbol{P}|=2,\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

知

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$$

从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P\Lambda}\color{red}{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P\Lambda}\color{red}{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}.$$

再由

$$\boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2^n\end{pmatrix}.$$

可得

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \\ & 2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n & 2^n-1\\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

定理

令
$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m,$$
若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，则
$$\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}.$$

证明

若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，从而
$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{A}) &= a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m \\
&= \boldsymbol{P}(a_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{P}(a_1\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1} + \cdots + \boldsymbol{P}(a_m\boldsymbol{\Lambda}^m)\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \boldsymbol{P}(a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{\Lambda} + \cdots + a_m\boldsymbol{\Lambda}^m)\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}.
\end{aligned}$$

定理

令

$$\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m,$$

若

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

则

$$\varphi(\boldsymbol{\Lambda})=\mathrm{diag}(\varphi(\lambda_1),\cdots,\varphi(\lambda_n)).$$

证明

若 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为对角阵，则 $\boldsymbol{\Lambda}^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$，从而

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{\Lambda})&=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{\Lambda}+\cdots+a_m\boldsymbol{\Lambda}^m\\
&=a_0\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}+\cdots+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m&&&\\&\lambda_2^m&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^m\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1)&&&\\&\varphi(\lambda_2)&&\\&&\ddots&\\&&&\varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$