



# 线性代数

## 二次型

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 12 月 26 日



## 1 二次型与合同矩阵

## 2 化二次型为标准型

- 正交变换法
- 配方法
- 初等变换法

## 3 正定二次型

**1** 二次型与合同矩阵

**2** 化二次型为标准型

**3** 正定二次型

## 定义

$n$  元变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \\ & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & \qquad \qquad \qquad \cdots \qquad \qquad \qquad \cdots \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

当系数属于数域  $\mathbb{F}$  时, 称为数域  $\mathbb{F}$  上的一个  $n$  元二次型。

# 二次型与合同矩阵

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ & \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \end{aligned}$$

### 注

- 对于任意一个二次型，总可以写成对称形式

$$f(x) = x^T A x$$

其中  $A$  为对称矩阵。

- 若  $A, B$  为对称矩阵，且

$$f(x) = x^T A x = x^T B x$$

则必有  $A = B$ 。

- 二次型和它的矩阵是相互唯一确定的，因此研究二次型的性质可转化为研究  $A$  的性质。
- 二次型  $f$  的秩即为矩阵  $A$  的秩。

### 例

设有二次型  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 5x_4^2$ , 其矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

# 二次型与合同矩阵

## 二次型要讨论的问题

寻找可逆的线性变换

$$x = Cy \quad (1)$$

使二次型只含平方项，即

$$f = x^T A x = y^T (C^T A C) y = y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad (2)$$

其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

## 注

- 形如(2)的只包含平方项的二次型，称为二次型的**标准型**。
- 若标准型的系数  $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$  只在  $1, -1, 0$  三个数中取值，即经过线性变换(1)，使得

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

则称上式为二次型的**规范型**。



## 化二次型为标准型的基本做法

- 求线性变换

$$x = Cy \quad (C \text{ 为可逆矩阵})$$

使得

$$x^T A x = y^T \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} y = y^T \mathbf{\Lambda} y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

- 从矩阵的角度来说, 就是对于一个实对称矩阵  $A$ , 寻找一个可逆矩阵, 使得  $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$  成为对角阵  $\mathbf{\Lambda}$ 。

### 定义 (矩阵的合同)

对于两个方阵  $A$  和  $B$ ，若存在可逆矩阵  $C$ ，使得

$$C^T A C = B,$$

就称  $A$  合同于  $B$ ，记作  $A \simeq B$ 。

1 二次型与合同矩阵

2 化二次型为标准型

3 正定二次型

## 1 二次型与合同矩阵

## 2 化二次型为标准型

- 正交变换法
- 配方法
- 初等变换法

## 3 正定二次型

## 回顾

对于实对称矩阵  $A$ , 存在正交阵  $Q$ , 使得

$$Q^{-1}AQ = \Lambda,$$

由于  $Q^{-1} = Q^T$ , 故

$$Q^T A Q = \Lambda.$$

## 定理 (主轴定理)

对于任一个  $n$  元二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x},$$

存在正交变换  $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$  ( $Q$  为正交阵), 使得

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (Q^T A Q) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $A$  的  $n$  个特征值,  $Q$  的  $n$  个列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $A$  对应于  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  的标准正交特征向量。

## 例

用正交变换法，将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

## 解

二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$|A - \lambda I| = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$

得特征值  $\lambda_{1,2} = 1$  和  $\lambda_3 = 10$ .

解 (续)

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (2, 0, 1)^T.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{x}_3 = (1, 2, -2)^T.\end{aligned}$$

对  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  用施密特正交化方法先正交化再单位化得

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)^T, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$$

再将  $\mathbf{x}_3$  单位化为

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$$

解 (续)

取正交矩阵

$$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \text{diag}(1, 1, 10).$$

令  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ , 做正交变换  $x = Qy$ , 原二次型就化成标准型

$$x^T Ax = y^T (Q^T AQ)y = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2.$$



## 例

判断二次曲面

$$x^2 - 2y^2 + 10z^2 + 28xy - 8yz + 20zx - 26x + 32y + 28z - 38 = 0$$

的类型。

## 解

二次型部分  $x^2 - 2y^2 + 10z^2 + 28xy - 8yz + 20zx$  对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 10 \\ 14 & -2 & -4 \\ 10 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

同前例，可得正交阵

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

使得

$$Q^T A Q = \text{diag}(9, 18, -18).$$

## 解 (续)

做正交变换  $x = Qy$ ,  $x = (x, y, z)^T$ ,  $y = (x_1, y_1, z_1)^T$ , 可得

$$x^T A x = y^T (Q^T A Q) y = 9x_1^2 + 18y_1^2 - 18z_1^2$$

将  $x = Qy$  代入原方程即得

$$x_1^2 + 2y_1^2 - 2z_1^2 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}y_1 - \frac{16}{3}z_1 - \frac{28}{9} = 0$$

配方得

$$\left(x_1 - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(y_1 + \frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(z_1 + \frac{4}{3}\right)^2 = 1$$

再令

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{3}, \quad y_2 = y_1 + \frac{1}{3}, \quad z_2 = z_1 + \frac{4}{3},$$

代入上式得标准方程

$$x_2^2 + 2y_2^2 - 2z_2^2 = 1,$$

由此可知二次曲面为单叶双曲面.

## 二次曲面的分类

- 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- 二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

## 1 二次型与合同矩阵

## 2 化二次型为标准型

- 正交变换法
- 配方法
- 初等变换法

## 3 正定二次型

# 配方法

## 例

用配方法把三元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

## 解

先按  $x_1^2$  和含  $x_1$  的混合项配成完全平方，即

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

再按  $x_2^2 - 4x_2x_3$  配成完全平方，得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - 5x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2.$$

## 例

用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准型。

## 解

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3$$

先对含  $y_1$  的项配完全平方，得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 4y_2y_3$$

再对含  $y_2$  的项配完全平方，得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 - y_3)^2$$

## 解【续】

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2.$$

坐标变换记为

$$x = C_1 y, \quad y = C_2 z, \quad x = C_1 C_2 z = C z$$

其中

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表:

二次型	对应矩阵
$2x_1x_2 + 4x_1x_3$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2z_1^2 - 2z_2^2$	$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

易验证

$$C^T A C = \text{diag}(2, -2, 0)$$

## 注

任何  $n$  元二次型都可用配方法化为标准型, 相应的变换矩阵为主对角元为 1 的上三角阵和对角块矩阵, 或者是这两类矩阵的乘积。



## 1 二次型与合同矩阵

## 2 化二次型为标准型

- 正交变换法
- 配方法
- 初等变换法

## 3 正定二次型

对于实对称矩阵，可通过一系列相同类型的初等行、列变换将其化为合同标准型。所谓相同类型的初等行、列变换，指的是

(1)

$$A \xrightarrow{c_i + kc_j} AE_{ij}(k) \xrightarrow{r_i + kr_j} E_{ij}(k)^T AE_{ij}(k)$$

$E_{ij}(k)^T AE_{ij}(k)$  仍为对称矩阵。

(2)

$$A \xrightarrow{c_i \times k} AE_i(k) \xrightarrow{r_i \times k} E_i(k)^T AE_i(k)$$

$E_i(k)^T AE_i(k)$  仍为对称矩阵。

(2)

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AE_{ij} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E_{ij}^T AE_{ij}$$

$E_{ij}(k)^T AE_{ij}(k)$  仍为对称矩阵。

## 定理

对于任一个  $n$  阶实对称矩阵  $A$ , 都存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$C^T A C = \text{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n).$$

## 注

由

$$C = P_1 P_2 \cdots P_k = I P_1 P_2 \cdots P_k$$

可知, 将施加于  $A$  的列变换同时施加于单位阵  $I$ , 当  $A$  变为对角阵时,  $I$  就变为变换矩阵  $C$ 。

## 例

用初等变换法将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

化为标准型，并求坐标变换  $x = Cy$ 。

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{A} & & & & & \\ \mathbf{I} & & & & & \end{array} \right) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 + c_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 + \frac{2}{3}c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5/3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_3 + \frac{2}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{\Lambda} & & & & & \\ & & & \mathbf{C} & & \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

1 二次型与合同矩阵

2 化二次型为标准型

3 正定二次型

## 定理 (惯性定理)

设二次型  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  的秩为  $r$ , 且有两个可逆变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{z}$$

使得

$$f = k_1 y_1^2 + \cdots + k_r y_r^2 \quad (k_i \neq 0), \quad f = l_1 z_1^2 + \cdots + l_r z_r^2 \quad (l_i \neq 0),$$

则  $k_1, \dots, k_r$  中正数的个数与  $l_1, \dots, l_r$  中正数的个数相等。

## 定义 (正惯性指数和负惯性指数)

在二次型  $f$  的标准型中, 正系数的个数称为二次型的**正惯性指数**, 负系数的个数称为二次型的**负惯性指数**。设  $f$  的正惯性指数为  $p$ , 负惯性指数为  $q$ , 则  $f$  的规范型为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

且

$$p + q = r.$$

# 正定二次型

## 定义 (正定矩阵)

若对任意非零向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 恒有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0,$$

则称  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  为**正定二次型**, 称  $\mathbf{A}$  为**正定矩阵**。

## 注

正定矩阵是针对对称矩阵而言的。

## 定义 (负定矩阵)

如果对于任意的非零向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 恒有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j < 0,$$

就称  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  为**负定二次型**, 称  $\mathbf{A}$  为**负定矩阵**。



## 定理

二次型  $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$  正定的充分必要条件是  $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ )

## 证明.

⇐ 显然

⇒ 设  $\lambda_i \leq 0$ , 取  $y_i = 1, y_j = 0 (j \neq i)$ , 代入二次型, 得

$$f(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) = \lambda_i \leq 0$$

这与二次型  $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$  正定矛盾。



## 定理

对任意二次型  $x^T A x$ , 经过可逆的线性变换  $x = C y$ , 化为  $y^T (C^T A C) y$ , 其正定性保持不变。即当

$$x^T A x \xleftrightarrow{x = C y} y^T (C^T A C) y \quad (C \text{可逆})$$

时, 等式两端的二次型有相同的正定性。换句话说: 合同变换不会改变矩阵的正定性。

## 证明.

$\forall y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ , 由于  $x = C y$  ( $C$ 可逆), 则  $x \neq 0$ 。若  $x^T A x$  正定, 则  $x^T A x > 0$ 。从而有:  $\forall y \neq 0$ ,

$$y^T (C^T A C) y = x^T A x > 0$$

故  $y^T (C^T A C) y$  是正定二次型。反之亦然。



## 定理

若  $A$  是  $n$  阶实对称矩阵, 则以下命题等价:

- (1)  $A$  是正定矩阵;
- (2) 二次型  $f = x^T A x$  的正惯性指数为  $n$ , 即  $A \simeq I$ ;
- (3) 存在可逆矩阵  $P$  使得  $A = P^T P$ ;
- (4)  $A$  的  $n$  个特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  全大于零。

## 例

$A$  正定  $\implies A^{-1}$  正定

## 定理

若  $A$  正定, 则

- $A$  的所有主对角元皆大于零;
- $|A| > 0$ 。

## 证明.

- 取  $x = e_i$ , 由  $A$  正定可知

$$a_{ii} = x^T A x = e_i^T A e_i > 0.$$

- 因  $A$  正定, 故存在可逆阵  $P$  使得  $A = P^T P$ , 从而

$$|A| = |P^T| |P| = |P|^2 > 0.$$



## 定理

- 对称矩阵  $A$  正定的充分必要条件为  $A$  的各阶顺序主子式全大于零, 即

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

- 对称矩阵  $A$  负定的充分必要条件为  $A$  的奇数阶顺序主子式为负, 而偶数阶主子式为正, 即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 1, \cdots, n.$$

## 例

判断二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

是否正定。

## 解

$f$  的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

其中

$$a_{11} = 1 > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

故  $f$  正定.

## 例

判断二次型

$$f = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

是否正定。

## 解

$f$  的矩阵为

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

其中

$$a_{11} = -5 < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -80 < 0$$

故  $f$  负定.