

数值计算方法

第六章 数值积分

张晓平



November 21, 2013

- 1 6.0 简介
- 2 6.1 Newton-Cotes公式
 - 6.1.1 数值积分的基本思想
 - 6.1.2 插值型求积公式
 - 6.1.3. Newton-Cotes公式
- 3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式
 - 6.2.1 复化求积公式
 - 6.2.2 变步长求积公式
 - 6.2.3 龙贝格求积公式
- 4 6.3 高斯型求积公式
 - 6.3.1 代数精度
 - 6.3.2 高斯型求积公式
 - 6.3.3 勒让德多项式

1 6.0 简介

2 6.1 Newton-Cotes公式

- 6.1.1 数值积分的基本思想
- 6.1.2 插值型求积公式
- 6.1.3. Newton-Cotes公式

3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式

- 6.2.1 复化求积公式
- 6.2.2 变步长求积公式
- 6.2.3 龙贝格求积公式

4 6.3 高斯型求积公式

- 6.3.1 代数精度
- 6.3.2 高斯型求积公式
- 6.3.3 勒让德多项式

6.0 简介

定理 (Newton-Leibniz公式)

对于定积分 $I = \int_a^b f(x) dx$, 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

6.0 简介

实际计算中，常遇到如下情况：

- 1 $f(x)$ 形式复杂，求原函数更为困难，如

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

- 2 $f(x)$ 的原函数不能用初等函数形式表示，如

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad e^{-x^2}, \quad \sin x^2, \quad \frac{\sin x}{x}$$

- 3 $f(x)$ 虽有初等函数表示的原函数，但其原函数表示形式相当复杂，如

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^4}$$

- 4 $f(x)$ 本身没有解析表达式，其函数关系由表格或图像给出，如实验或测量数据

以上情况都不能用牛顿－莱布尼兹公式直接计算定积分，因此有必要研究定积分的数值计算问题。

1 6.0 简介

2 6.1 Newton-Cotes公式

- 6.1.1 数值积分的基本思想
- 6.1.2 插值型求积公式
- 6.1.3. Newton-Cotes公式

3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式

- 6.2.1 复化求积公式
- 6.2.2 变步长求积公式
- 6.2.3 龙贝格求积公式

4 6.3 高斯型求积公式

- 6.3.1 代数精度
- 6.3.2 高斯型求积公式
- 6.3.3 勒让德多项式

- 1 6.0 简介
- 2 6.1 Newton-Cotes公式
 - 6.1.1 数值积分的基本思想
 - 6.1.2 插值型求积公式
 - 6.1.3. Newton-Cotes公式
- 3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式
- 4 6.3 高斯型求积公式

6.1.1 数值积分的基本思想

定理 (积分中值定理)

对于连续函数 $f(x)$, 在 $[a, b]$ 内存在点 ξ 有

$$I = \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

ξ 一般不知道, 从而难以准确计算 $f(\xi)$ 的值。通常称 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均高度。若能对 $f(\xi)$ 提供一种近似, 就能得到对应的数值积分公式。

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(a), \quad \Rightarrow \text{左矩形公式} \quad (1)$$

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(b), \quad \Rightarrow \text{右矩形公式} \quad (2)$$

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow \text{中矩形公式} \quad (3)$$

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.1 数值积分的基本思想

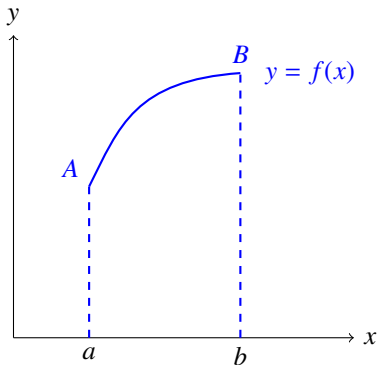


图: 左矩形公式

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.1 数值积分的基本思想

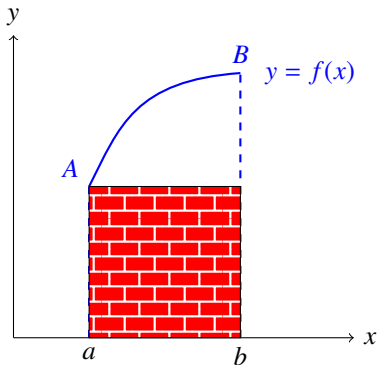


图: 左矩形公式

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.1 数值积分的基本思想

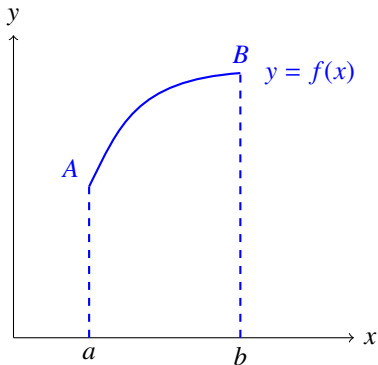


图: 右矩形公式

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.1 数值积分的基本思想

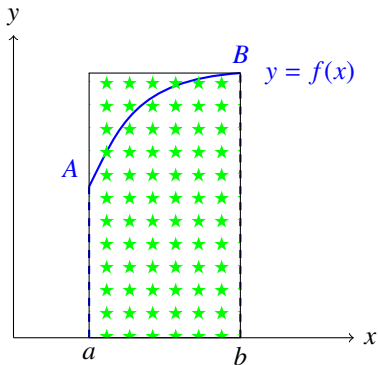


图: 右矩形公式

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.1 数值积分的基本思想

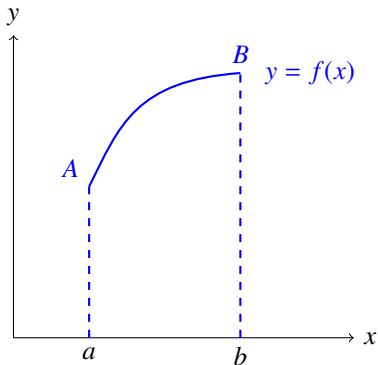


图: 中矩形公式

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.1 数值积分的基本思想

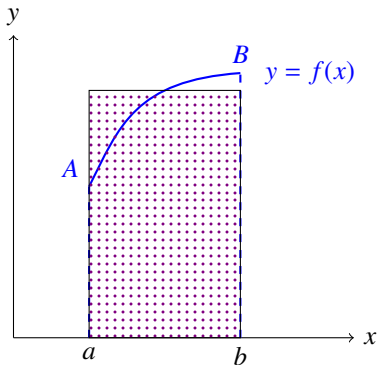


图: 中矩形公式

6.1.1 数值积分的基本思想

更一般地, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内 $n+1$ 个节点 x_i 处的高度为 $f(x_i) (i=0, 1, \dots, n)$, 通过加权平均的方法近似地得到平均高度 $f(\xi)$, 这类公式一般形如

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i), \quad (4)$$

称 x_i 为求积节点, A_i 为求积系数。

称

$$R_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

为求积公式(4)的截断误差。

- 1 6.0 简介
- 2 6.1 Newton-Cotes公式
 - 6.1.1 数值积分的基本思想
 - 6.1.2 插值型求积公式
 - 6.1.3. Newton-Cotes公式
- 3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式
- 4 6.3 高斯型求积公式

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.2 插值型求积公式

设 $[a, b]$ 上的节点为 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 则 $f(x)$ 的Lagrange插值多项式为

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i), \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

用 $L_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数有

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) dx = \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b l_i(x) dx \right) f(x_i). \end{aligned}$$

记 $A_i = \int_a^b l_i(x) dx$, 则有插值型求积公式

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

其中 A_i 只与插值节点 x_i 有关, 而与被积函数 $f(x)$ 无关

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.2 插值型求积公式

上述求积公式的截断误差为

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b [f(x) - L_n(x)] dx \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \omega_{n+1}(x) dx \end{aligned}$$

其中

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

- 1 6.0 简介
- 2 6.1 Newton-Cotes公式
 - 6.1.1 数值积分的基本思想
 - 6.1.2 插值型求积公式
 - 6.1.3. Newton-Cotes公式
- 3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式
- 4 6.3 高斯型求积公式

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a, b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 。作变量替换 $x = a + th$ ，则

$$\begin{aligned} A_i &= \int_a^b \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = h \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - j}{i - j} dt \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (t - j) dt \end{aligned}$$

记

$$C_i^{(n)} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (t - j) dt \Rightarrow A_i = (b-a) C_i^{(n)}$$

于是得到Newton-Cotes求积公式

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^{(n)} f(x_i)$$

$C_i^{(n)}$ 成为柯特斯系数。

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a, b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 。作变量替换 $x = a + th$ ，则

$$\begin{aligned} A_i &= \int_a^b \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = h \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - j}{i - j} dt \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (t - j) dt \end{aligned}$$

记

$$C_i^{(n)} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (t - j) dt \Rightarrow A_i = (b-a)C_i^{(n)}$$

于是得到Newton-Cotes求积公式

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^{(n)} f(x_i)$$

$C_i^{(n)}$ 成为柯特斯系数。

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a, b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 。作变量替换 $x = a + th$ ，则

$$\begin{aligned} A_i &= \int_a^b \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = h \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - j}{i - j} dt \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (t - j) dt \end{aligned}$$

记

$$C_i^{(n)} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (t - j) dt \Rightarrow A_i = (b-a)C_i^{(n)}$$

于是得到Newton-Cotes求积公式

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^{(n)} f(x_i)$$

$C_i^{(n)}$ 成为柯特斯系数。

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a, b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 。作变量替换 $x = a + th$ ，则

$$\begin{aligned} A_i &= \int_a^b \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = h \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - j}{i - j} dt \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (t - j) dt \end{aligned}$$

记

$$C_i^{(n)} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (t - j) dt \Rightarrow A_i = (b-a)C_i^{(n)}$$

于是得到Newton-Cotes求积公式

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^{(n)} f(x_i)$$

$C_i^{(n)}$ 成为柯特斯系数。

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

性质 (柯特斯系数 $C_i^{(n)}$)

1 对称性:

$$C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)}$$

2 权性:

$$\sum_{i=1}^n C_i^{(n)} = 1$$

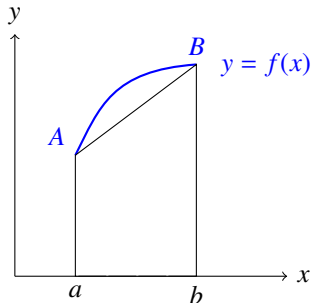
6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

- $n = 1$ (梯形(Trapezoidal)公式)

$$C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$



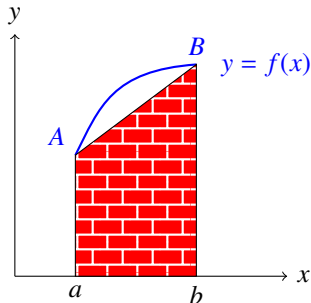
6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

- $n = 1$ (梯形(Trapezoidal)公式)

$$C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$



6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

- $n = 2$ (辛普森(Simpson)公式)

$$C_0^{(2)} = C_2^{(2)} = \frac{1}{4} \int_0^2 t(t-1) dt = \frac{1}{6}, \quad C_1^{(2)} = \frac{1}{4} \int_0^2 t(t-2) dt = \frac{4}{6}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

- $n = 3$ (辛普森(Simpson)3/8公式)

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

- $n = 4$ (柯特斯(Cotes)公式)

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

n	$C_i^{(n)}$					
1	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$					
2	$\frac{1}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{1}{6}$					
3	$\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90} \quad \frac{32}{90} \quad \frac{12}{90} \quad \frac{32}{90} \quad \frac{7}{90}$					
5	$\frac{19}{288} \quad \frac{75}{288} \quad \frac{50}{288} \quad \frac{50}{288} \quad \frac{75}{288} \quad \frac{19}{288}$					
6	$\frac{41}{840} \quad \frac{216}{840} \quad \frac{27}{840} \quad \frac{272}{840} \quad \frac{27}{840} \quad \frac{216}{840} \quad \frac{41}{840}$					
7	$\frac{751}{17280} \quad \frac{3577}{17280} \quad \frac{1323}{17280} \quad \frac{2989}{17280} \quad \frac{2989}{17280} \quad \frac{1323}{17280} \quad \frac{3577}{17280} \quad \frac{751}{17280}$					
8	$\frac{989}{28350} \quad \frac{5888}{28350} \quad \frac{-928}{28350} \quad \frac{10496}{28350} \quad \frac{-4540}{28350} \quad \frac{10496}{28350} \quad \frac{-928}{28350} \quad \frac{5888}{28350} \quad \frac{989}{28350}$					

由表可看出，当 n 较大时，柯特斯西系数变得复杂，且出现负项，计算过程的稳定性没有保证。梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式是最基本、最常用的求积公式。

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

定理 (截断误差)

1 若 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则梯形公式的截断误差为

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

2 若 $f^{(4)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则辛普森公式的截断误差为

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) = -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

3 若 $f^{(6)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则柯特斯公式的截断误差为

$$R_4(f) = -\frac{(b-a)^7}{1013760} f^{(6)}(\xi) = -\frac{8}{495} \left(\frac{b-a}{4} \right)^7 f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

例

试分别用梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式计算 $I = \int_{1/2}^1 \sqrt{x} dx$ ，并与精确解进行比较。

解

精确解为 $I = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_{0.5}^1 = 0.42096441$

1 梯形公式: $I \approx \frac{0.5}{2} (\sqrt{0.5} + 1) \approx 0.4267767$

2 辛普森公式: $I \approx \frac{0.5}{6} (\sqrt{0.5} + 4\sqrt{0.75} + 1) \approx 0.43093403$

3 柯特斯公式:

$$I \approx \frac{0.5}{90} (7\sqrt{0.5} + 32\sqrt{0.625} + 12\sqrt{0.75} + 32\sqrt{0.875} + 7) \approx 0.43096407$$

6.1 Newton-Cotes公式

6.1.3. Newton-Cotes公式

例

试分别用梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式计算 $I = \int_{1/2}^1 \sqrt{x} dx$ ，并与精确解进行比较。

解

精确解为 $I = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_{0.5}^1 = 0.42096441$

1 梯形公式： $I \approx \frac{0.5}{2}(\sqrt{0.5} + 1) \approx 0.4267767$

2 辛普森公式： $I \approx \frac{0.5}{6}(\sqrt{0.5} + 4\sqrt{0.75} + 1) \approx 0.43093403$

3 柯特斯公式：

$$I \approx \frac{0.5}{90}(7\sqrt{0.5} + 32\sqrt{0.625} + 12\sqrt{0.75} + 32\sqrt{0.875} + 7) \approx 0.43096407$$

1 6.0 简介

2 6.1 Newton-Cotes公式

- 6.1.1 数值积分的基本思想
- 6.1.2 插值型求积公式
- 6.1.3. Newton-Cotes公式

3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式

- 6.2.1 复化求积公式
- 6.2.2 变步长求积公式
- 6.2.3 龙贝格求积公式

4 6.3 高斯型求积公式

- 6.3.1 代数精度
- 6.3.2 高斯型求积公式
- 6.3.3 勒让德多项式

- 1 6.0 简介
- 2 6.1 Newton-Cotes公式
- 3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式
 - 6.2.1 复化求积公式
 - 6.2.2 变步长求积公式
 - 6.2.3 龙贝格求积公式
- 4 6.3 高斯型求积公式

6.2.1 复化求积公式

定义 (复化求积公式)

为提高数值积分的精度，将 $[a, b]$ 等分为 n 个子区间，在每个区间上用基本求积公式，然后再累加成新的求积公式，这样既可提高结果的精度，又可使算法简便易于实现。这种求积公式成为**复化求积公式**。

6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

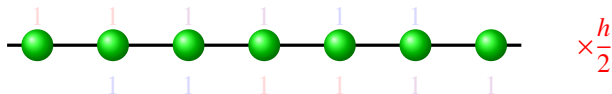
① 复化梯形公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv T_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

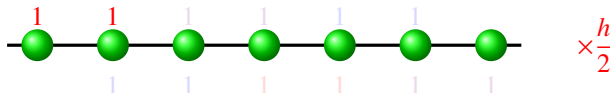
① 复化梯形公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv T_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

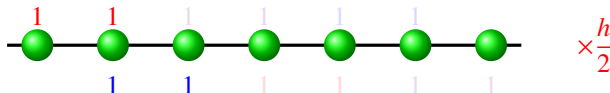
① 复化梯形公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv T_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

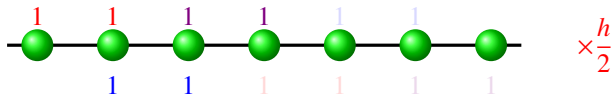
① 复化梯形公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv T_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

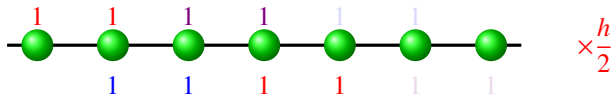
① 复化梯形公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv T_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

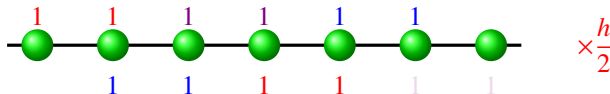
① 复化梯形公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv T_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

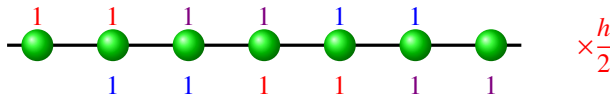
① 复化梯形公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv T_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

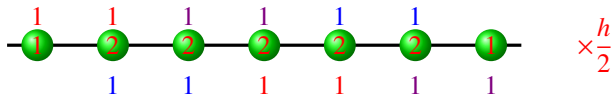
① 复化梯形公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv T_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

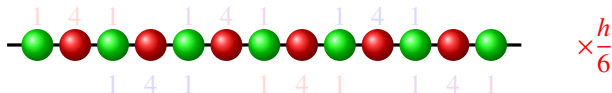
① 复化Simpson公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用Simpson公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化Simpson公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv S_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

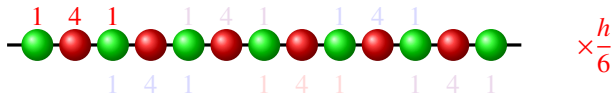
① 复化Simpson公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用Simpson公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化Simpson公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv S_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

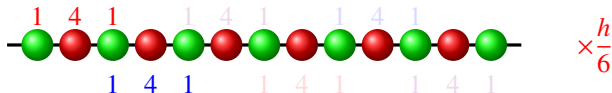
① 复化Simpson公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用Simpson公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化Simpson公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv S_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

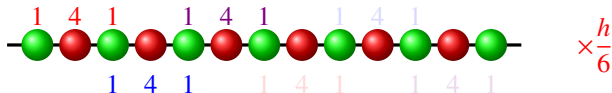
① 复化Simpson公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用Simpson公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化Simpson公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv S_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

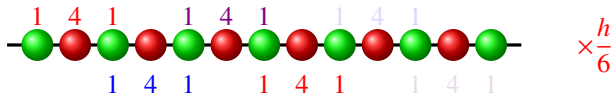
① 复化Simpson公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用Simpson公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化Simpson公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv S_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

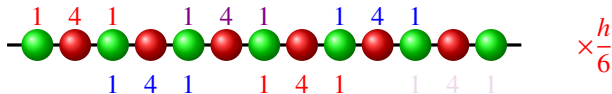
① 复化Simpson公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用Simpson公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化Simpson公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv S_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

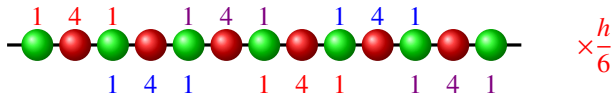
① 复化Simpson公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用Simpson公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化Simpson公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv S_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

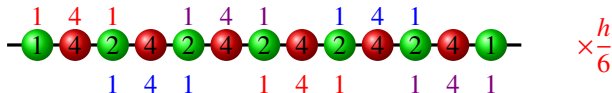
① 复化Simpson公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用Simpson公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

累加得复化Simpson公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv S_n \end{aligned}$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

① 复化柯特斯公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{90} [7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

累加得复化柯特斯公式

$$I \approx \frac{h}{90} \left[7f(a) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b) \right] \equiv C_n$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

① 复化柯特斯公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{90} [7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

累加得复化柯特斯公式

$$I \approx \frac{h}{90} \left[7f(a) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b) \right] \equiv C_n$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

① 复化柯特斯公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{90} [7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

累加得复化柯特斯公式

$$I \approx \frac{h}{90} \left[7f(a) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b) \right] \equiv C_n$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

① 复化柯特斯公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{90} [7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

累加得复化柯特斯公式

$$I \approx \frac{h}{90} \left[7f(a) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b) \right] \equiv C_n$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

① 复化柯特斯公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{90} [7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

累加得复化柯特斯公式

$$I \approx \frac{h}{90} \left[7f(a) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b) \right] \equiv C_n$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

① 复化柯特斯公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{90} [7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

累加得复化柯特斯公式

$$I \approx \frac{h}{90} \left[7f(a) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b) \right] \equiv C_n$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

① 复化柯特斯公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{90} [7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

累加得复化柯特斯公式

$$I \approx \frac{h}{90} \left[7f(a) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b) \right] \equiv C_n$$



6.2.1 复化求积公式

将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长, 子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

① 复化柯特斯公式

在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{h}{90} [7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

累加得复化柯特斯公式

$$I \approx \frac{h}{90} \left[7f(a) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b) \right] \equiv C_n$$



6.2.1 复化求积公式

定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数，则复化梯形公式的截断误差为

$$R_T(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

$$R_S(f) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

$$R_C(f) = -\frac{2(b-a)}{945} \left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

6.2.1 复化求积公式

定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数, 则复化梯形公式的截断误差为

$$R_T(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

$$R_S(f) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

$$R_C(f) = -\frac{2(b-a)}{945} \left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

6.2.1 复化求积公式

定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数，则复化梯形公式的截断误差为

$$R_T(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

$$R_S(f) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

$$R_C(f) = -\frac{2(b-a)}{945} \left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

6.2.1 复化求积公式

例

计算 $I = \int_0^1 e^x dx$, 若要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 分别用复化梯形公式和复化Simpson公式计算, 问至少需要多少个节点?

解

由 $f(x) = f''(x) = f^{(4)}(x) = e^x$ 得

$$\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)| \leq \frac{e}{12n^2} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68, 即需 69 个节点。由复化Simpson公式的截断误差知

$$|R_S(f)| \leq \frac{e}{2880n^4} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 2.1$$

6.2.1 复化求积公式

例

计算 $I = \int_0^1 e^x dx$, 若要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 分别用复化梯形公式和复化Simpson公式计算, 问至少需要多少个节点?

解

由 $f(x) = f''(x) = f^{(4)}(x) = e^x$ 得

$$\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)| \leq \frac{e}{12n^2} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68, 即需 69 个节点。由复化Simpson公式的截断误差知

$$|R_S(f)| \leq \frac{e}{2880n^4} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 2.1$$

6.2.1 复化求积公式

例

计算 $I = \int_0^1 e^x dx$, 若要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 分别用复化梯形公式和复化Simpson公式计算, 问至少需要多少个节点?

解

由 $f(x) = f''(x) = f^{(4)}(x) = e^x$ 得

$$\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)| \leq \frac{e}{12n^2} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68, 即需 69 个节点。由复化Simpson公式的截断误差知

$$|R_S(f)| \leq \frac{e}{2880n^4} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 2.1$$

6.2.1 复化求积公式

例

计算 $I = \int_0^1 e^x dx$, 若要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 分别用复化梯形公式和复化Simpson公式计算, 问至少需要多少个节点?

解

由 $f(x) = f''(x) = f^{(4)}(x) = e^x$ 得

$$\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)| \leq \frac{e}{12n^2} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68, 即需 69 个节点。由复化Simpson公式的截断误差知

$$|R_S(f)| \leq \frac{e}{2880n^4} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 2.1$$

6.2.1 复化求积公式

例

计算 $I = \int_0^1 e^x dx$, 若要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 分别用复化梯形公式和复化Simpson公式计算, 问至少需要多少个节点?

解

由 $f(x) = f''(x) = f^{(4)}(x) = e^x$ 得

$$\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)| \leq \frac{e}{12n^2} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68, 即需 69 个节点。由复化Simpson公式的截断误差知

$$|R_S(f)| \leq \frac{e}{2880n^4} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 2.1$$

6.2.1 复化求积公式

例

计算 $I = \int_0^1 e^x dx$, 若要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 分别用复化梯形公式和复化Simpson公式计算, 问至少需要多少个节点?

解

由 $f(x) = f''(x) = f^{(4)}(x) = e^x$ 得

$$\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)| \leq \frac{e}{12n^2} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68, 即需 69 个节点。由复化Simpson公式的截断误差知

$$|R_S(f)| \leq \frac{e}{2880n^4} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow n > 2.1$$

- 1 6.0 简介
- 2 6.1 Newton-Cotes公式
- 3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式
 - 6.2.1 复化求积公式
 - 6.2.2 变步长求积公式
 - 6.2.3 龙贝格求积公式
- 4 6.3 高斯型求积公式

6.2.2 变步长求积公式

将 $[a, b]$ n 等分, 共 $n + 1$ 个节点, 复化梯形公式为

$$T_n = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$

将 $[a, b]$ $2n$ 等分, 共 $2n + 1$ 个节点。为讨论二分前后两个积分值的关系, 考察一个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$, 其中点为 $x_{i+\frac{1}{2}}$, 该子区间上二分前后两个积分值为

$$T_1 = \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})], \quad T_2 = \frac{h}{4} [f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

两者关系为

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{h}{2}f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

累加得

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

6.2.2 变步长求积公式

将 $[a, b]$ n 等分, 共 $n + 1$ 个节点, 复化梯形公式为

$$T_n = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$

将 $[a, b]$ $2n$ 等分, 共 $2n + 1$ 个节点。为讨论二分前后两个积分值的关系, 考察一个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$, 其中点为 $x_{i+\frac{1}{2}}$, 该子区间上二分前后两个积分值为

$$T_1 = \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})], \quad T_2 = \frac{h}{4} [f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

两者关系为

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{h}{2}f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

累加得

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

6.2.2 变步长求积公式

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

实际计算 T_{2n} 时， T_n 为已知数据，只需累加新增节点 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 的函数值 $f(x_{i+\frac{1}{2}})$ ，这可使计算量节约一半。

常用 $T_{2n} - T_n < \epsilon$ 是否满足作为控制计算精度的条件：

- 1 若满足，则取 T_{2n} 为 I 的近似值
- 2 若不满足，则再将区间分半，直到满足精度为止。

6.2.2 变步长求积公式

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

实际计算 T_{2n} 时， T_n 为已知数据，只需累加新增节点 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 的函数值 $f(x_{i+\frac{1}{2}})$ ，这可使计算量节约一半。

常用 $T_{2n} - T_n < \epsilon$ 是否满足作为控制计算精度的条件：

- 1 若满足，则取 T_{2n} 为 I 的近似值
- 2 若不满足，则再将区间分半，直到满足精度为止。

- 1 6.0 简介
- 2 6.1 Newton-Cotes公式
- 3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式
 - 6.2.1 复化求积公式
 - 6.2.2 变步长求积公式
 - 6.2.3 龙贝格求积公式
- 4 6.3 高斯型求积公式

6.2.3 龙贝格求积公式

由复化梯形公式的截断误差可得

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4} \frac{f''(\eta_1)}{f''(\eta_2)}$$

若 f'' 在 $[a, b]$ 上变化不大, 即有 $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$, 则在二分之后的误差是原先误差的 $\frac{1}{4}$ 倍, 即

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4} \Rightarrow I \approx \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{4}T_n \equiv \bar{T}$$

\bar{T} 应当比 T_{2n} 更接近 I 。易验证

$$S_n = \bar{T}$$

6.2.3 龙贝格求积公式

由复化梯形公式的截断误差可得

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4} \frac{f''(\eta_1)}{f''(\eta_2)}$$

若 f'' 在 $[a, b]$ 上变化不大, 即有 $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$, 则在二分之后的误差是原先误差的 $\frac{1}{4}$ 倍, 即

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4} \Rightarrow I \approx \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{4}T_n \equiv \bar{T}$$

\bar{T} 应当比 T_{2n} 更接近 I 。易验证

$$S_n = \bar{T}$$

6.2.3 龙贝格求积公式

由复化梯形公式的截断误差可得

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4} \frac{f''(\eta_1)}{f''(\eta_2)}$$

若 f'' 在 $[a, b]$ 上变化不大, 即有 $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$, 则在二分之后的误差是原先误差的 $\frac{1}{4}$ 倍, 即

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4} \Rightarrow I \approx \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{4}T_n \equiv \bar{T}$$

\bar{T} 应当比 T_{2n} 更接近 I 。易验证

$$S_n = \bar{T}$$

6.2.3 龙贝格求积公式

由复化Simpson公式逐步二分，有

$$\frac{I - S_{2n}}{I - S_n} = \frac{1}{16} \Rightarrow I \approx \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n \equiv \bar{S}$$

易验证

$$C_n = \bar{S}$$

6.2.3 龙贝格求积公式

由复化Simpson公式逐步二分，有

$$\frac{I - S_{2n}}{I - S_n} = \frac{1}{16} \Rightarrow I \approx \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n \equiv \bar{S}$$

易验证

$$C_n = \bar{S}$$

6.2.3 龙贝格求积公式

由复化柯特斯公式逐步二分，有

$$\frac{I - C_{2n}}{I - C_n} = \frac{1}{64} \Rightarrow I \approx \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n \equiv R_n$$

该公式称为龙贝格公式

6.2.3 龙贝格求积公式

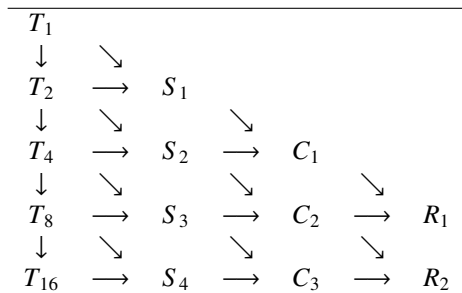
由复化柯特斯公式逐步二分，有

$$\frac{I - C_{2n}}{I - C_n} = \frac{1}{64} \Rightarrow I \approx \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n \equiv R_n$$

该公式称为龙贝格公式

6.2.3 龙贝格求积公式

如此进行三次，便将粗糙的梯形公式逐步加工成精度较高的龙贝格公式，这种加速方法成为龙贝格算法，计算步骤如下：



6.2.3 龙贝格求积公式

例

用龙贝格算法计算 $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$, 要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$

解

k	$n = 2^k$	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	1	3			
1	2	3.1	3.133333		
2	4	3.131177	3.141569	3.142118	
3	8	3.138989	3.141593	3.141595	3.141586
4	16	3.140942	3.141593	3.141593	3.141593
5	32	3.141430	3.141593	3.141593	3.141593

6.2.3 龙贝格求积公式

例

用龙贝格算法计算 $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$, 要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$

解

k	$n = 2^k$	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	1	3			
1	2	3.1	3.133333		
2	4	3.131177	3.141569	3.142118	
3	8	3.138989	3.141593	3.141595	3.141586
4	16	3.140942	3.141593	3.141593	3.141593
5	32	3.141430	3.141593	3.141593	3.141593

1 6.0 简介

2 6.1 Newton-Cotes公式

- 6.1.1 数值积分的基本思想
- 6.1.2 插值型求积公式
- 6.1.3. Newton-Cotes公式

3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式

- 6.2.1 复化求积公式
- 6.2.2 变步长求积公式
- 6.2.3 龙贝格求积公式

4 6.3 高斯型求积公式

- 6.3.1 代数精度
- 6.3.2 高斯型求积公式
- 6.3.3 勒让德多项式

- 1 6.0 简介
- 2 6.1 Newton-Cotes公式
- 3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式
- 4 6.3 高斯型求积公式
 - 6.3.1 代数精度
 - 6.3.2 高斯型求积公式
 - 6.3.3 勒让德多项式

6.3.1 代数精度

定义

若求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_k f(x_k)$$

对任意次数不高于 m 次的代数多项式都准确成立，但对于 $m+1$ 次多项式不精确成立，则该求积公式具有 **m 次代数精度**。

由该定义可看出：求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_k f(x_k)$$

具有 m 次代数精度的充要条件是**该公式对 $f(x) = 1, x, \dots, x^m$ 能准确成立，但对 $f(x) = x^{m+1}$ 不能准确成立。**

6.3.1 代数精度

定义

若求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_k f(x_k)$$

对任意次数不高于 m 次的代数多项式都准确成立，但对于 $m+1$ 次多项式不精确成立，则该求积公式具有 m 次代数精度。

由该定义可看出：求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_k f(x_k)$$

具有 m 次代数精度的充要条件是：该公式对 $f(x) = 1, x, \dots, x^m$ 能准确成立，但对 $f(x) = x^{m+1}$ 不能准确成立。

6.3.1 代数精度

定理

含 $n + 1$ 个节点 $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 的插值型求积公式的代数精度至少为 n

6.3.1 代数精度

定理

牛顿-科特斯公式的代数精度至少为 n 。特别地，当 n 为偶数时，牛顿-科特斯公式的代数精度可以达到 $n+1$ 。

证明.

以下验证当 $n = 2k$ 时，公式对 $f(x) = x^{n+1}$ 精确成立。由误差

$$\begin{aligned} R &= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) dx \\ &\stackrel{x=a+ih}{=} h^{n+2} \int_0^n t(t-1) \cdots (t-n) dt \\ &\stackrel{n=2k}{=} h^{n+2} \int_0^{2k} t(t-1) \cdots (t-k)(t-k-1) \cdots (t-2k-1)(t-2k) dt \\ &\stackrel{u=t-k}{=} h^{n+2} \int_{-k}^k (u+k)(u+k-1) \cdots u(u-1) \cdots (u-k+1)(u-k) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

6.3.1 代数精度

定理

牛顿-科特斯公式的代数精度至少为 n 。特别地，当 n 为偶数时，牛顿-科特斯公式的代数精度可以达到 $n+1$ 。

证明.

以下验证当 $n = 2k$ 时，公式对 $f(x) = x^{n+1}$ 精确成立。由误差

$$\begin{aligned} R &= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) dx \\ &\stackrel{x=a+ih}{=} h^{n+2} \int_0^n t(t-1) \cdots (t-n) dt \\ &\stackrel{n=2k}{=} h^{n+2} \int_0^{2k} t(t-1) \cdots (t-k)(t-k-1) \cdots (t-2k-1)(t-2k) dt \\ &\stackrel{u=t-k}{=} h^{n+2} \int_{-k}^k (u+k)(u+k-1) \cdots u(u-1) \cdots (u-k+1)(u-k) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

- 1 6.0 简介
- 2 6.1 Newton-Cotes公式
- 3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式
- 4 6.3 高斯型求积公式
 - 6.3.1 代数精度
 - 6.3.2 高斯型求积公式
 - 6.3.3 勒让德多项式

6.3.2 高斯型求积公式

当节点等距时，插值型求积公式的代数精度为 n 或 $n+1$ 。若对节点适当选择，可提高插值型求积公式的代数精度。对具有 $n+1$ 个节点的插值型求积公式，其代数精度最高可达 $2n+1$ 。

6.3.2 高斯型求积公式

定义

将 $n+1$ 个节点的具有 $2n+1$ 次代数精度的插值型求积公式为

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

称为**高斯型求积公式**，节点 x_k 为高斯点， A_k 为高斯系数。

6.3.2 高斯型求积公式

以 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 为例，一点高斯公式为中矩形公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0),$$

高斯点为 $x_0 = 0$ ，系数为 $A_0 = 2$ 。

6.3.2 高斯型求积公式

以 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 为例，两点高斯公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

具有三次代数精度，即要求对 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 准确成立，有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2, \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0, \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{3}, \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

可解得 $x_0 = -x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $A_0 = A_1 = 1$, 公式为

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

6.3.2 高斯型求积公式

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) dt$$

对应的两点高斯型求积公式为

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{a-b}{2\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) \right]$$

6.3.2 高斯型求积公式

定理

节点 $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$ 为高斯点的充分必要条件是：以这些点为零点的多项式 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ 与任意次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 在 $[a, b]$ 上正交，即

$$\int_a^b P(x) \omega_{n+1}(x) dx = 0.$$

证明

\Rightarrow 设 $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$ 为插值型求积公式的高斯点， $P(x)$ 为次数不超过 n 的多项式，则 $P(x)\omega_{n+1}(x)$ 为次数不超过 $2n+1$ 的多项式。由高斯点定义知

$$\int_a^b P(x) \omega_{n+1}(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k P(x_k) \omega_{n+1}(x_k) = 0$$

6.3.2 高斯型求积公式

证明.

⇐ 设 $\omega_{n+1}(x)$ 与任意的次数不超过 n 的多项式正交, 设 $f(x)$ 是任一次数不超过 $2n+1$ 的多项式, 则必存在次数不超过 n 的多项式 $P(x), Q(x)$, 使得

$$f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x) + Q(x)$$

由插值型求积公式至少具有 n 次代数精度, 知

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x) dx + \int_a^b Q(x) dx \\ &= 0 + \int_a^b Q(x) dx = 0 + \sum_{k=0}^n A_k Q(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^n A_k [P(x_k)\omega_{n+1}(x_k) + Q(x_k)] = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)\end{aligned}$$

6.3.2 高斯型求积公式

证明.

⇐ 设 $\omega_{n+1}(x)$ 与任意的次数不超过 n 的多项式正交, 设 $f(x)$ 是任一次数不超过 $2n+1$ 的多项式, 则必存在次数不超过 n 的多项式 $P(x), Q(x)$, 使得

$$f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x) + Q(x)$$

由插值型求积公式至少具有 n 次代数精度, 知

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x) dx + \int_a^b Q(x) dx \\ &= 0 + \int_a^b Q(x) dx = 0 + \sum_{k=0}^n A_k Q(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^n A_k [P(x_k)\omega_{n+1}(x_k) + Q(x_k)] = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)\end{aligned}$$

6.3.2 高斯型求积公式

证明.

于是, 求积公式至少具有 $2n+1$ 次代数精度, 而对于 $2n+2$ 次多项式 $f(x) = \omega_{n+1}^2(x)$, 有 $\int_a^b \omega_{n+1}^2(x) dx > 0$ 。所以, 求积公式的代数精度为 $2n+1$, $x_k (k=0, 1, \dots, n)$ 为高斯点。



6.3.2 高斯型求积公式

- 1 具有 $n+1$ 个节点的插值型求积公式的代数精度最高可达到 $2n+1$ ，因此高斯型求积公式是代数精度最高的求积公式。
- 2 定理给出了求高斯点的方法：找与任意的次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 在 $[a, b]$ 上正交的多项式

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

其零点 $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$ 即为高斯点。

6.3.2 高斯型求积公式

例

证明求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{9} [5f(-\sqrt{0.6}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{0.6})]$$

对于不高于5次的多项式准确成立，并计算 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x} dx$ (取5位有效数字)

- 1 6.0 简介
- 2 6.1 Newton-Cotes公式
- 3 6.2 复化求积公式及龙贝格求积公式
- 4 6.3 高斯型求积公式
 - 6.3.1 代数精度
 - 6.3.2 高斯型求积公式
 - 6.3.3 勒让德多项式

6.3.3 勒让德多项式

定义

以高斯点 $x_k(k = 1, 2, \dots, n)$ 为零点的 n 次多项式

$$P_n(x) = \omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$$

6.3.3 勒让德多项式

在 $[-1, 1]$ 上，勒让德多项式为

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

如：

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$P_4(x) = x^4 - \frac{30}{35}x^2 + \frac{3}{35},$$

$$\vdots$$

6.3.3 勒让德多项式

这样, 可先求勒让德多项式的零点即可求得高斯点 x_k , 进而求出求积系数 A_k , 如三点高斯型求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$