常微分方程的数值解法

Numerical solution of ordinary differential equation

张晓平

2018 年 12 月 17 日

武汉大学数学与统计学院

Table of contents

一般概念

一般概念

1. 常微分方程的求解问题在实践中经常遇到，但我们只知道一些特殊类型的常微分方程的解析解。
2. 在科学与工程问题中遇到的常微分方程往往很复杂，许多情况下不可能求出解的表达式。
3. 很多实际问题中，并不需要方程解的表达式，而仅仅需要获得解在若干点上的近似值即可

因此，研究常微分方程的数值解法就很有必要。

一般概念

我们将探讨一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad x > x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

的数值解法。

一般概念

我们将探讨一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad x > x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

的数值解法。

理论上，$f(x, y)$ 在区域

$$D_0 = \{(x, y) | x \geq x_0, |y| < \infty\}$$

内连续，且对变量 y 满足 Lipschitz 条件，即存在常数 L，对 D_0 内的任意两点 (x, y_1) 和 (x, y_2) 满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

则以上初值问题存在惟一解。

一般概念

所谓数值解法，就是寻找 $y(x)$ 在一系列离散节点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots \le b$$

上的近似值 $y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots$，其相邻两个节点的距离 $h_n = x_{n+1} - x_n$ 称为步长。

我们总假定节点等距，即 $h_n \equiv h$，此时

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

此时节点 x_n 对应的函数值为

$$y(x_n) = y(x_0 + nh), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

一般概念

常微分方程(1)的数值格式可表示为

$$F(x_n, y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{n+k}) = 0, \tag{2}$$

它是关于 $y_0, y_1, \cdots$ 的差分方程。

一般概念

常微分方程(1)的数值格式可表示为

$$F(x_n, y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{n+k}) = 0, \tag{2}$$

它是关于 $y_0, y_1, \cdots$ 的差分方程。

数值解法的实质是用差分方程近似代替微分方程，并且从 $y_0, y_1, \cdots, y_{k-1}$ 出发逐个求解出 $y_k, y_{k+1}, \cdots$.

一般概念

- 若 $k=1$，则(2)可简化为

$$F(x_n, y_n, y_{n+1}) = 0,$$

  称为单步法。
- 若 $k>1$，则(2)称为多步法。

一般概念

若(2)可表示为

$$y_{n+k} = G(x_n, y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{n+k-1}), \tag{3}$$

则称之为显式方法；否则称(2)为隐式方法。

欧拉方法

欧拉方法

欧拉公式

欧拉公式

在方程 (1) 中，用向前差商代替导数，即

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

有

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)),$$

再用 y_n 近似代替 $y(x_n)$，便导出

定义：显式欧拉公式 (Explicit Euler Formula)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{4}$$

欧拉公式

在方程 (1) 中，用向后差商代替导数，即

$$y'(x_{n+1}) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

便可导出

定义：隐式欧拉公式 (Implicit Euler Formula)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{5}$$

欧拉公式

在方程 (1) 中，用向后差商代替导数，即

$$y'(x_{n+1}) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

便可导出

定义：隐式欧拉公式 (Implicit Euler Formula)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{5}$$

这类隐式格式的计算远比显式格式困难！

欧拉公式

在方程 (1) 中，用中心差商代替导数，即

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1})}{2h}$$

便可导出

定义：两点欧拉公式 (Two-points Euler Formula)

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{6}$$

欧拉公式

在方程 (1) 中，用中心差商代替导数，即

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1})}{2h}$$

便可导出

定义：两点欧拉公式 (Two-points Euler Formula)

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{6}$$

在计算 y_{n+1} 时，需利用前两步的信息 y_n, y_{n-1}。

欧拉方法

欧拉预估–校正方法

欧拉预估 – 校正方法

对方程 $y' = f(x, y)$ 的两端从 x_n 到 x_{n+1} 积分，得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx.$$

利用梯形公式计算积分得

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{h}{2}[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]$$

再用 y_n 代替 $y(x_n)$ 的近似值，便可导出

定义：梯形公式 (Trapezoidal Formula)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})], \quad n = 0, 1, \cdots.$$

欧拉预估－校正方法

对方程 $y' = f(x, y)$ 的两端从 x_n 到 x_{n+1} 积分，得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx.$$

利用梯形公式计算积分得

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{h}{2}[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]$$

再用 y_n 代替 $y(x_n)$ 的近似值，便可导出

定义：梯形公式 (Trapezoidal Formula)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})], \quad n = 0, 1, \cdots .$$

梯形公式可视为显示欧拉公式与隐式欧拉公式的算术平均，它仍为隐式，不便于直接计算。

欧拉预估 – 校正方法

实际计算中，可将欧拉公式与梯形公式相结合，

1. 先由显示欧拉求得一个初步的近似值，记为 $\bar{y}_{n+1}$，称之为预报值；
2. 再将该值代入梯形公式算得 y_{n+1}，这一步称为校正。

欧拉预估－校正方法

实际计算中，可将欧拉公式与梯形公式相结合，

1. 先由显示欧拉求得一个初步的近似值，记为 $\bar{y}_{n+1}$，称之为预报值；
2. 再将该值代入梯形公式算得 y_{n+1}，这一步称为校正。

定义：预估-校正公式 (Prediction-Correction Formula)

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\right] \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{7}$$

欧拉预估－校正方法

实际计算中，可将欧拉公式与梯形公式相结合，

1. 先由显示欧拉求得一个初步的近似值，记为 $\bar{y}_{n+1}$，称之为预报值;
2. 再将该值代入梯形公式算得 y_{n+1}，这一步称为校正。

定义：预估-校正公式 (Prediction-Correction Formula)

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\right] \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{7}$$

该公式也称改进的欧拉公式，它是一种显示公式，是对隐式梯形公式的改进，可以直接计算。

欧拉预估 – 校正方法

为便于上机编程，可将上述步骤改为

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p), \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

欧拉预估 – 校正方法

例

利用欧拉公式和预估 – 校正公式求初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

在 $[0, 1]$ 上的数值解（取 $h = 0.1$），并与精确解 $y = \sqrt{2x + 1}$ 进行比较。

欧拉预估－校正方法

例

利用欧拉公式和预估－校正公式求初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

在 $[0, 1]$ 上的数值解（取 $h = 0.1$），并与精确解 $y = \sqrt{2x + 1}$ 进行比较。

解

- 欧拉公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}\right) \\ y_0 = 1, \quad h = 0.1 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, 9$$

欧拉预估 – 校正方法

解（续）：

- 预估 – 校正公式

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + h\left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}\right) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n} + \bar{y}_{n+1} - \dfrac{2x_{n+1}}{\bar{y}_{n+1}}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, 9 \\ y_0 = 1, \quad h = 0.1 \end{cases}$$

欧拉预估－校正方法

表 1: 计算结果

x_n	欧拉公式 y_n	预估－校正公式 y_n	精确解 $y(x_n) = \sqrt{2x_n + 1}$
0.0	1	1	1
0.1	1.1	1.095909	1.095445
0.2	1.191818	1.184097	1.183216
0.3	1.277438	1.266201	1.264911
0.4	1.358213	1.343360	1.341641
0.5	1.435133	1.416402	1.414214
0.6	1.508966	1.485956	1.483240
0.7	1.580338	1.552514	1.549193
0.8	1.649783	1.616475	1.612452
0.9	1.717779	1.678166	1.673320
1.0	1.784771	1.737867	1.732051

欧拉预估－校正方法

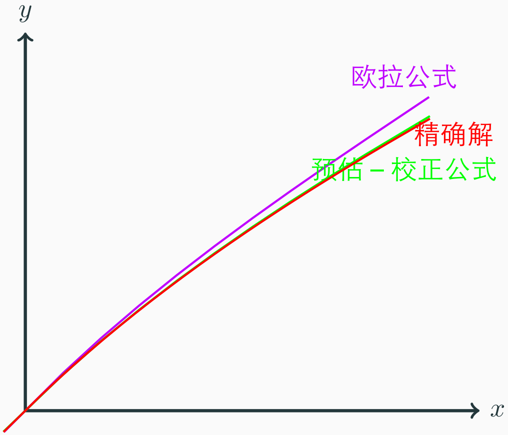

图 **1:** 计算结果

欧拉方法

欧拉方法的误差估计

定义

设 y_n 为精确解，即 $y_n = y(x_n)$，在此前提下，用某种数值方法计算 y_{n+1} 的误差 $R_n = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ 称为该数值方法计算 y_{n+1} 的局部截断误差。

定义

设 y_n 为精确解，即 $y_n = y(x_n)$，在此前提下，用某种数值方法计算 y_{n+1} 的误差 $R_n = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ 称为该数值方法计算 y_{n+1} 的局部截断误差。

定义

若某一数值方法的局部截断误差为 $R_n = O(h^{p+1})$，p 为正整数，则称这种数值方法为p 阶方法，或者说该方法有p 阶精度。

定理

显式欧拉方法的局部截断误差为 $O(h^2)$，它为一阶方法。

定理

显式欧拉方法的局部截断误差为 $O(h^2)$，它为一阶方法。

证明

由泰勒公式可知

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) = y(x_n + h) &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3) \\ &= y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3) \end{aligned}$$

定理

显式欧拉方法的局部截断误差为 $O(h^2)$，它为一阶方法。

证明

由泰勒公式可知

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) = y(x_n + h) &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3) \\ &= y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3) \end{aligned}$$

而对于显式欧拉公式，

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y(x_n) + hf(x_n, y_n),$$

定理

显式欧拉方法的局部截断误差为 $O(h^2)$，它为一阶方法。

证明

由泰勒公式可知

$$
\begin{aligned}
y(x_{n+1}) = y(x_n + h) &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3) \\
&= y(x_n) + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3)
\end{aligned}
$$

而对于显式欧拉公式，

$$
y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y(x_n) + hf(x_n, y_n),
$$

于是，局部截断误差为

$$
y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2)
$$

定理

梯形公式为二阶方法。

定理

梯形公式为二阶方法。

证明

由梯形求积公式的误差知

$$|R_T(f)| \leq \frac{h^3}{12} \max |y''(x)|$$

再由

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)\, dx$$

和

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2} \left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

可知

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| = |R_T(f)| = O(h^3),$$

从而梯形公式为二阶方法。

定理

预估 – 校正公式为二阶方法。

定理

预估－校正公式为二阶方法。

证明

预估－校正公式可改写为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad \begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + k_1). \end{cases}$$

定理

预估－校正公式为二阶方法。

证明

预估－校正公式可改写为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \qquad \begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + k_1). \end{cases}$$

在 $y_n = y(x_n)$ 的前提下，

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) = y'(x_n), \\
k_2 &= f(x_n + h, y(x_n) + k_1) \\
&= f(x_n, y(x_n)) + hf_x(x_n, y(x_n)) + k_1 f_y(x_n, y(x_n)) + O(h^2) \\
&= f(x_n, y(x_n)) + h[f_x(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n))f_y(x_n, y(x_n))] + O(h^2) \\
&= y'(x_n) + hy''(x_n) + O(h^2)
\end{aligned}$$

证明（续）：

将 k_1, k_2 代入原方程得，

$$y_{n+1} = y_n + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

与泰勒公式比较，其截断误差为

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \cdots$$

龙格-库塔方法 (Runge-Kutta method)

龙格-库塔方法 (Runge-Kutta method)

龙格 – 库塔方法的基本思想

龙格－库塔方法的基本思想

考察差商 $\dfrac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}$，由微分中值定理，存在 ξ，使得

$$\frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}=y'(\xi),\quad \xi\in(x_n,x_{n+1}).$$

由方程

$$y'=f(x,y(x))$$

得

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hf(\xi,y(\xi)),$$

称$k^{\star}=f(\xi,y(\xi))$ 为 $[x_n,x_{n+1}]$ 的平均斜率。

龙格 – 库塔方法的基本思想

只要对平均斜率提供一种近似算法，便相应导出一种计算格式。

龙格 – 库塔方法的基本思想

只要对平均斜率提供一种近似算法，便相应导出一种计算格式。

1 显式欧拉公式

以 $k_1 = f(x_n, y_n)$ 作为 $k^\star$ 的近似

龙格 – 库塔方法的基本思想

只要对平均斜率提供一种近似算法，便相应导出一种计算格式。

1 显式欧拉公式

以 $k_1 = f(x_n, y_n)$ 作为 $k^\star$ 的近似

2 欧拉预估 – 校正公式

以 x_n 与 x_{n+1} 两个点的斜率值 k_1 和 k_2 取算术平均作为 $k^\star$ 的近似

龙格－库塔方法的基本思想

龙格－库塔方法的基本思想

设法在 $[x_n, x_{n+1}]$ 内多预报几个点的斜率值，然后将它们加权平均作为 $k^\star$ 的近似，则有可能构造出更高精度的计算格式。

龙格-库塔方法 (Runge-Kutta method)

二阶龙格 – 库塔方法

二阶龙格 – 库塔方法

推广欧拉预估 – 校正方法，考察 $[x_n, x_{n+1}]$ 内任一点

$$x_{n+p} = x_n + ph, \quad 0 < p \leq 1$$

用 x_n 与 x_{n+p} 两个点的斜率值 k_1 和 k_2 加权平均得到平均斜率 $k^\star$。即令

$$y_{n+1} = y_n + h[(1-\lambda)k_1 + \lambda k_2], \quad \lambda\text{待定}$$

二阶龙格 – 库塔方法

类似于欧拉预估 – 校正，取

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad y_{n+p} = y_n + phk_1, \quad k_2 = f(x_{n+p}, y_{n+p})$$

便得如下格式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h[(1-\lambda)k_1 + \lambda k_2], \\ k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f(x_n + ph, y_n + phk_1) \end{cases} \tag{8}$$

二阶龙格 – 库塔方法

类似于欧拉预估 – 校正，取

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad y_{n+p} = y_n + phk_1, \quad k_2 = f(x_{n+p}, y_{n+p})$$

便得如下格式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h[(1-\lambda)k_1 + \lambda k_2], \\ k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f(x_n + ph, y_n + phk_1) \end{cases} \tag{8}$$

希望适当选取 λ, p，使上述格式具有更高精度。

二阶龙格 – 库塔方法

设 $y_n = y(x_n)$，分别将 k_1 和 k_2 泰勒展开，

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) = hy'(x_n), \\
k_2 &= f(x_n + ph, y(x_n) + phk_1) \\
&= f(x_n, y(x_n)) + phf_x(x_n, y(x_n)) + phk_1 f_y(x_n, y(x_n)) + O(h^2) \\
&= f(x_n, y(x_n)) + ph[f_x(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n)) f_y(x_n, y(x_n))] + O(h^2) \\
&= y'(x_n) + phy''(x_n) + O(h^2)
\end{aligned}
$$

代入计算格式 (8) 得

$$y_{n+1} = y(x_n) + hy'(x_n) + \lambda ph^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

与泰勒公式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + O(h^3)$$

要使计算格式具有二阶精度，须使 $\lambda p = \frac{1}{2}$。

二阶龙格 – 库塔方法

把满足 $\lambda p = \frac{1}{2}$ 的公式 (8) 统称为二阶龙格 – 库塔公式。

二阶龙格－库塔方法

把满足 $\lambda p = \frac{1}{2}$ 的公式 (8) 统称为二阶龙格－库塔公式。

1 当$p = 1, \lambda = \dfrac{1}{2}$时，(8) 就是欧拉预估－校正公式

二阶龙格 – 库塔方法

把满足 $\lambda p = \frac{1}{2}$ 的公式 (8) 统称为二阶龙格 – 库塔公式。

1 当 $p = 1, \lambda = \dfrac{1}{2}$ 时，(8) 就是欧拉预估 – 校正公式

2 当 $p = \dfrac{1}{2}, \lambda = 1$ 时，(8) 称为中点公式，即

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hk_2, \\ k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1). \end{cases}$$

该公式可看作是用中点斜率值 k_2 作为平均斜率 $k^\star$ 的近似，具有二阶精度。

二阶龙格－库塔方法

把满足 $\lambda p=\frac{1}{2}$ 的公式 (8) 统称为二阶龙格－库塔公式。

1 当 $p=1,\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，(8) 就是欧拉预估－校正公式

2 当 $p=\dfrac{1}{2},\lambda=1$ 时，(8) 称为中点公式，即

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hk_2,\\ k_1=f(x_n,y_n),\\ k_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1). \end{cases}$$

该公式可看作是用中点斜率值 k_2 作为平均斜率 $k^\star$ 的近似，具有二阶精度。

3 取 $p=\frac{3}{4},\lambda=\frac{2}{3}$，(8) 称为休恩 (Heun) 公式，即

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{4}(k_1+3k_2),\\ k_1=f(x_n,y_n),\\ k_2=f(x_n+\frac{2}{3}h,y_n+\frac{2}{3}hk_1). \end{cases}$$

龙格-库塔方法 (Runge-Kutta method)

高阶 R-K 公式

高阶 R-K 公式

一般地，N 阶显式 R-K 公式可表示为

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{N} c_i k_i, \quad \begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_i = f(x_n + a_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j), \quad i = 2, 3, \cdots, N, \end{cases}$$

其中 a_i 与 b_{ij} 满足关系式

$$a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}, i = 2, 3, \cdots, N.$$

高阶 R-K 公式

仿照前述方法可推导出：三阶 R-K 方法的系数应该满足

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1, \\ c_2 a_2 + c_3 a_3 = \frac{1}{2}, \\ c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2 = \frac{1}{3}, \\ c_3 a_2 b_{32} = \frac{1}{6}, \\ a_2 = b_{21}, \\ a_3 = b_{31} + b_{32} \end{cases}$$

高阶 R-K 公式

常用的三阶 R-K 公式为

- Heun 三阶公式

$$
\begin{gathered}
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3), \\
\begin{cases}
k_1 = f(x_n, y_n), \\
k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1\right), \\
k_3 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_2)
\end{cases}
\end{gathered}
\tag{9}
$$

- Kutta 三阶公式

$$
\begin{gathered}
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \\
\begin{cases}
k_1 = f(x_n, y_n), \\
k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\
k_3 = f(x_n + h, y_n + h(-k_1 + 2k_2))
\end{cases}
\end{gathered}
\tag{10}
$$

高阶 R-K 公式

经典的四阶 R-K 公式为

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
k_1 = f(x_n, y_n), \\
k_2 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1\right), \\
k_3 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}k_2\right), \\
k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)
\end{cases}
\tag{11}
$$

高阶 R-K 公式

例

用经典四阶 R-K 公式求解初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上的数值解（取 $h = 0.2$）。

高阶 R-K 公式

解

$$\begin{cases} k_1 = y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}, \\ k_2 = y_n + 0.1k_1 - \dfrac{2(x_n + 0.1)}{y_n + 0.1k_1}, \\ k_3 = y_n + 0.1k_2 - \dfrac{2(x_n + 0.1)}{y_n + 0.1k_2}, \\ k_4 = y_n + 0.2k_3 - \dfrac{2(x_n + 0.2)}{y_n + 0.2k_3}, \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{cases}$$

高阶 R-K 公式

表 2: 计算结果

x_n	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_n	1	1.18323	1.34167	1.48324	1.61251	1.73214
$y(x_n)$	1	1.18322	1.34164	1.48324	1.61245	1.73205

高阶 R-K 公式

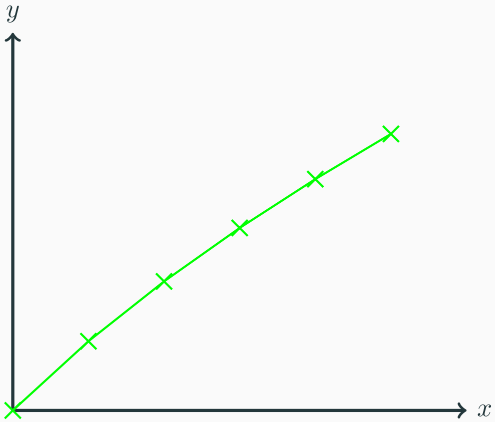

图 2: Numerical Results

高阶 R-K 公式

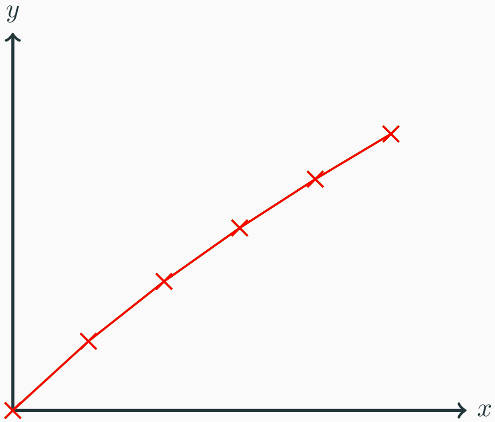

图 **2:** Numerical Results