

## 线性代数 矩阵的初等变换与分块矩阵

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023年4月4日



### 目录

1 矩阵的初等变换与初等矩阵

2 矩阵分块

### 目录

- 1 矩阵的初等变换与初等矩阵
- 2 矩阵分块

用高斯消去法求解线性方程组, 其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换:

- 交换两行
- ② 以非零常数 k 乘矩阵的某一行
- ⑤ 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行

用高斯消去法求解线性方程组,其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换:

- 交换两行
- ② 以非零常数 k 乘矩阵的某一行
- ⑤ 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换, 其中

- **①** 交换变换  $r_i \leftrightarrow r_j$
- ② 倍乘变换  $r_i \times k$
- **③** 倍加变换  $r_i + r_j \times k$

用高斯消去法求解线性方程组,其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换:

- 交换两行
- ② 以非零常数 k 乘矩阵的某一行
- ⑤ 将矩阵的某一行乘以常数 k 并加到另一行

这三类行变换统称为矩阵的初等行变换, 其中

- **①** 交换变换  $r_i \leftrightarrow r_j$
- ② 倍乘变换  $r_i \times k$
- **③** 倍加变换  $r_i + r_j \times k$

对应的还有初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

三种初等变换都是可逆的,且其逆变换是同一类型的初等变换。

表: 初等变换及其逆变换

初等变换	逆变换
1,5 1,5 2 4,5 1	,,,
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	$r_i \div k$
$r_i + r_j \times k$	$r_i - r_j \times k$

#### 定义 (矩阵的等价)

- 如果 A 经过有限次初等行变换变成 B,就称A 与 B 行等价,记为  $A \stackrel{\tau}{\sim} B$
- ② 如果 A 经过有限次初等列变换变成 B, 就称A 与 B 列等价, 记为  $A \stackrel{c}{\sim} B$
- ③ 如果 A 经过有限次初等变换变成 B, 就称 A 与 B 等价, 记为  $A \sim B$ .

#### 定义 (矩阵的等价)

- 如果 A 经过有限次初等行变换变成 B, 就称A 与 B 行等价, 记为  $A \stackrel{\tau}{\sim} B$
- ② 如果 A 经过有限次初等列变换变成 B,就称A 与 B 列等价,记为  $A \stackrel{c}{\sim} B$
- ③ 如果 A 经过有限次初等变换变成 B, 就称 A 与 B 等价, 记为  $A \sim B$ .

#### 矩阵等价的性质

- 反身性: A ~ A
- 对称性: 若  $A \sim B$ , 则  $B \sim A$
- 传递性: 若  $A \sim B$ ,  $B \sim C$ , 则  $A \sim C$

#### 定义 (初等矩阵)

将单位矩阵 I 做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵。

对应于 3 类初等行、列变换、有 3 种类型的初等矩阵:

- 初等交换矩阵
- 初等倍乘矩阵
- 初等倍加矩阵

# 矩阵的初等变换与初等矩阵 初等交换矩阵

#### 定义 (初等交换矩阵)

将单位矩阵 I 交换两行或交换两列所得的矩阵,被称为 $\overline{0}$ 等交换矩阵。

第 *i* 列 第 *j* 列

#### 矩阵的初等变换与初等矩阵 <sup>初等交换矩阵</sup>

#### 初等交换矩阵的作用

- $m \times n$  矩阵 A 左乘 m 阶初等交换矩阵  $E_{ij}$ ,其结果相当于: 把 A 的第 i 行与第 j 行对调  $(r_i \leftrightarrow r_j)$
- $m \times n$  矩阵 A 右乘 n 阶初等交换矩阵  $E_{ij}$ ,其结果相当于: 把 A 的第 i 列与第 j 列对调  $(c_i \leftrightarrow c_i)$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵 初等倍乘矩阵

## 定义 (初等倍乘矩阵)

用非零常数 k 乘单位矩阵 I 的某行或某列所得的矩阵,被称为初等倍乘矩阵。

第i列

# 矩阵的初等变换与初等矩阵 初等倍乘矩阵

#### 初等倍乘矩阵的作用

- $m \times n$  矩阵 A 左乘 m 阶初等倍乘矩阵  $E_i(k)$ ,其结果相当于: 用数 k 乘 A 的第 i 行  $(r_i \times k)$
- $m \times n$  矩阵 A 右乘 n 阶初等倍乘矩阵  $E_i(k)$ , 其结果相当于: 用数 k 乘 A 的第 i 列  $(c_i \times k)$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵 初等倍加矩阵

#### 定义 (初等倍加矩阵)

用非零常数 k 乘单位矩阵 I 的某行 (某列) 然后加至另一行 (列) 所得的矩阵,被称为 $\overline{N}$  等倍加矩阵。

第 i 列第 j 列

#### 矩阵的初等变换与初等矩阵 <sup>初等倍加矩阵</sup>

#### 初等倍加矩阵的作用

- $m \times n$  矩阵 A 左乘 m 阶初等倍加矩阵  $E_{ij}(k)$ ,其结果相当于 把 A 的第 j 行乘以数 k 加到第 i 行上  $(r_i + r_j \times k)$
- $m \times n$  矩阵 A 右乘 n 阶初等倍加矩阵  $E_{ij}(k)$ ,其结果相当于 把 A 的第 i 列乘以数 k 加到第 j 列上  $(c_i + c_i \times k)$

#### 定理

设 A 为一个  $m \times n$  矩阵,

- 对 A 施行一次初等行变换,相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵;
- $\bullet$  对 A 施行一次初等列变换,相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

#### 定理

设 A 为一个  $m \times n$  矩阵,

- ullet 对 A 施行一次初等行变换,相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵;
- $\bullet$  对 A 施行一次初等列变换,相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

#### 总结

 $E_i(k)A$ 

 $\boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{A}$ 

 $oldsymbol{E}_{ij}oldsymbol{A}$ 

 $AE_i(k)$ 

 $\boldsymbol{AE}_{ij}(k)$ 

 $AE_{ij}$ 

由初等变换可逆, 可知初等矩阵可逆。

由初等变换可逆,可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换  $r_i \leftrightarrow r_j$  的逆变换为其本身可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$$

由初等变换可逆, 可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换  $r_i \leftrightarrow r_j$  的逆变换为其本身可知

$$oldsymbol{E}_{ij}^{-1} = oldsymbol{E}_{ij}$$

(ii) 由变换  $r_i \times k$  的逆变换为  $r_i \times \frac{1}{k}$ 可知

$$\boldsymbol{E}_i(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_i(\frac{1}{k})$$

由初等变换可逆,可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换  $r_i \leftrightarrow r_j$  的逆变换为其本身可知

$$oldsymbol{E}_{ij}^{-1} = oldsymbol{E}_{ij}$$

(ii) 由变换  $r_i imes k$  的逆变换为  $r_i imes rac{1}{k}$ 可知

$$\boldsymbol{E}_i(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换  $r_i + r_j \times k$  的逆变换为  $r_i - r_j \times k$ 可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}(-k)$$

由初等变换可逆,可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换  $r_i \leftrightarrow r_j$  的逆变换为其本身可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$$

(ii) 由变换  $r_i imes k$  的逆变换为  $r_i imes rac{1}{k}$ 可知

$$\boldsymbol{E}_i(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_i(\frac{1}{k})$$

(iii) 由变换  $r_i + r_j \times k$  的逆变换为  $r_i - r_j \times k$ 可知

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k)^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}(-k)$$

$$E_{ij}E_{ij}=I$$
,  $E_i(k)E_i(\frac{1}{k})=I$ ,  $E_{ij}(k)E_{ij}(-k)=I$ .

例

设初等矩阵

$$\boldsymbol{P}_1 = \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \boldsymbol{P}_2 = \left( \begin{array}{cccc} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \boldsymbol{P}_3 = \left( \begin{array}{cccc} 1 & & & & \\ & k & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 \end{array} \right)$$

求  $P_1P_2P_3$  及  $(P_1P_2P_3)^{-1}$ .

例

设初等矩阵

$$P_1 = \left( egin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} 
ight), \quad P_2 = \left( egin{array}{cccc} 1 & & & & \ 0 & 1 & & \ 0 & 0 & 1 \ c & 0 & 0 & 1 \end{array} 
ight), \quad P_3 = \left( egin{array}{cccc} 1 & & & & \ & k & & \ & & 1 & \ & & & 1 \end{array} 
ight)$$

求  $P_1P_2P_3$  及  $(P_1P_2P_3)^{-1}$ .

$$P_2P_3 =$$

例

设初等矩阵

$$P_1 = \left( egin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} 
ight), \quad P_2 = \left( egin{array}{cccc} 1 & & & & \ 0 & 1 & & \ 0 & 0 & 1 \ c & 0 & 0 & 1 \end{array} 
ight), \quad P_3 = \left( egin{array}{cccc} 1 & & & & \ & k & & \ & & 1 & \ & & & 1 \end{array} 
ight)$$

求  $P_1P_2P_3$  及  $(P_1P_2P_3)^{-1}$ .

$$P_2P_3 = \left( egin{array}{ccc} 1 & & & & \\ 0 & k & & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{array} 
ight),$$

例

设初等矩阵

$$m{P}_1 = \left( egin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} 
ight), \quad m{P}_2 = \left( egin{array}{cccc} 1 & & & & \ 0 & 1 & & \ 0 & 0 & 1 \ c & 0 & 0 & 1 \end{array} 
ight), \quad m{P}_3 = \left( egin{array}{cccc} 1 & & & & \ & k & & \ & & 1 & \ & & & 1 \end{array} 
ight)$$

求  $P_1P_2P_3$  及  $(P_1P_2P_3)^{-1}$ .

$$m{P_2P_3} = \left(egin{array}{ccc} 1 & & & & \ 0 & k & & & \ 0 & 0 & 1 & & \ c & 0 & 0 & 1 \end{array}
ight), \quad m{P_1P_2P_3} = m{P_1(P_2P_3)} =$$

例

设初等矩阵

$$P_1 = \left( egin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} 
ight), \quad P_2 = \left( egin{array}{cccc} 1 & & & & \ 0 & 1 & & \ 0 & 0 & 1 \ c & 0 & 0 & 1 \end{array} 
ight), \quad P_3 = \left( egin{array}{cccc} 1 & & & & \ & k & & \ & & 1 & \ & & & 1 \end{array} 
ight)$$

求  $P_1P_2P_3$  及  $(P_1P_2P_3)^{-1}$ .



$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3 = \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3) = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(P_1P_2P_3)^{-1} = P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1}$$

$$(P_1P_2P_3)^{-1} = P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1}$$

$$P_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(P_1P_2P_3)^{-1} = P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1}$$

$$P_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$${\pmb P}_2^{-1}{\pmb P}_1^{-1} =$$

$$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)^{-1} = \boldsymbol{P}_3^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}$$
 
$$\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_1, \ \boldsymbol{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$
 
$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix},$$

$$(P_1P_2P_3)^{-1} = P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1}$$
 
$$P_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$
 
$$P_2^{-1}P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

$$(P_1P_2P_3)^{-1} = P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1}$$
 
$$P_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$
 
$$P_2^{-1}P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

例

将三对角矩阵

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

做 LU 分解, 即将 A 表示为

$$A = LU$$

的形式,其中 L 为主对角元为 1 的下三角矩阵,U 为上三角阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{A}_{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{A}_{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{A}_{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{A}_{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & & & \\ -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{A}_{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}_{2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{U}$$

#### 解【续】

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为  $L_1, L_2, L_3$ ,则

$$\boldsymbol{L}_3\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}$$

#### 解【续】

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为  $L_1, L_2, L_3$ , 则

$$L_3L_2L_1A = U$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{L}_3 \boldsymbol{L}_2 \boldsymbol{L}_1)^{-1} \boldsymbol{U} \triangleq \boldsymbol{L} \boldsymbol{U}$$

#### 解【续】

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为  $L_1, L_2, L_3$ , 则

$$L_3L_2L_1A = U$$

于是

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{L}_3 \boldsymbol{L}_2 \boldsymbol{L}_1)^{-1} \boldsymbol{U} \triangleq \boldsymbol{L} \boldsymbol{U}$$

其中

$$L = (L_3 L_2 L_1)^{-1} = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} 
= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} 
= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

#### 定理

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

#### 定理

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

#### 证明.

对于高斯消去法,其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换,并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。

#### 定理

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

#### 证明.

对于高斯消去法,其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换,并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此,对于任何矩阵 A,都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵 U,即存在初等矩阵  $P_1,P_2,\cdots,P_s$  使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = U$$

#### 定理

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

#### 证明.

对于高斯消去法,其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换,并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此,对于任何矩阵 A,都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵 U,即存在初等矩阵  $P_1, P_2, \cdots, P_s$  使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = U$$

当 A 为 n 阶可逆矩阵时,行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵,从而 U 必为单位矩阵 I.

#### 推论

可逆矩阵 A 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

#### 推论

可逆矩阵 A 可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

#### 证明.

由上述定理,必存在初等矩阵  $P_1, P_2, \cdots, P_s$  使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = I$$
,

于是

$$A = (P_s \cdots P_2 P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}$$



#### 推论

如果对可逆矩阵 A 与同阶单位矩阵 I 做同样的初等行变换,那么当 A 变为单位阵时, I 就变为  $A^{-1}$ ,即

$$(A \quad I) \xrightarrow{\overline{\text{初等行变换}}} (I \quad A^{-1}).$$

#### 推论

如果对可逆矩阵 A 与同阶单位矩阵 I 做同样的初等行变换,那么当 A 变为单位阵时, I 就变为  $A^{-1}$ ,即

$$egin{pmatrix} (A & I) & \overline{\text{初等行变换}} & (I & A^{-1}) \,. \end{pmatrix}$$

同理,

$$egin{pmatrix} A \ I \end{pmatrix} \xrightarrow{ ext{inspiral}} egin{pmatrix} A \ A^{-1} \end{pmatrix}$$

#### 例

求 
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
 的逆矩阵。

例

求 
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
 的逆矩阵。

$$\left( \begin{array}{ccc|c} A & I \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

#### 例

求 
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
 的逆矩阵。

$$\begin{pmatrix} A \mid I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例

求 
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
 的逆矩阵。

$$\begin{pmatrix} A \mid I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

求 
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
 的逆矩阵。

$$\begin{pmatrix} A \mid I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_3 \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

求 
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} A & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
 
$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 + r_3 \times (-2)} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
 
$$\xrightarrow{r_1 + r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
 
$$\xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例

已知 
$$ABA^T = 2BA^T + I$$
, 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $B$ 

例

已知 
$$m{A} m{B} m{A}^T = 2 m{B} m{A}^T + m{I}$$
, 其中  $m{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $m{B}$ 

### 证明.

由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{I}$$

例

已知 
$$ABA^T = 2BA^T + I$$
, 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $B$ 

### 证明.

由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{I} \Rightarrow (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$$

例

已知 
$$ABA^T = 2BA^T + I$$
, 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $B$ 

### 证明.

由

$$ABA^T = 2BA^T + I \Rightarrow (A - 2I)BA^T = I \Rightarrow BA^T = (A - 2I)^{-1}$$

知

$$B = (A - 2I)^{-1} (A^T)^{-1}.$$

例

已知 
$$ABA^T = 2BA^T + I$$
, 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $B$ 

### 证明.

由

$$ABA^T = 2BA^T + I \Rightarrow (A - 2I)BA^T = I \Rightarrow BA^T = (A - 2I)^{-1}$$

知

$$B = (A - 2I)^{-1}(A^T)^{-1}.$$

而

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

例

已知 
$$ABA^T = 2BA^T + I$$
,其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,求  $B$ 

#### 证明.

由

$$ABA^T = 2BA^T + I \Rightarrow (A - 2I)BA^T = I \Rightarrow BA^T = (A - 2I)^{-1}$$

知

$$B = (A - 2I)^{-1}(A^T)^{-1}.$$

而

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$B = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

#### 推论

对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$Ax = b$$
,

如果增广矩阵

$$(\boldsymbol{A}, \ \boldsymbol{b}) \ \stackrel{r}{\sim} \ (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{x}),$$

则 A 可逆,且  $x = A^{-1}b$  为惟一解。

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

$$(A \mid b_1 \quad b_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

$$(A \mid b_1 \quad b_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

$$(A \mid b_1 \quad b_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

$$(A \mid b_1 \quad b_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

$$(A \mid b_1 \mid b_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

$$(A \mid b_1 \quad b_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2 + 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

例

求解矩阵方程 
$$AX = A + X$$
,其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 

例

求解矩阵方程 
$$AX = A + X$$
,其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 

### 解

原方程等价于 (A - I)X = A

#### 例

求解矩阵方程 
$$AX = A + X$$
,其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 

### 解

原方程等价于 (A - I)X = A

$$(A - I \mid A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \mid 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \mid 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \mid 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例

求解矩阵方程 
$$AX = A + X$$
,其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 

## 解

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

### 例

求解矩阵方程 AX = A + X,其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 

## 解

$$\xrightarrow{r_3+4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

例

求解矩阵方程 
$$AX = A + X$$
,其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 

### 解

$$(A - I \mid A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \div (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例

求解矩阵方程 
$$AX = A + X$$
,其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 

## 解

$$(A - I \mid A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \mid 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \mid 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \mid 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \mid 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \mid 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \mid -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \mid 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \mid 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \mid -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \div (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \mid 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \mid 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \mid 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \mid 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \mid 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \mid 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例

求解矩阵方程 
$$AX=A+X$$
,其中  $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$ 

## 解

$$(A - I \mid A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \mid 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \mid 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \mid 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \mid 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \mid 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \mid -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \mid 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \mid 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \mid -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \div (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \mid 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \mid 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \mid 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \mid 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \mid 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \mid 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \mid -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \mid 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \mid 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

### 例

当 
$$a,b$$
 满足什么条件时,矩阵  $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  不可逆。

例

当 
$$a, b$$
 满足什么条件时,矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  不可逆。

$$A \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3\\ 4 & 7 & 1 & 10\\ 0 & 1 & -1 & b\\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

## 例

当 
$$a, b$$
 满足什么条件时,矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  不可逆。

$$A \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_1 \times (-2)]{r_2 + r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

## 例

当 
$$a, b$$
 满足什么条件时,矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  不可逆。

#### 解

$$A \xrightarrow[c_{2} \to c_{3}]{d} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_{4} + r_{1} \times (-2)]{r_{4} + r_{1} \times (-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_{4} + r_{2} \times (-1)]{r_{4} + r_{2} \times (-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b - 2 \\ 0 & 0 & a - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知, $|\mathbf{A}|=1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}0&b-2\\a-1&0\end{vmatrix}=(a-1)(b-2)$ 。于是,当 (a-1)(b-2)=0,即 a=1 或 b=2 时, $\mathbf{A}$  不可逆。

# 目录

- 1 矩阵的初等变换与初等矩阵
- 2 矩阵分块

#### 设有 3×4 矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

#### 它可表示为分块矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$egin{aligned} m{A}_{11} &= egin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, & m{A}_{12} &= egin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \ m{A}_{21} &= egin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, & m{A}_{22} &= egin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 矩阵的按行分块

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

其中

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

#### 矩阵的按列分块

$$B = egin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \ dots & dots & dots \ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = egin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{b}_{j} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

### 准对角矩阵 (quasi-diagonal matrix)

当 n 阶矩阵 A 中非零元素都集中在主对角线附近,有时可分块成如下 准对角矩阵

$$egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned\\ egin{aligned} egi$$

其中  $A_i$  为  $r_i$  阶方阵  $(i = 1, 2, \dots, m)$ ,且

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n.$$

例

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

#### 分块矩阵的加法

设 A, B 为同型矩阵,采用相同的分块法,有

$$m{A} = \left( egin{array}{ccc} m{A}_{11} & \cdots & m{A}_{1r} \ dots & & dots \ m{A}_{s1} & \cdots & m{A}_{sr} \end{array} 
ight), \;\; m{B} = \left( egin{array}{ccc} m{B}_{11} & \cdots & m{B}_{1r} \ dots & & dots \ m{B}_{s1} & \cdots & m{B}_{sr} \end{array} 
ight),$$

其中  $A_{ij}$  与  $B_{ij}$  为同型矩阵,则

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

#### 分块矩阵的加法

设 A, B 为同型矩阵, 采用相同的分块法, 有

$$m{A} = \left( egin{array}{ccc} m{A}_{11} & \cdots & m{A}_{1r} \ dots & & dots \ m{A}_{s1} & \cdots & m{A}_{sr} \end{array} 
ight), \;\; m{B} = \left( egin{array}{ccc} m{B}_{11} & \cdots & m{B}_{1r} \ dots & & dots \ m{B}_{s1} & \cdots & m{B}_{sr} \end{array} 
ight),$$

其中  $A_{ij}$  与  $B_{ij}$  为同型矩阵,则

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

## 分块矩阵的数乘

$$\lambda \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{A}_{11} & \cdots & \lambda \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \lambda \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}$$

#### 分块矩阵的乘法

设 A 为  $m \times n$  矩阵, B 为  $n \times s$  矩阵,

$$egin{aligned} oldsymbol{A} = \left( egin{array}{ccc} oldsymbol{A}_{11} & \cdots & oldsymbol{A}_{1s} \ dots & & dots \ oldsymbol{A}_{r1} & \cdots & oldsymbol{A}_{rs} \end{array} 
ight), \ oldsymbol{B} = \left( egin{array}{ccc} oldsymbol{B}_{11} & \cdots & oldsymbol{B}_{1t} \ dots & & dots \ oldsymbol{B}_{s1} & \cdots & oldsymbol{B}_{st} \end{array} 
ight), \end{aligned}$$

其中  $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{is}$  的列数分别等于  $B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{sj}$  的行数,则

$$egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned} C_{11} & \cdots & C_{1t} \ dots & & dots \ C_{r1} & \cdots & C_{rt} \end{aligned} \end{aligned} \end{aligned},$$

其中

$$oldsymbol{C}_{ij} = \sum_{k=1}^s oldsymbol{A}_{ik} oldsymbol{B}_{kj}.$$

#### 例

#### 用分块矩阵的乘法计算 AB, 其中

$$\boldsymbol{A} = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \boldsymbol{B} = \left( \begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

#### 例

用分块矩阵的乘法计算 AB, 其中

$$\boldsymbol{A} = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \boldsymbol{B} = \left( \begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2\times3} \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & \mathbf{0}_{3\times2} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 例

用分块矩阵的乘法计算 AB, 其中

$$\boldsymbol{A} = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \boldsymbol{B} = \left( \begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2\times3} \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & \mathbf{0}_{3\times2} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ A_1B_1 - I_3 & A_1 \end{pmatrix}$$

### 例

用分块矩阵的乘法计算 AB, 其中

$$\boldsymbol{A} = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \boldsymbol{B} = \left( \begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2\times 3} \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & 0_{3\times 2} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ A_1B_1 - I_3 & A_1 \end{pmatrix}$$

$$A_1B_1 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

例

设 A 为  $m \times n$  矩阵, B 为  $n \times s$  矩阵。

例

设 A 为  $m \times n$  矩阵, B 为  $n \times s$  矩阵。

• 将 B 按列分块成  $1 \times s$  分块矩阵, 将 A 看成  $1 \times 1$  分块矩阵, 则

$$AB = A(b_1, b_2, \cdots, b_s) = (Ab_1, Ab_2, \cdots, Ab_s)$$

## 例

设 A 为  $m \times n$  矩阵, B 为  $n \times s$  矩阵。

• 将 B 按列分块成  $1 \times s$  分块矩阵,将 A 看成  $1 \times 1$  分块矩阵,则

$$AB = A(b_1, b_2, \cdots, b_s) = (Ab_1, Ab_2, \cdots, Ab_s)$$

• 若已知 AB = 0, 则显然

$$Ab_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

因此,B 的每一列  $b_j$  都是线性方程组 Ax = 0 的解。

例

设 A 为实矩阵且  $A^TA = 0$ , 证明 A = 0.

#### 例

设 A 为实矩阵且  $A^TA = 0$ , 证明 A = 0.

#### 证明

设  $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ,把 A 用列向量表示为  $A=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ ,则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{array}\right) (a_1, \ a_2, \ \cdots, \ a_n) = \left(\begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1^T a_1 & \boldsymbol{a}_1^T a_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T a_n \\ \boldsymbol{a}_2^T a_1 & \boldsymbol{a}_2^T a_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T a_1 & \boldsymbol{a}_n^T a_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T a_n \end{array}\right)$$

#### 例

设 A 为实矩阵且  $A^T A = 0$ , 证明 A = 0.

### 证明

设  $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ,把 A 用列向量表示为  $A=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ ,则

$$m{A}^Tm{A} = \left(egin{array}{c} m{a}_1^T \ m{a}_2^T \ m{\ddots} \ m{a}_n^T \end{array}
ight) (m{a}_1, \; m{a}_2, \; \cdots, \; m{a}_n) = \left(egin{array}{cccc} m{a}_1^Tm{a}_1 & m{a}_1^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_1^Tm{a}_n \ m{a}_2^Tm{a}_1 & m{a}_2^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_2^Tm{a}_n \ m{\ddots} & m{\ddots} & m{\ddots} \ m{a}_n^Tm{a}_1 & m{a}_n^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_n^Tm{a}_n \end{array}
ight)$$

因为  $A^T A = 0$ , 故

$$\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

#### 例

设 A 为实矩阵且  $A^T A = 0$ , 证明 A = 0.

### 证明

设  $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ,把 A 用列向量表示为  $A=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ ,则

$$m{A}^Tm{A} = \left(egin{array}{c} m{a}_1^T \ m{a}_2^T \ m{\ddots} \ m{a}_n^T \end{array}
ight) (m{a}_1, \; m{a}_2, \; \cdots, \; m{a}_n) = \left(egin{array}{cccc} m{a}_1^Tm{a}_1 & m{a}_1^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_1^Tm{a}_n \ m{a}_2^Tm{a}_1 & m{a}_2^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_2^Tm{a}_n \ m{\ddots} & m{\ddots} & m{\ddots} \ m{a}_n^Tm{a}_1 & m{a}_n^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_n^Tm{a}_n \end{array}
ight)$$

因为  $A^T A = 0$ , 故

$$\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

特别地,有

$$\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{a}_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

#### 例

设 A 为实矩阵且  $A^T A = 0$ , 证明 A = 0.

### 证明

设  $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ,把 A 用列向量表示为  $A=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ ,则

$$m{A}^Tm{A} = \left(egin{array}{c} m{a}_1^T \ m{a}_2^T \ \cdots \ m{a}_n^T \end{array}
ight) (m{a}_1, \; m{a}_2, \; \cdots, \; m{a}_n) = \left(egin{array}{cccc} m{a}_1^Tm{a}_1 & m{a}_1^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_1^Tm{a}_n \ m{a}_2^Tm{a}_1 & m{a}_2^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_2^Tm{a}_n \ & dots & dots & dots \ m{a}_n^Tm{a}_1 & m{a}_n^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_n^Tm{a}_n \end{array}
ight)$$

因为  $A^T A = 0$ , 故

$$\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

特别地,有

$$\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{a}_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

即

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \dots + a_{mj}^2 = 0$$

#### 例

设 A 为实矩阵且  $A^T A = 0$ , 证明 A = 0.

## 证明

设  $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ,把 A 用列向量表示为  $A=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ ,则

$$oldsymbol{A}^Toldsymbol{A} = \left(egin{array}{c} oldsymbol{a}_1^T \ oldsymbol{a}_2^T \ oldsymbol{...} \ oldsymbol{a}_n^T \end{array}
ight) (oldsymbol{a}_1, \ oldsymbol{a}_2, \ \cdots, \ oldsymbol{a}_n) = \left(egin{array}{ccc} oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_1 & oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_2 & \cdots & oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_n \ oldsymbol{a}_2^T oldsymbol{a}_1 & oldsymbol{a}_2^T oldsymbol{a}_2 & \cdots & oldsymbol{a}_2^T oldsymbol{a}_n \ oldsymbol{...} \ oldsymbol{a}_n^T oldsymbol{a}_1 & oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_2 & \cdots & oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_n \ oldsymbol{...} \ oldsymbol{a}_n^T oldsymbol{a}_1 & oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_2 & \cdots & oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_n \ oldsymbol{a}_n^T oldsymbol{a}_1 & oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_2 & \cdots & oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_n \ oldsymbol{a}_n^T oldsymbol{a}_1 & oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_1 & oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_1^T oldsymbol{a}_1 & oldsymbol{a}_1^T oldsymb$$

因为  $A^T A = 0$ , 故

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

特别地,有

$$\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{a}_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

即

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \dots + a_{mj}^2 = 0 \implies a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{mj} = 0$$

#### 例

设 A 为实矩阵且  $A^TA = 0$ , 证明 A = 0.

#### 证明

设  $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ,把 A 用列向量表示为  $A=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ ,则

$$m{A}^Tm{A} = \left(egin{array}{c} m{a}_1^T \ m{a}_2^T \ m{\ddots} \ m{a}_n^T \end{array}
ight) (m{a}_1, \; m{a}_2, \; \cdots, \; m{a}_n) = \left(egin{array}{cccc} m{a}_1^Tm{a}_1 & m{a}_1^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_1^Tm{a}_n \ m{a}_2^Tm{a}_1 & m{a}_2^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_2^Tm{a}_n \ m{\ddots} & m{\ddots} & m{\ddots} \ m{a}_n^Tm{a}_1 & m{a}_n^Tm{a}_2 & \cdots & m{a}_n^Tm{a}_n \end{array}
ight)$$

因为  $A^T A = 0$ , 故

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

特别地,有

$$\boldsymbol{a}_{j}^{T}\boldsymbol{a}_{j}=0, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \dots + a_{mj}^2 = 0 \implies a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{mj} = 0 \implies \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

#### 例

若 n 阶矩阵 C, D 可以分块成同型准对角矩阵, 即

$$C = \left( egin{array}{cccc} C_1 & & & & & \ & C_2 & & & & \ & & \ldots & & \ & & & C_m \end{array} 
ight), \quad D = \left( egin{array}{cccc} D_1 & & & & \ & D_2 & & & \ & & \ldots & \ & & & D_m \end{array} 
ight)$$

其中  $C_i$  和  $D_i$  为同阶方阵  $(i = 1, 2, \dots, m)$ , 则

$$CD=\left(egin{array}{ccc} C_1D_1 & & & & & \ & C_2D_2 & & & & \ & & & \cdots & & \ & & & C_mD_m \end{array}
ight)$$

例

证明:若方阵 A 为可逆的上三角阵,则  $A^{-1}$  也为上三角阵。

#### 例

证明:若方阵 A 为可逆的上三角阵,则  $A^{-1}$  也为上三角阵。

## 证明

对阶数 n 用数学归纳法。

1 当 
$$n=1$$
 时,  $(a)^{-1}=(\frac{1}{a})$ , 结论成立。

#### 例

证明: 若方阵 A 为可逆的上三角阵,则  $A^{-1}$  也为上三角阵。

## 证明

对阶数 n 用数学归纳法。

- 1 当 n=1 时,  $(a)^{-1}=(\frac{1}{a})$ , 结论成立。
- 2 假设命题对 n-1 阶可逆上三角矩阵成立,考虑 n 阶情况,设

$$m{A} = \left( egin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{array} 
ight) = \left( egin{array}{ccc} a_{11} & m{lpha} \\ m{0} & m{A}_1 \end{array} 
ight)$$

其中  $A_1$  为 n-1 阶可逆上三角阵。

## 证明【续】

设 A 的逆阵为

$$B = \left( egin{array}{cc} b_{11} & oldsymbol{eta} \ oldsymbol{\gamma} & B_1 \end{array} 
ight),$$

#### 证明【续】

设A的逆阵为

$$\boldsymbol{B} = \left( \begin{array}{cc} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{B}_1 \end{array} \right), \quad \boldsymbol{\beta} = \left( \begin{array}{cc} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{array} \right)^T, \quad \boldsymbol{\gamma} = \left( \begin{array}{cc} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{array} \right), \quad \boldsymbol{B}_1 = \left( \begin{array}{cc} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right)$$

### 证明【续】

设A的逆阵为

$$\boldsymbol{B} = \left( \begin{array}{cc} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{B}_1 \end{array} \right), \quad \boldsymbol{\beta} = \left( \begin{array}{cc} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{array} \right)^T, \quad \boldsymbol{\gamma} = \left( \begin{array}{cc} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{array} \right), \quad \boldsymbol{B}_1 = \left( \begin{array}{cc} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right)$$

则

$$AB = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & \alpha \\ \mathbf{0} & A_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a_{11}b_{11} + \alpha\gamma & a_{11}\beta + \alpha B_1 \\ A_1\gamma & A_1B_1 \end{array}\right)$$

### 证明【续】

设A的逆阵为

$$m{B} = \left( egin{array}{cc} b_{11} & m{eta} \ m{\gamma} & m{B}_1 \end{array} 
ight), \quad m{eta} = \left( egin{array}{cc} b_{12} \ dots \ b_{1n} \end{array} 
ight)^T, \quad m{\gamma} = \left( egin{array}{cc} b_{21} \ dots \ b_{n1} \end{array} 
ight), \quad m{B}_1 = \left( egin{array}{cc} b_{22} & \cdots & b_{2n} \ dots & \ddots & dots \ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} 
ight)$$

则

$$AB = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} b_{11} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & B_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a_{11}b_{11} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\gamma} & a_{11}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}B_1 \\ A_1\boldsymbol{\gamma} & A_1B_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I_{n-1}} \end{array}\right)$$

#### 证明【续】

设A的逆阵为

$$B = \left( egin{array}{cc} b_{11} & eta \ \gamma & B_1 \end{array} 
ight), \quad eta = \left( egin{array}{cc} b_{12} \ dots \ b_{1n} \end{array} 
ight)^T, \quad egin{array}{cc} \gamma = \left( egin{array}{cc} b_{21} \ dots \ b_{n1} \end{array} 
ight), \quad B_1 = \left( egin{array}{cc} b_{22} & \cdots & b_{2n} \ dots & \ddots & dots \ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} 
ight)$$

则

$$AB = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & \alpha \\ \mathbf{0} & A_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a_{11}b_{11} + \alpha\gamma & a_{11}\beta + \alpha B_1 \\ A_1\gamma & A_1B_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I_{n-1}} \end{array}\right)$$

于是

$$A_1\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0,$$

$$A_1B_1 = I_1 \implies B_1 = A_1^{-1}.$$

由归纳假设,  $B_1$  为 n-1 阶上三角矩阵, 因此

$$A^{-1} = B = \left( \begin{array}{cc} b_{11} & \beta \\ \mathbf{0} & B_1 \end{array} \right)$$

为上三角矩阵。

### 分块矩阵的转置

分块矩阵  $A = (A_{kl})_{s \times t}$  的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{B}_{lk})_{t \times s},$$

其中  $\boldsymbol{B}_{lk} = \boldsymbol{A}_{kl}^T$ .

例

$$egin{aligned} m{A} = \left( egin{array}{ccc} m{A}_{11} & m{A}_{12} & m{A}_{13} \ m{A}_{21} & m{A}_{23} & \end{array} 
ight) \; \Rightarrow \; m{A}^T = \left( egin{array}{ccc} m{A}_{11}^T & m{A}_{21}^T \ m{A}_{12}^T & m{A}_{22}^T \ m{A}_{13}^T & m{A}_{23}^T \end{array} 
ight) \end{aligned}$$

### 分块矩阵的转置

分块矩阵  $A = (A_{kl})_{s \times t}$  的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{B}_{lk})_{t \times s},$$

其中  $\boldsymbol{B}_{lk} = \boldsymbol{A}_{kl}^T$ .

例

$$A = \left( egin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} 
ight) \; \Rightarrow \; A^T = \left( egin{array}{ccc} A_{11}^T & A_{21}^T \ A_{12}^T & A_{22}^T \ A_{13}^T & A_{23}^T \end{array} 
ight)$$

$$B =$$
 接行分块  $\left( egin{array}{c} b_1 \ b_2 \ dots \ b_m \end{array} 
ight) \; \Rightarrow \; B^T = \left( egin{array}{c} b_1^T & b_2^T & \cdots & b_m^T \end{array} 
ight)$ 

## 可逆准对角矩阵的逆矩阵

#### 对于准对角矩阵

$$oldsymbol{A} = egin{pmatrix} oldsymbol{A}_1 & & & & & \ & oldsymbol{A}_2 & & & & \ & & \ddots & & \ & & & oldsymbol{A}_m \end{pmatrix}$$

• 由于其行列式为  $|{m A}|=|{m A}_1||{m A}_2|\cdots|{m A}_m|$ ,故准对角矩阵  ${m A}$  可逆的充要条件为 $|{m A}_i|
eq 0,\quad i=1,2,\cdots,m.$ 

### 可逆准对角矩阵的逆矩阵

#### 对于准对角矩阵

$$oldsymbol{A} = egin{pmatrix} oldsymbol{A}_1 & & & & & \ & oldsymbol{A}_2 & & & & \ & & \ddots & & \ & & & oldsymbol{A}_m \end{pmatrix}$$

ullet 由于其行列式为  $|m{A}|=|m{A}_1||m{A}_2|\cdots|m{A}_m|$ ,故准对角矩阵  $m{A}$  可逆的充要条件为  $|m{A}_i|
eq 0,\quad i=1,2,\cdots,m.$ 

• 若准对角矩阵 A 可逆,则其逆矩阵为

- 用分块矩阵求逆矩阵,可将高阶矩阵的求逆转化为低阶矩阵的求逆。
- 一个  $2 \times 2$  的分块矩阵求逆,可以根据逆矩阵的定义,用解矩阵方程的方法解得。

例

设 
$$\pmb{A} = \left( egin{array}{cc} \pmb{B} & \pmb{0} \\ \pmb{C} & \pmb{D} \end{array} 
ight)$$
,其中  $\pmb{B}, \pmb{D}$  皆为可逆矩阵,证明  $\pmb{A}$  可逆并求  $\pmb{A}^{-1}$ .

例

设 
$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$
,其中  $B,D$  皆为可逆矩阵,证明  $A$  可逆并求  $A^{-1}$ .

## 证明.

因 
$$|A|=|B||D| 
eq 0$$
,故  $A$  可逆。设  $A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ ,则 
$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX+DZ & CY+DT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

例

设 
$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$
,其中  $B,D$  皆为可逆矩阵,证明  $A$  可逆并求  $A^{-1}$ .

## 证明.

因 
$$|A| = |B||D| 
eq 0$$
,故  $A$  可逆。设  $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ ,则 
$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

由此可知

$$BX = I$$
  $\Rightarrow X = B^{-1}$   
 $BY = 0$   $\Rightarrow Y = 0$   
 $CX + DZ = 0$   $\Rightarrow Z = -D^{-1}CB^{-1}$   
 $CY + DT = I$   $\Rightarrow T = D^{-1}$ 

例

设 
$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$
,其中  $B,D$  皆为可逆矩阵,证明  $A$  可逆并求  $A^{-1}$ .

## 证明.

因 
$$|A| = |B||D| 
eq 0$$
,故  $A$  可逆。设  $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ ,则 
$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

由此可知

$$BX = I$$
  $\Rightarrow X = B^{-1}$   
 $BY = 0$   $\Rightarrow Y = 0$   
 $CX + DZ = 0$   $\Rightarrow Z = -D^{-1}CB^{-1}$   
 $CY + DT = I$   $\Rightarrow T = D^{-1}$ 

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

## 分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵

对于分块矩阵

$$oldsymbol{A} = \left(egin{array}{cc} oldsymbol{A}_{11} & oldsymbol{A}_{12} \ oldsymbol{A}_{21} & oldsymbol{A}_{22} \end{array}
ight)$$

同样可以定义它的 3 类初等行变换与列变换,并相应地定义 3 类分块矩阵:

• 分块交换矩阵

$$\left( egin{array}{cc} \mathbf{0} & oldsymbol{I}_n \ oldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \end{array} 
ight)$$

• 分块倍乘矩阵  $(C_1, C_2)$  为可逆阵)

$$\left(egin{array}{cc} C_1 & \mathbf{0} \ \mathbf{0} & I_n \end{array}
ight)$$
 或  $\left(egin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \ \mathbf{0} & C_2 \end{array}
ight)$ 

• 分块倍加矩阵

$$\left(egin{array}{cc} I_m & \mathbf{0} \ C_3 & I_n \end{array}
ight)$$
 或  $\left(egin{array}{cc} I_m & C_4 \ \mathbf{0} & I_n \end{array}
ight)$ 

## 例

设 n 阶矩阵 A 分块表示为

$$oldsymbol{A} = \left(egin{array}{cc} oldsymbol{A}_{11} & oldsymbol{A}_{12} \ oldsymbol{A}_{21} & oldsymbol{A}_{22} \end{array}
ight)$$

其中  $A_{11},A_{22}$  为方阵,且 A 与  $A_{11}$  可逆。证明: $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆,并求  $A^{-1}$ 。

构造分块倍加矩阵 
$$P_1=egin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$$
,则 
$$P_1A=egin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}:=egin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix}.$$

#### 解法1

构造分块倍加矩阵 
$$oldsymbol{P}_1=egin{pmatrix} oldsymbol{I}_1 & oldsymbol{0} \ -oldsymbol{A}_{21}oldsymbol{A}_{11}^{-1} & oldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$
,则

$$P_1 A = egin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \ 0 & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix} := egin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

两边同取行列式得  $|A|=|P_1A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$ ,故  $Q=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆。

#### 解法 1

构造分块倍加矩阵 
$$P_1=egin{pmatrix}I_1&0\cr-A_{21}A_{11}^{-1}&I_2\end{pmatrix}$$
,则

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}.$$

两边同取行列式得  $|A|=|P_1A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$ ,故  $Q=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆。构造分块倍加矩阵  $P_2=\left(egin{array}{cc} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{array}
ight)$ ,则

$$P_2P_1A = \left( egin{array}{cc} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{array} 
ight)$$

### 解法 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ ,则

$$P_1 A = egin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix} := egin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

两边同取行列式得  $|A|=|P_1A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$ ,故  $Q=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可

逆。构造分块倍加矩阵 
$$m{P}_2=\left(egin{array}{cc} m{I}_1 & -m{A}_{12}m{Q}^{-1} \ m{0} & m{I}_2 \end{array}
ight)$$
,则

$$P_2P_1A = \left( egin{array}{cc} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{array} 
ight)$$

于是

$$A^{-1} = \left(egin{array}{cc} A_{11}^{-1} & \mathbf{0} \ \mathbf{0} & Q^{-1} \end{array}
ight) \left(egin{array}{cc} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \ \mathbf{0} & I_2 \end{array}
ight) \left(egin{array}{cc} I_1 & \mathbf{0} \ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{array}
ight)$$

### 解法 1

构造分块倍加矩阵  $oldsymbol{P}_1 = egin{pmatrix} oldsymbol{I}_1 & oldsymbol{0} \ -oldsymbol{A}_{21}oldsymbol{A}_{11}^{-1} & oldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$ ,则

$$P_1A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

两边同取行列式得  $|A|=|P_1A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$ ,故  $Q=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆。构造分块倍加矩阵  $P_2=\left(egin{array}{cc}I_1&-A_{12}Q^{-1}\\0&I_2\end{array}
ight)$ ,则

$$P_2P_1A = \left( egin{array}{cc} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{array} 
ight)$$

于是

$$A^{-1} = \left(egin{array}{ccc} A_{11}^{-1} & \mathbf{0} \ \mathbf{0} & Q^{-1} \end{array}
ight) \left(egin{array}{ccc} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \ \mathbf{0} & I_2 \end{array}
ight) \left(egin{array}{ccc} I_1 & \mathbf{0} \ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{array}
ight) \ = \left(egin{array}{ccc} A_{11}^{-1} & \mathbf{0} \ \mathbf{0} & Q^{-1} \end{array}
ight) \left(egin{array}{ccc} I_1 + A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{12}Q^{-1} \ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{array}
ight) \end{array}$$

### 解法 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ -A_{21}A_{-1}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ ,则

$$P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

两边同取行列式得  $|A|=|P_1A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$ ,故  $Q=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可

逆。构造分块倍加矩阵 
$$P_2=\left(egin{array}{cc} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \ 0 & I_2 \end{array}
ight)$$
,则

$$P_2P_1A = \left( egin{array}{cc} A_{11} & 0 \ 0 & Q \end{array} 
ight)$$

于是

$$\begin{split} A^{-1} &= \left( \begin{array}{cc} A_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q^{-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} I_1 & \mathbf{0} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc} A_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q^{-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} I_1 + A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{12}Q^{-1} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1} \\ -Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & Q^{-1} \end{array} \right) \end{split}$$

$$egin{pmatrix} egin{pmatrix} m{A}_{11} & m{A}_{12} & m{I} \ m{A}_{21} & m{A}_{22} & & m{I} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & I \\ A_{21} & A_{22} & I \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{Q} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}]{r_2 - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & I & 0 \\ & \mathbf{Q} & -A_{21} A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & I \\ A_{21} & A_{22} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{c} r_2 - A_{21} A_{11}^{-1} \cdot r_1 \\ \hline \textbf{\textit{Q}} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{array}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & I & 0 \\ \hline \textbf{\textit{Q}} & -A_{21} A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{c} r_1 - A_{12} Q^{-1} \cdot r_2 \\ \hline \end{array}} \begin{pmatrix} A_{11} & Q & I + A_{12} Q^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{12} Q^{-1} \\ \hline \textbf{\textit{Q}} & -A_{21} A_{11}^{-1} & I \end{array} )$$

#### 解法 2

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & I \\ A_{21} & A_{22} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - A_{21} A_{11}^{-1} \cdot r_1 \\ Q = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{matrix}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & I & 0 \\ Q & -A_{21} A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} r_1 - A_{12} Q^{-1} \cdot r_2 \\ Q & -A_{21} A_{11}^{-1} & I \end{matrix}} \begin{pmatrix} A_{11} & I + A_{12} Q^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{12} Q^{-1} \\ -A_{21} A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} Q^{-1} \cdot r_2 \\ A_{11}^{-1} \cdot r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} Q^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} Q^{-1} \\ -Q^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

# 由此可知

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} + \boldsymbol{A}_{11}^{-1} \boldsymbol{A}_{12} \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{A}_{21} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1} \boldsymbol{A}_{12} \boldsymbol{Q}^{-1} \\ -\boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{A}_{21} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{Q}^{-1} \end{pmatrix}$$

例

设 
$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
,且  $A$  可逆,证明: $|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

# 例

设 
$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
,且  $A$  可逆,证明: $|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

#### 证明 1

构造分块倍加矩阵 
$$P_1=\left(egin{array}{cc}I_1&0\\-CA^{-1}&I_2\end{array}
ight),\;\;\mathbb{M}$$
  $P_1Q=\left(egin{array}{cc}A&B\\0&D-CA^{-1}B\end{array}
ight)$ 

## 例

设 
$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
,且  $A$  可逆,证明: $|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

#### 证明 1

构造分块倍加矩阵 
$$m{P}_1=\left(egin{array}{ccc} m{I}_1 & m{0} \\ -m{C}m{A}^{-1} & m{I}_2 \end{array}
ight)$$
,则

$$P_1Q=\left(egin{array}{cc} A & B \ 0 & D-CA^{-1}B \end{array}
ight)$$

两边同取行列式得  $|Q| = |P_1Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

# 例

设 
$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
,且  $A$  可逆,证明: $|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

#### 证明 1

构造分块倍加矩阵 
$$m{P}_1=\left(egin{array}{ccc} m{I}_1 & m{0} \\ -Cm{A}^{-1} & m{I}_2 \end{array}
ight)$$
,则

$$P_1Q = \left( egin{array}{cc} A & B \ 0 & D - CA^{-1}B \end{array} 
ight)$$

两边同取行列式得  $|Q| = |P_1Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

### 证明 2

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - CA^{-1} \cdot r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

## 例

设 
$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
,且  $A$  可逆,证明: $|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

#### 证明 1

构造分块倍加矩阵 
$$m{P}_1=\left(egin{array}{ccc} m{I}_1 & m{0} \\ -Cm{A}^{-1} & m{I}_2 \end{array}
ight)$$
,则

$$P_1Q = \left( egin{array}{cc} A & B \ 0 & D-CA^{-1}B \end{array} 
ight)$$

两边同取行列式得  $|Q| = |P_1Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

#### 证明 2

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - CA^{-1} \cdot r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

由于分块倍加矩阵的行列式为 1, 即分块倍加变换不改变矩阵的值, 故

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

### 例

设 A 与 B 均为 n 阶分块矩阵,证明

$$\left| egin{array}{cc} A & B \\ B & A \end{array} \right| = \left| A + B \right| \, \left| A - B \right|$$

### 例

设 A 与 B 均为 n 阶分块矩阵,证明

$$\left| egin{array}{cc} A & B \ B & A \end{array} \right| = \left| A + B \right| \, \left| A - B \right|$$

### 证明 1

将分块矩阵  $\left(egin{array}{cc} A & B \\ B & A \end{array}
ight)$  的第一行加到第二行,得

$$\left(\begin{array}{cc} I & \mathbf{0} \\ I & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} A & B \\ B & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} A & B \\ A+B & A+B \end{array}\right)$$

## 例

设 A 与 B 均为 n 阶分块矩阵,证明

$$\left| egin{array}{cc} A & B \ B & A \end{array} \right| = \left| A + B \right| \, \left| A - B \right|$$

### 证明 1

将分块矩阵  $\left(egin{array}{cc} A & B \ B & A \end{array}
ight)$  的第一行加到第二行,得

$$\left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ I & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} A & B \\ B & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} A & B \\ A+B & A+B \end{array}\right)$$

再将第一列减去第二列,得

$$\left(egin{array}{ccc}A&B\\A+B&A+B\end{array}
ight)\left(egin{array}{ccc}I&0\\-I&I\end{array}
ight)=\left(egin{array}{ccc}A-B&B\\0&A+B\end{array}
ight)$$

### 例

设 A 与 B 均为 n 阶分块矩阵, 证明

$$\left| egin{array}{cc} A & B \ B & A \end{array} \right| = \left| A + B \right| \, \left| A - B \right|$$

### 证明 1

将分块矩阵  $\left(egin{array}{cc} A & B \ B & A \end{array}
ight)$  的第一行加到第二行,得

$$\left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ I & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} A & B \\ B & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} A & B \\ A+B & A+B \end{array}\right)$$

再将第一列减去第二列、得

$$\left(\begin{array}{cc}A&B\\A+B&A+B\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}I&0\\-I&I\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}A-B&B\\0&A+B\end{array}\right)$$

总之有

$$\left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ I & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} A & B \\ B & A \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ -I & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} A-B & B \\ 0 & A+B \end{array}\right)$$

两边同时取行列式即得结论。

#### 证明 2

$$egin{pmatrix} A & B \ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} egin{pmatrix} A & B \ A + B & A + B \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 - c_2} egin{pmatrix} A - B & B \ A + B \end{pmatrix}$$

由于分块倍加矩阵的行列式为 1, 即分块初等变换不改变行列式的值, 故

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ & A+B \end{vmatrix} = |A-B| \; |A+B|.$$