



线性代数 特征值问题

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 5 月 16 日



- 1** 矩阵的特征值与特征向量
 - 特征值与特征向量的定义
 - 特征值与特征向量的性质
- 2** 相似矩阵与矩阵的对角化
- 3** 实对称矩阵的对角化

1 矩阵的特征值与特征向量

2 相似矩阵与矩阵的对角化

3 实对称矩阵的对角化

- 1 矩阵的特征值与特征向量
 - 特征值与特征向量的定义
 - 特征值与特征向量的性质
- 2 相似矩阵与矩阵的对角化
- 3 实对称矩阵的对角化

定义 (特征值与特征向量)

设 A 为复数域 \mathbb{C} 上的 n 阶矩阵, 如果存在数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零的 n 维向量 x 使得

$$Ax = \lambda x$$

则称 λ 为矩阵 A 的 特征值, x 为 A 的对应于特征值 λ 的 特征向量。

注

- (1) 特征值问题是对方阵而言的;
- (2) 特征向量 $x \neq 0$;
- (3) 由定义, A 的特征值, 就是使 $(A - \lambda I)x = 0$ 有非零解的 λ 值, 即方程 $|A - \lambda I| = 0$ 的根都是矩阵 A 的特征值。

特征值与特征向量的定义

定义 (特征多项式、特征矩阵、特征方程)

设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, 则

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵 A 的 **特征多项式**, $|A - \lambda I| = 0$ 称为 A 的 **特征方程**, $A - \lambda I$ 称为 A 的 **特征矩阵**。

注

- A 的特征多项式是 λ 的 n 次多项式。
- 特征方程 $|A - \lambda I| = 0$ 的 k 重称为 A 的 k 重特征值。

矩阵特征值问题的计算步骤

① 特征值

求解特征方程 $|A - \lambda I| = 0$, 算得特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;

② 特征向量

对 A 的每个互异特征值 λ_i , 求 $(A - \lambda_i)x = 0$ 的 全部非零解, 即 A 对应于特征值 λ_i 的全部特征向量。

定义 (特征子空间)

对 A 的特征值 λ , $(Ax - \lambda I)x = 0$ 的解空间称为特征值 λ 的 特征子空间, 记为 V_λ , 即

$$V_\lambda = \{\lambda \text{ 对应的全部特征向量} \} \cup \{0\}.$$

定义 (几何重数与代数重数)

设 λ 为 A 的特征值,

- 若 λ 为 k 重特征值, 则称 k 为 λ 的 代数重数;
- 称 V_λ 的维数为 λ 的 几何重数, 即 $\dim V_\lambda$ 。

深入理解几何重数

设 λ 为 A 的特征值, 则

- 其几何重数即为 $(A - \lambda I)x = 0$ 的基础解系的向量个数, 即

$$l = n - r(A - \lambda I),$$

- 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ 为 $(A - \lambda I)x = 0$ 的基础解系, 则它构成 V_λ 的一组基, 且

$$V_\lambda = \text{span}\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l\}$$

定理

矩阵特征值的几何重数不超过代数重数。

证明.

略。

注

该定理说明：设 λ 是 A 的特征值，求解

$$(A - \lambda I)x = 0$$

时，基础解系中向量的个数不会超过 λ 的代数重数。

例

对角阵、上（下）三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的特征多项式皆为

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$$

故 对角阵、上（下）三角矩阵的 n 个特征值为 n 个主对角元。

例

对于数量矩阵 kI ,

- 全部特征值为 k (n 重)。
- $\forall x \neq 0$, 有

$$(kI)x = kx,$$

故特征值 k 对应的特征向量是任意非零向量。

- 特征值 k 的代数重数为 n , 几何重数为 n 。

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解

矩阵 A 的特征方程为

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 & -1 \\ 3 & 1 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 = 0$$

故 A 的特征值为 $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 3$ (二重特征值)。

特征值与特征向量的定义

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2} = 2$ 时, 解方程组 $(A - 2I)x = 0$, 即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系为 $\xi_1 = (1, 1, 2)^T$, 故 A 对应于 $\lambda_{1,2} = 2$ 的全部特征向量为

$$k_1 \xi_1 \quad (k_1 \neq 0).$$

特征值 $\lambda_{2,3} = 2$ 的代数重数为 2, 而几何重数为 1。

- 当 $\lambda_3 = 3$ 时, 解方程组 $(A - 3I)x = 0$ 。由

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系为 $\xi_2 = (1, 1, 1)^T$, 故 A 对应于 $\lambda_3 = 3$ 的全部特征向量为

$$k_2 \xi_2 \quad (k_2 \neq 0).$$

特征值 $\lambda_3 = 3$ 的代数重数为 1, 几何重数也为 1。

- 1 矩阵的特征值与特征向量
 - 特征值与特征向量的定义
 - 特征值与特征向量的性质
- 2 相似矩阵与矩阵的对角化
- 3 实对称矩阵的对角化

性质 1

若 x_1 和 x_2 都是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1x_1 + k_2x_2$ 也是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量 (其中 k_1, k_2 为任意常数, 但 $k_1x_1 + k_2x_2 \neq 0$)。

证明.

由已知条件 $Ax_1 = \lambda x_1$, $Ax_2 = \lambda x_2$ 知

$$A(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2 = k_1\lambda x_1 + k_2\lambda x_2 = \lambda(k_1x_1 + k_2x_2)$$

从而 $k_1x_1 + k_2x_2 (\neq 0)$ 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量。 □

性质 2

矩阵 A 的任一特征向量所对应的特征值是唯一的。

证明.

若 x 是 A 的属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 的特征向量, 即有

$$Ax = \lambda_1 x, \quad Ax = \lambda_2 x \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

这与 x 非零矛盾。



特征值与特征向量的性质

定义 (矩阵的秩)

对于 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, 其主对角元之和 $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ 称为 A 的 迹 (trace)。

性质 3

设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则

$$(1) \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A);$$

$$(2) \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)。$$

注

- 可逆矩阵的所有特征值皆非零;
- 奇异矩阵至少有一个零特征值。

特征值与特征向量的性质

证明.

考察

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

其展开式可写成

$$|\lambda I - A| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

令 $|\lambda I - A| = 0$, 则

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| = 0 \quad (1)$$

另一方面, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为特征方程的根, 即

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

其展开式为

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = 0 \quad (2)$$

比较 (1) 和 (2) 知

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}, \quad \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

性质 4

设 λ 是 A 的特征值，其对应的特征向量为 x ，则

- $k\lambda$ 是 kA 的特征值 (k 为任意常数)；
- λ^m 是 A^m 的特征值 (m 为正整数)；
- 当 A 可逆时， λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值；
- 当 A 可逆时， $\lambda^{-1}|A|$ 是 A^* 的特征值；

证明.

由已知有 $Ax = \lambda x$ 。

- 由 $(kA)x = kAx = k\lambda x$ 知 $k\lambda$ 是 kA 的特征值，其对应的特征向量为 x 。
- 由 $A^k x = A^{k-1}(\lambda x) = \lambda A^{k-1}x$ 可得 $A^k x = \lambda^k x$ ，从而 λ^k 是 A^k 的特征值，对应的特征向量仍为 x 。
- 设 A 可逆，则其特征值皆非零，从而 $A^{-1}x = \lambda^{-1}x$ ，从而 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值，对应的特征向量仍为 x 。
- 由 $A^*A = |A|I$ 知， $|A|x = A^*Ax = \lambda A^*x$ ，即 $A^*x = \lambda^{-1}|A|x$ ，从而 $\lambda^{-1}|A|$ 是 A^* 的特征值，对应的特征向量仍为 x 。

性质 5

设 λ 是矩阵 A 的特征值，对应的特征向量是 x ，则

$$g(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$$

是

$$g(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_mA^m$$

的特征值，且

$$g(A)x = g(\lambda)x.$$

推论

设 $g(x)$ 是一个多项式, 若 n 阶方阵 A 使得 $g(A) = O$ (称 $g(x)$ 是 A 的一个零化多项式), 则 A 的任一特征值 λ 必满足 $g(\lambda) = 0$ 。

证明.

设非零向量 x 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量。由上述定理知

$$g(\lambda)x = g(A)x = Ox = 0.$$

由于 x 非零, 故 $g(\lambda) = 0$ 。



例

设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = 5A - 4I$, 试证 A 的特征值只能是 1 或 4。

证明.

记 $g(x) = x^2 - 5x + 4$, 则 A 满足

$$g(A) = A^2 - 5A + 4I = 0.$$

因此, 矩阵 A 的特征值必满足

$$g(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0,$$

故 A 的特征值只能是 1 或 4。 □

例

设 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 求 $|A^3 - 5A^2 + 7A|$ 。

解

设 λ 是 A 的特征值, 则 $g(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$ 是

$$g(A) = A^3 - 5A^2 + 7A$$

的特征值。故 $g(A)$ 的全部特征值为 $g(1) = 3, g(2) = 2, g(3) = 3$, 从而

$$|A^3 - 5A^2 + 7A| = 3 \times 2 \times 3 = 18.$$

例

设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 求 $A^* + 3A - 2I$ 的特征值。

解

由题设知 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2$, 故 A 可逆, 且 $\lambda^{-1}|A| = -2\lambda^{-1}$ 是 A^* 的特征值。因此, 若 λ 是 A 的特征值, 则

$$g(\lambda) = -2\lambda^{-1} + 3\lambda - 2$$

是 $A^* + 3A - 2I$ 的特征值。于是, $A^* + 3A - 2I$ 的全部特征值为

$$g(1) = -1, g(-1) = -3, g(2) = 3.$$

性质 6

A 与 A^T 的特征值相同。

证明.

由

$$(A - \lambda I)^T = A^T - \lambda I$$

知

$$|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^T| = |A^T - \lambda I|$$

即 A 与 A^T 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值。



例
设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 求 A 的特征值与特征向量
- 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

解
由

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ 2 & -2 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda + 2)$$

知 A 的特征值为 $\lambda_{1,2} = 0$ 和 $\lambda_3 = -2$ 。

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2} = 0$ 时, 解方程组 $Ax = 0$ 。由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系 $\xi_1 = (1, 1, 0)^T$ 和 $\xi_2 = (-1, 0, 1)^T$, 故 A 对应于特征值 0 的全体特征向量为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ (k_1, k_2 不全为零)。

特征值 0 的代数重数为 2, 几何重数也为 2。

- 当 $\lambda_3 = -2$ 时, 解方程组 $(A + 2I)x = 0$ 。由

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系 $\xi_3 = (-1, -2, 1)^T$, 故 A 对应于特征值 -2 的全体特征向量为

$$k_3\xi_3 \quad (k_3 \neq 0).$$

特征值 -2 的代数重数为 1, 几何重数也为 1。

解 (续)

将

$$A\xi_1 = \lambda_1\xi_1, \quad A\xi_2 = \lambda_2\xi_2, \quad A\xi_3 = \lambda_3\xi_3$$

写成

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

取

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

则有

$$AP = P\Lambda.$$

由 $|P| = 2 \neq 0$ 知 P 可逆。

1 矩阵的特征值与特征向量

2 相似矩阵与矩阵的对角化

3 实对称矩阵的对角化

定义 (相似矩阵)

设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 若存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 B 是 A 的 相似矩阵, 或者说 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$ 。

相似矩阵的性质

- 运算规则

$$P^{-1}(k_1A_1 + k_2A_2)P = k_1P^{-1}A_1P + k_2P^{-1}A_2P$$

$$P^{-1}(A_1A_2)P = (P^{-1}A_1P)(P^{-1}A_2P)$$

- 若 $A \sim B$, 则

- ▶ $A^k \sim B^k$ (k 为任意非负整数)

- ▶ A 与 B 都可逆或者都不可逆。当它们都可逆时, $A^{-1} \sim B^{-1}$ 。

定理

相似矩阵的特征值相同。

证明.

设 $A \sim B$, 即存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

故

$$|B - \lambda I| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}||A - \lambda I||P| = |A - \lambda I|.$$



推论

若 $A \sim B$, 则

- A 与 B 有相同的秩;
- A 与 B 有相同的迹;
- A 与 B 有相同的行列式。

推论

若

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征值。

定义 (矩阵的对角化)

对 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 进行对角化, 就是寻找可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

换句话说, 矩阵能否对角化, 等价于矩阵是否相似于某个对角阵。

相似矩阵与矩阵的对角化

定理

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

证明.

$$P^{-1}AP = \Lambda \iff AP = P\Lambda$$

将 P 按列分块, 即

$$P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n),$$

则

$$A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

故 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 是 A 分别对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的特征向量。由于 P 可逆, 所以它们是线性无关的。 □

特征值与特征向量的性质

定理

A 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是 A 的 m 个互异的特征值, 对应的特征向量分别为 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$, 下证: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 线性无关. 对 m 做数学归纳法.

1° 当 $m = 1$ 时, 结论显然成立.

2° 设 k 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 对应的特征向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 线性无关. 下面考虑 $k+1$ 个互异特征值的特征向量的情况. 设

$$a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_k \mathbf{x}_k + a_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\implies A(a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_k \mathbf{x}_k + a_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$$

$$\implies a_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_k \lambda_k \mathbf{x}_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\lambda_{k+1}(1)-(2)} a_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1) \mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2) \mathbf{x}_2 + \dots + a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

$$\implies a_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\implies a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\implies a_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{x}_{k+1} \neq \mathbf{0}} a_{k+1} = 0$$

$$\implies \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} \text{ 线性无关}$$

相似矩阵与矩阵的对角化

推论

若 n 阶方阵 A 有 n 个互异特征值, 则 A 可对角化。

定理

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是 A 的 m 个互异的特征值, 对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \dots, \mathbf{x}_{i_{r_i}}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 则由所有这些特征向量 (共 $r_1 + r_2 + \dots + r_m$ 个) 构成的向量组线性无关。

例证

设 3 阶方阵 A 有三个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 且 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 且 λ_1 对应的线性无关的特征向量为 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 , 而 λ_3 对应的特征向量为 \mathbf{x}_3 , 下证: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 线性无关。

设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + k_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}, \quad (3)$$

则

$$k_1A\mathbf{x}_1 + k_2A\mathbf{x}_2 + k_3A\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} \iff k_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + k_3\lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}, \quad (4)$$

由“ $\lambda_1 \times (3) - (4)$ ”并结合 $\lambda_1 = \lambda_2$ 知

$$k_3(\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

由 $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0, \mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$ 知 $k_3 = 0$ 。代入 (3) 知 $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ 。由 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 线性无关得 $k_1 = k_2 = 0$, 从而 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 线性无关。

定理

A 可对角化的充分必要条件是对于 A 的所有互异特征值，代数重数皆等于几何重数。

注

判断 A 是否可对角化，只需检查多重特征值的代数重数是否等于几何重数，而单重特征值无需检查。

例

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

问 A 能否对角化？若能，则求可逆阵 P 和对角阵 Λ 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

解

A 的特征方程为

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -4 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2,$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 2$ 。

解 (续)

- 当 $\lambda_1 = -1$, 解方程 $(A + I)x = 0$ 。由

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

特征值 -1 的代数重数为 1, 几何重数也为 1。

- 当 $\lambda_{2,3} = 2$, 解方程 $(A - 2I)x = 0$ 。由

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 4x_1 - x_2 \end{cases}$$

得对应的特征向量

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

特征值 2 的代数重数为 2, 几何重数也为 2。

解 (续)

由于对 A 的每个互异特征值, 代数重数等于几何重数, 故 A 可对角化。记

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

1 矩阵的特征值与特征向量

2 相似矩阵与矩阵的对角化

3 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵的对角化

定义 (共轭矩阵)

设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则称 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ 为 A 的共轭矩阵。

注

- $\overline{\bar{A}} = A$
- $\overline{A^T} = (\bar{A})^T$ (共轭转置)
- 当 A 为实对称矩阵时, $\bar{A}^T = \overline{A^T} = A^T = A$

共轭矩阵的性质

- $\overline{kA} = \bar{k} \bar{A}$
- $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$
- $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$
- $\overline{(AB)^T} = \bar{B}^T \bar{A}^T$
- $\overline{A^{-1}} = (\bar{A})^{-1}$
- $\det \bar{A} = \overline{\det A}$

定理

实对称矩阵 A 的任一特征值都是实数。

证明.

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x &\implies \overline{(Ax)}^T = \overline{\lambda x}^T \\ &\implies \overline{x}^T \overline{A}^T x = \overline{\lambda} \overline{x}^T x \\ &\implies \overline{x}^T A^T x = \overline{\lambda} \overline{x}^T x \\ &\implies \lambda \overline{x}^T x = \overline{\lambda} \overline{x}^T x \\ &\implies \lambda = \overline{\lambda} \end{aligned}$$



实对称矩阵的对角化

定理

实对称矩阵 A 对应于不同特征值的特征向量是正交的。

证明.

设 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), $A^T = A$, 则

$$\lambda_1 x_2^T x_1 = x_2^T Ax_1 = x_2^T A^T x_1 = (Ax_2)^T x_1 = (\lambda_2 x_2)^T x_1 = \lambda_2 x_2^T x_1$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以

$$x_2^T x_1 = 0.$$



注

对于一般方阵 A , 其对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

实对称矩阵的对角化

定理

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则存在正交矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda.$$

证明.

略



注

实对称矩阵一定可以对角化。

实对称矩阵对角化的步骤

- ① 求出 A 的全部互异特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, 重数分别为 k_1, \dots, k_s 。
- ② 对每个 k_i 重特征值 λ_i ,
 - ▶ 求 $(A - \lambda_i I)x = 0$ 的基础解系, 得 k_i 个线性无关的特征向量。
 - ▶ 利用施密特正交化过程, 将它们正交化和单位化, 得 k_i 个两两正交的单位特征向量。(因 $k_1 + \dots + k_s = n$, 故共有 n 个两两正交的单位特征向量。)
- ③ 把这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交矩阵 Q , 便有

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda.$$

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求正交矩阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ 为对角阵。

解

由

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

可求得 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 1$ 。

解 (续)

对 $\lambda_1 = -2$, 解方程 $(A + 2I)x = 0$ 。由

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将其单位化得

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

实对称矩阵的对角化

解 (续)

对 $\lambda_{2,3} = 1$, 解方程 $(A - I)x = 0$ 。由

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= & -x_2 &+ x_3 \\ x_2 &= & & \\ x_3 &= & & \end{cases}$$

得基础解系

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

正交化

$$\eta_2 = \xi_2, \quad \eta_3 = \xi_3 - \frac{(\eta_2, \xi_3)}{(\eta_2, \eta_2)} \eta_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

单位化

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

解 (续)

构成正交矩阵

$$Q = (q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

有

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

实对称矩阵的对角化

例

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^n 。

解

由

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

知 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ 。

- 当 $\lambda_1 = 1$ 时, 求解齐次线性方程组 $(A - \lambda_1 I)x = 0$ 。由

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

得基础解系为 $\xi_1 = (1, 1)^T$ 。

- 当 $\lambda_2 = 3$ 时, 求解齐次线性方程组 $(A - \lambda_2 I)x = 0$ 。由

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

得基础解系为 $\xi_2 = (-1, 1)^T$ 。

解 (续)

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P} \boldsymbol{\Lambda}^n \boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}.$$

实对称矩阵的对角化

例

设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 计算 A^{2022} 。

注

求矩阵幂时, 不要一味地使用对角化方法, 有时可以灵活地根据题目的特点求解。

解

注意到

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1)$$

则

$$\begin{aligned} A^{2022} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \cdots \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \\ &= (-3)^{2021} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) = (-3)^{2021} A \end{aligned}$$

实对称矩阵的对角化

例

设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$, 对应的特征向量为 $p_1 = (0, 1, 1)^T$, $p_2 = (1, 1, 1)^T$, $p_3 = (1, 1, 0)^T$, 求 A .

解

记 $P = (p_1, p_2, p_3)$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 则 $AP = P\Lambda$, 从而

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

由

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 \div (-1)]{c_3 - c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline -2 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 - c_3]{c_1 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

知

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

实对称矩阵的对角化

例

设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$, 对应 λ_1, λ_2 的特征向量分别为 $p_1 = (1, 2, 2)^T$, $p_2 = (2, 1, -2)^T$, 求 A .

解

设 λ_3 对应的特征向量为 $p_3 = (x, y, z)^T$. 由 A 对称及 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ 知 p_1, p_2, p_3 两两正交, 即

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div (-3)]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

知

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \implies p_3 \text{ 可取为 } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解 (续)

由于 p_1, p_2, p_3 两两正交, 对它们单位化即得正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \text{diag}(1, -1, 0) := \Lambda.$$

于是

$$A = Q \Lambda Q^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

例

设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 对应 λ_1 的特征向量为 $p_1 = (1, 1, 1)^T$, 求 A 。

解

设对应于 λ_2, λ_3 的特征向量为 p_2, p_3 。因为 A 对称, 故 p_2, p_3 与 p_1 正交。设 $(x, y, z)^T$ 与 p_1 正交, 即

$$x + y + z = 0,$$

它的一组正交的基础解系为

$$(1, -1, 0)^T, (1, 1, -2)^T.$$

故可取

$$p_2 = (1, -1, 0)^T, p_3 = (1, 1, -2)^T.$$

解 (续)

由于 p_1, p_2, p_3 两两正交, 对它们单位化即得正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

使得

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \text{diag}(6, 3, 3) := \Lambda.$$

于是

$$A = Q \Lambda Q^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$