



# 线性代数

## 矩阵的初等变换与分块矩阵

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 4 月 4 日



## 1 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 2 矩阵分块

## 1 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 2 矩阵分块

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

- ① 交换两行
- ② 以非零常数  $k$  乘矩阵的某一行
- ③ 将矩阵的某一行乘以常数  $k$  并加到另一行

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

- ① 交换两行
- ② 以非零常数  $k$  乘矩阵的某一行
- ③ 将矩阵的某一行乘以常数  $k$  并加到另一行

这三类行变换统称为**矩阵的初等行变换**，其中

- ① **交换变换**  $r_i \leftrightarrow r_j$
- ② **倍乘变换**  $r_i \times k$
- ③ **倍加变换**  $r_i + r_j \times k$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

用高斯消去法求解线性方程组，其步骤是对增广矩阵做以下三种行变换：

- ① 交换两行
- ② 以非零常数  $k$  乘矩阵的某一行
- ③ 将矩阵的某一行乘以常数  $k$  并加到另一行

这三类行变换统称为**矩阵的初等行变换**，其中

- ① **交换变换**  $r_i \leftrightarrow r_j$
- ② **倍乘变换**  $r_i \times k$
- ③ **倍加变换**  $r_i + r_j \times k$

对应的还有**初等列变换**。**初等行变换与初等列变换统称为初等变换**。

三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换。

表: 初等变换及其逆变换

初等变换	逆变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	$r_i \div k$
$r_i + r_j \times k$	$r_i - r_j \times k$

## 定义 (矩阵的等价)

- ① 如果  $A$  经过有限次初等行变换变成  $B$ , 就称  $A$  与  $B$  行等价, 记为  $A \overset{r}{\sim} B$
- ② 如果  $A$  经过有限次初等列变换变成  $B$ , 就称  $A$  与  $B$  列等价, 记为  $A \overset{c}{\sim} B$
- ③ 如果  $A$  经过有限次初等变换变成  $B$ , 就称  $A$  与  $B$  等价, 记为  $A \sim B$ .



## 定义 (矩阵的等价)

- ① 如果  $A$  经过有限次初等行变换变成  $B$ , 就称  $A$  与  $B$  行等价, 记为  $A \overset{r}{\sim} B$
- ② 如果  $A$  经过有限次初等列变换变成  $B$ , 就称  $A$  与  $B$  列等价, 记为  $A \overset{c}{\sim} B$
- ③ 如果  $A$  经过有限次初等变换变成  $B$ , 就称  $A$  与  $B$  等价, 记为  $A \sim B$ .

## 矩阵等价的性质

- 反身性:  $A \sim A$
- 对称性: 若  $A \sim B$ , 则  $B \sim A$
- 传递性: 若  $A \sim B$ ,  $B \sim C$ , 则  $A \sim C$

## 定义 (初等矩阵)

将单位矩阵  $I$  做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵。

对应于 3 类初等行、列变换，有 3 种类型的初等矩阵：

- 初等交换矩阵
- 初等倍乘矩阵
- 初等倍加矩阵

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 初等交换矩阵

### 定义 (初等交换矩阵)

将单位矩阵  $I$  交换两行或交换两列所得的矩阵，被称为**初等交换矩阵**。

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & \\ & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

第  $i$  行

第  $j$  行

第  $i$  列      第  $j$  列

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 初等交换矩阵

### 初等交换矩阵的作用

- $m \times n$  矩阵  $A$  左乘  $m$  阶初等交换矩阵  $E_{ij}$ , 其结果相当于: 把  $A$  的第  $i$  行与第  $j$  行对调 ( $r_i \leftrightarrow r_j$ )
- $m \times n$  矩阵  $A$  右乘  $n$  阶初等交换矩阵  $E_{ij}$ , 其结果相当于: 把  $A$  的第  $i$  列与第  $j$  列对调 ( $c_i \leftrightarrow c_j$ )

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 初等倍乘矩阵

### 定义 (初等倍乘矩阵)

用非零常数  $k$  乘单位矩阵  $I$  的某行或某列所得的矩阵，被称为**初等倍乘矩阵**。

$$E_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

第  $i$  行

第  $i$  列

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 初等倍乘矩阵

### 初等倍乘矩阵的作用

- $m \times n$  矩阵  $A$  左乘  $m$  阶初等倍乘矩阵  $E_i(k)$ , 其结果相当于: 用数  $k$  乘  $A$  的第  $i$  行 ( $r_i \times k$ )
- $m \times n$  矩阵  $A$  右乘  $n$  阶初等倍乘矩阵  $E_i(k)$ , 其结果相当于: 用数  $k$  乘  $A$  的第  $i$  列 ( $c_i \times k$ )

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 初等倍加矩阵

### 定义 (初等倍加矩阵)

用非零常数  $k$  乘单位矩阵  $I$  的某行 (某列) 然后加至另一行 (列) 所得的矩阵, 被称为**初等倍加矩阵**。

$$E_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

第  $i$  行  
第  $j$  行  
第  $i$  列第  $j$  列

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 初等倍加矩阵

### 初等倍加矩阵的作用

- $m \times n$  矩阵  $A$  左乘  $m$  阶初等倍加矩阵  $E_{ij}(k)$ , 其结果相当于把  $A$  的第  $j$  行乘以数  $k$  加到第  $i$  行上 ( $r_i + r_j \times k$ )
- $m \times n$  矩阵  $A$  右乘  $n$  阶初等倍加矩阵  $E_{ij}(k)$ , 其结果相当于把  $A$  的第  $i$  列乘以数  $k$  加到第  $j$  列上 ( $c_j + c_i \times k$ )



## 定理

设  $A$  为一个  $m \times n$  矩阵,

- 对  $A$  施行一次初等行变换, 相当于在  $A$  的左边乘以相应的  $m$  阶初等矩阵;
- 对  $A$  施行一次初等列变换, 相当于在  $A$  的右边乘以相应的  $n$  阶初等矩阵。

## 定理

设  $A$  为一个  $m \times n$  矩阵,

- 对  $A$  施行一次初等行变换, 相当于在  $A$  的左边乘以相应的  $m$  阶初等矩阵;
- 对  $A$  施行一次初等列变换, 相当于在  $A$  的右边乘以相应的  $n$  阶初等矩阵。

## 总结

$$E_i(k)A$$

$$E_{ij}(k)A$$

$$E_{ij}A$$

$$AE_i(k)$$

$$AE_{ij}(k)$$

$$AE_{ij}$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换  $r_i \leftrightarrow r_j$  的逆变换为其本身可知

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换  $r_i \leftrightarrow r_j$  的逆变换为其本身可知

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

(ii) 由变换  $r_i \times k$  的逆变换为  $r_i \times \frac{1}{k}$  可知

$$E_i(k)^{-1} = E_i\left(\frac{1}{k}\right)$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换  $r_i \leftrightarrow r_j$  的逆变换为其本身可知

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

(ii) 由变换  $r_i \times k$  的逆变换为  $r_i \times \frac{1}{k}$  可知

$$E_i(k)^{-1} = E_i\left(\frac{1}{k}\right)$$

(iii) 由变换  $r_i + r_j \times k$  的逆变换为  $r_i - r_j \times k$  可知

$$E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆。

(i) 由变换  $r_i \leftrightarrow r_j$  的逆变换为其本身可知

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

(ii) 由变换  $r_i \times k$  的逆变换为  $r_i \times \frac{1}{k}$  可知

$$E_i(k)^{-1} = E_i\left(\frac{1}{k}\right)$$

(iii) 由变换  $r_i + r_j \times k$  的逆变换为  $r_i - r_j \times k$  可知

$$E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$$

$$E_{ij}E_{ij} = I, \quad E_i(k)E_i\left(\frac{1}{k}\right) = I, \quad E_{ij}(k)E_{ij}(-k) = I.$$

## 例

设初等矩阵

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求  $P_1 P_2 P_3$  及  $(P_1 P_2 P_3)^{-1}$ .



## 例

设初等矩阵

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求  $P_1 P_2 P_3$  及  $(P_1 P_2 P_3)^{-1}$ .

## 解

$$P_2 P_3 =$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

例

设初等矩阵

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求  $P_1 P_2 P_3$  及  $(P_1 P_2 P_3)^{-1}$ .

解

$$P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

例

设初等矩阵

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求  $P_1 P_2 P_3$  及  $(P_1 P_2 P_3)^{-1}$ .

解

$$P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 P_2 P_3 = P_1 (P_2 P_3) =$$

## 例

设初等矩阵

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

求  $P_1 P_2 P_3$  及  $(P_1 P_2 P_3)^{-1}$ .

## 解

$$P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 P_2 P_3 = P_1 (P_2 P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解【续】

$$(P_1 P_2 P_3)^{-1} = P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1}$$

解【续】

$$(P_1 P_2 P_3)^{-1} = P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1}$$

$$P_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

解【续】

$$(P_1 P_2 P_3)^{-1} = P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1}$$

$$P_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2^{-1} P_1^{-1} =$$

解【续】

$$(P_1 P_2 P_3)^{-1} = P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1}$$

$$P_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2^{-1} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix},$$



解【续】

$$(P_1 P_2 P_3)^{-1} = P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1}$$

$$P_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2^{-1} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1} =$$

解【续】

$$(P_1 P_2 P_3)^{-1} = P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1}$$

$$P_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2^{-1} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

## 例

将三对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

做 LU 分解, 即将  $A$  表示为

$$A = LU$$

的形式, 其中  $L$  为主对角元为 1 的下三角矩阵,  $U$  为上三角阵.

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{A}_1$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{A}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -\frac{2}{3} & 1 & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{A}_2$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{A}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{A}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{U}$$

## 解【续】

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为  $L_1, L_2, L_3$ , 则

$$L_3 L_2 L_1 A = U$$

## 解【续】

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为  $L_1, L_2, L_3$ , 则

$$L_3 L_2 L_1 A = U$$

于是

$$A = (L_3 L_2 L_1)^{-1} U \triangleq LU$$



## 解【续】

将上面三个式子中左端的矩阵分别记为  $L_1, L_2, L_3$ , 则

$$L_3 L_2 L_1 A = U$$

于是

$$A = (L_3 L_2 L_1)^{-1} U \triangleq LU$$

其中

$$\begin{aligned} L &= (L_3 L_2 L_1)^{-1} = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{3} & 1 & \\ & \frac{3}{4} & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 定理

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

## 定理

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

## 证明.

对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。

## 定理

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

## 证明.

对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此，对于任何矩阵  $A$ ，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵  $U$ ，即存在初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_s$  使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = U$$

## 定理

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵。

## 证明.

对于高斯消去法，其消去过程是对增广矩阵做 3 类初等行变换，并一定可以将其化为行简化阶梯形矩阵。因此，对于任何矩阵  $A$ ，都可经过初等行变换将其化为行简化阶梯形矩阵  $U$ ，即存在初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_s$  使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = U$$

当  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵时，行简化阶梯形矩阵也是可逆矩阵，从而  $U$  必为单位矩阵  $I$ 。 □

## 推论

可逆矩阵  $A$  可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

## 推论

可逆矩阵  $A$  可以表示为若干个初等矩阵的乘积。

## 证明.

由上述定理，必存在初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_s$  使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = I,$$

于是

$$A = (P_s \cdots P_2 P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}$$



## 推论

如果对可逆矩阵  $A$  与同阶单位矩阵  $I$  做同样的初等行变换，那么当  $A$  变为单位阵时， $I$  就变为  $A^{-1}$ ，即

$$(A \quad I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I \quad A^{-1}).$$



## 推论

如果对可逆矩阵  $A$  与同阶单位矩阵  $I$  做同样的初等行变换，那么当  $A$  变为单位阵时， $I$  就变为  $A^{-1}$ ，即

$$(A \quad I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I \quad A^{-1}).$$

同理，

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

例

求  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

例

求  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

解

$$(A | I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例

求  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

解

$$(A | I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

例

求  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

解

$$\begin{aligned} (A | I) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

## 例

求  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

## 解

$$\begin{aligned} (A | I) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

例

求  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

解

$$\begin{aligned} (A | I) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3 \times (-2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_1 + r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

例

已知  $ABA^T = 2BA^T + I$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $B$



例

已知  $ABA^T = 2BA^T + I$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $B$

证明.

由

$$ABA^T = 2BA^T + I$$

例

已知  $ABA^T = 2BA^T + I$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $B$

证明.

由

$$ABA^T = 2BA^T + I \Rightarrow (A - 2I)BA^T = I$$

例

已知  $ABA^T = 2BA^T + I$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $B$

证明.

由

$$ABA^T = 2BA^T + I \Rightarrow (A - 2I)BA^T = I \Rightarrow BA^T = (A - 2I)^{-1}$$

知

$$B = (A - 2I)^{-1}(A^T)^{-1}.$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

例

已知  $ABA^T = 2BA^T + I$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $B$

证明.

由

$$ABA^T = 2BA^T + I \Rightarrow (A - 2I)BA^T = I \Rightarrow BA^T = (A - 2I)^{-1}$$

知

$$B = (A - 2I)^{-1}(A^T)^{-1}.$$

而

$$(A - 2I)^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

例

已知  $ABA^T = 2BA^T + I$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $B$

证明.

由

$$ABA^T = 2BA^T + I \Rightarrow (A - 2I)BA^T = I \Rightarrow BA^T = (A - 2I)^{-1}$$

知

$$B = (A - 2I)^{-1}(A^T)^{-1}.$$

而

$$(A - 2I)^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$B = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$



## 推论

对于  $n$  个未知数  $n$  个方程的线性方程组

$$Ax = b,$$

如果增广矩阵

$$(A, b) \sim (I, x),$$

则  $A$  可逆, 且  $x = A^{-1}b$  为惟一解。

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

解

$$(A \mid b_1 \quad b_2) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right)$$



例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

解

$$(A \mid b_1 \quad b_2) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right)$$

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

解

$$\begin{aligned} (A \mid b_1 \quad b_2) &= \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1}} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

解

$$\begin{aligned} (A \mid b_1 \quad b_2) &= \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \div 5]{r_3 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

解

$$\begin{aligned} (A \mid b_1 \quad b_2) &= \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \div 5]{r_3 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3+3r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求  $Ax = b_1$  与  $Ax = b_2$  的解。

解

$$\begin{aligned} (A \mid b_1 \quad b_2) &= \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \div 5]{r_3 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3+3r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1-2r_2+2r_3} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

## 例

求解矩阵方程  $AX = A + X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

## 例

求解矩阵方程  $AX = A + X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

## 解

原方程等价于  $(A - I)X = A$

## 例

求解矩阵方程  $AX = A + X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

## 解

原方程等价于  $(A - I)X = A$

$$(A - I \mid A) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$



## 例

求解矩阵方程  $AX = A + X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

## 解

原方程等价于  $(A - I)X = A$

$$(A - I \mid A) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

## 例

求解矩阵方程  $AX = A + X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

## 解

原方程等价于  $(A - I)X = A$

$$\begin{aligned} (A - I \mid A) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + 4r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

## 例

求解矩阵方程  $AX = A + X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

## 解

原方程等价于  $(A - I)X = A$

$$\begin{aligned} (A - I \mid A) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + 4r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \div (-1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 例

求解矩阵方程  $AX = A + X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

## 解

原方程等价于  $(A - I)X = A$

$$\begin{aligned} (A - I \mid A) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + 4r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \div (-1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 + r_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 例

求解矩阵方程  $AX = A + X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

## 解

原方程等价于  $(A - I)X = A$

$$(A - I \mid A) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + 4r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \div (-1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 + r_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

例

当  $a, b$  满足什么条件时, 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  不可逆。

# 矩阵的初等变换与初等矩阵

例

当  $a, b$  满足什么条件时, 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  不可逆。

解

$$A \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

## 例

当  $a, b$  满足什么条件时, 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  不可逆。

## 解

$$A \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_1 \times (-2)]{r_2 + r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$$



# 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 例

当  $a, b$  满足什么条件时, 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  不可逆。

## 解

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_1 \times (-2)]{r_2 + r_1 \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_4 + r_2 \times (-1)]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由此可知,  $|A| = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & b-2 \\ a-1 & 0 \end{vmatrix} = (a-1)(b-2)$ 。于是, 当  $(a-1)(b-2) = 0$ , 即  $a = 1$  或  $b = 2$  时,  $A$  不可逆。

1 矩阵的初等变换与初等矩阵

2 矩阵分块

设有  $3 \times 4$  矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

它可表示为分块矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, & \mathbf{A}_{12} &= \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, & \mathbf{A}_{22} &= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 矩阵的按行分块

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$$

## 矩阵的按列分块

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_s)$$

其中

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

## 准对角矩阵 (quasi-diagonal matrix)

当  $n$  阶矩阵  $A$  中非零元素都集中在主对角线附近, 有时可分块成如下准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

其中  $A_i$  为  $r_i$  阶方阵 ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 且

$$\sum_{i=1}^m r_i = n.$$

## 例

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

## 分块矩阵的加法

设  $A, B$  为同型矩阵, 采用相同的分块法, 有

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix},$$

其中  $A_{ij}$  与  $B_{ij}$  为同型矩阵, 则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

## 分块矩阵的加法

设  $A, B$  为同型矩阵, 采用相同的分块法, 有

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix},$$

其中  $A_{ij}$  与  $B_{ij}$  为同型矩阵, 则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

## 分块矩阵的数乘

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$

## 分块矩阵的乘法

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times s$  矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix},$$

其中  $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{is}$  的列数分别等于  $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{sj}$  的行数, 则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix},$$

其中

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^s A_{ik} B_{kj}.$$



## 例

用分块矩阵的乘法计算  $AB$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 例

用分块矩阵的乘法计算  $AB$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 解

$$A = \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2 \times 3} \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & 0_{3 \times 2} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

## 例

用分块矩阵的乘法计算  $AB$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 解

$$A = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ A_1 B_1 - I_3 & A_1 \end{pmatrix}$$

## 例

用分块矩阵的乘法计算  $AB$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 解

$$A = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & \mathbf{0}_{3 \times 2} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ A_1 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ -I_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & I_2 \\ A_1 B_1 - I_3 & A_1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 B_1 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

## 例

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times s$  矩阵。

## 例

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times s$  矩阵。

- 将  $B$  按列分块成  $1 \times s$  分块矩阵, 将  $A$  看成  $1 \times 1$  分块矩阵, 则

$$AB = A(b_1, b_2, \dots, b_s) = (Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_s)$$

## 例

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times s$  矩阵。

- 将  $B$  按列分块成  $1 \times s$  分块矩阵, 将  $A$  看成  $1 \times 1$  分块矩阵, 则

$$AB = A(b_1, b_2, \dots, b_s) = (Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_s)$$

- 若已知  $AB = 0$ , 则显然

$$Ab_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

因此,  $B$  的每一列  $b_j$  都是线性方程组  $Ax = 0$  的解。

## 例

设  $A$  为实矩阵且  $A^T A = \mathbf{0}$ , 证明  $A = \mathbf{0}$ .



## 例

设  $A$  为实矩阵且  $A^T A = 0$ , 证明  $A = 0$ .

## 证明.

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 把  $A$  用列向量表示为  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 则

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \cdots & a_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{pmatrix}$$

## 例

设  $A$  为实矩阵且  $A^T A = 0$ , 证明  $A = 0$ .

## 证明.

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 把  $A$  用列向量表示为  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 则

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \cdots & a_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{pmatrix}$$

因为  $A^T A = 0$ , 故

$$a_i^T a_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

## 例

设  $A$  为实矩阵且  $A^T A = 0$ , 证明  $A = 0$ .

## 证明.

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 把  $A$  用列向量表示为  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 则

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \cdots & a_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{pmatrix}$$

因为  $A^T A = 0$ , 故

$$a_i^T a_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

特别地, 有

$$a_j^T a_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

## 例

设  $A$  为实矩阵且  $A^T A = 0$ , 证明  $A = 0$ .

## 证明.

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 把  $A$  用列向量表示为  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 则

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \cdots & a_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{pmatrix}$$

因为  $A^T A = 0$ , 故

$$a_i^T a_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

特别地, 有

$$a_j^T a_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

即

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 = 0$$

## 例

设  $A$  为实矩阵且  $A^T A = 0$ , 证明  $A = 0$ .

## 证明.

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 把  $A$  用列向量表示为  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 则

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \cdots & a_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{pmatrix}$$

因为  $A^T A = 0$ , 故

$$a_i^T a_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

特别地, 有

$$a_j^T a_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

即

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 = 0 \Rightarrow a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{mj} = 0$$

## 例

设  $A$  为实矩阵且  $A^T A = 0$ , 证明  $A = 0$ .

## 证明.

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 把  $A$  用列向量表示为  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 则

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \cdots & a_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{pmatrix}$$

因为  $A^T A = 0$ , 故

$$a_i^T a_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

特别地, 有

$$a_j^T a_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

即

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 = 0 \Rightarrow a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{mj} = 0 \Rightarrow A = 0.$$



## 例

若  $n$  阶矩阵  $C, D$  可以分块成同型准对角矩阵, 即

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & C_m \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & D_m \end{pmatrix}$$

其中  $C_i$  和  $D_i$  为同阶方阵 ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 则

$$CD = \begin{pmatrix} C_1 D_1 & & & \\ & C_2 D_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & C_m D_m \end{pmatrix}$$

例

证明：若方阵  $A$  为可逆的上三角阵，则  $A^{-1}$  也为上三角阵。



## 例

证明：若方阵  $A$  为可逆的上三角阵，则  $A^{-1}$  也为上三角阵。

## 证明

对阶数  $n$  用数学归纳法。

1 当  $n = 1$  时， $(a)^{-1} = (\frac{1}{a})$ ，结论成立。

## 例

证明：若方阵  $A$  为可逆的上三角阵，则  $A^{-1}$  也为上三角阵。

## 证明

对阶数  $n$  用数学归纳法。

- 1 当  $n = 1$  时， $(a)^{-1} = (\frac{1}{a})$ ，结论成立。
- 2 假设命题对  $n - 1$  阶可逆上三角矩阵成立，考虑  $n$  阶情况，设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}$$

其中  $A_1$  为  $n - 1$  阶可逆上三角阵。

## 证明【续】

设  $A$  的逆阵为

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{pmatrix},$$

## 证明【续】

设  $A$  的逆阵为

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \gamma = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

## 证明【续】

设  $A$  的逆阵为

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \gamma = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \alpha\gamma & a_{11}\beta + \alpha B_1 \\ A_1\gamma & A_1B_1 \end{pmatrix}$$

## 证明【续】

设  $A$  的逆阵为

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \gamma = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \alpha\gamma & a_{11}\beta + \alpha B_1 \\ A_1\gamma & A_1B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

## 证明【续】

设  $A$  的逆阵为

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}^T, \quad \gamma = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \gamma & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \alpha\gamma & a_{11}\beta + \alpha B_1 \\ A_1\gamma & A_1B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

于是

$$A_1\gamma = \mathbf{0} \Rightarrow \gamma = \mathbf{0},$$

$$A_1B_1 = I_1 \Rightarrow B_1 = A_1^{-1}.$$

由归纳假设,  $B_1$  为  $n-1$  阶上三角矩阵, 因此

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & \beta \\ \mathbf{0} & B_1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵。

## 分块矩阵的转置

分块矩阵  $A = (A_{kl})_{s \times t}$  的转置矩阵为

$$A^T = (B_{lk})_{t \times s},$$

其中  $B_{lk} = A_{kl}^T$ .

## 例

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$$



## 分块矩阵的转置

分块矩阵  $A = (A_{kl})_{s \times t}$  的转置矩阵为

$$A^T = (B_{lk})_{t \times s},$$

其中  $B_{lk} = A_{kl}^T$ .

## 例

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$$

$$B \xrightarrow{\text{按行分块}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = (b_1^T \quad b_2^T \quad \cdots \quad b_m^T)$$

## 可逆准对角矩阵的逆矩阵

对于准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

- 由于其行列式为  $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_m|$ , 故准对角矩阵  $A$  可逆的充要条件为

$$|A_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

## 可逆准对角矩阵的逆矩阵

对于准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

- 由于其行列式为  $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_m|$ ，故准对角矩阵  $A$  可逆的充要条件为

$$|A_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

- 若准对角矩阵  $A$  可逆，则其逆矩阵为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{-1} \end{pmatrix}$$

- 用分块矩阵求逆矩阵，可将高阶矩阵的求逆转化为低阶矩阵的求逆。
- 一个  $2 \times 2$  的分块矩阵求逆，可以根据逆矩阵的定义，用解矩阵方程的方法解得。

## 例

设  $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ , 其中  $B, D$  皆为可逆矩阵, 证明  $A$  可逆并求  $A^{-1}$ .

## 例

设  $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ , 其中  $B, D$  皆为可逆矩阵, 证明  $A$  可逆并求  $A^{-1}$ .

## 证明.

因  $|A| = |B||D| \neq 0$ , 故  $A$  可逆。设  $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ , 则

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

## 例

设  $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ , 其中  $B, D$  皆为可逆矩阵, 证明  $A$  可逆并求  $A^{-1}$ .

## 证明.

因  $|A| = |B||D| \neq 0$ , 故  $A$  可逆。设  $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ , 则

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

由此可知

$$BX = I \quad \Rightarrow \quad X = B^{-1}$$

$$BY = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = 0$$

$$CX + DZ = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = -D^{-1}CB^{-1}$$

$$CY + DT = I \quad \Rightarrow \quad T = D^{-1}$$

## 例

设  $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ , 其中  $B, D$  皆为可逆矩阵, 证明  $A$  可逆并求  $A^{-1}$ .

## 证明.

因  $|A| = |B||D| \neq 0$ , 故  $A$  可逆. 设  $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ , 则

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

由此可知

$$BX = I \quad \Rightarrow \quad X = B^{-1}$$

$$BY = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = 0$$

$$CX + DZ = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = -D^{-1}CB^{-1}$$

$$CY + DT = I \quad \Rightarrow \quad T = D^{-1}$$

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$





## 分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵

对于分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

同样可以定义它的 3 类初等行变换与列变换，并相应地定义 3 类分块矩阵：

- 分块交换矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_n \\ I_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- 分块倍乘矩阵 ( $C_1, C_2$  为可逆阵)

$$\begin{pmatrix} C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 \end{pmatrix}$$

- 分块倍加矩阵

$$\begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ C_3 & I_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} I_m & C_4 \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}$$

## 例

设  $n$  阶矩阵  $A$  分块表示为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中  $A_{11}, A_{22}$  为方阵, 且  $A$  与  $A_{11}$  可逆。证明:  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆, 并求  $A^{-1}$ 。

## 解法 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

## 解法 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

两边同取行列式得  $|A| = |P_1 A| = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$ , 故  $Q = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆。

## 解法 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

两边同取行列式得  $|A| = |P_1 A| = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$ , 故  $Q = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆. 构造分块倍加矩阵  $P_2 = \begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

## 解法 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

两边同取行列式得  $|A| = |P_1 A| = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$ , 故  $Q = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆. 构造分块倍加矩阵  $P_2 = \begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

于是

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$$

## 解法 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

两边同取行列式得  $|A| = |P_1 A| = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$ , 故  $Q = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆. 构造分块倍加矩阵  $P_2 = \begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 + A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{12}Q^{-1} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 解法 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

两边同取行列式得  $|A| = |P_1 A| = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$ , 故  $Q = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆. 构造分块倍加矩阵  $P_2 = \begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & -A_{12}Q^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 + A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{12}Q^{-1} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}Q^{-1} \\ -Q^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



## 解法 2

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{I} & \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & & \mathbf{I} \end{array} \right)$$

## 解法 2

$$\left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{I} \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}]{r_2 - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot r_1} \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{I} \\ & \mathbf{Q} & -\mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \end{array} \right)$$

## 解法 2

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{I} \end{array} \right) & \xrightarrow[\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}]{r_2 - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot r_1} \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{I} \\ & \mathbf{Q} & -\mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{r_1 - \mathbf{A}_{12} \mathbf{Q}^{-1} \cdot r_2} \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & & \mathbf{I} + \mathbf{A}_{12} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \\ & \mathbf{Q} & -\mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

## 解法 2

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{I} \end{array} \right) & \xrightarrow[\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]{r_2 - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot r_1} \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{I} \\ & \mathbf{Q} & -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{r_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \cdot r_2} \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & & \mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \\ & \mathbf{Q} & -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[\mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot r_1]{\mathbf{Q}^{-1} \cdot r_2} \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{I} & & \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

由此可知

$$\left( \begin{array}{cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{cc} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{Q}^{-1} \end{array} \right)$$

例

设  $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 且  $A$  可逆, 证明:  $|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

## 例

设  $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 且  $A$  可逆, 证明:  $|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

## 证明 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -CA^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_1 Q = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

## 例

设  $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 且  $A$  可逆, 证明:  $|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

## 证明 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -CA^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_1 Q = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边同取行列式得  $|Q| = |P_1 Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

## 例

设  $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 且  $A$  可逆, 证明:  $|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

## 证明 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -CA^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_1 Q = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边同取行列式得  $|Q| = |P_1 Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

## 证明 2

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - CA^{-1} \cdot r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$



# 矩阵分块

## 例

设  $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 且  $A$  可逆, 证明:  $|Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

## 证明 1

构造分块倍加矩阵  $P_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -CA^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_1 Q = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边同取行列式得  $|Q| = |P_1 Q| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ .

## 证明 2

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - CA^{-1} \cdot r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

由于分块倍加矩阵的行列式为 1, 即分块倍加变换不改变矩阵的值, 故

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B|.$$

## 例

设  $A$  与  $B$  均为  $n$  阶分块矩阵, 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| |A - B|$$

## 例

设  $A$  与  $B$  均为  $n$  阶分块矩阵, 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|$$

## 证明 1

将分块矩阵  $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$  的第一行加到第二行, 得

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix}$$

## 例

设  $A$  与  $B$  均为  $n$  阶分块矩阵, 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|$$

## 证明 1

将分块矩阵  $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$  的第一行加到第二行, 得

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列, 得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

## 例

设  $A$  与  $B$  均为  $n$  阶分块矩阵, 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|$$

## 证明 1

将分块矩阵  $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$  的第一行加到第二行, 得

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix}$$

再将第一列减去第二列, 得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

总之有

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得结论。

## 证明 2

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{pmatrix} A-B & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix}$$

由于分块倍加矩阵的行列式为 1，即分块初等变换不改变行列式的值，故

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ A+B & A+B \end{vmatrix} = |A-B| |A+B|.$$