数值计算方法

第四周

张晓平

November 21, 2013

目录

线性方程组的求解问题是一个古老的数学问题

- 《九章算术》：详细记载了消元法
- 19世纪初，西方有了Gauss消去法
- 求解大型线性方程组则是在20世纪计算机问世后才成为可能

线性方程组数值解法的分类

- 直接法

  在没有舍入误差的情况下经过有限次运算可求得精确解的方法

- 迭代法

  采取逐次逼近的方法，亦即从一个初始向量出发，按照一定的计算格式，构造一个无穷序列，其极限才是方程组的精确解，只经过有限次运算得不到精确解

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

定义 (顺序消去法)

在逐步消元的过程中，把系数矩阵约化成上三角矩阵，从而将原方程组约化为容易求解的等价三角方程组， 再通过回代过程逐一求出各未知数。

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \quad (1) \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= b_2^{(1)}, \quad (2) \\ a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= b_3^{(1)}. \quad (3) \end{cases} \qquad 设 a_{11}^{(1)} \neq 0$$

$$\xrightarrow[(3)+(1)\times\left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)]{(2)+(1)\times\left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)} \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 &= b_3^{(2)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + a_{1j}^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right), & i,j = 2,3, \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + b_1^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right), & i = 2,3. \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \quad (1) \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= b_2^{(1)}, \quad (2) \\ a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= b_3^{(1)}. \quad (3) \end{cases} \qquad 设 a_{11}^{(1)} \neq 0$$

$$\xrightarrow[(3)+(1)\times\left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)]{(2)+(1)\times\left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)} \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 &= b_3^{(2)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + a_{1j}^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right), \quad i,j = 2,3, \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + b_1^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right), \quad i = 2,3. \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \quad (1) \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= b_2^{(1)}, \quad (2) \\ a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= b_3^{(1)}. \quad (3) \end{cases} \qquad 设 a_{11}^{(1)} \neq 0$$

$$\xrightarrow[(3)+(1)\times\left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)]{(2)+(1)\times\left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)} \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 &= b_3^{(2)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + a_{1j}^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right), & i,j = 2,3, \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + b_1^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right), & i = 2,3. \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 & = & b_1^{(1)}, & (1) \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 & = & b_2^{(1)}, & (2) \\ a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 & = & b_3^{(1)}. & (3) \end{cases} \qquad \text{设} a_{11}^{(1)} \neq 0$$

$$\xRightarrow[(3)+(1)\times\left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)]{(2)+(1)\times\left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)} \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 & = & b_1^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 & = & b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 & = & b_3^{(2)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + a_{1j}^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right), & i,j = 2,3, \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + b_1^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right), & i = 2,3. \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \quad (1) \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= b_2^{(1)}, \quad (2) \\ a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= b_3^{(1)}. \quad (3) \end{cases} \qquad \text{设} a_{11}^{(1)} \neq 0$$

$$\xRightarrow[(3)+(1)\times\left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)]{(2)+(1)\times\left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)} \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 &= b_3^{(2)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + a_{1j}^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right), \quad i,j = 2,3, \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + b_1^{(1)} \times \left(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right), \quad i = 2,3. \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 &= b_3^{(2)}. \end{cases} \qquad 设 a_{22}^{(2)} \neq 0$$

$$\xrightarrow{(3)+(2)\times\left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right)} \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= b_2^{(2)}, \\ a_{33}^{(3)}x_3 &= b_3^{(3)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} + a_{23}^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right), \\ b_3^{(3)} = b_3^{(2)} + b_2^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right). \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 & = & b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 & = & b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 & = & b_3^{(2)}. \end{cases} \qquad 设 a_{22}^{(2)} \neq 0$$

$$\xrightarrow{(3)+(2)\times\left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right)} \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 & = & b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 & = & b_2^{(2)}, \\ a_{33}^{(3)}x_3 & = & b_3^{(3)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} + a_{23}^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right), \\ b_3^{(3)} = b_3^{(2)} + b_2^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right). \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 &= b_3^{(2)}. \end{cases}$$

设$a_{22}^{(2)} \neq 0$

$$\xrightarrow{(3)+(2)\times\left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right)} \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= b_2^{(2)}, \\ a_{33}^{(3)}x_3 &= b_3^{(3)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} + a_{23}^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right), \\ b_3^{(3)} = b_3^{(2)} + b_2^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right). \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)}. \end{cases} \qquad \text{设} a_{22}^{(2)} \neq 0$$

$$\xrightarrow{(3)+(2)\times\left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right)} \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)}, \\ a_{33}^{(3)}x_3 = b_3^{(3)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} + a_{23}^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right), \\ b_3^{(3)} = b_3^{(2)} + b_2^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right). \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= b_2^{(2)}, \qquad \text{设} a_{22}^{(2)} \neq 0 \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 &= b_3^{(2)}. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(3)+(2)\times\left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right)} \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= b_2^{(2)}, \\ a_{33}^{(3)}x_3 &= b_3^{(3)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} + a_{23}^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right), \\ b_3^{(3)} = b_3^{(2)} + b_2^{(2)} \times \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right). \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

一般情形

考察n元线性方程组

$$A^{(1)}X = b^{(1)},$$

其中

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

若约化的主元$a_{kk}^{(k)} \neq 0 \ (k = 1, 2, \cdots, n)$，则经过

顺序消元法

```
for k = 1, 2, ···, n-1
  for i = k+1, ···, n
    l_ik = a_ik^(k) / a_kk^(k),
    for j = k+1, ···, n+1
      a_ij^(k+1) = a_ij^(k) − l_ik · a_kj^(k)
    end
  end
end
```

可得

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)}
\end{bmatrix}
$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

回代公式

$$x_n = b_n^{(n)} \;/\; a_{nn}^{(n)}$$

```
for i = n-1, n-2, ···, 1
```

$$x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j \right) \;/\; a_{ii}^{i}$$

```
end
```

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

- 若遇到$a_{kk}^{(k)} = 0$，则消去过程无法进行
- 若$a_{kk}^{(k)}$不为零但很小，尽管消去过程可以进行下去，但用其做除数，会引起计算结果的严重失真。

$$\begin{cases} 0.00001x_1 + 2x_2 & = & 2, \\ x_1 + x_2 & = & 3. \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

- 若遇到$a_{kk}^{(k)} = 0$，则消去过程无法进行
- 若$a_{kk}^{(k)}$不为零但很小，尽管消去过程可以进行下去，但用其做除数，会引起计算结果的严重失真。

$$\begin{cases} 0.00001x_1 + 2x_2 & = & 2, \\ x_1 + x_2 & = & 3. \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

定义

列主元消去法 在消元过程中，每次选主元时，仅依次按列选取绝对值最大的元素作为主元素， 它只进行行交换，而不产生未知数次序的调换。

列主元消去法能有效地避免顺序消元过程中的两个问题，它是直接法中最常用的一种方式。

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

定义

列主元消去法 在消元过程中，每次选主元时，仅依次按列选取绝对值最大的元素作为主元素， 它只进行行交换，而不产生未知数次序的调换。

列主元消去法能有效地避免顺序消元过程中的两个问题，它是直接法中最常用的一种方式。

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

例

用列主元消去法求解

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 &= 8, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= -4. \end{cases}$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

解： 增广矩阵为

$$
\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\left(\begin{array}{ccc:c} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5} r_1]{r_2 - \frac{2}{5} r_1}
\left(\begin{array}{ccc:c} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}
\left(\begin{array}{ccc:c} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_3 + \frac{1}{2} r_2}
\left(\begin{array}{ccc:c} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \\ & & -0.5 & -1 \end{array}\right)
$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

解： 增广矩阵为

$$
\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xrightarrow[r_3-\frac{1}{5}r_1]{r_2-\frac{2}{5}r_1}
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & -0.5 & -1 \end{array}\right)
$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

解： 增广矩阵为

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xrightarrow[r_3-\frac{1}{5}r_1]{r_2-\frac{2}{5}r_1}
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & -0.5 & -1 \end{array}\right)
$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

解：增广矩阵为

$$
\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xrightarrow[r_3-\frac{1}{5}r_1]{r_2-\frac{2}{5}r_1}
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & -0.5 & -1 \end{array}\right)
$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

解： 增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5} r_1]{r_2 - \frac{2}{5} r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + \frac{1}{2} r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & -0.5 & -1 \end{array}\right)$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

解： 增广矩阵为

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xRightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xRightarrow[r_3-\frac{1}{5}r_1]{r_2-\frac{2}{5}r_1}
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)
$$

$$
\xRightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \end{array}\right)
\xRightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & -0.5 & -1 \end{array}\right)
$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

解： 增广矩阵为

$$
\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\left(\begin{array}{ccc:c} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5} r_1]{r_2 - \frac{2}{5} r_1}
\left(\begin{array}{ccc:c} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}
\left(\begin{array}{ccc:c} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_3 + \frac{1}{2} r_2}
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & -0.5 & -1 \end{array}\right)
$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

解： 增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-\frac{1}{5}r_1]{r_2-\frac{2}{5}r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & -0.5 & -1 \end{array}\right)$$

2.1.1.1 Gauss列主元消去法

列主元消去法

```
for k = 1, 2, ···, n-1
  find i_k ∈ k,···,n s.t. |a_{i_k,k}^{(k)}| = max_{k≤i≤n} |a_{ik}^{(k)}|;
  interchage the k,i_k-th rows in [A^{(k)}, b^{(k)}] ;
  for i = k+1, ···, n
    l_ik = a_ik^{(k)} / a_kk^{(k)};
    for j = k+1, ···, n+1
      a_ij^{(k+1)} = a_ij^{(k)} - l_ik · a_kj^{(k)};
    end
  end
end
```

2.1.1.2　Gauss全主元消去法

定义 (全主元消去法)

全主元消去法选主元的范围更大， 对于

$$\left(\begin{array}{c|c} A^{(1)} & b^{(1)} \end{array} \right)$$

来说，在整个系数矩阵中选主元，即将绝对值最大的元素经过行列变换使其置于$a_{11}^{(1)}$的位置， 然后进行消元过程得到

$$\left(\begin{array}{c|c} A^{(2)} & b^{(2)} \end{array} \right)$$

接下来在该矩阵中划掉第一行第一列后剩余的$n-1$阶子系数矩阵中选主元，并通过行、列交换置其于$a_{22}^{(2)}$的位置，然后进行消元；

$$\cdots\cdots$$

2.1.1.2 Gauss全主元消去法

例

用全主元消去法求解

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 5, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 & = & 8, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 & = & -4. \end{cases}$$

2.1.1.2 Gauss全主元消去法

解： 增广矩阵为

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow[r_3-\frac{1}{5}r_1]{r_2-\frac{2}{5}r_1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 1 & -1 & 8 \\ & -4.2 & -2.8 & -5.6 \\ & 1.6 & 1.4 & 1.8 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow{r_3+\frac{8}{21}r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)
\end{array}
$$

2.1.1.2 Gauss全主元消去法

解：增广矩阵为

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5} r_1]{r_2 - \frac{2}{5} r_1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 8 \\ & -4.2 & -2.8 & -5.6 \\ & 1.6 & 1.4 & 1.8 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow{r_3 + \frac{8}{21} r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)
\end{array}
$$

2.1.1.2 Gauss全主元消去法

解：增广矩阵为

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5} r_1]{r_2 - \frac{2}{5} r_1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 8 \\ & -4.2 & -2.8 & -5.6 \\ & 1.6 & 1.4 & 1.8 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow{r_3 + \frac{8}{21} r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)
\end{array}
$$

2.1.1.2 Gauss全主元消去法

解： 增广矩阵为

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\end{array}
\xRightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\end{array}
\xRightarrow[r_3-\frac{1}{5}r_1]{r_2-\frac{2}{5}r_1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\xRightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 1 & -1 & 8 \\ & -4.2 & -2.8 & -5.6 \\ & 1.6 & 1.4 & 1.8 \end{array}\right)
\end{array}
\xRightarrow{r_3+\frac{8}{21}r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)
\end{array}
$$

2.1.1.2 Gauss全主元消去法

解： 增广矩阵为

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \color{blue}{x_1} & \color{blue}{x_2} & \color{blue}{x_3} \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \color{blue}{x_1} & \color{blue}{x_2} & \color{blue}{x_3} \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5} r_1]{r_2 - \frac{2}{5} r_1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \color{blue}{x_1} & \color{blue}{x_2} & \color{blue}{x_3} \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} \color{red}{5} & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & \color{red}{-2.8} & -4.2 & -5.6 \end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 1 & -1 & 8 \\ & -4.2 & -2.8 & -5.6 \\ & 1.6 & 1.4 & 1.8 \end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow{r_3 + \frac{8}{21} r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)
\end{array}
$$

2.1.1.2 Gauss全主元消去法

解： 增广矩阵为

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \end{array}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \end{array}
\xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5} r_1]{r_2 - \frac{2}{5} r_1}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right) \end{array}
$$

$$
\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 8 \\ & -4.2 & -2.8 & -5.6 \\ & 1.6 & 1.4 & 1.8 \end{array}\right) \end{array}
\xrightarrow{r_3 + \frac{8}{21} r_2}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & 1/3 & -1/3 \end{array}\right) \end{array}
$$

2.1.1.2 Gauss全主元消去法

解： 增广矩阵为

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & 1 & 2 & 5 \\
5 & -1 & 1 & 8 \\
1 & -3 & -4 & -4
\end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
5 & -1 & 1 & 8 \\
2 & 1 & 2 & 5 \\
1 & -3 & -4 & -4
\end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5} r_1]{r_2 - \frac{2}{5} r_1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
5 & -1 & 1 & 8 \\
 & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\
 & -2.8 & -4.2 & -5.6
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
5 & 1 & -1 & 8 \\
 & -4.2 & -2.8 & -5.6 \\
 & 1.6 & 1.4 & 1.8
\end{array}\right)
\end{array}
\xrightarrow{r_3 + \frac{8}{21} r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
5 & -1 & 1 & 8 \\
 & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\
 & & 1/3 & -1/3
\end{array}\right)
\end{array}
$$

2.1.1.2 Gauss全主元消去法

解： 增广矩阵为

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \end{array}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \end{array}
\xrightarrow[r_3-\frac{1}{5}r_1]{r_2-\frac{2}{5}r_1}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right) \end{array}
$$

$$
\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 8 \\ & -4.2 & -2.8 & -5.6 \\ & 1.6 & 1.4 & 1.8 \end{array}\right) \end{array}
\xrightarrow{r_3+\frac{8}{21}r_2}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & 1/3 & -1/3 \end{array}\right) \end{array}
$$

2.1.1.2 Gauss全主元消去法

解：增广矩阵为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[r_3-\frac{1}{5}r_1]{r_2-\frac{2}{5}r_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & 1.4 & 1.6 & 1.8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 1 & -1 & 8 \\ & -4.2 & -2.8 & -5.6 \\ & 1.6 & 1.4 & 1.8 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{r_3+\frac{8}{21}r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & -1 & 1 & 8 \\ & -2.8 & -4.2 & -5.6 \\ & & 1/3 & -1/3 \end{array}\right) \end{array}$$

2.1.1.3 选主元消去法的应用

应用一： 求逆矩阵

$$\left(A \;\vdots\; E \right) \xrightarrow{Gauss-Jordan\ Elimination} \left(E \;\vdots\; A^{-1} \right)$$

2.1.1.3 选主元消去法的应用

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -2 \\ -23 & 11 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

2.1.1.3 选主元消去法的应用

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (-23)]{\substack{r_2 + \frac{11}{23} r_1 \\ r_3 + \frac{1}{23} r_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.478 & -0.044 & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & 2.261 & -1.522 & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & 0 & 0.044 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (2.261)]{\substack{r_1 + \frac{478}{2261} r_2 \\ r_3 + \frac{1522}{2261} r_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.365 & 0.211 & 0.057 & 0 \\ 0 & 1 & -0.673 & 0.442 & 0.211 & 0 \\ 0 & 0 & 1.019 & 0.673 & 0.365 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (1.019)]{\substack{r_1 + \frac{365}{1019} r_3 \\ r_2 + \frac{673}{1019} r_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.452 & 0.188 & 0.358 \\ 0 & 1 & 0 & 0.886 & 0.452 & 0.660 \\ 0 & 0 & 1 & 0.660 & 0.358 & 0.981 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}$$

2.1.1.3 选主元消去法的应用

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (-23)]{\substack{r_2 + \frac{11}{23} r_1 \\ r_3 + \frac{1}{23} r_1}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -0.478 & -0.044 & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & 2.261 & -1.522 & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & 0 & 0.044 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (2.261)]{\substack{r_1 + \frac{478}{2261} r_2 \\ r_3 + \frac{1522}{2261} r_2}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -0.365 & 0.211 & 0.057 & 0 \\ 0 & 1 & -0.673 & 0.442 & 0.211 & 0 \\ 0 & 0 & 1.019 & 0.673 & 0.365 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (1.019)]{\substack{r_1 + \frac{365}{1019} r_3 \\ r_2 + \frac{673}{1019} r_3}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0.452 & 0.188 & 0.358 \\ 0 & 1 & 0 & 0.886 & 0.452 & 0.660 \\ 0 & 0 & 1 & 0.660 & 0.358 & 0.981 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}$$

2.1.1.3 选主元消去法的应用

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (-23)]{\substack{r_2 + \frac{11}{23} r_1 \\ r_3 + \frac{1}{23} r_1}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -0.478 & -0.044 & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & 2.261 & -1.522 & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & 0 & 0.044 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (2.261)]{\substack{r_1 + \frac{478}{2261} r_2 \\ r_3 + \frac{1522}{2261} r_2}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -0.365 & 0.211 & 0.057 & 0 \\ 0 & 1 & -0.673 & 0.442 & 0.211 & 0 \\ 0 & 0 & 1.019 & 0.673 & 0.365 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (1.019)]{\substack{r_1 + \frac{365}{1019} r_3 \\ r_2 + \frac{673}{1019} r_3}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0.452 & 0.188 & 0.358 \\ 0 & 1 & 0 & 0.886 & 0.452 & 0.660 \\ 0 & 0 & 1 & 0.660 & 0.358 & 0.981 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}$$

2.1.1.3 选主元消去法的应用

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (-23)]{\substack{r_2 + \frac{11}{23} r_1 \\ r_3 + \frac{1}{23} r_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.478 & -0.044 & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & 2.261 & -1.522 & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & 0 & 0.044 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (2.261)]{\substack{r_1 + \frac{478}{2261} r_2 \\ r_3 + \frac{1522}{2261} r_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.365 & 0.211 & 0.057 & 0 \\ 0 & 1 & -0.673 & 0.442 & 0.211 & 0 \\ 0 & 0 & 1.019 & 0.673 & 0.365 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \div (1.019)]{\substack{r_1 + \frac{365}{1019} r_3 \\ r_2 + \frac{673}{1019} r_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.452 & 0.188 & 0.358 \\ 0 & 1 & 0 & 0.886 & 0.452 & 0.660 \\ 0 & 0 & 1 & 0.660 & 0.358 & 0.981 \end{array}\right)$$

A^{-1}

2.1.1.3 选主元消去法的应用

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_1 \div (-23)]{\substack{r_2 + \frac{11}{23} r_1 \\ r_3 + \frac{1}{23} r_1}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.478 & -0.044 & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & 2.261 & -1.522 & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & 0 & 0.044 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_1 \div (2.261)]{\substack{r_1 + \frac{478}{2261} r_2 \\ r_3 + \frac{1522}{2261} r_2}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.365 & 0.211 & 0.057 & 0 \\ 0 & 1 & -0.673 & 0.442 & 0.211 & 0 \\ 0 & 0 & 1.019 & 0.673 & 0.365 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_1 \div (1.019)]{\substack{r_1 + \frac{365}{1019} r_3 \\ r_2 + \frac{673}{1019} r_3}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.452 & 0.188 & 0.358 \\ 0 & 1 & 0 & 0.886 & 0.452 & 0.660 \\ 0 & 0 & 1 & 0.660 & 0.358 & 0.981 \end{array}\right)
$$

$$A^{-1}$$

2.1.1.3 选主元消去法的应用

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[r_1 \div (-23)]{\substack{r_2 + \frac{11}{23} r_1 \\ r_3 + \frac{1}{23} r_1}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -0.478 & -0.044 & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & 2.261 & -1.522 & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & 0 & 0.044 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[r_1 \div (2.261)]{\substack{r_1 + \frac{478}{2261} r_2 \\ r_3 + \frac{1522}{2261} r_2}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -0.365 & 0.211 & 0.057 & 0 \\ 0 & 1 & -0.673 & 0.442 & 0.211 & 0 \\ 0 & 0 & 1.019 & 0.673 & 0.365 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[r_1 \div (1.019)]{\substack{r_1 + \frac{365}{1019} r_3 \\ r_2 + \frac{673}{1019} r_3}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0.452 & 0.188 & 0.358 \\ 0 & 1 & 0 & 0.886 & 0.452 & 0.660 \\ 0 & 0 & 1 & 0.660 & 0.358 & 0.981 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}$$

2.1.1.3 选主元消去法的应用

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} -23 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[r_1 \div (-23)]{\substack{r_2 + \frac{11}{23} r_1 \\ r_3 + \frac{1}{23} r_1}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -0.478 & -0.044 & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & 2.261 & -1.522 & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & 0 & 0.044 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[r_1 \div (2.261)]{\substack{r_1 + \frac{478}{2261} r_2 \\ r_3 + \frac{1522}{2261} r_2}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -0.365 & 0.211 & 0.057 & 0 \\ 0 & 1 & -0.673 & 0.442 & 0.211 & 0 \\ 0 & 0 & 1.019 & 0.673 & 0.365 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[r_1 \div (1.019)]{\substack{r_1 + \frac{365}{1019} r_3 \\ r_2 + \frac{673}{1019} r_3}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0.452 & 0.188 & 0.358 \\ 0 & 1 & 0 & 0.886 & 0.452 & 0.660 \\ 0 & 0 & 1 & 0.660 & 0.358 & 0.981 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}$$

2.1.1.3 选主元消去法的应用

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{-23} & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{red}{-23} & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[r_1 \div (-23)]{\substack{r_2 + \frac{11}{23} r_1 \\ r_3 + \frac{1}{23} r_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.478 & -0.044 & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & \color{red}{2.261} & -1.522 & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & 0 & 0.044 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[r_1 \div (2.261)]{\substack{r_1 + \frac{478}{2261} r_2 \\ r_3 + \frac{1522}{2261} r_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.365 & 0.211 & 0.057 & 0 \\ 0 & 1 & -0.673 & 0.442 & 0.211 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1.019} & 0.673 & 0.365 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[r_1 \div (1.019)]{\substack{r_1 + \frac{365}{1019} r_3 \\ r_2 + \frac{673}{1019} r_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.452 & 0.188 & 0.358 \\ 0 & 1 & 0 & 0.886 & 0.452 & 0.660 \\ 0 & 0 & 1 & 0.660 & 0.358 & 0.981 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}$$

2.1.1.3 选主元消去法的应用

$$
\left(\begin{array}{ccc:ccc} 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{-23} & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} \color{red}{-23} & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xRightarrow[r_1 \div (-23)]{\substack{r_2 + \frac{11}{23} r_1 \\ r_3 + \frac{1}{23} r_1}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -0.478 & -0.044 & 0 & -0.044 & 0 \\ 0 & \color{red}{2.261} & -1.522 & 1 & 0.478 & 0 \\ 0 & -1.522 & 2.044 & 0 & 0.044 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xRightarrow[r_1 \div (2.261)]{\substack{r_1 + \frac{478}{2261} r_2 \\ r_3 + \frac{1522}{2261} r_2}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -0.365 & 0.211 & 0.057 & 0 \\ 0 & 1 & -0.673 & 0.442 & 0.211 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1.019} & 0.673 & 0.365 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xRightarrow[r_1 \div (1.019)]{\substack{r_1 + \frac{365}{1019} r_3 \\ r_2 + \frac{673}{1019} r_3}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \color{blue}{0.452} & \color{blue}{0.188} & \color{blue}{0.358} \\ 0 & 1 & 0 & \color{blue}{0.886} & \color{blue}{0.452} & \color{blue}{0.660} \\ 0 & 0 & 1 & \color{blue}{0.660} & \color{blue}{0.358} & \color{blue}{0.981} \end{array}\right)
$$

$$\color{blue}{A^{-1}}$$

2.1.1.3 选主元消去法的应用

应用二：求行列式

设有矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

用主元消去法将其化为上三角矩阵，并设对角元素为$b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{nn}$， 故$A$的行列式为

$$\det(A) = (-1)^m b_{11} \cdot b_{22} \cdot \cdots \cdot b_{nn},$$

其中m为所施行的行、列交换的次数。

2.1.2 矩阵的三角分解

定义 (矩阵三角分解)

将矩阵A分解为一个下三角阵L和一个上三角阵U的乘积，最自然的做法是通过一系列初等变换，逐步将A约化为上三角阵，并且保证这些初等变换的乘积是一个下三角阵。

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

定义 (Gauss变换(矩阵))

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix} \triangleq L_k = I - l_k e_k^T$$

$$l_k = (0, \cdots, 0, l_{k+1,k}, \cdots, l_{nk})^T \quad \longrightarrow \quad \text{Gauss向量}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

定义 (Gauss变换(矩阵))

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix} \triangleq L_k = I - l_k e_k^T$$

$$l_k = (0, \cdots, 0, l_{k+1,k}, \cdots, l_{nk})^T \rightarrow \textit{Gauss}\text{向量}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

对于$x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$，

$$L_k x = (x_1, \cdots, x_k, x_{k+1} - l_{k+1,k}x_k, \cdots, x_n - l_{nk}x_k)^T.$$

取

$$l_{ik} = \frac{x_i}{x_k}, \quad i = k+1, \cdots, n, \quad x_k \neq 0$$

便有

$$L_k x = (x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)^T.$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

性质 ($1 \to L_k$)

L_k的逆为

$$L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$$

证明.

$$\because \quad e_k^T l_k = 0,$$

$$\therefore \quad (I + l_k e_k^T)(I - l_k e_k^T) = I - l_k \boxed{e_k^T l_k} e_k^T = I.$$

□

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

性质 $(1 \to L_k)$

L_k的逆为

$$L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$$

证明.

$$\because \quad e_k^T l_k = 0,$$

$$\therefore \quad (I + l_k e_k^T)(I - l_k e_k^T) = I - l_k \boxed{e_k^T l_k} e_k^T = I.$$

□

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

性质 $(2 \longrightarrow L_k)$

设$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，有

$$L_kA = (I - l_ke_k^T)A = A - l_k(e_k^TA),$$

注意e_k^TA为A的第k行。

例

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -4 & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & -1 & -2 \\ & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

性质 $(2 \longrightarrow L_k)$

设$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，有

$$L_k A = (I - l_k e_k^T)A = A - l_k(e_k^T A),$$

注意$e_k^T A$为A的第k行。

例

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -4 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & -1 & -2 \\ & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

性质 ($3 \to L_k$)

若$j < k$，则
$$L_jL_k = (I - l_je_j^T)(I - l_ke_k^T) = I - l_je_j^T - l_ke_k^T.$$

证明.

因为当$j < k$时，有$e_j^Tl_k = 0$。 □

例

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & & 1 & \\ -3 & & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

性质 $(3 \to L_k)$

若 $j < k$，则

$$L_j L_k = (I - l_j e_j^T)(I - l_k e_k^T) = I - l_j e_j^T - l_k e_k^T.$$

证明.

因为当 $j < k$时，有 $e_j^T l_k = 0$。 □

例

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & & 1 & \\ -3 & & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

性质 $(3 \longrightarrow L_k)$

若$j<k$，则

$$L_jL_k = (I - l_je_j^T)(I - l_ke_k^T) = I - l_je_j^T - l_ke_k^T.$$

证明.

因为当$j<k$时，有$e_j^Tl_k = 0$。 □

例

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & & 1 & \\ -3 & & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \end{bmatrix}}_{L_1A} \xrightarrow{L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & * & * \end{bmatrix}}_{L_2L_1A} \xrightarrow{L_3} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix}}_{L_3L_2L_1A}$$

$$L_3L_2L_1A = U \implies A = \underbrace{(L_3L_2L_1)^{-1}}_{L} U$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \end{bmatrix}}_{L_1 A} \xrightarrow{L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & * & * \end{bmatrix}}_{L_2 L_1 A} \xrightarrow{L_3} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix}}_{L_3 L_2 L_1 A}$$

$$L_3 L_2 L_1 A = U \implies A = \underbrace{(L_3 L_2 L_1)^{-1}}_{L} U$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \end{bmatrix}}_{L_1 A} \xrightarrow{L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & * & * \end{bmatrix}}_{L_2 L_1 A} \xrightarrow{L_3} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix}}_{L_3 L_2 L_1 A}$$

$$L_3 L_2 L_1 A = U \implies A = \underbrace{(L_3 L_2 L_1)^{-1}}_{L} U$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow{L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \end{bmatrix}}_{L_1A} \xrightarrow{L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & * & * \end{bmatrix}}_{L_2L_1A} \xrightarrow{L_3} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix}}_{L_3L_2L_1A}$$

$$L_3L_2L_1A = U \implies A = \underbrace{(L_3L_2L_1)^{-1}}_{L} U$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = (0,\ 2,\ 4,\ 3)^T \quad \rightarrow \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = (0,\ 2,\ 4,\ 3)^T \quad \rightarrow \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = (0,\ 2,\ 4,\ 3)^T \quad \rightarrow \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = (0,\ 2,\ 4,\ 3)^T \quad \to \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$L_1A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$l_2 = (0,\ 0,\ 3,\ 4)^T \quad \to \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -3 & 1 & \\ & -4 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2L_1A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -3 & 1 & \\ & -4 & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$L_1A=\begin{bmatrix}2&1&1&0\\&1&1&1\\&3&5&5\\&4&6&8\end{bmatrix}$$

$$l_2=(0,\ 0,\ 3,\ 4)^T\ \rightarrow\ L_2=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&-3&1&\\&-4&&1\end{bmatrix}$$

$$L_2L_1A=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&-3&1&\\&-4&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1&0\\&1&1&1\\&3&5&5\\&4&6&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1&0\\&1&1&1\\&&2&2\\&&2&4\end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$l_2 = (0,\ 0,\ 3,\ 4)^T \quad \longrightarrow \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -3 & 1 & \\ & -4 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -3 & 1 & \\ & -4 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$l_2 = (0,\ 0,\ 3,\ 4)^T \quad \rightarrow \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -3 & 1 & \\ & -4 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -3 & 1 & \\ & -4 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一

$$L_2L_1A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$l_3 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)^T \quad \rightarrow \quad L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3L_2L_1A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix} = U.$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一

$$L_2L_1A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$l_3 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)^T \quad \rightarrow \quad L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3L_2L_1A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix} = U.$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一

$$L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$l_3 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)^T \quad \rightarrow \quad L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix} = U.$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一

$$
L_2L_1A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix}
$$

$$
l_3 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)^T \quad \rightarrow \quad L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
L_3L_2L_1A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix} = U.
$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&\\2&1&&\\4&&1&\\3&&&1\end{bmatrix},\quad L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&3&1&\\&4&&1\end{bmatrix},\quad L_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-1&1\end{bmatrix}$$

$$L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&\\2&1&&\\4&3&1&\\3&4&1&1\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2&1&1&0\\4&3&3&1\\8&7&9&5\\6&7&9&8\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&&&\\2&1&&\\4&3&1&\\3&4&1&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}2&1&1&0\\&1&1&1\\&&2&2\\&&&2\end{bmatrix}}_{U}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & & 1 & \\ 3 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & 4 & & 1 \end{bmatrix}, \quad L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix}}_{U}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & & 1 & \\ 3 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & 4 & & 1 \end{bmatrix}, \quad L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix}}_{U}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

对于一般矩阵A，记$A^{(1)}=A$，则

$$
\begin{aligned}
A^{(2)} &= L_1 A^{(1)} \\
A^{(3)} &= L_2 A^{(2)} = L_2 L_1 A^{(1)} \\
&\vdots \\
A^{(k)} &= L_{k-1}\cdots L_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ & A_{22}^{(k)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中$A_{11}^{(k)}$是$k-1$阶上三角阵，$A_{22}^{(k)}$为

$$
A_{22}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kk}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}
$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

若$a_{kk}^{(k)} \neq 0$，则可确定一个Gauss变换L_k，使得$A_{22}^{(k)}$第一列中对角线以下的$n-k$个元素为0。取

$$L_k = I - l_k e_k^T,$$

$$l_k = (0, \cdots, 0, l_{k+1,k}, \cdots, l_{nk})^T,$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1, \cdots, n$$

则

$$A^{(k+1)} = L_k A^{(k)} \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

其中$A_{11}^{(k+1)}$是k阶上三角阵。

如此进行$n-1$步，最终所得矩阵$A^{(n-1)}$即为所要求的上三角形式。

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

若$a_{kk}^{(k)} \neq 0$，则可确定一个Gauss变换L_k，使得$A_{22}^{(k)}$第一列中对角线以下的$n-k$个元素为0。取

$$L_k = I - l_k e_k^T,$$

$$l_k = (0, \cdots, 0, l_{k+1,k}, \cdots, l_{nk})^T,$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1, \cdots, n$$

则

$$A^{(k+1)} = L_k A^{(k)} \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

其中$A_{11}^{(k+1)}$是k阶上三角阵。

如此进行$n-1$步，最终所得矩阵$A^{(n-1)}$即为所要求的上三角形式。

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

若$a_{kk}^{(k)} \neq 0$，则可确定一个Gauss变换L_k，使得$A_{22}^{(k)}$第一列中对角线以下的$n-k$个元素为0。取

$$L_k = I - l_k e_k^T,$$

$$l_k = (0, \cdots, 0, l_{k+1,k}, \cdots, l_{nk})^T,$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1, \cdots, n$$

则

$$A^{(k+1)} = L_k A^{(k)} \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

其中$A_{11}^{(k+1)}$是k阶上三角阵。

如此进行$n-1$步，最终所得矩阵$A^{(n-1)}$即为所要求的上三角形式。

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

若$a_{kk}^{(k)} \neq 0$，则可确定一个Gauss变换L_k，使得$A_{22}^{(k)}$第一列中对角线以下的$n-k$个元素为0。取

$$L_k = I - l_k e_k^T,$$

$$l_k = (0, \cdots, 0, l_{k+1,k}, \cdots, l_{nk})^T,$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1, \cdots, n$$

则

$$A^{(k+1)} = L_k A^{(k)} \begin{bmatrix} A_{11}^{(k+1)} & A_{12}^{(k+1)} \\ & A_{22}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

其中$A_{11}^{(k+1)}$是k阶上三角阵。

如此进行$n-1$步，最终所得矩阵$A^{(n-1)}$即为所要求的上三角形式。

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

上述步骤可描述为

$$L_{n-1}\cdots L_1 A = A^{(n)}.$$

令$L = (L_{n-1}\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ L_1)^{-1}$及$U = A^{(n)}$，则

$$A = LU,$$

其中L是一个单位上三角阵。事实上，由于$e_j^T l_i = 0\ (j < i)$，则

$$\begin{aligned} L &= L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} \\ &= (I + l_1 e_1^T)(I + l_2 e_2^T)\cdots(I + l_{n-1} e_{n-1}^T) \\ &= I + l_1 e_1^T + l_2 e_2^T \cdots + l_{n-1} e_{n-1}^T. \end{aligned}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

算法描述：

$$
\begin{aligned}
A^{(k+1)} &= L_k A^{(k)} \\
&= (I - l_k e_k^T) A^{(k-1)} \\
&= A^{(k)} - l_k e_k^T A^{(k)}.
\end{aligned}
$$

注意$e_k^T A^{(k)}$是$A^{(k)}$的第k行，l_k的前k个分量为0，故$A^{(k)}$与$A^{(k-1)}$的前k行元素相同。而

$$
\boxed{
\begin{aligned}
a_{ik}^{(k+1)} &= 0, && i = k+1, \cdots, n, \\
a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ik}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)}, && i, j = k+1, \cdots, n
\end{aligned}
}
$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

定理

主元$a_{ii}^{(i)}(i=1,\cdots,k-1)$均不为0

$\Longleftrightarrow$ A的i阶顺序主子阵$A_i(i=1,\cdots,k)$非奇异。

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

定理

主元$a_{ii}^{(i)}(i = 1, \cdots, k-1)$均不为0

$\Longleftrightarrow$ A的i阶顺序主子阵$A_i(i = 1, \cdots, k)$非奇异。

2.1.2 矩阵的三角分解

方式一：Gauss变换

定理 (三角分解的条件)

A的各阶顺序主子阵均非奇异

$\Longrightarrow$ 存在唯一的单位下三角阵L和下三角阵U, 使得$A = LU$.

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式三：Crout分解

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

图: Doolittle分解运算次序：先行后列，先U后L

$$
\begin{matrix}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
l_{31} & l_{32} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & u_{nn}
\end{matrix}
$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

图: Doolittle分解运算次序：先行后列，先U后L

$$
\begin{array}{ccccc}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
l_{31} & l_{32} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & u_{nn}
\end{array}
$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

图: Doolittle分解运算次序：先行后列，先U后L

$$
\begin{matrix}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
l_{31} & l_{32} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & u_{nn}
\end{matrix}
$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

图: Doolittle分解运算次序：先行后列，先U后L

$$
\begin{array}{ccccc}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
l_{31} & l_{32} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & u_{nn}
\end{array}
$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

图: Doolittle分解运算次序：先行后列，先U后L

$$
\begin{array}{ccccc}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
l_{31} & l_{32} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & u_{nn}
\end{array}
$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

图: Doolittle分解运算次序：先行后列，先U后L

$$
\begin{array}{ccccc}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
l_{31} & l_{32} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & u_{nn}
\end{array}
$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

图: Doolittle分解运算次序：先行后列，先U后L

$$
\begin{array}{ccccc}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
l_{31} & l_{32} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & u_{nn}
\end{array}
$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

图: Doolittle分解运算次序：先行后列，先U后L

$$
\begin{array}{ccccc}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
l_{31} & l_{32} & \cdots & u_{1n} & u_{2n} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & u_{nn}
\end{array}
$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} \ \ (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ii} = 1$, $l_{ij} = 0 (j > i)$, $u_{ij} = 0 (j < i)$，可得

- 当$j \geq i$时(固定i)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj} \implies u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

- 当$i > j$时(固定j)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}u_{kj} \implies l_{ij}u_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} \ \ (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ii} = 1$, $l_{ij} = 0 (j > i)$, $u_{ij} = 0 (j < i)$，可得

- 当$j \geq i$时(固定i)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj} \Longrightarrow u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

- 当$i > j$时(固定j)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}u_{kj} \Longrightarrow l_{ij}u_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \Longrightarrow l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ii} = 1$, $l_{ij} = 0 (j > i)$, $u_{ij} = 0 (j < i)$，可得

- 当$j \geq i$时(固定i)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj} \implies u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

- 当$i > j$时(固定j)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}u_{kj} \implies l_{ij}u_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ii} = 1$, $l_{ij} = 0 (j > i)$, $u_{ij} = 0 (j < i)$，可得

- 当$j \geq i$时(固定i)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} u_{kj} \quad \Longrightarrow \quad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

- 当$i > j$时(固定j)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} u_{kj} \quad \Longrightarrow \quad l_{ij} u_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad \Longrightarrow \quad l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ii} = 1$, $l_{ij} = 0(j > i)$, $u_{ij} = 0(j < i)$，可得

- 当$j \geq i$时($固定i$)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} u_{kj} \implies u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

- 当$i > j$时($固定j$)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} u_{kj} \implies l_{ij} u_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ii} = 1$, $l_{ij} = 0 (j > i)$, $u_{ij} = 0 (j < i)$，可得

- 当$j \geq i$时(固定i)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj} \implies u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

- 当$i > j$时(固定j)，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}u_{kj} \implies l_{ij}u_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

先行后列

```
for k = 1:n
  for j = k, ···, n   % 计算第k行
    u_kj = a_kj − Σ_{r=1}^{k−1} l_lr u_rj
  end
  for i = k+1, ···, n % 计算第k列
    l_ik = (a_ik − Σ_{r=1}^{k−1} l_ir u_rk)/u_kk
  end
end
```

例

利用*Doolittle*分解求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1 计算U的第一行，L的第一列，得

$$u_{11} = 1, \quad u_{12} = 2, \quad u_{13} = 3, \quad u_{14} = -4,$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = -3, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = 2, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = 4.$$

2 计算U的第二行，L的第二列，得

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2, \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -3, \quad u_{24} = a_{24} - l_{21}u_{14} = 1,$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = 3, \quad l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}u_{12}}{u_{22}} = 3.$$

3 计算U的第三行，L的第三列，得

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3,$$
$$u_{34} = a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24} = 2,$$
$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}}{u_{33}} = 2.$$

4 计算U的第四行，得

$$u_{44} = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} = -4,$$

3 计算U的第三行，L的第三列，得

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3,$$

$$u_{34} = a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24} = 2,$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}}{u_{33}} = 2.$$

4 计算U的第四行，得

$$u_{44} = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} = -4,$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -3 & 1 & & \\ 2 & 3 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ & 2 & -3 & 1 \\ & & 3 & 2 \\ & & & -4 \end{pmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -3 & 1 & & \\ 2 & 3 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ & 2 & -3 & 1 \\ & & 3 & 2 \\ & & & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -3 & 1 & & \\ 2 & 3 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

求得

$$Y = (-2,\ -1,\ 17,\ -16)^T.$$

2.1.2 矩阵的三角分解

方式二：Doolittle分解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -3 & 1 & & \\ 2 & 3 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ & 2 & -3 & 1 \\ & & 3 & 2 \\ & & & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ & 2 & -3 & 1 \\ & & 3 & 2 \\ & & & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 17 \\ -16 \end{pmatrix}$$

求得

$$X = (1,\ 2,\ 3,\ 4)^T.$$

2.1.2 矩阵的三角分解

对称矩阵的三角分解

定理

若A为n阶对称矩阵，且A的各阶顺序主子式都不为0，则A可惟一分解为

$$A = LDL^T,$$

其中L为单位下三角阵，D为对角阵。

证明： 由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

对称矩阵的三角分解

定理

若A为n阶对称矩阵，且A的各阶顺序主子式都不为0，则A可惟一分解为

$$A = LDL^T,$$

其中L为单位下三角阵，D为对角阵。

证明： 由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

2.1.2 矩阵的三角分解

对称矩阵的三角分解

因为$u_{ii} \neq 0(i = 1, \cdots, n)$，故$U$可分解为

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = DU_1$$

其中D为对角矩阵，U_1为单位上三角阵。于是

$$A = LDU_1 = L(DU_1),$$

因为A为对角阵，故

$$A = A^T = U_1^T D^T L^T = U_1^T (DL^T).$$

由A的LU分解的惟一性即得

$$L = U_1^T.$$

2.1.3 平方根法

对称正定矩阵

适用对象：对称正定矩阵方程组

定义 (对称正定矩阵)

设A是n阶实对称矩阵，若$\forall 0 \neq X \in \mathbb{R}^n$，恒有$X^TAX > 0$，则称$A$为对称正定矩阵。

2.1.3 平方根法

对称正定矩阵的性质

性质

若A对称正定，则

1. A非奇异
2. 任一主子矩阵A_k, $k = 1, 2, \cdots, n-1$必正定
3. $a_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$
4. $\lambda_i(A) > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$
5. $\det(A) > 0$

2.1.3 平方根法

定理

对称矩阵A正定 $\Longleftrightarrow$ A的各阶顺序主子式$\det(A_i) > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

2.1.3 平方根法

定理 (Cholesky分解)

对称矩阵A正定 $\Longrightarrow$ 存在惟一的主对角元皆正的下三角阵L，使得$A = LL^T$.

2.1.3 平方根法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

2.1.3 平方根法及改进的平方根法

图: 平方根法运算次序

$$
\begin{array}{ccccc}
l_{11} & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1,n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{nn}
\end{array}
$$

2.1.3 平方根法及改进的平方根法

图: 平方根法运算次序

$$
\begin{array}{ccccc}
l_{11} & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1,n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{nn}
\end{array}
$$

2.1.3 平方根法及改进的平方根法

图: 平方根法运算次序

$$
\begin{array}{ccccc}
l_{11} & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1,n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{nn}
\end{array}
$$

2.1.3 平方根法及改进的平方根法

图: 平方根法运算次序

$$
\begin{array}{ccccc}
l_{11} & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1,n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{nn}
\end{array}
$$

2.1.3 平方根法及改进的平方根法

图: 平方根法运算次序

$$
\begin{array}{ccccc}
l_{11} & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1,n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{nn}
\end{array}
$$

2.1.3 平方根法及改进的平方根法

图: 平方根法运算次序

$$
\begin{array}{ccccc}
l_{11} & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1,n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{nn}
\end{array}
$$

2.1.3 平方根法及改进的平方根法

图: 平方根法运算次序

$$
\begin{array}{ccccc}
l_{11} & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1,n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{nn}
\end{array}
$$

2.1.3 平方根法及改进的平方根法

图: 平方根法运算次序

$$
\begin{array}{ccccc}
l_{11} & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1,n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{nn}
\end{array}
$$

2.1.3 平方根法及改进的平方根法

图: 平方根法运算次序

$$
\begin{array}{ccccc}
l_{11} & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1,n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{nn}
\end{array}
$$

2.1.3 平方根法及改进的平方根法

图: 平方根法运算次序

$$
\begin{array}{ccccc}
l_{11} & & & & \\
l_{21} & l_{22} & & & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1,n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{nn}
\end{array}
$$

2.1.3 平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}l_{jk} \ \ (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ij} = 0(j > i)$，知计算第j行时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2 \implies l_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}l_{jk}\right)^{1/2}$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}l_{jk} \implies l_{ij}l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}$$

2.1.3 平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}l_{jk} \ \ (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ij} = 0(j > i)$，知计算第j行时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2 \implies l_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}l_{jk}\right)^{1/2}$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}l_{jk} \implies l_{ij}l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}$$

2.1.3 平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}l_{jk} \ \ (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ij} = 0 (j > i)$，知计算第j行时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2 \implies l_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}l_{jk}\right)^{1/2}$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}l_{jk} \implies l_{ij}l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}$$

2.1.3 平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}l_{jk} \ (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ij} = 0 (j > i)$，知计算第j行时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2 \implies l_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}l_{jk}\right)^{1/2}$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}l_{jk} \implies l_{ij}l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}$$

2.1.3 平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{jk} \ \ (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ij} = 0 (j > i)$，知计算第j行时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2 \implies l_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} l_{jk} \right)^{1/2}$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk} \implies l_{ij} l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$$

2.1.3 平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}l_{jk} \ \ (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

注意到$l_{ij} = 0 (j > i)$，知计算第j行时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2 \implies l_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}l_{jk} \right)^{1/2}$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}l_{jk} \implies l_{ij}l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}$$

2.1.3 平方根法

平方根法

```
for j = 1, 2, ···, n
```

$$l_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 \right)^{1/2}$$

```
    for i = j+1, j+2, ···, n
```

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) / l_{jj}$$

```
    end
end
```

2.1.3 平方根法

例

用平方根法求解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

2.1.3 平方根法

例

用平方根法求解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

解

验证A的对称正定性：

$$a_{11} = 1 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 4 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

2.1.3 平方根法

例

用平方根法求解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

解

1

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1,$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = 2 \qquad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 2$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = 1 \qquad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = 1 \qquad l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = 2$$

2.1.3 平方根法

例

用平方根法求解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解

2 求解$LY = b$，得

$$Y = (0, -1, 2)^T.$$

3 求解$L^T X = Y$，得

$$X = (1, -1, 1)^T.$$

2.1.3.1 改进的平方根法

平方根法的局限

- 计算l_{ij}时需要用到开方运算
- 只能求解对称正定线性方程组

而在很多工程问题中，经常得到的是一个系数矩阵对称但不一定正定的线性方程组。为了避免开方运算和求解这类方程组，可采用改进平方根法。

2.1.3.1 改进的平方根法

平方根法的局限

- 计算l_{ij}时需要用到开方运算
- 只能求解对称正定线性方程组

而在很多工程问题中，经常得到的是一个系数矩阵对称但不一定正定的线性方程组。为了避免开方运算和求解这类方程组，可采用改进平方根法。

2.1.3.1 改进的平方根法

平方根法的局限

- 计算l_{ij}时需要用到开方运算
- 只能求解对称正定线性方程组

而在很多工程问题中，经常得到的是一个系数矩阵对称但不一定正定的线性方程组。为了避免开方运算和求解这类方程组，可采用改进平方根法。

2.1.3.1 改进的平方根法

平方根法的局限

- 计算l_{ij}时需要用到开方运算
- 只能求解对称正定线性方程组

而在很多工程问题中，经常得到的是一个系数矩阵对称但不一定正定的线性方程组。为了避免开方运算和求解这类方程组，可采用改进平方根法。

2.1.3.1 改进的平方根法

$$
\begin{aligned}
A &= LDL^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & \cdots & d_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2.1.3.1 改进的平方根法

存储方式及运算次序

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a33 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ l_{21} & d_2 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & d_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & \cdots & d_{n-1} & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n} & d_n \end{pmatrix}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

存储方式及运算次序

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a33 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ l_{21} & d_2 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & d_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & \cdots & d_{n-1} & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n} & d_n \end{pmatrix}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

存储方式及运算次序

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a33 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ l_{21} & d_2 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & d_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & \cdots & d_{n-1} & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n} & d_n \end{pmatrix}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

存储方式及运算次序

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & & & & & \\
a_{21} & a_{22} & & & & \\
a_{31} & a_{32} & a33 & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
d_1 & & & & & \\
l_{21} & d_2 & & & & \\
l_{31} & l_{32} & d_3 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & \cdots & d_{n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n} & d_n
\end{pmatrix}
$$

2.1.3.1 改进的平方根法

存储方式及运算次序

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & & & & & \\
a_{21} & a_{22} & & & & \\
a_{31} & a_{32} & a33 & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
d_1 & & & & & \\
l_{21} & d_2 & & & & \\
l_{31} & l_{32} & d_3 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & \cdots & d_{n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n} & d_n
\end{pmatrix}
$$

2.1.3.1 改进的平方根法

存储方式及运算次序

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a33 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ l_{21} & d_2 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & d_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & \cdots & d_{n-1} & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n} & d_n \end{pmatrix}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

存储方式及运算次序

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a33 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ l_{21} & d_2 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & d_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & \cdots & d_{n-1} & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n} & d_n \end{pmatrix}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

存储方式及运算次序

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a33 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ l_{21} & d_2 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & d_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & \cdots & d_{n-1} & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n} & d_n \end{pmatrix}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

存储方式及运算次序

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & & & & & \\
a_{21} & a_{22} & & & & \\
a_{31} & a_{32} & a33 & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
d_1 & & & & & \\
l_{21} & d_2 & & & & \\
l_{31} & l_{32} & d_3 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & \cdots & d_{n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n} & d_n
\end{pmatrix}
$$

2.1.3.1 改进的平方根法

存储方式及运算次序

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & & & & & \\
a_{21} & a_{22} & & & & \\
a_{31} & a_{32} & a33 & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
d_1 & & & & & \\
l_{21} & d_2 & & & & \\
l_{31} & l_{32} & d_3 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & \cdots & d_{n-1} & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n} & d_n
\end{pmatrix}
$$

2.1.3.1 改进的平方根法

存储方式及运算次序

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a33 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ l_{21} & d_2 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & d_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & \cdots & d_{n-1} & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n} & d_n \end{pmatrix}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} d_k l_{jk}$$

注意到$l_{ij} = 0 (j > i)$，知计算第j列时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} d_k l_{jk}^2 = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j \implies d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} d_j l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}}{d_j}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} d_k l_{jk}$$

注意到$l_{ij} = 0 (j > i)$，知计算第j列时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} d_k l_{jk}^2 = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j \implies d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} d_j l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}}{d_j}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} d_k l_{jk}$$

注意到$l_{ij} = 0 (j > i)$，知计算第j列时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} d_k l_{jk}^2 = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j \implies d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} d_j l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}}{d_j}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} d_k l_{jk}$$

注意到$l_{ij} = 0(j > i)$，知计算第j列时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} d_k l_{jk}^2 = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j \implies d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} d_j l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}}{d_j}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} d_k l_{jk}$$

注意到$l_{ij} = 0 (j > i)$，知计算第j列时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} d_k l_{jk}^2 = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j \implies d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} d_j l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}}{d_j}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

由矩阵乘法

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} d_k l_{jk}$$

注意到$l_{ij} = 0 (j > i)$，知计算第j列时

- 当$i = j$时，

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} d_k l_{jk}^2 = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j \implies d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2$$

- 当$i > j$时，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} d_j l_{jj} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} \implies l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}}{d_j}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

改进平方根法

```
for j = 1, 2, ⋯, n
```

$$d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_k$$

```
    for i = j+1, j+2, ⋯, n
```

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}\right) / d_j$$

```
    end

end
```

2.1.3.1 改进的平方根法

$$AX = b$$

等价于

```
find Y s.t. LY = b;
find X s.t. DL^T X = Y.
```

即

for i = 1, 2, ⋯, n

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k$$

end

for i = n, n-1, ⋯, 1

$$x_i = \frac{y_i}{d_i} - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k$$

end

2.1.3.1 改进的平方根法

例

用改进平方根法求解

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.1.3.1 改进的平方根法

例

用改进平方根法求解

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = a_{11} = 5$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{d_1} = -4/5 \qquad d_2 = a_{22} - d_1 l_{21}^2 = 2.8$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{d_1} = 1/5 \qquad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} d_1 l_{21}}{d_2} = -1.14286$$

$$l_{41} = \frac{a_{41}}{d_1} = 0 \qquad l_{42} = \frac{a_{41} - l_{41} d_1 l_{21}}{d_2} = 1$$

2.1.3.1 改进的平方根法

例

用改进平方根法求解

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d_3 = a_{33} - d_1 l_{31}^2 - d_2 l_{32}^2 = 2.1485$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41}d_1 l_{31} - l_{42}d_2 l_{32}}{d_3} = -4 \qquad d_4 = a_{44} - d_1 l_{41}^2 - d_2 l_{42}^2 - d_3 l_{43}^2 = 5$$

2.1.3.1 改进的平方根法

5 求$LY=b$得

$$Y=(2,\ 0.6,\ -0.71428,\ 0.83333)^T$$

6 求$DL^TX=Y$得

$$X=(1.00002,\ 1.00003,\ 1.00004,\ 1.00002)^T$$

2.1.4 追赶法

适用范围：三对角线性方程组

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

系数矩阵A是三对角矩阵，它常常是按行严格对角占优的，即

$$\begin{cases} |b_1| > |c_1| > 0, \\ |b_i| \geq |a_i| + |c_i|, \quad a_i \neq 0, \quad c_i \neq 0, \quad i = 2, 3, \cdots, n-1, \\ |b_n| > |a_n| > 0. \end{cases}$$

2.1.4 追赶法

适用范围： 三对角线性方程组

$$
\begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & & \\
 & a_3 & b_3 & c_3 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\
 & & & & a_n & b_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}
$$

系数矩阵A是三对角矩阵，它常常是按行严格对角占优的，即

$$
\begin{cases}
|b_1| > |c_1| > 0, \\
|b_i| \geq |a_i| + |c_i|, \quad a_i \neq 0, \quad c_i \neq 0, \quad i = 2, 3, \cdots, n-1, \\
|b_n| > |a_n| > 0.
\end{cases}
$$

2.1.4 追赶法

$$
\begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & \\
 & a_2 & b_2 & c_2 & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_n & b_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
l_2 & 1 & & & \\
 & l_3 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & l_n & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_1 & c_1 & & & \\
 & u_2 & c_2 & & \\
 & & u_3 & c_3 & \\
 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & u_n
\end{pmatrix}
$$

(1)

$$u_1 = b_1$$

2.1.4 追赶法

$$
\begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & \\
 & a_2 & b_2 & c_2 & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_n & b_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
l_2 & 1 & & & \\
 & l_3 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & l_n & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_1 & c_1 & & & \\
 & u_2 & c_2 & & \\
 & & u_3 & c_3 & \\
 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & u_n
\end{pmatrix}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
l_2 u_1 = a_2 \quad &\Longrightarrow \quad l_2 = \frac{a_2}{u_1} \\
l_2 c_1 + u_2 = b_2 \quad &\Longrightarrow \quad u_2 = b_2 - l_2 c_1
\end{aligned}
$$

2.1.4 追赶法

$$
\begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & \\
 & a_2 & b_2 & c_2 & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_n & b_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
l_2 & 1 & & & \\
 & l_3 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & l_n & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_1 & c_1 & & & \\
 & u_2 & c_2 & & \\
 & & u_3 & c_3 & \\
 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & u_n
\end{pmatrix}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
l_2 u_1 = a_2 \quad &\Longrightarrow \quad l_2 = \frac{a_2}{u_1} \\
l_2 c_1 + u_2 = b_2 \quad &\Longrightarrow \quad u_2 = b_2 - l_2 c_1
\end{aligned}
$$

2.1.4 追赶法

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & u_3 & c_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & u_n \end{pmatrix}$$

(3)

$$l_3 u_2 = a_3 \quad \Longrightarrow \quad l_3 = \frac{a_3}{u_2}$$

$$l_3 c_2 + u_3 = b_3 \quad \Longrightarrow \quad u_3 = b_3 - l_3 c_2$$

2.1.4 追赶法

$$
\begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & \\
 & a_2 & b_2 & c_2 & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_n & b_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
l_2 & 1 & & & \\
 & l_3 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & l_n & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_1 & c_1 & & & \\
 & u_2 & c_2 & & \\
 & & u_3 & c_3 & \\
 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & u_n
\end{pmatrix}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
l_3 u_2 = a_3 \quad &\Longrightarrow \quad l_3 = \frac{a_3}{u_2} \\
l_3 c_2 + u_3 = b_3 \quad &\Longrightarrow \quad u_3 = b_3 - l_3 c_2
\end{aligned}
$$

2.1.4 追赶法

$$
\begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & \\
 & a_2 & b_2 & c_2 & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_n & b_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
l_2 & 1 & & & \\
 & l_3 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & l_n & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_1 & c_1 & & & \\
 & u_2 & c_2 & & \\
 & & u_3 & c_3 & \\
 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & u_n
\end{pmatrix}
$$

$$
\text{递推关系} \longrightarrow
\begin{cases}
u_1 = b_1, \\
\left.
\begin{aligned}
l_i &= \dfrac{a_i}{u_{i-1}}, \\
u_i &= b_i - l_i c_{i-1}
\end{aligned}
\right\} i = 2, 3, \cdots, n
\end{cases}
$$

2.1.4 追赶法

例

求解微分方程

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, \quad x \in (a, b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

解

1 网格剖分：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

2 差分离散：

$$u_{xx}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

2.1.4 追赶法

例

求解微分方程

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, \quad x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

解

1 网格剖分：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

2 差分离散：

$$u_{xx}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

2.1.4 追赶法

例

求解微分方程

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, \quad x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

解

1 网格剖分：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

2 差分离散：

$$u_{xx}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

2.1.4 追赶法

解

3 生成矩阵：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

2.1.4 追赶法

解

4 用追赶法求解线性方程组

$$
\begin{pmatrix}
2 & -1 & & & \\
-1 & 2 & -1 & & \\
 & -1 & 2 & -1 & \\
 & & -1 & 2 & -1 \\
 & & & -1 & 2
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
-1/2 & 1 & & & \\
 & -2/3 & 1 & & \\
 & & -3/4 & 1 & \\
 & & & -4/5 & 1
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
2 & -1 & & & \\
 & 3/2 & -1 & & \\
 & & 4/3 & -1 & \\
 & & & 5/4 & -1 \\
 & & & & 6/5
\end{pmatrix}
$$

2.1.4 追赶法

存储方式

1 系数矩阵与右端项的存储

用四个n维向量a, b, c, d分别来存储三条对角线上的元素及右端项的值

2 l与u的存储

l的各元素存储在a对应的元素位置，u的各元素存储在b对应的元素位置上

3 未知量x的存储

x的各元素存储在d对应的元素位置

2.1.5.1 向量范数

定义 (向量范数)

向量范数是一个$\|\cdot\|:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$的非负函数，它满足：

(1) 正定性：

$$\|x\|\geq 0,\quad \forall\ x\in\mathbf{R}^n,\ \text{且}\ \|x\|=0\iff x=0$$

(2) 齐次性：

$$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|,\quad \forall\ x\in\mathbf{R}^n,\ \alpha\in\mathbf{R}$$

(3) 三角不等式：

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|,\quad \forall\ x,y\in\mathbf{R}^n$$

2.1.5.1 向量范数

定义 (p范数)

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \ p \geq 1$$

- *1*范数

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

- *2*范数

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^T x}$$

- ∞范数

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} \{|x_i|\}$$

范数的等价性

$$
\begin{aligned}
\|x\|_2 &\le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2,\\
\|x\|_\infty &\le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty,\\
\|x\|_\infty &\le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty,
\end{aligned}
$$

2.1.5.1 向量范数

定义 (向量序列的极限)

设$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$及 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$，若对于$i = 1, 2, \cdots, n$均有

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*,$$

则称向量序列$x^{(k)}$收敛于x^*，记做

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \text{ 或 } x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$$

$$x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^* \iff \max_{1\le i\le n} |x_i^{(k)} - x_i^*| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^*\|_\infty = 0$$

2.1.5.1 向量范数

定义 (向量序列的极限)

设$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$及 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$，若对于$i = 1, 2, \cdots, n$均有

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*,$$

则称向量序列$x^{(k)}$收敛于x^*，记做

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \text{ 或 } x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$$

$$x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^* \iff \max_{1\le i\le n} |x_i^{(k)} - x_i^*| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^*\|_\infty = 0$$

2.1.5.1 向量范数

利用范数的等价性可知

$$x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^* \iff \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^*\|_1 = 0$$

$$x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^* \iff \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^*\|_2 = 0$$

定理

向量序列的范数收敛等价于分量收敛。

2.1.5.1 向量范数

利用范数的等价性可知

$$x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^* \iff \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^*\|_1 = 0$$

$$x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^* \iff \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^*\|_2 = 0$$

定理

向量序列的范数收敛等价于分量收敛。

2.1.5.1 向量范数

例

设$x = (1,\ 0,\ -5,\ 2)^T$，求$\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$。

解

$$\|x\|_1 = 1 + 5 + 2 = 8,$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{30},$$
$$\|x\|_\infty = \max\{1,\ 5,\ 2\} = 5.$$

2.1.5.1 向量范数

例

设$x = (1,\ 0,\ -5,\ 2)^T$，求$\|x\|_1,\ \|x\|_2,\ \|x\|_\infty$。

解

$$\|x\|_1 = 1 + 5 + 2 = 8,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{30},$$

$$\|x\|_\infty = \max\{1,\ 5,\ 2\} = 5.$$

2.1.5.2 矩阵范数

定义 (矩阵范数)

矩阵范数是一个$\|\cdot\|: \mathbf{R}^{n\times n} \to \mathbf{R}$的非负函数，它满足：

(1) 正定性：

$$\|A\| \geq 0, \quad \forall\, A \in \mathbf{R}^{n\times n},\ \text{且}\ \|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$$

(2) 齐次性：

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|, \quad \forall\, A \in \mathbf{R}^{n\times n},\ \alpha \in \mathbf{R}$$

(3) 三角不等式：

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \forall\, A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

(4) 相容性：

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \quad \forall\, A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

性质

1° $\mathbf{R}^{n\times n}$上的任意两个范数等价

2° 矩阵序列的范数收敛等价于元素收敛，即

$$\lim_{k\to\infty}\|A_k - A\| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij},\ i,j = 1,\cdots,n, \quad A_k = (a_{ij}^{(k)})$$

2.1.5.2 矩阵范数

从属范数

定理

设$\|\cdot\|$是$\mathbf{R}^n$上的一个向量范数，若定义

$$|||A||| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|, \ A \in \mathbf{R}^{n\times n},$$

则称$|||\cdot|||$是$\mathbf{R}^{n\times n}$上的一个矩阵范数。

这样的矩阵范数$|||\cdot|||$称为从属于向量范数$\|\cdot\|$的矩阵范数，也称由向量范数$\|\cdot\|$诱导出的算子范数。

2.1.5.2 矩阵范数

从属范数

定理

设$\|\cdot\|$是$\mathbf{R}^n$上的一个向量范数，若定义

$$|||A||| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|, \ A \in \mathbf{R}^{n\times n},$$

则称$|||\cdot|||$是$\mathbf{R}^{n\times n}$上的一个矩阵范数。

这样的矩阵范数$|||\cdot|||$称为从属于向量范数$\|\cdot\|$的矩阵范数， 也称由向量范数$\|\cdot\|$诱导出的算子范数。

2.1.5.2 矩阵范数

矩阵范数与向量范数的相容性

定义 (矩阵范数与向量范数的相容性)

若矩阵范数$\|\cdot\|_M$和向量范数$\|\cdot\|_v$满足

$$\|Ax\|_v \le \|A\|_M\|x\|_v, \quad A \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

则称矩阵范数$\|\cdot\|_M$和向量范数$\|\cdot\|_v$相容。

若无特别说明，总假定矩阵范数和向量范数相容。

2.1.5.2 矩阵范数

矩阵范数与向量范数的相容性

定义 (矩阵范数与向量范数的相容性)

若矩阵范数$\|\cdot\|_M$和向量范数$\|\cdot\|_v$满足

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_M\|x\|_v, \quad A \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

则称矩阵范数$\|\cdot\|_M$和向量范数$\|\cdot\|_v$相容。

若无特别说明，总假定矩阵范数和向量范数相容。

2.1.5.2 矩阵范数

由$\mathbf{R}^n$上的p范数可诱导出$\mathbf{R}^{n\times n}$上的算子范数$\|\cdot\|_p$：

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p,\ \ A \in \mathbf{R}^{n\times n}.$$

2.1.5.2 矩阵范数

定理

设$A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$，则

- 1范数或列范数

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- 无穷范数或行范数

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- 2范数或谱范数

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

其中$\lambda_{max}(A^T A)$表示$A^T A$的最大特征值。

2.1.5.2 矩阵范数

定义 (Frobenius范数)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

它是向量2范数的自然推广。

2.1.5.2 矩阵范数

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

求$\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$。

解

$$\|A\|_1 = 5, \quad \|A\|_\infty = 3, \quad \|A\|_F = \sqrt{14}.$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|A^T A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 13-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 9 = 0 \implies \|A\|_2 = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$$

2.1.5.2 矩阵范数

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

求$\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$。

解

$$\|A\|_1 = 5, \quad \|A\|_\infty = 3, \quad \|A\|_F = \sqrt{14}.$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|A^TA - \lambda I| = \begin{pmatrix} 13-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 9 = 0 \implies \|A\|_2 = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$$

2.1.5.2 矩阵范数

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

求$\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$。

解

$$\|A\|_1 = 5, \quad \|A\|_\infty = 3, \quad \|A\|_F = \sqrt{14}.$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|A^T A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 13-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 9 = 0 \implies \|A\|_2 = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$$

2.1.5.2 矩阵范数

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

求$\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$。

解

$$\|A\|_1 = 5, \quad \|A\|_\infty = 3, \quad \|A\|_F = \sqrt{14}.$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|A^T A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 13-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 9 = 0 \Longrightarrow \|A\|_2 = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$$

2.1.5.2 矩阵范数

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

求$\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$。

解

$$\|A\|_1 = 5, \quad \|A\|_\infty = 3, \quad \|A\|_F = \sqrt{14}.$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|A^TA - \lambda I| = \begin{pmatrix} 13-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 9 = 0 \Longrightarrow \|A\|_2 = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$$

2.1.5.2 矩阵范数

定义 (谱半径)

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则称

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(A)\}$$

为A的谱半径，其中$\lambda(A)$表示A的特征值的全体。

2.1.5.2 矩阵范数

谱半径与矩阵范数的关系

定理

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则

(1) 对$\mathbf{C}^{n\times n}$上的任意矩阵范数$\|\cdot\|$，有

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

即矩阵A的谱半径不超过A的任何一种范数。

(2) $\forall \epsilon > 0$，存在$C^{n\times n}$上的矩阵范数$\|\cdot\|$使得

$$\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$$

2.1.5 线性方程组的性态

证明.

1 设λ为A的任意特征值，$x \neq 0$为对应特征向量，则

$$Ax = \lambda x$$

则由相容性条件可知

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \stackrel{x\neq 0}{\Longrightarrow} |\lambda| \leq \|A\|.$$

由λ的任意性可得

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

2.1.5 线性方程组的性态

证明.

1 设λ为A的任意特征值，$x \neq 0$为对应特征向量，则

$$Ax = \lambda x$$

则由相容性条件可知

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} |\lambda| \leq \|A\|.$$

由λ的任意性可得

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

2.1.5 线性方程组的性态

证明.

1 设λ为A的任意特征值，$x \neq 0$为对应特征向量，则

$$Ax = \lambda x$$

则由相容性条件可知

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \xRightarrow{x \neq 0} |\lambda| \leq \|A\|.$$

由λ的任意性可得

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

2.1.5.2 矩阵范数

设$x \in \mathbf{R}$，

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff |x| < 1$$

定理

设$A \in C^{n\times n}$，则

$$A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(A) < 1$$

证明

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \\ \lambda \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda^k \in \lambda(A^k) \\ \text{设}\lambda_0 \in \lambda(A)\text{使得}|\lambda_0| = \rho(A) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \rho(A)^k = |\lambda_0|^k \leq \rho(A^k) \leq \|A^k\| \ (\forall k) < 1 \\ \Longrightarrow \rho(A) < 1. \end{array}$$

2.1.5.2 矩阵范数

设$x \in \mathbf{R}$，

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff |x| < 1$$

定理

设$A \in C^{n\times n}$，则

$$A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(A) < 1$$

证明

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \\ \lambda \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda^k \in \lambda(A^k) \\ \text{设}\lambda_0 \in \lambda(A)\text{使得}|\lambda_0| = \rho(A) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \rho(A)^k = |\lambda_0|^k \le \rho(A^k) \le \|A^k\| \ (\forall k) < 1 \\ \Longrightarrow \rho(A) < 1. \end{array}$$

2.1.5.2 矩阵范数

设$x \in \mathbf{R}$，

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff |x| < 1$$

定理

设$A \in C^{n\times n}$，则

$$A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(A) < 1$$

证明

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \\ \lambda \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda^k \in \lambda(A^k) \\ \text{设}\lambda_0 \in \lambda(A)\text{使得}|\lambda_0| = \rho(A) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \rho(A)^k = |\lambda_0|^k \le \rho(A^k) \le \|A^k\| \ (\forall k) < 1 \\ \Longrightarrow \rho(A) < 1. \end{array}$$

2.1.5.2 矩阵范数

设$x \in \mathbf{R}$,

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff |x| < 1$$

定理

设$A \in C^{n\times n}$, 则

$$A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(A) < 1$$

证明

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \\ \lambda \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda^k \in \lambda(A^k) \\ \text{设}\lambda_0 \in \lambda(A)\text{使得}|\lambda_0| = \rho(A) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \rho(A)^k = |\lambda_0|^k \leq \rho(A^k) \leq \|A^k\|\ (\forall k) < 1 \\ \Longrightarrow \rho(A) < 1. \end{array}$$

2.1.5.2 矩阵范数

设$x \in \mathbf{R}$，

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff |x| < 1$$

定理

设$A \in C^{n\times n}$，则

$$A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(A) < 1$$

证明

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \\ \lambda \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda^k \in \lambda(A^k) \\ \text{设}\lambda_0 \in \lambda(A)\text{使得}|\lambda_0| = \rho(A) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \rho(A)^k = |\lambda_0|^k \le \rho(A^k) \le \|A^k\| \ (\forall k) < 1 \\ \Longrightarrow \rho(A) < 1. \end{array}$$

2.1.5.2 矩阵范数

设$x \in \mathbf{R}$，

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff |x| < 1$$

定理

设$A \in C^{n\times n}$，则

$$A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(A) < 1$$

证明

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \\ \lambda \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda^k \in \lambda(A^k) \\ \text{设}\lambda_0 \in \lambda(A)\text{使得}|\lambda_0| = \rho(A) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \rho(A)^k = |\lambda_0|^k \le \rho(A^k) \le \|A^k\| \ (\forall k) < 1 \\ \Longrightarrow \rho(A) < 1. \end{array}$$

2.1.5.2 矩阵范数

设$x \in \mathbf{R}$，

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff |x| < 1$$

定理

设$A \in C^{n\times n}$， 则

$$A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(A) < 1$$

证明

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \\ \lambda \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda^k \in \lambda(A^k) \\ \text{设}\lambda_0 \in \lambda(A)\text{使得}|\lambda_0| = \rho(A) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \rho(A)^k = |\lambda_0|^k \le \rho(A^k) \le \|A^k\| \ (\forall k) < 1 \\ \Longrightarrow \rho(A) < 1. \end{array}$$

2.1.5.2 矩阵范数

设$x \in \mathbf{R}$，

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff |x| < 1$$

定理

设$A \in C^{n\times n}$，则

$$A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(A) < 1$$

证明

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \\ \lambda \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda^k \in \lambda(A^k) \\ \text{设}\lambda_0 \in \lambda(A)\text{使得}|\lambda_0| = \rho(A) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \rho(A)^k = |\lambda_0|^k \le \rho(A^k) \le \|A^k\| \; (\forall k) < 1 \\ \Longrightarrow \rho(A) < 1. \end{array}$$

2.1.5.2 矩阵范数

设$x \in \mathbf{R}$，

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff |x| < 1$$

定理

设$A \in C^{n\times n}$， 则

$$A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(A) < 1$$

证明

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \\ \lambda \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda^k \in \lambda(A^k) \\ \text{设}\lambda_0 \in \lambda(A)\text{使得}|\lambda_0| = \rho(A) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \rho(A)^k = |\lambda_0|^k \le \rho(A^k) \le \|A^k\|\ (\forall k) < 1 \\ \Longrightarrow \rho(A) < 1. \end{array}$$

2.1.5.2 矩阵范数

设$x \in \mathbf{R}$，

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff |x| < 1$$

定理

设$A \in C^{n\times n}$，则

$$A^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(A) < 1$$

证明

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \\ \lambda \in \lambda(A) \Rightarrow \lambda^k \in \lambda(A^k) \\ \text{设}\lambda_0 \in \lambda(A)\text{使得}|\lambda_0| = \rho(A) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \rho(A)^k = |\lambda_0|^k \le \rho(A^k) \le \|A^k\| \ (\forall k) < 1 \\ \Longrightarrow \rho(A) < 1. \end{array}$$

2.1.5.2 矩阵范数

证明.

$\Leftarrow$

$$\rho(A) < 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{必有算子范数}\|\cdot\|\text{使得}\|A\| < 1$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le \|A^k\| \le \|A\|^k \to 0, \quad k \to \infty.$$

□

证明.

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned}\rho(A) < 1 \quad &\Longrightarrow \quad \text{必有算子范数}\|\cdot\|\text{使得}\|A\| < 1 \\ &\Longrightarrow \quad 0 \le \|A^k\| \le \|A\|^k \to 0, \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

□

2.1.5.2 矩阵范数

证明.

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned} \rho(A) < 1 \quad &\Longrightarrow \quad \text{必有算子范数}\|\cdot\|\text{使得}\|A\| < 1 \\ &\Longrightarrow \quad 0 \le \|A^k\| \le \|A\|^k \to 0, \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

$\square$

2.1.5.2 矩阵范数

定理

设$x \in \mathbf{R}$，则

(1)

$$|x| < 1 \implies 1 - x \neq 0$$

(2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{收敛} \iff |x| < 1$$

(3) 若$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$收敛，则有$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}$，且

$$\left\| (1-x)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} x^k \right\| \leq \frac{|x|^{m+1}}{1-|x|}$$

2.1.5.2 矩阵范数

定理

设$x \in \mathbf{R}$，则

(1)

$$|x| < 1 \implies 1 - x \neq 0$$

(2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{收敛} \iff |x| < 1$$

(3) 若$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$收敛，则有$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}$，且

$$\left\| (1-x)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} x^k \right\| \leq \frac{|x|^{m+1}}{1-|x|}$$

2.1.5.2 矩阵范数

定理

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则

(1)

$$\rho(A) < 1 \implies I - A\text{可逆}$$

(2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k\text{收敛} \iff \rho(A) < 1$$

(3) 若$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$收敛，则有 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$，且存在$\mathbf{C}^{n\times n}$上的矩阵范数$\|\cdot\|$使得$\forall m \in \mathbf{N}$,

$$\left\|(I-A)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} A^k\right\| \le \frac{\|A\|^{m+1}}{1-\|A\|}$$

2.1.5.2 矩阵范数

定理

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则

(1)

$$\rho(A) < 1 \implies I - A\text{可逆}$$

(2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k\text{收敛} \iff \rho(A) < 1$$

(3) 若$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$收敛，则有$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$，且存在$\mathbf{C}^{n\times n}$上的矩阵范数$\|\cdot\|$使得$\forall m \in \mathbf{N}$,

$$\left\| (I-A)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} A^k \right\| \le \frac{\|A\|^{m+1}}{1 - \|A\|}$$

2.1.5.2 矩阵范数

证明.

(1) ($\Longrightarrow$)记$A^k=(a_{ij}^{(k)})$，则 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k=I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots$， 其元素为数项级数$\delta_{ij}+a_{ij}^{(1)}+a_{ij}^{(2)}+\cdots+a_{ij}^{(k)}+\cdots$， 而数项级数收敛的必要条件是$a_{ij}^{(k)}\to 0,\quad k\to\infty$。故

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k\text{收敛}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{m\to\infty}a_{ij}^{(m)}=0\ \Longleftrightarrow\ \lim_{m\to\infty}A^m=0$$
$$\Longleftrightarrow\quad\rho(A)<1.$$

($\Longleftarrow$)

$$\rho(A)<1\quad\Longrightarrow\quad\lim_{m\to\infty}A^m=0\text{ 且 }I-A\text{可逆}$$
$$\Longrightarrow\quad\lim_{m\to\infty}(I-A)\sum_{k=0}^{m}A^k=\lim_{m\to\infty}(I-A^m)=I$$
$$\Longrightarrow\quad\sum_{k=0}^{\infty}A^k\text{收敛，且}(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{m}A^k.$$

2.1.5.2 矩阵范数

证明.

(1) ($\Longrightarrow$)记$A^k = (a_{ij}^{(k)})$，则 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$， 其元素为数项级数$\delta_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(k)} + \cdots$， 而数项级数收敛的必要条件是$a_{ij}^{(k)} \to 0, \quad k \to \infty$。故

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k\text{收敛} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} a_{ij}^{(m)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} A^m = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad \rho(A) < 1.$$

($\Longleftarrow$)

$$\rho(A) < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} A^m = 0 \text{ 且 } I - A\text{可逆}$$
$$\Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty}(I - A)\sum_{k=0}^{m} A^k = \lim_{m\to\infty}(I - A^m) = I$$
$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} A^k\text{收敛，且}(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{m} A^k.$$

证明.

(1) ($\Longrightarrow$)记$A^k=(a_{ij}^{(k)})$，则 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k=I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots$， 其元素为数项级数$\delta_{ij}+a_{ij}^{(1)}+a_{ij}^{(2)}+\cdots+a_{ij}^{(k)}+\cdots$， 而数项级数收敛的必要条件是$a_{ij}^{(k)}\to 0,\quad k\to\infty$。故

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k\text{收敛}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{m\to\infty}a_{ij}^{(m)}=0\iff\lim_{m\to\infty}A^m=0$$
$$\iff\quad\rho(A)<1.$$

($\Longleftarrow$)

$$\rho(A)<1\quad\Longrightarrow\quad\lim_{m\to\infty}A^m=0\text{ 且 }I-A\text{可逆}$$
$$\Longrightarrow\quad\lim_{m\to\infty}(I-A)\sum_{k=0}^{m}A^k=\lim_{m\to\infty}(I-A^m)=I$$
$$\Longrightarrow\quad\sum_{k=0}^{\infty}A^k\text{收敛，且}(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{m}A^k.$$

2.1.5.2 矩阵范数

证明.

(1) ($\Longrightarrow$)记$A^k = (a_{ij}^{(k)})$，则 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$，其元素为数项级数$\delta_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(k)} + \cdots$，而数项级数收敛的必要条件是$a_{ij}^{(k)} \to 0, \quad k \to \infty$。故

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \text{收敛} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} a_{ij}^{(m)} = 0 \iff \lim_{m\to\infty} A^m = 0$$

$$\iff \quad \rho(A) < 1.$$

($\Longleftarrow$)

$$\rho(A) < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} A^m = 0 \text{ 且 } I - A \text{可逆}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} (I - A) \sum_{k=0}^{m} A^k = \lim_{m\to\infty} (I - A^m) = I$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} A^k \text{收敛，且} (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{m} A^k.$$

2.1.5.2 矩阵范数

证明.

(1) ($\Longrightarrow$)记$A^k = (a_{ij}^{(k)})$，则 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$， 其元素为数项级数$\delta_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(k)} + \cdots$， 而数项级数收敛的必要条件是$a_{ij}^{(k)} \to 0,\quad k \to \infty$。故

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k\text{收敛} \Longrightarrow \lim_{m\to\infty} a_{ij}^{(m)} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{m\to\infty} A^m = 0$$

$$\Longleftrightarrow \rho(A) < 1.$$

($\Longleftarrow$)

$$\rho(A) < 1 \Longrightarrow \lim_{m\to\infty} A^m = 0 \text{ 且 } I - A\text{可逆}$$

$$\Longrightarrow \lim_{m\to\infty}(I - A)\sum_{k=0}^{m} A^k = \lim_{m\to\infty}(I - A^m) = I$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k\text{收敛，且}(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{m} A^k.$$

2.1.5.2 矩阵范数

证明.

(1) ($\Longrightarrow$)记$A^k = (a_{ij}^{(k)})$，则 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$， 其元素为数项级数$\delta_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(k)} + \cdots$， 而数项级数收敛的必要条件是$a_{ij}^{(k)} \to 0, \quad k \to \infty$。故

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \text{收敛} \Longrightarrow \lim_{m\to\infty} a_{ij}^{(m)} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{m\to\infty} A^m = 0$$
$$\Longleftrightarrow \rho(A) < 1.$$

($\Longleftarrow$)

$$\rho(A) < 1 \Longrightarrow \lim_{m\to\infty} A^m = 0 \text{ 且 } I - A \text{可逆}$$
$$\Longrightarrow \lim_{m\to\infty}(I - A)\sum_{k=0}^{m} A^k = \lim_{m\to\infty}(I - A^m) = I$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k \text{收敛，且}(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{m} A^k.$$

证明.

(1) ($\Longrightarrow$)记$A^k=(a_{ij}^{(k)})$，则 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k=I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots$， 其元素为数项级数$\delta_{ij}+a_{ij}^{(1)}+a_{ij}^{(2)}+\cdots+a_{ij}^{(k)}+\cdots$， 而数项级数收敛的必要条件是$a_{ij}^{(k)}\to 0,\quad k\to\infty$。故

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}A^k\text{收敛}\quad &\Longrightarrow\quad \lim_{m\to\infty}a_{ij}^{(m)}=0 \iff \lim_{m\to\infty}A^m=0\\ &\iff \rho(A)<1.\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$)

$$\begin{aligned}\rho(A)<1\quad &\Longrightarrow\quad \lim_{m\to\infty}A^m=0\text{ 且 }I-A\text{可逆}\\ &\Longrightarrow\quad \lim_{m\to\infty}(I-A)\sum_{k=0}^{m}A^k=\lim_{m\to\infty}(I-A^m)=I\\ &\Longrightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty}A^k\text{收敛，且}(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{m}A^k.\end{aligned}$$

2.1.5.2 矩阵范数

证明.

(2)

$$
\begin{aligned}
(I-A)^{-1}-\textstyle\sum_{k=0}^{m}A^k &= \textstyle\sum_{k=m+1}^{\infty}A^k \\
\Longrightarrow \quad \left\|(I-A)^{-1}-\textstyle\sum_{k=0}^{m}A^k\right\| &= \left\|\textstyle\sum_{k=m+1}^{\infty}A^k\right\| \\
&\le \textstyle\sum_{k=m+1}^{\infty}\|A\|^k=\dfrac{\|A\|^{m+1}}{1-\|A\|}
\end{aligned}
$$

2.1.5.2 矩阵范数

推论

设$x \in \mathbf{R}$，则

$$|x| < 1 \implies 1 - x \neq 0, \text{ 且 } \left|(1-x)^{-1}\right| \leq \frac{1}{1-|x|}$$

推论

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，$\mathbf{C}^{n\times n}$上的$\|\cdot\|$满足$\|I\| = 1$，则

$$\|A\| < 1 \implies I - A\text{可逆，且 } \left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

2.1.5.2 矩阵范数

推论

设$x \in \mathbf{R}$，则

$$|x| < 1 \implies 1 - x \neq 0, \text{ 且 } \left|(1-x)^{-1}\right| \leq \frac{1}{1-|x|}$$

推论

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，$\mathbf{C}^{n\times n}$上的$\|\cdot\|$满足$\|I\| = 1$，则

$$\|A\| < 1 \implies I - A\text{可逆，} \text{ 且 } \left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

2.1.5.2 矩阵范数

推论

设$x \in \mathbf{R}$，则

$$|x| < 1 \implies 1 - x \neq 0,\ \text{且} \left|(1-x)^{-1}\right| \leq \frac{1}{1-|x|}$$

推论

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，$\mathbf{C}^{n\times n}$上的$\|\cdot\|$满足$\|I\| = 1$，则

$$\|A\| < 1 \implies I - A\text{可逆，}\ \text{且} \left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

2.1.5.2 矩阵范数

推论

设$x \in \mathbf{R}$，则

$$|x| < 1 \implies 1 - x \neq 0,\ \text{且}\left|(1-x)^{-1}\right| \leq \frac{1}{1-|x|}$$

推论

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，$\mathbf{C}^{n\times n}$上的$\|\cdot\|$满足$\|I\| = 1$，则

$$\|A\| < 1 \implies I - A\text{可逆，}\ \text{且}\left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

线性方程组的敏感性问题

考察线性方程组

$$Ax = b,$$

若给A和b以微小的扰动，其解会有何影响。

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

例

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow x = (1\ 1)^T.$$

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0.0002 \\ 4-0.0002 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{x} = (1.5\ 0.5)^T.$$

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{1}{20000}.$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

例

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow x = (1\ 1)^T.$$

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0.0002 \\ 4-0.0002 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{x} = (1.5\ 0.5)^T.$$

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{1}{20000}.$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

例

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \to x = (1\ 1)^T.$$

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0.0002 \\ 4-0.0002 \end{bmatrix} \to \tilde{x} = (1.5\ 0.5)^T.$$

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{1}{20000}.$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

例

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow x = (1\ 1)^T.$$

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0.0002 \\ 4-0.0002 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{x} = (1.5\ 0.5)^T.$$

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{1}{20000}.$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

例

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow x = (1\ 1)^T.$$

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0.0002 \\ 4-0.0002 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{x} = (1.5\ 0.5)^T.$$

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{1}{20000}.$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

考察非奇异线性方程组

$$Ax = b$$

$$\left.\begin{array}{l} A \to A + \delta A \\ b \to b + \delta b \end{array}\right\} \Longrightarrow x \to x + \delta x.$$

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\Longrightarrow (A + \delta A)\delta x = \delta b - \delta A x$$

推论

$$\|A\| < 1 \quad \Longrightarrow \quad I - A\text{可逆且}\left\|(I - A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}$$

只要 $\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$，就有 $A + \delta A$ 可逆，并且

$$\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}.$$

于是

$$\delta x = (A + \delta A)^{-1}(\delta b - \delta A x) = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - \delta A x).$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

考察非奇异线性方程组

$$Ax = b$$

$$\left.\begin{aligned} A &\to A + \delta A \\ b &\to b + \delta b \end{aligned}\right\} \implies x \to x + \delta x.$$

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\implies (A + \delta A)\delta x = \delta b - \delta A x$$

推论

$$\|A\| < 1 \quad \implies \quad I - A\text{可逆且}\left\|(I - A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}$$

只要$\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$，就有$A + \delta A$可逆，并且

$$\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}.$$

于是

$$\delta x = (A + \delta A)^{-1}(\delta b - \delta A x) = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - \delta A x).$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

考察非奇异线性方程组

$$Ax = b$$

$$\left.\begin{array}{l} A \to A + \delta A \\ b \to b + \delta b \end{array}\right\} \Longrightarrow x \to x + \delta x.$$

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\Longrightarrow (A + \delta A)\delta x = \delta b - \delta A x$$

推论

$$\|A\| < 1 \quad \Longrightarrow \quad I - A \text{可逆且} \left\|(I - A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}$$

只要$\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$，就有$A + \delta A$可逆，并且

$$\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}.$$

于是

$$\delta x = (A + \delta A)^{-1}(\delta b - \delta A x) = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - \delta A x).$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

考察非奇异线性方程组

$$Ax = b$$

$$\left.\begin{aligned} A &\to A + \delta A \\ b &\to b + \delta b \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x \to x + \delta x.$$

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\Longrightarrow (A + \delta A)\delta x = \delta b - \delta A x$$

推论

$$\|A\| < 1 \quad \Longrightarrow \quad I - A\text{可逆且}\left\|(I - A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}$$

只要$\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$，就有$A + \delta A$可逆，并且

$$\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}.$$

于是

$$\delta x = (A + \delta A)^{-1}(\delta b - \delta A x) = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - \delta A x).$$

由

$$\delta x = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - \delta Ax)$$

可得到

$$\begin{aligned} \|\delta x\| &\leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\|(\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|) \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}(\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|) \end{aligned}$$

由$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$可知

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).$$

由

$$\delta x = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - \delta A x)$$

可得到

$$\begin{aligned} \|\delta x\| &\leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\|(\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|) \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}(\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|) \end{aligned}$$

由$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$可知

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).$$

2.1 解线性方程组的直接法

由

$$\delta x = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - \delta A x)$$

可得到

$$\begin{aligned} \|\delta x\| &\leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\|(\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|) \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}(\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|) \end{aligned}$$

由$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$可知

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).$$

由

$$\delta x = (I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1} (\delta b - \delta A x)$$

可得到

$$\begin{aligned} \|\delta x\| &\leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| (\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|) \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|} (\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|) \end{aligned}$$

由$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$可知

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right).$$

由

$$\delta x = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - \delta A x)$$

可得到

$$\begin{aligned} \|\delta x\| &\leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\|(\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|) \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}(\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|) \end{aligned}$$

由$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$可知

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

定理

条件：

- $\|\cdot\|$满足条件$\|I\| = 1$, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$非奇异，$b \in \mathbf{R}^n$非零
- $\delta A \in \mathbf{R}^{n\times n}$满足$\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$
- $$\begin{cases} Ax = b & \rightarrow \text{解为 } x \\ (A+\delta A)(x+\delta x) = b + \delta b & \rightarrow \text{解为 } x+\delta x \end{cases}$$

结论：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right),$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

定理

条件：

- $\|\cdot\|$满足条件$\|I\| = 1$, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$非奇异，$b \in \mathbf{R}^n$非零
- $\delta A \in \mathbf{R}^{n\times n}$满足$\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$
- $$\begin{cases} Ax = b & \longrightarrow \text{解为 } x \\ (A+\delta A)(x+\delta x) = b + \delta b & \longrightarrow \text{解为 } x+\delta x \end{cases}$$

结论：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right),$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\text{较小}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \approx \kappa(A)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

结论

- x的相对误差由b和A的相对误差之和放大$\kappa(A)$倍得来
- 若$\kappa(A)$不大，则扰动对解的影响也不会太大
- 若$\kappa(A)$很大，则扰动对解的影响可能会太大

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ 较小

$$\Longrightarrow \quad \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \approx \kappa(A)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

结论

- x的相对误差由b和A的相对误差之和放大$\kappa(A)$倍得来
- 若$\kappa(A)$不大，则扰动对解的影响也不会太大
- 若$\kappa(A)$很大，则扰动对解的影响可能会太大

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\text{较小} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \approx \kappa(A) \\
&\Longrightarrow \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)
\end{aligned}
$$

结论

- x的相对误差由b和A的相对误差之和放大$\kappa(A)$倍得来
- 若$\kappa(A)$不大，则扰动对解的影响也不会太大
- 若$\kappa(A)$很大，则扰动对解的影响可能会太大

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\text{较小}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \approx \kappa(A)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

结论

- x的相对误差由b和A的相对误差之和放大$\kappa(A)$倍得来
- 若$\kappa(A)$不大，则扰动对解的影响也不会太大
- 若$\kappa(A)$很大，则扰动对解的影响可能会太大

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\text{较小}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \approx \kappa(A)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

结论

- x的相对误差由b和A的相对误差之和放大$\kappa(A)$倍得来
- 若$\kappa(A)$不大，则扰动对解的影响也不会太大
- 若$\kappa(A)$很大，则扰动对解的影响可能会太大

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\text{较小}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \approx \kappa(A)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

结论

- x的相对误差由b和A的相对误差之和放大$\kappa(A)$倍得来
- 若$\kappa(A)$不大，则扰动对解的影响也不会太大
- 若$\kappa(A)$很大，则扰动对解的影响可能会太大

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

定义 (条件数)

$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$称为线性方程组$Ax = b$的**条件数**。

条件数在一定程度上刻画了扰动对解的影响程度。

- 若$\kappa(A)$很大，则我们就说该线性方程组的求解问题是病态的，或者说A是病态的；
- 若$\kappa(A)$很小，则我们就说该线性方程组的求解问题是良态的，或者说A是良态的。

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

定义 (条件数)

$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$称为线性方程组$Ax = b$的条件数。

条件数在一定程度上刻画了扰动对解的影响程度。

- 若$\kappa(A)$很大，则我们就说该线性方程组的求解问题是病态的，或者说A是病态的；
- 若$\kappa(A)$很小，则我们就说该线性方程组的求解问题是良态的，或者说A是良态的。

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

定义 (条件数)

$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$称为线性方程组$Ax = b$的条件数。

条件数在一定程度上刻画了扰动对解的影响程度。

- 若$\kappa(A)$很大，则我们就说该线性方程组的求解问题是病态的，或者说A是病态的；
- 若$\kappa(A)$很小，则我们就说该线性方程组的求解问题是良态的，或者说A是良态的。

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

定义 (条件数)

$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$称为线性方程组$Ax = b$的条件数。

条件数在一定程度上刻画了扰动对解的影响程度。

- 若$\kappa(A)$很大，则我们就说该线性方程组的求解问题是病态的，或者说A是病态的；
- 若$\kappa(A)$很小，则我们就说该线性方程组的求解问题是良态的，或者说A是良态的。

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

条件数与范数有关。

$$
\begin{aligned}
\kappa_1(A) &= \|A^{-1}\|_1\|A\|_1, \\
\kappa_2(A) &= \|A^{-1}\|_2\|A\|_2, \\
\kappa_\infty(A) &= \|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty
\end{aligned}
$$

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

推论

条件：

- $\|\cdot\|$满足条件$\|I\| = 1$，$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$非奇异，$b \in \mathbf{R}^n$非零
- $\delta A \in \mathbf{R}^{n\times n}$满足$\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$

结论

- $A + \delta A$也非奇异
- $$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

这表明$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$可当做矩阵求逆问题的条件数。

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

推论

条件：

- $\|\cdot\|$满足条件$\|I\| = 1$，$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$非奇异，$b \in \mathbf{R}^n$非零
- $\delta A \in \mathbf{R}^{n\times n}$满足$\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$

结论

- $A + \delta A$也非奇异
- $$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \le \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

这表明$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$可当做矩阵求逆问题的条件数。

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

推论

条件：

- $\|\cdot\|$满足条件$\|I\|=1$，$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$非奇异，$b\in\mathbf{R}^{n}$非零
- $\delta A\in\mathbf{R}^{n\times n}$满足$\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|<1$

结论

- $A+\delta A$也非奇异
- $$\frac{\|(A+\delta A)^{-1}-A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\le\frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

这表明$\kappa(A)=\|A^{-1}\|\cdot\|A\|$可当做矩阵求逆问题的条件数。

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

推论 (条件数的几何意义)

设$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$非奇异，则

$$\min\left\{\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} : A+\delta A\text{奇异}\right\} = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2 \cdot \|A\|_2} = \frac{1}{\kappa_2(A)},$$

即在谱范数下，一个矩阵的条件数的倒数正好等于该矩阵与全体奇异矩阵所成集合的相对距离。

当$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$十分病态时，它与一个奇异矩阵非常接近。

2.1.5.3 线性方程组的敏度分析

推论 (条件数的几何意义)

设$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$非奇异，则

$$\min\left\{\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} : A+\delta A\text{奇异}\right\} = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2 \cdot \|A\|_2} = \frac{1}{\kappa_2(A)},$$

即在谱范数下，一个矩阵的条件数的倒数正好等于该矩阵与全体奇异矩阵所成集合的相对距离。

当$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$十分病态时，它与一个奇异矩阵非常接近。

2.2.1 雅克比迭代法

$$
a_{ii} \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n
\end{array} \right.
$$

$$
\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lllllll}
x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(& & -a_{1n}x_2 & -\cdots & -a_{1,n-1}x_{n-1} & -a_{1n}x_n & +b_1) \\
x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(& -a_{21}x_1 & & -\cdots & -a_{2,n-1}x_{n-1} & -a_{2n}x_n & +b_2) \\
\qquad \vdots \\
x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(& -a_{n1}x_1 & -a_{n2}x_2 & -\cdots & -a_{n,n-1}x_{n-1} & & +b_n)
\end{array} \right.
$$

2.2.1 雅克比迭代法

$$a_{ii} \neq 0 \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(\quad -a_{1n}x_2 - \cdots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n + b_1) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - \cdots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n + b_2) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1} + b_n) \end{cases}$$

2.2.1 雅克比迭代法

$$a_{ii} \neq 0 \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(\quad -a_{1n}x_2 - \cdots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n + b_1) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 \quad - \cdots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n + b_2) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1} \quad + b_n) \end{cases}$$

2.2.1 雅克比迭代法

取$x^{(0)}=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)})^T$，代入上式右端得

$$
\begin{cases}
{x_1}^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(& & -a_{1n}x_2^{(0)} & -\cdots & -a_{1,n-1}x_{n-1}^{(0)} & -a_{1n}x_n^{(0)} & +b_1) \\
{x_2}^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(& -a_{21}x_1^{(0)} & & -\cdots & -a_{2,n-1}x_{n-1}^{(0)} & -a_{2n}x_n^{(0)} & +b_2) \\
 & \vdots & & & & & \\
{x_n}^{(1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(& -a_{n1}x_1^{(0)} & -a_{n2}x_2^{(0)} & -\cdots & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)} & & +b_n)
\end{cases}
$$

$$
\xRightarrow{k=1,2,\cdots}
\begin{cases}
{x_1}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(& & -a_{1n}x_2^{(k)} & -\cdots & -a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{1n}x_n^{(k)} & +b_1) \\
{x_2}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(& -a_{21}x_1^{(k)} & & -\cdots & -a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{2n}x_n^{(k)} & +b_2) \\
 & \vdots & & & & & \\
{x_n}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(& -a_{n1}x_1^{(k)} & -a_{n2}x_2^{(k)} & -\cdots & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} & & +b_n)
\end{cases}
$$

2.2.1 雅克比迭代法

取$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T$，代入上式右端得

$$\begin{cases} x_1{}^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(& & -a_{1n}x_2^{(0)} & - \cdots & -a_{1,n-1}x_{n-1}^{(0)} & -a_{1n}x_n^{(0)} & +b_1) \\ x_2{}^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(& -a_{21}x_1^{(0)} & & - \cdots & -a_{2,n-1}x_{n-1}^{(0)} & -a_{2n}x_n^{(0)} & +b_2) \\ & \vdots & & & & & \\ x_n{}^{(1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(& -a_{n1}x_1^{(0)} & -a_{n2}x_2^{(0)} & - \cdots & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)} & & +b_n) \end{cases}$$

$$\xRightarrow{k=1,2,\cdots} \begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(& & -a_{1n}x_2^{(k)} & - \cdots & -a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{1n}x_n^{(k)} & +b_1) \\ x_2{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(& -a_{21}x_1^{(k)} & & - \cdots & -a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{2n}x_n^{(k)} & +b_2) \\ & \vdots & & & & & \\ x_n{}^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(& -a_{n1}x_1^{(k)} & -a_{n2}x_2^{(k)} & - \cdots & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} & & +b_n) \end{cases}$$

2.2.1 雅克比迭代法

雅克比迭代法的矩阵描述

考察线性方程组

$$Ax = b \tag{1}$$

令

$$A = D + L + U$$

2.2.1 雅克比迭代法

雅克比迭代法的矩阵描述

考察线性方程组

$$Ax = b \tag{1}$$

令

$$A = D + L + U$$

其中

$$\begin{aligned} D &= \operatorname{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}), \quad a_{ii} \neq 0 \\ L &= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.2.1 雅克比迭代法

雅克比迭代法的矩阵描述

考察线性方程组

$$Ax = b \tag{1}$$

令

$$A = D + L + U$$

方程(1)可写成

$$x = Bx + g$$

其中

$$\begin{aligned} B &= -D^{-1}(L+U), \\ g &= -D^{-1}b. \end{aligned}$$

定义 (雅克比迭代格式)

给定初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T,$$

迭代序列

$$\begin{aligned} x_k &= Bx_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, 3, \cdots, \\ B &= -D^{-1}(L + U) \quad \longrightarrow \text{雅克比迭代矩阵}, \\ g &= -D^{-1}b. \end{aligned}$$

称为解$Ax = b$的雅克比迭代法。

2.2.1 雅克比迭代法

雅克比迭代的分量形式

任给$x_i^{(0)}(i=1,2,\cdots,n)$，

$$
\begin{aligned}
x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\right)\\
&= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)\\
& \quad i=1,2,\cdots,n;\ k=0,1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

Jacobi迭代

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(\quad -a_{1n}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k)} \quad - \cdots - a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2) \\
\qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} \quad + b_n)
\end{cases}
$$

Gauss-Seidel迭代

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(\quad -a_{1n}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k+1)} \quad - \cdots - a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2) \\
\qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} \quad + b_n)
\end{cases}
$$

Jacobi迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(& & -a_{1n}x_2^{(k)} & -\cdots & -a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{1n}x_n^{(k)} & +b_1) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(& -a_{21}x_1^{(k)} & & -\cdots & -a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{2n}x_n^{(k)} & +b_2) \\ & \vdots & & & & & \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(& -a_{n1}x_1^{(k)} & -a_{n2}x_2^{(k)} & -\cdots & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} & & +b_n) \end{cases}$$

Gauss-Seidel迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(& & -a_{1n}x_2^{(k)} & -\cdots & -a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{1n}x_n^{(k)} & +b_1) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(& -a_{21}x_1^{(k+1)} & & -\cdots & -a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{2n}x_n^{(k)} & +b_2) \\ & \vdots & & & & & \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(& -a_{n1}x_1^{(k+1)} & -a_{n2}x_2^{(k+1)} & -\cdots & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} & & +b_n) \end{cases}$$

上述格式的矩阵形式为

$$
\begin{aligned}
& x^{(k+1)} = -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}) + D^{-1}b \\
\xRightarrow{\text{左乘}D} \quad & Dx^{(k+1)} = -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + b \\
\xRightarrow{\text{移项}} \quad & (D+L)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b \\
\xRightarrow{\because a_{ii} \neq 0,\ \therefore |D+L| \neq 0} \quad & x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b
\end{aligned}
$$

2.2.2 高斯-赛德尔迭代

高斯-赛德尔迭代的矩阵描述

定义 (高斯-赛德尔迭代)

给定初始向量

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T,$$

迭代公式

$$\begin{aligned} x_k &= Gx_{k-1} + d_1, \quad k = 1, 2, 3, \cdots, \\ G &= -(D+L)^{-1}U \quad \to \text{高斯-赛德尔迭代矩阵}, \\ d_1 &= (D+L)^{-1}b. \end{aligned}$$

称为解$Ax = b$的*Gauss-Seidel*迭代法。

其好处是编程时存储量减少，其计算分量的次序不能改变。

2.2.2 高斯-赛德尔迭代

高斯-赛德尔迭代的矩阵描述

定义 (高斯-赛德尔迭代)

给定初始向量

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T,$$

迭代公式

$$\begin{aligned} x_k &= Gx_{k-1} + d_1, \quad k = 1, 2, 3, \cdots, \\ G &= -(D+L)^{-1}U \quad \rightarrow \text{高斯-赛德尔迭代矩阵}, \\ d_1 &= (D+L)^{-1}b. \end{aligned}$$

称为解$Ax = b$的*Gauss-Seidel*迭代法。

其好处是编程时存储量减少，其计算分量的次序不能改变。

2.2.2 高斯-赛德尔迭代

高斯-赛德尔迭代的分量形式

任给$x_i^{(0)}(i = 1, 2, \cdots, n)$，

$$
\begin{aligned}
x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\right) \\
&= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \\
& \quad i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}
$$

2.2.3 超松弛迭代法

$$Ax = b \xrightarrow{A\text{分解为}A\ =\ I-B} x = Bx + d \xrightarrow{\text{迭代格式}} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$$

由于$x^{(k)}$并非$Ax = b$的解，故$b - Ax^{(k)} \neq 0$。令

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \quad \rightarrow \text{剩余向量}$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (I - A)x^{(k)} + b = x^{(k)} + b - Ax^{(k)} \\ &= x^{(k)} + r^{(k)} \end{aligned}$$

由此可知，迭代法的新值是通过剩余向量对旧值修正而得到的。

2.2.3 超松弛迭代法

$$Ax = b \xrightarrow{A\text{分解为}A\ =\ I - B} x = Bx + d \xrightarrow{\text{迭代格式}} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$$

由于$x^{(k)}$并非$Ax = b$的解，故$b - Ax^{(k)} \neq 0$。令

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \quad \rightarrow \text{剩余向量}$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (I - A)x^{(k)} + b = x^{(k)} + b - Ax^{(k)} \\ &= x^{(k)} + r^{(k)} \end{aligned}$$

由此可知，迭代法的新值是通过剩余向量对旧值修正而得到的。

2.2.3 超松弛迭代法

$$Ax = b \xrightarrow{A\text{分解为}A\ =\ I-B} x = Bx + d \xrightarrow{\text{迭代格式}} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$$

由于$x^{(k)}$并非$Ax = b$的解，故$b - Ax^{(k)} \neq 0$。令

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \quad \rightarrow \text{剩余向量}$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (I - A)x^{(k)} + b = x^{(k)} + b - Ax^{(k)} \\ &= x^{(k)} + r^{(k)} \end{aligned}$$

由此可知，迭代法的新值是通过剩余向量对旧值修正而得到的。

2.2.3 超松弛迭代法

$$Ax = b \xRightarrow{A\text{分解为}A = I - B} x = Bx + d \xRightarrow{\text{迭代格式}} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$$

由于$x^{(k)}$并非$Ax = b$的解，故$b - Ax^{(k)} \neq 0$。令

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \quad \rightarrow \text{剩余向量}$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (I - A)x^{(k)} + b = x^{(k)} + b - Ax^{(k)} \\ &= x^{(k)} + r^{(k)} \end{aligned}$$

由此可知，迭代法的新值是通过剩余向量对旧值修正而得到的。

2.2.3 超松弛迭代法

$$Ax = b \xrightarrow{A\text{分解为}A\ =\ I-B} x = Bx + d \xrightarrow{\text{迭代格式}} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$$

由于$x^{(k)}$并非$Ax = b$的解，故$b - Ax^{(k)} \neq 0$。令

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \quad \rightarrow \text{剩余向量}$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (I-A)x^{(k)} + b = x^{(k)} + b - Ax^{(k)} \\ &= x^{(k)} + r^{(k)} \end{aligned}$$

由此可知，迭代法的新值是通过剩余向量对旧值修正而得到的。

2.2.3 超松弛迭代法

$$Ax = b \xrightarrow{A\text{分解为}A = I - B} x = Bx + d \xrightarrow{\text{迭代格式}} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$$

由于$x^{(k)}$并非$Ax = b$的解，故$b - Ax^{(k)} \neq 0$。令

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \quad \rightarrow \text{剩余向量}$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (I - A)x^{(k)} + b = x^{(k)} + b - Ax^{(k)} \\ &= x^{(k)} + r^{(k)} \end{aligned}$$

由此可知，迭代法的新值是通过剩余向量对旧值修正而得到的。

2.2.3 超松弛迭代法

$$Ax = b \xrightarrow{A\text{分解为}A\ =\ I-B} x = Bx + d \xrightarrow{\text{迭代格式}} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$$

由于$x^{(k)}$并非$Ax = b$的解，故$b - Ax^{(k)} \neq 0$。令

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \quad \rightarrow \text{剩余向量}$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (I-A)x^{(k)} + b = x^{(k)} + b - Ax^{(k)} \\ &= x^{(k)} + r^{(k)} \end{aligned}$$

由此可知，迭代法的新值是通过剩余向量对旧值修正而得到的。

2.2.3 超松弛迭代法

$$Ax = b \xrightarrow{A分解为A\ =\ I-B} x = Bx + d \xrightarrow{迭代格式} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$$

由于$x^{(k)}$并非$Ax = b$的解，故$b - Ax^{(k)} \neq 0$。令

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \quad \rightarrow 剩余向量$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (I - A)x^{(k)} + b = x^{(k)} + b - Ax^{(k)} \\ &= x^{(k)} + r^{(k)} \end{aligned}$$

由此可知，迭代法的新值是通过剩余向量对旧值修正而得到的。

2.2.3 超松弛迭代法

$$Ax = b \xRightarrow{A\text{分解为}A\ =\ I-B} x = Bx + d \xRightarrow{\text{迭代格式}} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$$

由于$x^{(k)}$并非$Ax = b$的解，故$b - Ax^{(k)} \neq 0$。令

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \quad \rightarrow \text{剩余向量}$$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (I - A)x^{(k)} + b \ = \ x^{(k)} + b - Ax^{(k)} \\ &= x^{(k)} + r^{(k)} \end{aligned}$$

由此可知，迭代法的新值是通过剩余向量对旧值修正而得到的。

2.2.3 超松弛迭代法

Jacobi松弛法（JOR）

为了加速$x^{(k+1)}$的收敛速度，可给$r^{(k)}$乘上一个适当的因子ω（松弛因子），得

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

分量形式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n; \ \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

- 该迭代法称为Jacobi松弛法（JOR），它是对Jacobi迭代法的修正。
- 只要ω选取得当，该迭代格式会更快收敛到精确解，从而达到加速收敛的目的。
- 但该格式技巧要求很高，很难掌握，且没有充分利用已经算出的分量信息，故并不常用。

2.2.3 超松弛迭代法

Jacobi松弛法（JOR）

为了加速$x^{(k+1)}$的收敛速度，可给$r^{(k)}$乘上一个适当的因子ω（松弛因子），得

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

分量形式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n; \ \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

- 该迭代法称为Jacobi松弛法（JOR），它是对Jacobi迭代法的修正。
- 只要ω选取得当，该迭代格式会更快收敛到精确解，从而达到加速收敛的目的。
- 但该格式技巧要求很高，很难掌握，且没有充分利用已经算出的分量信息，故并不常用。

2.2.3 超松弛迭代法

Jacobi松弛法（JOR）

为了加速$x^{(k+1)}$的收敛速度，可给$r^{(k)}$乘上一个适当的因子ω（松弛因子），得

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

分量形式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n; \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

- 该迭代法称为Jacobi松弛法（JOR），它是对Jacobi迭代法的修正。
- 只要ω选取得当，该迭代格式会更快收敛到精确解，从而达到加速收敛的目的。
- 但该格式技巧要求很高，很难掌握，且没有充分利用已经算出的分量信息，故并不常用。

2.2.3 超松弛迭代法

Jacobi松弛法（JOR）

为了加速$x^{(k+1)}$的收敛速度，可给$r^{(k)}$乘上一个适当的因子ω（松弛因子），得

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

分量形式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n; \ \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

- 该迭代法称为Jacobi松弛法（JOR），它是对Jacobi迭代法的修正。
- 只要ω选取得当，该迭代格式会更快收敛到精确解，从而达到加速收敛的目的。
- 但该格式技巧要求很高，很难掌握，且没有充分利用已经算出的分量信息，故并不常用。

2.2.3 超松弛迭代法

Jacobi松弛法（JOR）

为了加速$x^{(k+1)}$的收敛速度， 可给$r^{(k)}$乘上一个适当的因子ω（松弛因子）， 得

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

分量形式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n; \ \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

- 该迭代法称为Jacobi松弛法（JOR）， 它是对Jacobi迭代法的修正。
- 只要ω选取得当，该迭代格式会更快收敛到精确解，从而达到加速收敛的目的。
- 但该格式技巧要求很高，很难掌握，且没有充分利用已经算出的分量信息，故并不常用。

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

考虑到Gauss-Seidel迭代法编程简单，且已经充分利用了最新算出的分量信息，故依上述加速收敛思想，对Gauss-Seidel迭代法加以修正，便得逐次超松弛法（SOR）

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

- $\omega = 1 \quad \rightarrow$ Gauss-Seidel迭代法
- $0 < \omega < 1 \quad \rightarrow$ 低松弛迭代法（SUR）
- $\omega > 1 \quad \rightarrow$ 超松弛迭代法（SOR）

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

考虑到Gauss-Seidel迭代法编程简单，且已经充分利用了最新算出的分量信息，故依上述加速收敛思想，对Gauss-Seidel迭代法加以修正，便得逐次超松弛法（SOR）

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

- $\omega = 1 \quad \to \quad$ Gauss-Seidel迭代法
- $0 < \omega < 1 \quad \to \quad$ 低松弛迭代法（SUR）
- $\omega > 1 \quad \to \quad$ 超松弛迭代法（SOR）

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

考虑到Gauss-Seidel迭代法编程简单，且已经充分利用了最新算出的分量信息，故依上述加速收敛思想，对Gauss-Seidel迭代法加以修正，便得逐次超松弛法（SOR）

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

- $\omega = 1 \quad \rightarrow \quad$ Gauss-Seidel迭代法
- $0 < \omega < 1 \quad \rightarrow \quad$ 低松弛迭代法（SUR）
- $\omega > 1 \quad \rightarrow \quad$ 超松弛迭代法（SOR）

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

考虑到Gauss-Seidel迭代法编程简单，且已经充分利用了最新算出的分量信息，故依上述加速收敛思想，对Gauss-Seidel迭代法加以修正，便得逐次超松弛法（SOR）

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1,2,\cdots,n; \quad k = 0,1,2,\cdots$$

- $\omega = 1 \quad \rightarrow \quad$ Gauss-Seidel迭代法
- $0 < \omega < 1 \quad \rightarrow \quad$ 低松弛迭代法（SUR）
- $\omega > 1 \quad \rightarrow \quad$ 超松弛迭代法（SOR）

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

- 超松弛迭代法是解大型方程组，特别是大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一。
- 具有计算公式简单、程序设计容易、占用计算机内存单元较少等优点。
- 只要松弛因子ω选择得好，其收敛速度就会加快。

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

例

分别用*Jacobi*迭代法、*Gauss-Seidel*迭代法和*SOR*迭代法，求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- 终止条件：

$$\max|\Delta x_i| < \max|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < 10^{-5}$$

- 精确解：

$$x^\star = (1,\ -2,\ -1,\ 3)^T$$

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

解 (Jacobi)

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{1}{5}(-2 -5x_1^{(k)} -x_2^{(k)} +x_3^{(k)} +2x_4^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{1}{8}(-6 -2x_1^{(k)} -8x_2^{(k)} -x_3^{(k)} -3x_4^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{4}(6 -x_1^{(k)} +2x_2^{(k)} +4x_3^{(k)} +x_4^{(k)}) \\
x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} + \frac{1}{7}(12 +x_1^{(k)} -3x_2^{(k)} -2x_3^{(k)} -7x_4^{(k)})
\end{cases}
$$

迭代24次后，近似解为

$$x^{(24)} = (0.9999941,\ -1.9999950,\ -1.0000040,\ 2.9999990)^T$$

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

解 (Jacobi)

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x_1^{(k+1)} & = & x_1^{(k)} & +\frac{1}{5}(& -2 & -5x_1^{(k)} & -x_2^{(k)} & +x_3^{(k)} & +2x_4^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} & = & x_2^{(k)} & +\frac{1}{8}(& -6 & -2x_1^{(k)} & -8x_2^{(k)} & -x_3^{(k)} & -3x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} & = & x_3^{(k)} & -\frac{1}{4}(& 6 & -x_1^{(k)} & +2x_2^{(k)} & +4x_3^{(k)} & +x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} & = & x_4^{(k)} & +\frac{1}{7}(& 12 & +x_1^{(k)} & -3x_2^{(k)} & -2x_3^{(k)} & -7x_4^{(k)}) \end{array}\right.$$

迭代*24*次后，近似解为

$$x^{(24)} = (0.9999941,\ -1.9999950,\ -1.0000040,\ 2.9999990)^T$$

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

解 (GS)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{1}{5}(-2 -5x_1^{(k)} -x_2^{(k)} +x_3^{(k)} +2x_4^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{1}{8}(-6 -2x_1^{(k+1)} -8x_2^{(k)} -x_3^{(k)} -3x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{4}(6 -x_1^{(k+1)} +2x_2^{(k+1)} +4x_3^{(k)} +x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} + \frac{1}{7}(12 \quad x_1^{(k+1)} -3x_2^{(k+1)} -2x_3^{(k+1)} -7x_4^{(k)}) \end{cases}$$

迭代14次后，近似解为

$$x^{(14)} = (0.9999966,\ -1.9999970,\ -1.0000040,\ 2.9999990)^T$$

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

解 (GS)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{1}{5}(-2 -5x_1^{(k)} -x_2^{(k)} +x_3^{(k)} +2x_4^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{1}{8}(-6 -2x_1^{(k+1)} -8x_2^{(k)} -x_3^{(k)} -3x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{4}(6 -x_1^{(k+1)} +2x_2^{(k+1)} +4x_3^{(k)} +x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} + \frac{1}{7}(12 \quad x_1^{(k+1)} -3x_2^{(k+1)} -2x_3^{(k+1)} -7x_4^{(k)}) \end{cases}$$

迭代*14*次后，近似解为

$$x^{(14)} = (0.9999966,\ -1.9999970,\ -1.0000040,\ 2.9999990)^T$$

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

解 (SOR)

$$
\left\{
\begin{array}{lcllcccccc}
x_1^{(k+1)} & = & x_1^{(k)} & +\frac{\omega}{5}(& -2 & -5x_1^{(k)} & -x_2^{(k)} & +x_3^{(k)} & +2x_4^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} & = & x_2^{(k)} & +\frac{\omega}{8}(& -6 & -2x_1^{(k+1)} & -8x_2^{(k)} & -x_3^{(k)} & -3x_4^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} & = & x_3^{(k)} & -\frac{\omega}{4}(& 6 & -x_1^{(k+1)} & +2x_2^{(k+1)} & +4x_3^{(k)} & +x_4^{(k)}) \\
x_4^{(k+1)} & = & x_4^{(k)} & +\frac{\omega}{7}(& 12 & x_1^{(k+1)} & -3x_2^{(k+1)} & -2x_3^{(k+1)} & -7x_4^{(k)})
\end{array}
\right.
$$

取$\omega = 1.15$，迭代8次后，近似解为

$$
x^{(8)} = (0.9999965,\ -1.9999970,\ -1.0000010,\ 2.9999990)^T
$$

2.2.3 超松弛迭代法

逐次超松弛法（SOR）

解 (SOR)

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{\omega}{5}(-2 -5x_1^{(k)} -x_2^{(k)} +x_3^{(k)} +2x_4^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{\omega}{8}(-6 -2x_1^{(k+1)} -8x_2^{(k)} -x_3^{(k)} -3x_4^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{\omega}{4}(6 -x_1^{(k+1)} +2x_2^{(k+1)} +4x_3^{(k)} +x_4^{(k)}) \\
x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} + \frac{\omega}{7}(12 \quad x_1^{(k+1)} -3x_2^{(k+1)} -2x_3^{(k+1)} -7x_4^{(k)})
\end{cases}
$$

取$\omega = 1.15$，迭代8次后，近似解为

$$x^{(8)} = (0.9999965,\ -1.9999970,\ -1.0000010,\ 2.9999990)^T$$

2.2.4 迭代法的收敛性

定义

$$Ax = b \xrightarrow{\text{转换为等价方程组}} x = Mx + g \tag{2}$$

则可得到迭代格式

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

其中

$$M \in \mathbf{R}^{n\times n} \to \text{迭代矩阵}, \quad g \in \mathbf{R}^n \to \text{常数项}, \quad x_0 \in \mathbf{R}^n \to \text{初始向量}.$$

2.2.4 迭代法的收敛性

定义

$$Ax = b \xrightarrow{\text{转换为等价方程组}} x = Mx + g \tag{2}$$

则可得到迭代格式

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

其中

$$M \in \mathbf{R}^{n\times n} \to \text{迭代矩阵}, \quad g \in \mathbf{R}^{n} \to \text{常数项}, \quad x_0 \in \mathbf{R}^{n} \to \text{初始向量}.$$

若对任意初始向量，由(3)产生的迭代序列都有极限，则称该迭代法是收敛的；否则称为发散的。

2.2.4 迭代法的收敛性

定义

$$Ax = b \xrightarrow{\text{转换为等价方程组}} x = Mx + g \tag{2}$$

则可得到迭代格式

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

其中

$$M \in \mathbf{R}^{n\times n} \to \text{迭代矩阵}, \quad g \in \mathbf{R}^n \to \text{常数项}, \quad x_0 \in \mathbf{R}^n \to \text{初始向量}.$$

- 雅克比迭代

$$M = -D^{-1}(L + U), \quad g = D^{-1}b$$

- 高斯-赛德尔迭代

$$M = -(D + L)^{-1}U, \quad g = (D + L)^{-1}b$$

称

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$$

为x_*的误差向量，有

$$e^{(k+1)} = Me^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

$$\Rightarrow \quad e^{(k)} = M^k e^{(0)}.$$

由此可知

推论

迭代法*(3)*收敛的充分必要条件是

$$M^k \to 0.$$

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分必要条件

引理

$$M^k \to 0 \iff \rho(M) < 1$$

定理

迭代法(3)收敛的充分必要条件是

$$\rho(M) < 1$$

迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半径，而与初始向量的选取和常数项无关。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分必要条件

引理

$$M^k \to 0 \iff \rho(M) < 1$$

定理

迭代法(3)收敛的充分必要条件是

$$\rho(M) < 1$$

迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半径，而与初始向量的选取和常数项无关。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分必要条件

引理

$$M^k \to 0 \iff \rho(M) < 1$$

定理

迭代法(3)收敛的充分必要条件是

$$\rho(M) < 1$$

迭代序列收敛取决于迭代矩阵的谱半径，而与初始向量的选取和常数项无关。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分条件

- 用谱半径来判断迭代格式是否收敛，显然是不方便的，因为计算迭代矩阵的谱半径是非常困难的。
- 目标：

  给出一些方便的判别条件，也就是一些比较容易计算的条件。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分条件

- 用谱半径来判断迭代格式是否收敛，显然是不方便的，因为计算迭代矩阵的谱半径是非常困难的。
- 目标：

  给出一些方便的判别条件，也就是一些比较容易计算的条件。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分条件

定理

对于迭代格式

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

若$\|M\| < 1$，则该迭代格式收敛，且

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\|M\|^k}{1 - \|M\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \tag{4}$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{1}{1 - \|M\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|. \tag{5}$$

- 由(4)可计算出要得到满足精度要求的近似解需要迭代多少次，但实际计算时用它控制并不方便。
- 由(5)知，可从相邻近似值的差来判别迭代法是否应该终止，这对实际计算是非常好用的。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分条件

定理

对于迭代格式

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

若$\|M\| < 1$，则该迭代格式收敛，且

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\|M\|^k}{1 - \|M\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \tag{4}$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{1}{1 - \|M\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|. \tag{5}$$

- 由(4)可计算出要得到满足精度要求的近似解需要迭代多少次，但实际计算时用它控制并不方便。
- 由(5)知，可从相邻近似值的差来判别迭代法是否应该终止，这对实际计算是非常好用的。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分条件

定理

对于迭代格式

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

若$\|M\| < 1$，则该迭代格式收敛，且

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|M\|^k}{1 - \|M\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \tag{4}$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|. \tag{5}$$

- 由(4)可计算出要得到满足精度要求的近似解需要迭代多少次，但实际计算时用它控制并不方便。
- 由(5)知，可从相邻近似值的差来判别迭代法是否应该终止，这对实际计算是非常好用的。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分条件

注

- 用$\|M\| < 1$作为收敛性的判别是方便的，但要注意这只是一个充分条件。

例

$$x = Mx + d, \quad M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|M\|_1 = 1.3, \quad \|M\|_2 = 1.09, \quad \|M\|_\infty = 1.2$$

虽然这些范数都大于1，但M的特征值为$\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 0.7$，即$\rho(M) = 0.8$，于是此方程组的迭代法是收敛的。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分条件

注

- 用$\|M\| < 1$作为收敛性的判别是方便的，但要注意这只是一个充分条件。

例

$$x = Mx + d, \quad M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|M\|_1 = 1.3, \quad \|M\|_2 = 1.09, \quad \|M\|_\infty = 1.2$$

虽然这些范数都大于1，但M的特征值为$\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 0.7$，即$\rho(M) = 0.8$，于是此方程组的迭代法是收敛的。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分条件

注

- 用$\|M\| < 1$作为收敛性的判别是方便的，但要注意这只是一个充分条件。

例

$$x = Mx + d, \quad M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|M\|_1 = 1.3, \quad \|M\|_2 = 1.09, \quad \|M\|_\infty = 1.2$$

虽然这些范数都大于1，但M的特征值为$\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 0.7$，即$\rho(M) = 0.8$，于是此方程组的迭代法是收敛的。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分条件

注

- 用$\|M\| < 1$作为收敛性的判别是方便的，但要注意这只是一个充分条件。

例

$$x = Mx + d, \quad M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|M\|_1 = 1.3, \quad \|M\|_2 = 1.09, \quad \|M\|_\infty = 1.2$$

虽然这些范数都大于1，但M的特征值为$\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 0.7$，即$\rho(M) = 0.8$，于是此方程组的迭代法是收敛的。

注

- 常用1范数和∞范数来进行判定。
- 对雅克比迭代而言，上述判别法基本令人满意，因为雅克比迭代矩阵比较容易得到。
- 对高斯-赛德尔迭代而言，因为高斯-赛德尔迭代矩阵不那么好计算，故上述判别法不是那么方便。

2.2.4 迭代法的收敛性

一般线性迭代法收敛的充分条件

注

- 常用1范数和∞范数来进行判定。
- 对雅克比迭代而言，上述判别法基本令人满意，因为雅克比迭代矩阵比较容易得到。
- 对高斯-赛德尔迭代而言，因为高斯-赛德尔迭代矩阵不那么好计算，故上述判别法不是那么方便。

注

- 常用1范数和∞范数来进行判定。
- 对雅克比迭代而言，上述判别法基本令人满意，因为雅克比迭代矩阵比较容易得到。
- 对高斯-赛德尔迭代而言，因为高斯-赛德尔迭代矩阵不那么好计算，故上述判别法不是那么方便。

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵

定义 (严格对角占优矩阵)

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若A满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |a_{ij}|, \quad i=1,2,\cdots,n,$$

即A的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行的其他元素的绝对值之和，则称A为严格对角占优矩阵。

例

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵

定义 (严格对角占优矩阵)

设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，若A满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

即A的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行的其他元素的绝对值之和，则称A为严格对角占优矩阵。

例

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵

定理

严格对角占优矩阵必非奇异

证明.

用反证法。若$|A| = 0$，则$Ax = 0$有非零解，记为$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，且记$x_k = \max_i |x_i| \neq 0$。于是由$Ax = 0$的第$k$个方程$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0$可得

$$|a_{kk}x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n a_{kj}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n |a_{kj}|$$

即

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n |a_{kj}|,$$

这与A严格对角占优矛盾，故$|A| \neq 0$，即A非奇异。 □

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵

定理

严格对角占优矩阵必非奇异

证明.

用反证法。若$|A| = 0$，则$Ax = 0$有非零解，记为$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，且记$x_k = \max_i |x_i| \neq 0$。于是由$Ax = 0$的第$k$个方程$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0$可得

$$|a_{kk}x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n a_{kj}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n |a_{kj}|$$

即

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n |a_{kj}|,$$

这与A严格对角占优矛盾，故$|A| \neq 0$，即A非奇异。 □

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵

定理

严格对角占优矩阵必非奇异

证明.

用反证法。若$|A| = 0$，则$Ax = 0$有非零解，记为$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，且记$x_k = \max_i |x_i| \neq 0$。于是由$Ax = 0$的第$k$个方程$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0$可得

$$|a_{kk}x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n a_{kj}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n |a_{kj}|$$

即

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n |a_{kj}|,$$

这与A严格对角占优矛盾，故$|A| \neq 0$，即A非奇异。 □

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵

定理

严格对角占优矩阵必非奇异

证明.

用反证法。若$|A| = 0$，则$Ax = 0$有非零解，记为$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，且记$x_k = \max_i |x_i| \neq 0$。于是由$Ax = 0$的第$k$个方程$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0$可得

$$|a_{kk}x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n a_{kj}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n |a_{kj}||x_j| \leq |x_k|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n |a_{kj}|$$

即

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n |a_{kj}|,$$

这与A严格对角占优矛盾，故$|A| \neq 0$，即A非奇异。 □

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵

定理

严格对角占优矩阵必非奇异

证明.

用反证法。若$|A| = 0$，则$Ax = 0$有非零解，记为$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，且记$x_k = \max_i |x_i| \neq 0$。于是由$Ax = 0$的第$k$个方程$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0$可得

$$|a_{kk}x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n a_{kj}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n |a_{kj}|$$

即

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n |a_{kj}|,$$

这与A严格对角占优矛盾，故$|A| \neq 0$，即A非奇异。 □

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵

定理

严格对角占优矩阵必非奇异

证明.

用反证法。若$|A| = 0$，则$Ax = 0$有非零解，记为$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，且记$x_k = \max\limits_i |x_i| \neq 0$。于是由$Ax = 0$的第$k$个方程$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0$可得

$$|a_{kk}x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n a_{kj}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n |a_{kj}|$$

即

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n |a_{kj}|,$$

这与A严格对角占优矛盾，故$|A| \neq 0$，即A非奇异。 □

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵的雅克比和高斯-赛德尔迭代法

定理

对于严格对角占优矩阵，雅克比和高斯-赛德尔迭代法均收敛。

注

之前所涉及的收敛性条件都是针对迭代矩阵M的，而该定理的收敛性条件只需检验A本身的严格对角占优性，显然这个条件更简单。

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵的雅克比和高斯-赛德尔迭代法

定理

对于严格对角占优矩阵，雅克比和高斯-赛德尔迭代法均收敛。

注

之前所涉及的收敛性条件都是针对迭代矩阵M的，而该定理的收敛性条件只需检验A本身的严格对角占优性，显然这个条件更简单。

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵的雅克比和高斯-赛德尔迭代法

证明

- 先证雅克比迭代法收敛

$$A\text{严格对角占优} \implies |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} |a_{ij}| \quad (\forall i) \implies \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \quad (\forall i)$$

而雅克比迭代矩阵为$B = -D^{-1}(L+U)$，由此得

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

由前述定理知解$Ax = b$的雅克比迭代法收敛。

证明

- 先证雅克比迭代法收敛

$$A\text{严格对角占优} \Longrightarrow |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} |a_{ij}| \quad (\forall i) \Longrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \quad (\forall i)$$

而雅克比迭代矩阵为$B = -D^{-1}(L+U)$，由此得

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

由前述定理知解$Ax = b$的雅克比迭代法收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵的雅克比和高斯-赛德尔迭代法

证明

- 先证雅克比迭代法收敛

$$A\text{严格对角占优} \Longrightarrow |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} |a_{ij}| \quad (\forall i) \Longrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \quad (\forall i)$$

而雅克比迭代矩阵为$B = -D^{-1}(L+U)$，由此得

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

由前述定理知解$Ax = b$的雅克比迭代法收敛。

证明

- 先证雅克比迭代法收敛

$$A\text{严格对角占优} \Longrightarrow |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} |a_{ij}| \quad (\forall i) \Longrightarrow \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \quad (\forall i)$$

而雅克比迭代矩阵为$B = -D^{-1}(L+U)$，由此得

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

由前述定理知解$Ax = b$的雅克比迭代法收敛。

证明

- 先证雅克比迭代法收敛

$$A\text{严格对角占优} \Longrightarrow |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} |a_{ij}| \quad (\forall i) \Longrightarrow \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \quad (\forall i)$$

而雅克比迭代矩阵为$B = -D^{-1}(L+U)$，由此得

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

由前述定理知解$Ax = b$的雅克比迭代法收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵的雅克比和高斯-赛德尔迭代法

证明

- 先证雅克比迭代法收敛

$$A\text{严格对角占优} \Longrightarrow |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |a_{ij}| \quad (\forall i) \Longrightarrow \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \quad (\forall i)$$

而雅克比迭代矩阵为$B = -D^{-1}(L+U)$，由此得

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

由前述定理知解$Ax = b$的雅克比迭代法收敛。

证明

- 先证雅克比迭代法收敛

$$A\text{严格对角占优} \implies |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} |a_{ij}| \quad (\forall i) \implies \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \quad (\forall i)$$

而雅克比迭代矩阵为$B = -D^{-1}(L+U)$，由此得

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

由前述定理知解$Ax = b$的雅克比迭代法收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵的雅克比和高斯-赛德尔迭代法

证明

- 再证高斯-赛德尔迭代法收敛

高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵为$G=-(D+L)^{-1}U$，考察其特征值

$$|\lambda I-G| = |\lambda I+(D+L)^{-1}U| = |(D+L)^{-1}|\cdot|\lambda(D+L)+U|=0$$

由于$|(D+L)^{-1}|\neq 0$，于是 $|\lambda(D+L)+U|=0.$ 记

$$C=\lambda(D+L)+U=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn}\end{bmatrix}$$

下证当$|\lambda|\geq 1$时，$|C|\neq 0$。若该结论成立，则$|C|=0$的根均满足$|\lambda|<1$，亦即$\rho(G)<1$，从而高斯-赛德尔迭代法收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵的雅克比和高斯-赛德尔迭代法

证明

- 再证高斯-赛德尔迭代法收敛

  高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵为$G = -(D+L)^{-1}U$，考察其特征值

$$|\lambda I - G| = |\lambda I + (D+L)^{-1}U| = |(D+L)^{-1}| \cdot |\lambda(D+L)+U| = 0$$

由于$|(D+L)^{-1}| \neq 0$，于是 $|\lambda(D+L)+U| = 0$. 记

$$C = \lambda(D+L)+U = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

下证当$|\lambda| \geq 1$时，$|C| \neq 0$。若该结论成立，则$|C| = 0$的根均满足$|\lambda| < 1$，亦即$\rho(G) < 1$，从而高斯-赛德尔迭代法收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

严格对角占优矩阵的雅克比和高斯-赛德尔迭代法

证明

- 再证高斯-赛德尔迭代法收敛

  高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵为$G=-(D+L)^{-1}U$，考察其特征值

$$|\lambda I-G| \;=\; |\lambda I+(D+L)^{-1}U| \;=\; |(D+L)^{-1}|\cdot|\lambda(D+L)+U|=0$$

由于$|(D+L)^{-1}|\neq 0$，于是$|\lambda(D+L)+U|=0.$ 记

$$C=\lambda(D+L)+U=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn}\end{bmatrix}$$

下证当$|\lambda|\geq 1$时，$|C|\neq 0$。若该结论成立，则$|C|=0$的根均满足$|\lambda|<1$，亦即$\rho(G)<1$，从而高斯-赛德尔迭代法收敛。

证明

- 再证高斯-赛德尔迭代法收敛

  高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵为$G = -(D+L)^{-1}U$，考察其特征值

$$|\lambda I - G| = |\lambda I + (D+L)^{-1}U| = |(D+L)^{-1}| \cdot |\lambda(D+L) + U| = 0$$

由于$|(D+L)^{-1}| \neq 0$，于是 $|\lambda(D+L)+U| = 0$. 记

$$C = \lambda(D+L) + U = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

下证当$|\lambda| \geq 1$时，$|C| \neq 0$。若该结论成立，则$|C| = 0$的根均满足$|\lambda| < 1$，亦即$\rho(G) < 1$，从而高斯-赛德尔迭代法收敛。

证明

- 再证高斯-赛德尔迭代法收敛

  高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵为$G = -(D+L)^{-1}U$，考察其特征值

$$|\lambda I - G| = |\lambda I + (D+L)^{-1}U| = |(D+L)^{-1}| \cdot |\lambda(D+L) + U| = 0$$

由于$|(D+L)^{-1}| \neq 0$，于是 $|\lambda(D+L) + U| = 0$. 记

$$C = \lambda(D+L) + U = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

下证当$|\lambda| \geq 1$时，$|C| \neq 0$。若该结论成立，则$|C| = 0$的根均满足$|\lambda| < 1$，亦即$\rho(G) < 1$，从而高斯-赛德尔迭代法收敛。

证明.

- 再证高斯-赛德尔迭代法收敛（续）

事实上，由于A严格对角占优，故

$$|\lambda| \cdot |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} |\lambda| \cdot |a_{ij}| \quad (\forall i)$$

当$\lambda \geq 1$时，

$$|\lambda| \cdot |a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda| \cdot |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \quad (\forall i)$$

这说明矩阵C严格对角占优，从而$|C| \neq 0$。

□

证明.

- 再证高斯-赛德尔迭代法收敛（续）

  事实上，由于A严格对角占优，故

$$|\lambda| \cdot |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |\lambda| \cdot |a_{ij}| \quad (\forall i)$$

当$\lambda \geq 1$时，

$$|\lambda| \cdot |a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda| \cdot |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \quad (\forall i)$$

这说明矩阵C严格对角占优，从而$|C| \neq 0$。

□

证明.

- 再证高斯-赛德尔迭代法收敛（续）

  事实上，由于A严格对角占优，故

$$|\lambda| \cdot |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |\lambda| \cdot |a_{ij}| \quad (\forall i)$$

  当$\lambda \geq 1$时，

$$|\lambda| \cdot |a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda| \cdot |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \quad (\forall i)$$

  这说明矩阵C严格对角占优，从而$|C| \neq 0$。

□

2.2.4 迭代法的收敛性

对称正定矩阵的高斯-赛德尔迭代法

定理

对于对称正定矩阵，高斯-赛德尔迭代法均收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

超松弛迭代法收敛的必要条件

定理

$$\text{超松弛迭代法收敛} \implies 0 < \omega < 2.$$

注

该定理给出了超松弛迭代法收敛的必要条件，即只有松弛因子ω在$(0,2)$内选取时，超松弛迭代法才可能收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

超松弛迭代法收敛的必要条件

定理

$$\text{超松弛迭代法收敛} \implies 0 < \omega < 2.$$

注

该定理给出了超松弛迭代法收敛的必要条件，即只有松弛因子ω在$(0,2)$内选取时，超松弛迭代法才可能收敛。

对于对称正定矩阵，可证当$\omega \in (0,2)$时，超松弛迭代法一定收敛。

定理

若$Ax = b$的系数矩阵A为对称正定矩阵，且$0 < \omega < 2$，则解此方程组的超松弛迭代法收敛。

对于对称正定矩阵，可证当$\omega \in (0, 2)$时，超松弛迭代法一定收敛。

定理

若$Ax = b$的系数矩阵A为对称正定矩阵，且$0 < \omega < 2$，则解此方程组的超松弛迭代法收敛。

1 从理论上讲，迭代法可以得到任意精度要求的近似解，但受机器字长的限制，不可能达到任意的精度，最多只能达到机器精度。

于是，在使用误差估计式

$$\max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \epsilon$$

来控制迭代终止时，精度要求ϵ要选择适当，小于或接近机器精度，都可能造成死循环。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

1 从理论上讲，迭代法可以得到任意精度要求的近似解，但受机器字长的限制，不可能达到任意的精度，最多只能达到机器精度。

于是，在使用误差估计式

$$\max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \epsilon$$

来控制迭代终止时，精度要求ϵ要选择适当，小于或接近机器精度，都可能造成死循环。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

2 当所给的方程组不满足迭代法的收敛条件时，适当调整方程组中方程的次序或做一定的线性组合，即可得到满足迭代法收敛条件的同解方程组。

例

对于线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} M_J = \begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ -8/3 & 0 \end{bmatrix} & \rightarrow \quad \rho(M_J) = 3.4641 > 1 \\ M_G = \begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} & \rightarrow \quad \rho(M_G) = 12 > 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow Jacobi\text{和}G\text{-}S\text{迭代均不收敛}$$

交换两个方程的次序，得

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，从而雅克比和高斯-赛德尔迭代均收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

2 当所给的方程组不满足迭代法的收敛条件时，适当调整方程组中方程的次序或做一定的线性组合，即可得到满足迭代法收敛条件的同解方程组。

例

对于线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_J = \begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ -8/3 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \rho(M_J) = 3.4641 > 1 \\ M_G = \begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \rho(M_G) = 12 > 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{Jacobi}\text{和}\textit{G-S}\text{迭代均不收敛}$$

交换两个方程的次序，得

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，从而雅克比和高斯-赛德尔迭代均收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

2 当所给的方程组不满足迭代法的收敛条件时，适当调整方程组中方程的次序或做一定的线性组合，即可得到满足迭代法收敛条件的同解方程组。

例

对于线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_J = \begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ -8/3 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \rho(M_J) = 3.4641 > 1 \\ M_G = \begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \rho(M_G) = 12 > 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Jacobi和G-S迭代均不收敛}$$

交换两个方程的次序，得

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，从而雅克比和高斯-赛德尔迭代均收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

2 当所给的方程组不满足迭代法的收敛条件时，适当调整方程组中方程的次序或做一定的线性组合，即可得到满足迭代法收敛条件的同解方程组。

例

对于线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_J=\begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ -8/3 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \rho(M_J)=3.4641>1 \\ M_G=\begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \rho(M_G)=12>1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{Jacobi}\text{和}\textit{G-S}\text{迭代均不收敛}$$

交换两个方程的次序，得

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，从而雅克比和高斯-赛德尔迭代均收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

2 当所给的方程组不满足迭代法的收敛条件时，适当调整方程组中方程的次序或做一定的线性组合，即可得到满足迭代法收敛条件的同解方程组。

例

对于线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} M_J = \begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ -8/3 & 0 \end{bmatrix} & \to \quad \rho(M_J) = 3.4641 > 1 \\ M_G = \begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} & \to \quad \rho(M_G) = 12 > 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow Jacobi\text{和}G\text{-}S\text{迭代均不收敛}$$

交换两个方程的次序，得

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，从而雅克比和高斯-赛德尔迭代均收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

2 当所给的方程组不满足迭代法的收敛条件时，适当调整方程组中方程的次序或做一定的线性组合，即可得到满足迭代法收敛条件的同解方程组。

例

对于线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lll} M_J=\begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ -8/3 & 0 \end{bmatrix} & \rightarrow & \rho(M_J)=3.4641>1 \\ M_G=\begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} & \rightarrow & \rho(M_G)=12>1 \end{array}\right\} \Longrightarrow Jacobi\text{和}G\text{-}S\text{迭代均不收敛}$$

交换两个方程的次序，得

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，从而雅克比和高斯-赛德尔迭代均收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

2 当所给的方程组不满足迭代法的收敛条件时，适当调整方程组中方程的次序或做一定的线性组合，即可得到满足迭代法收敛条件的同解方程组。

例

对于线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} M_J = \begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ -8/3 & 0 \end{bmatrix} & \rightarrow \quad \rho(M_J) = 3.4641 > 1 \\ M_G = \begin{bmatrix} 0 & -9/2 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} & \rightarrow \quad \rho(M_G) = 12 > 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{Jacobi}\text{和}\textit{G-S}\text{迭代均不收敛}$$

交换两个方程的次序，得

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，从而雅克比和高斯-赛德尔迭代均收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

例

对于线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_2 = 0 & (1) \\ -11x_1 + 8x_2 + x_3 = 21 & (2) \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 & (3) \end{cases} \xRightarrow[(3)+(1)]{(2)+(1)\times 2} \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_2 = 0 & (1) \\ -x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 21 & (2) \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 8 & (3) \end{cases}$$

后者的系数矩阵严格对角占优，从而雅克比和高斯-赛德尔迭代均收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

例

对于线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_2 = 0 & (1) \\ -11x_1 + 8x_2 + x_3 = 21 & (2) \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 & (3) \end{cases} \xRightarrow[(3)+(1)]{(2)+(1)\times 2} \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_2 = 0 & (1) \\ -x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 21 & (2) \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 8 & (3) \end{cases}$$

后者的系数矩阵严格对角占优，从而雅克比和高斯-赛德尔迭代均收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

例

对于线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_2 = 0 & (1) \\ -11x_1 + 8x_2 + x_3 = 21 & (2) \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 & (3) \end{cases} \xrightarrow[(3)+(1)]{(2)+(1)\times 2} \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_2 = 0 & (1) \\ -x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 21 & (2) \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 8 & (3) \end{cases}$$

后者的系数矩阵严格对角占优，从而雅克比和高斯-赛德尔迭代均收敛。

2.2.4 迭代法的收敛性

迭代法的一些注解

例

对于线性方程组

$$\left\{\begin{aligned} 5x_1+x_2+2x_2&=0 \quad &(1)\\ -11x_1+8x_2+x_3&=21 \quad &(2)\\ -4x_1-2x_2+3x_3&=8 \quad &(3)\end{aligned}\right. \xRightarrow[(3)+(1)]{(2)+(1)\times 2} \left\{\begin{aligned} 5x_1+x_2+2x_2&=0 \quad &(1)\\ -x_1+10x_2+5x_3&=21 \quad &(2)\\ x_1-x_2+5x_3&=8 \quad &(3)\end{aligned}\right.$$

后者的系数矩阵严格对角占优，从而雅克比和高斯-赛德尔迭代均收敛。

2.3 小结

本章讨论了线性方程组的两类解法

- 直接法
- 迭代法

2.3 小结

直接法

- 直接法的重点是高斯列主元消去法及其三角分解法。

  引进选列主元的技巧是为了控制计算过程中舍入误差的增加，减少舍入误差的影响。

- 列主元消去法是数值稳定的算法。
  - 优点：
    精确度较高、计算量不大和算法容易组织
  - 适用范围：
    中、小型稠密矩阵方程组

2.3 小结

直接法

- 直接法的重点是高斯列主元消去法及其三角分解法。

  引进选列主元的技巧是为了控制计算过程中舍入误差的增加，减少舍入误差的影响。

- 列主元消去法是数值稳定的算法。
  - 优点：
    精确度较高、计算量不大和算法容易组织
  - 适用范围：
    中、小型稠密矩阵方程组

2.3 小结

直接法

实际应用中，特殊类型的方程组可用特殊方法求解。如

- 三对角矩阵方程组(A的对角元占优)可用追赶法求解
- 对称正定矩阵方程组可用平方根法求解

这些方法都是数值稳定的，即使不选主元也有较高的精度。

2.3 小结

直接法

实际应用中，特殊类型的方程组可用特殊方法求解。如

- 三对角矩阵方程组(A的对角元占优)可用追赶法求解
- 对称正定矩阵方程组可用平方根法求解

这些方法都是数值稳定的，即使不选主元也有较高的精度。

实际应用中，特殊类型的方程组可用特殊方法求解。如

- 三对角矩阵方程组(A的对角元占优)可用追赶法求解
- 对称正定矩阵方程组可用平方根法求解

这些方法都是数值稳定的，即使不选主元也有较高的精度。

实际应用中，特殊类型的方程组可用特殊方法求解。如

- 三对角矩阵方程组(A的对角元占优)可用追赶法求解
- 对称正定矩阵方程组可用平方根法求解

这些方法都是数值稳定的，即使不选主元也有较高的精度。

2.3 小结

迭代法

本章主要介绍了三种迭代法

- 雅克比迭代法
- 高斯-赛德尔迭代法
- 超松弛迭代法

2.3 小结

迭代法

迭代法是数值求解线性方程组的常用方法。

- 优点：

  计算公式简单、程序设计容易、占用计算机内存较少、容易上机实现等

- 适用范围：

  大型、稀疏矩阵方程组

- 超松弛迭代法在实际中比较重要，但要选择好松弛因子，才能加快收敛速度。

2.3 小结

迭代法

迭代法是数值求解线性方程组的常用方法。

- 优点：

  计算公式简单、程序设计容易、占用计算机内存较少、容易上机实现等

- 适用范围：

  大型、稀疏矩阵方程组

- 超松弛迭代法在实际中比较重要，但要选择好松弛因子，才能加快收敛速度。

2.3 小结

迭代法是数值求解线性方程组的常用方法。

- 优点：

  计算公式简单、程序设计容易、占用计算机内存较少、容易上机实现等

- 适用范围：

  大型、稀疏矩阵方程组

- 超松弛迭代法在实际中比较重要，但要选择好松弛因子，才能加快收敛速度。

2.3 小结

迭代法

迭代法是数值求解线性方程组的常用方法。

- 优点：

  计算公式简单、程序设计容易、占用计算机内存较少、容易上机实现等
- 适用范围：

  大型、稀疏矩阵方程组
- 超松弛迭代法在实际中比较重要，但要选择好松弛因子，才能加快收敛速度。

练习 (1)

用高斯变换法和杜立特尔分解求解方程组：

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

练习 (2)

用平方根法求解方程组：

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

练习 (3)

用追赶法求解方程组：

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & \\ 1 & 5 & 1 \\ & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix}$$

练习 (4)

设有方程组：

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(1) 证明用雅克比迭代法与高速-赛德尔迭代法解此方程组均收敛

(2) 取初始向量$x^{(0)} = (-3, 1, 1)^T$，分别用雅克比迭代法与高速-赛德尔迭代法求解， 要求$\max\limits_{1\le i\le 3} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le 10^{-3}$时终止迭代。

练习 (5)

设方程组$Ax = b$的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

证明用雅克比迭代法不收敛，而用高速-赛德尔迭代法收敛。

练习 (6)

求证矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

当$-0.5 < a < 1$时正定；当$-0.5 < a < 0$时用雅克比迭代法解$Ax = b$收敛。