# 数值计算方法

## 非线性方程的数值解法

张晓平

2019 年 10 月 28 日

武汉大学数学与统计学院

# Table of contents

**例**

求代数方程

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

及超越方程

$$e^{-x} - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

的解。

**例**

求代数方程

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

及超越方程

$$e^{-x} - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

的解。

**定理**

高于 4 次的代数方程无精确的求根公式。

# 二分法

# 二分法

用数值方法求方程的根，必须知道方程的根所在的区间。

**定义：隔根区间**

对方程 $f(x)=0$，若在区间 $[a,b]$ 内有且只有一个根，则称 $[a,b]$ 为它的一个隔根区间。

# 二分法

**二分法的基本思想**

通过计算隔根区间的中点，逐步将隔根区间缩小，从而可得方程的近似根数列 $\{x_n\}$。

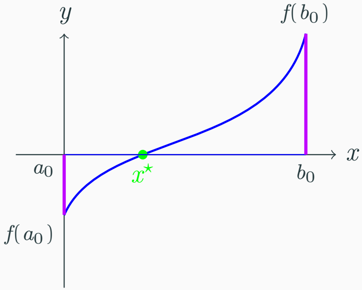
# 二分法

**二分法的基本思想**

通过计算隔根区间的中点，逐步将隔根区间缩小，从而可得方程的近似根数列 $\{x_n\}$。

设 $f(x) = 0$ 的隔根区间是 $[a, b]$，且 $f(a) < 0$，$f(b) > 0$。

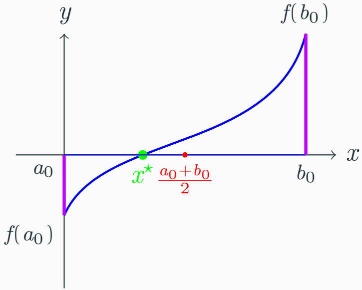
# 二分法




(1) 计算 $f(\frac{a_0+b_0}{2})$:

- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_0+b_0}{2}$就是$f(x) = 0$的根
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$

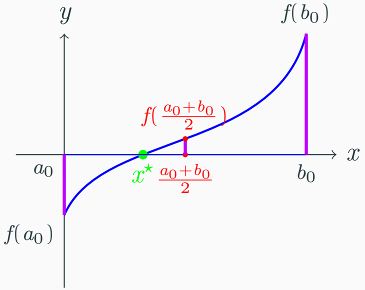
# 二分法




(1) 计算 $f(\frac{a_0+b_0}{2})$:

- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_0+b_0}{2}$就是$f(x) = 0$的根
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$

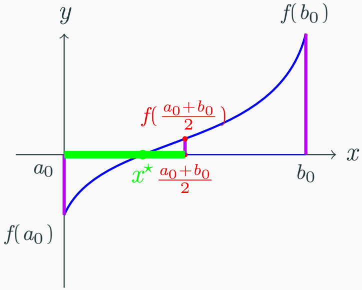
# 二分法




(1) 计算 $f(\frac{a_0+b_0}{2})$:

- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_0+b_0}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为 $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为 $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$

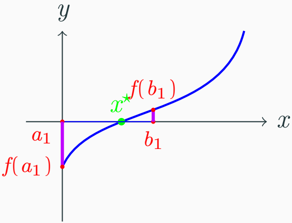
# 二分法




(1) 计算 $f(\frac{a_0+b_0}{2})$:

- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_0+b_0}{2}$就是$f(x) = 0$的根
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$
- $f(\frac{a_0+b_0}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$

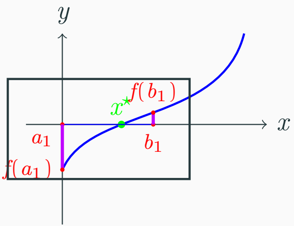
# 二分法




(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$，计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$:

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$就是$f(x) = 0$的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

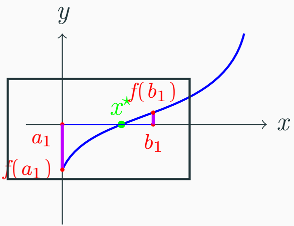
# 二分法

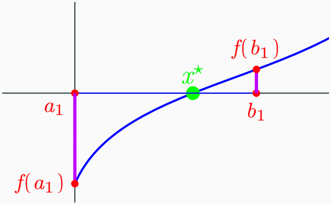



(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$，计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$:

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$就是$f(x) = 0$的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

# 二分法

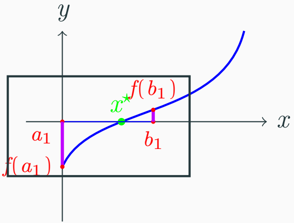


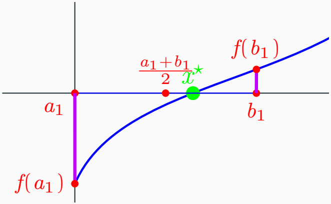




(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$，计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$:

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$就是$f(x) = 0$的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

# 二分法

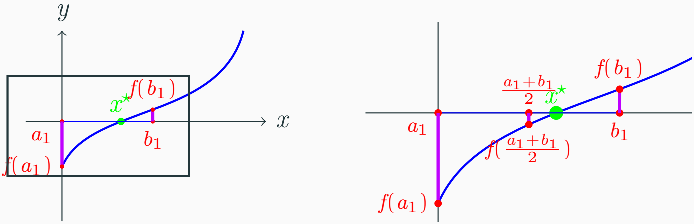



(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$，计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$:

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$就是$f(x) = 0$的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

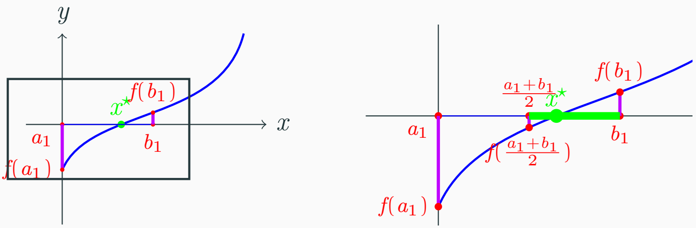
# 二分法




(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$，计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$:

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$就是$f(x) = 0$的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

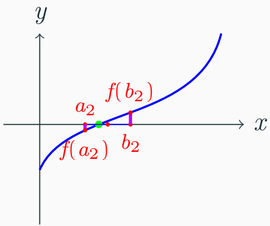
# 二分法




(2) 将新的隔根区间记为 $[a_1, b_1]$，计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$:

- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_1+b_1}{2}$就是$f(x) = 0$的根
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

# 二分法



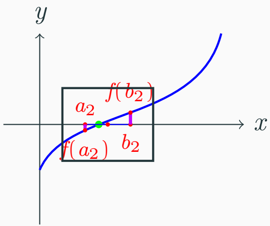

(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$，计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$:

1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$就是$f(x) = 0$的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

# 二分法

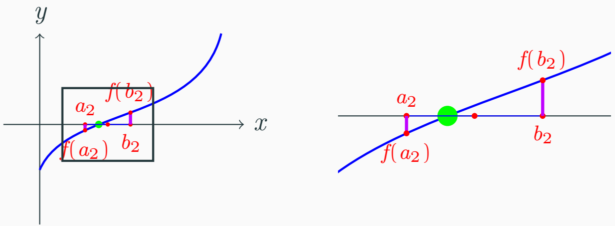



(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$，计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$:

1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$ 就是 $f(x) = 0$ 的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为 $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为 $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$



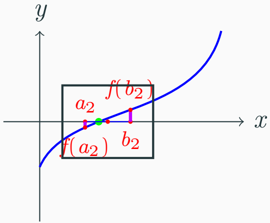

(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$，计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$:

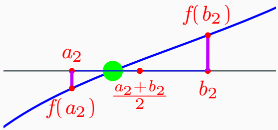
1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$就是$f(x) = 0$的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

# 二分法



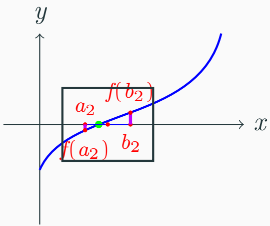

(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$，计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$:

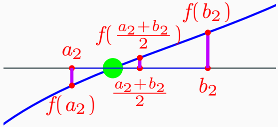
1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$就是$f(x) = 0$的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \quad \Longrightarrow$ 隔根区间为$[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \quad \Longrightarrow$ 隔根区间为$[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

# 二分法



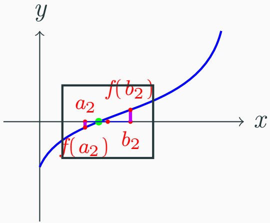

(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$，计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$:

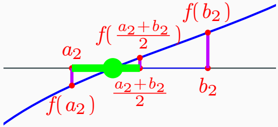
1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \implies x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$就是$f(x) = 0$的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \implies$ 隔根区间为$[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \implies$ 隔根区间为$[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

# 二分法




(3) 将新的隔根区间记为 $[a_2, b_2]$，计算 $f(\frac{a_2+b_2}{2})$:

1 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^* = \frac{a_2+b_2}{2}$就是$f(x) = 0$的根

2 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < 0 \quad \Longrightarrow$ 隔根区间为$[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$

3 $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > 0 \quad \Longrightarrow$ 隔根区间为$[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$

# 二分法

重复上述过程，可得到一系列的隔根区间

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

并有 $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$, $x^* \in (a_k, b_k)$，且后一区间的长度都是前一区间长度的一半，即

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{b - a}{2^k}$$

# 二分法

重复上述过程，可得到一系列的隔根区间

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

并有 $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$， $x^* \in (a_k, b_k)$，且后一区间的长度都是前一区间长度的一半，即

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{b - a}{2^k} \to 0, \quad k \to \infty.$$

# 二分法

重复上述过程，可得到一系列的隔根区间

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

并有 $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0, \quad x^* \in (a_k, b_k)$，且后一区间的长度都是前一区间长度的一半，即

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{b-a}{2^k} \to 0, \quad k \to \infty.$$

即这些区间最终收缩于一点 $x^*$，显然 $x^*$ 就是方程 $f(x) = 0$ 的根。

# 二分法

实际计算时，只要二分的次数 $n$ 足够大，就可取最后区间的中点 $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ 作为方程 $f(x) = 0$ 的近似值，即

$$x^* \approx \frac{a_k + b_k}{2}.$$

# 二分法

实际计算时，只要二分的次数 $n$ 足够大，就可取最后区间的中点 $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ 作为方程 $f(x) = 0$ 的近似值，即

$$x^* \approx \frac{a_k + b_k}{2}.$$

此时所产生的误差为

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

# 二分法

实际计算时，只要二分的次数 $n$ 足够大，就可取最后区间的中点 $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ 作为方程 $f(x)=0$ 的近似值，即

$$x^* \approx \frac{a_k+b_k}{2}.$$

此时所产生的误差为

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

若事先给定的精度要求为 $\epsilon$，则只需

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}} < \epsilon$$

便可停止计算。

**例**

用二分法求方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1, 2]$ 内的根的近似解，要求绝对误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-2}$

**例**

用二分法求方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在 $[1,2]$ 内的根的近似解，要求绝对误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-2}$

**解**

在 $[1,2]$ 上，

$$f'(x)=3x^2+4x>0,$$

故 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上严格单调增加，且 $f(1)<0$，$f(2)>0$，所以方程在 $[1,2]$ 内有惟一实根。

**例**

用二分法求方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在 $[1,2]$ 内的根的近似解，要求绝对误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-2}$

**解**

在 $[1,2]$ 上，

$$f'(x)=3x^2+4x>0,$$

故 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上严格单调增加，且 $f(1)<0$，$f(2)>0$，所以方程在 $[1,2]$ 内有惟一实根。令 $\frac{b-a}{2^{k+1}}\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-2}$，则得

$$k+1\geqslant\frac{\ln 200}{\ln 2},$$

所以至少对分 7 次。

# 二分法

**表 1: 计算结果**

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ 符号 | 隔根区间 |
|---|---|---|---|
| 1 | $x_1 = 1.5$ | $+$ | $[1, 1.5]$ |
| 2 | $x_2 = 1.25$ | $-$ | $[1.25, 1.5]$ |
| 3 | $x_3 = 1.375$ | $+$ | $[1.25, 1.375]$ |
| 4 | $x_4 = 1.3125$ | $-$ | $[1.3125, 1.375]$ |
| 5 | $x_5 = 1.34375$ | $-$ | $[1.34375, 1.375]$ |
| 6 | $x_6 = 1.359375$ | $-$ | $[1.359375, 1.375]$ |
| 7 | $x_7 = 1.3671875$ | $+$ | $[1.359375, 1.3671875]$ |

# 二分法

**计算步骤**

(1) 准备

输入 $a$，$b$，$\epsilon$，计算 $f(a)$

(2) 循环

计算 $x = \dfrac{a+b}{2}$

若 $f(a) \cdot f(x) < 0$，则 $x \to b$；否则 $x \to a$

(3) 控制

若 $|b-a| < \epsilon$，则终止循环，$x$ 即为所求的根；否则转(2)继续循环；

# 二分法

**优点**

- 运算简单，方法可靠，易于在计算机上实现
- 对函数 $f(x)$ 的要求不高，只要求 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续

# 二分法

**优点**

- 运算简单，方法可靠，易于在计算机上实现
- 对函数 $f(x)$ 的要求不高，只要求 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续

**缺点**

- 不能用于求复根及偶数重根
- 收敛速度较慢 (因为每步误差是以 $1/2$ 因子下降)

# 二分法

**优点**

- 运算简单，方法可靠，易于在计算机上实现
- 对函数 $f(x)$ 的要求不高，只要求 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续

**缺点**

- 不能用于求复根及偶数重根
- 收敛速度较慢 (因为每步误差是以 $1/2$ 因子下降)

**用途**

常用该方法为其他求根方法提供较好的初始值，再用其他的求根方法精确化。

# 不动点迭代法

# 不动点迭代法

给定方程

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

其中 $f(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 上连续，并设 $x_0$ 是方程的一个近似根。

# 不动点迭代法

给定方程

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

其中 $f(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 上连续，并设 $x_0$ 是方程的一个近似根。

将 (1) 改写成等价形式

$$x = \varphi(x). \qquad (2)$$

# 不动点迭代法

给定方程

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

其中 $f(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 上连续，并设 $x_0$ 是方程的一个近似根。

将 (1) 改写成等价形式

$$x = \varphi(x). \qquad (2)$$

为了求得 (1) 的根，可由 (2) 构造迭代序列

$$\begin{cases} x_1 &= \varphi(x_0), \\ x_2 &= \varphi(x_1), \\ &\vdots \\ x_{k+1} &= \varphi(x_k), \\ &\vdots \end{cases}$$

# 不动点迭代法

给定方程

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

其中 $f(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 上连续，并设 $x_0$ 是方程的一个近似根。

将 (1) 改写成等价形式

$$x = \varphi(x). \qquad (2)$$

为了求得 (1) 的根，可由 (2) 构造迭代序列

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(x_0), \\ x_2 = \varphi(x_1), \\ \quad\vdots \\ x_{k+1} = \varphi(x_k), \\ \quad\vdots \end{cases}$$

该方法成为迭代法，$\varphi(x)$ 称为迭代函数。

# 不动点迭代法

若由迭代法产生的序列 $\{x_k\}$ 的极限存在，即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star,$$

则称迭代法收敛，否则称迭代法发散。

# 不动点迭代法

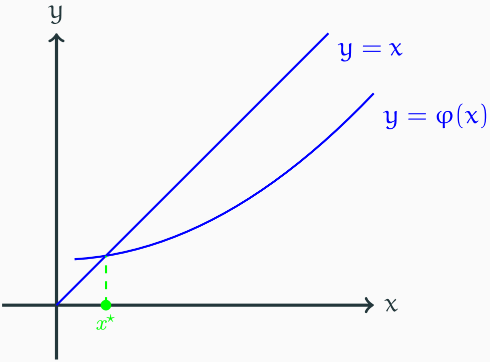



**图 1:** 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^\star) < 1$

# 不动点迭代法

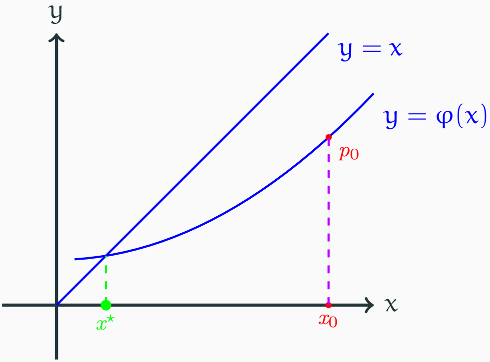



**图 1:** 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^\star) < 1$

# 不动点迭代法

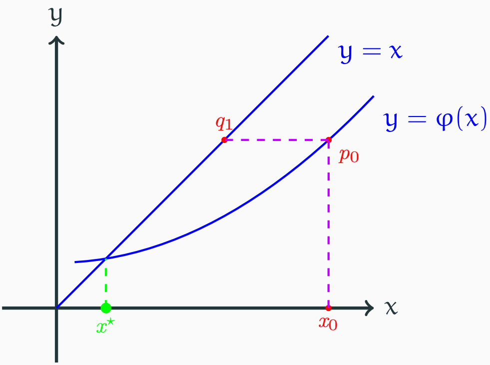



**图 1:** 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^\star) < 1$

# 不动点迭代法

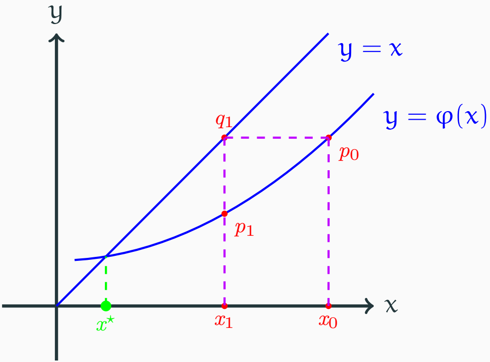



**图 1:** **几何解释 (1):** $0 < \varphi'(x^\star) < 1$

# 不动点迭代法

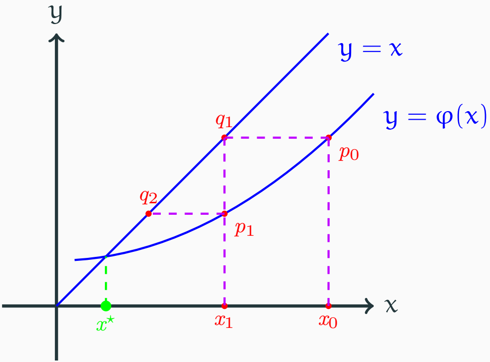



**图 1:** 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^\star) < 1$

# 不动点迭代法

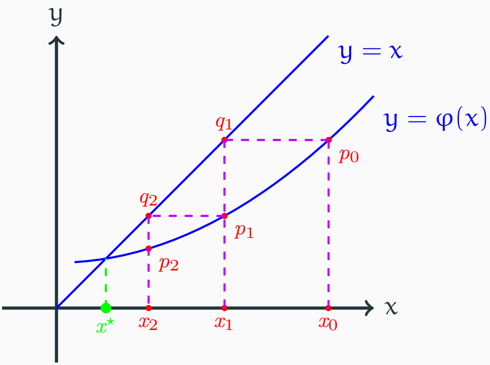



**图 1: 几何解释 (1):** $0 < \varphi'(x^\star) < 1$

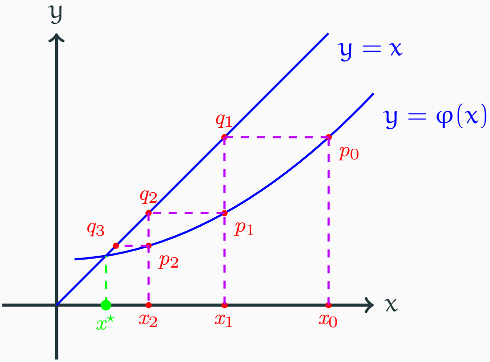



**图 1: 几何解释 (1):** $0 < \varphi'(x^\star) < 1$

# 不动点迭代法

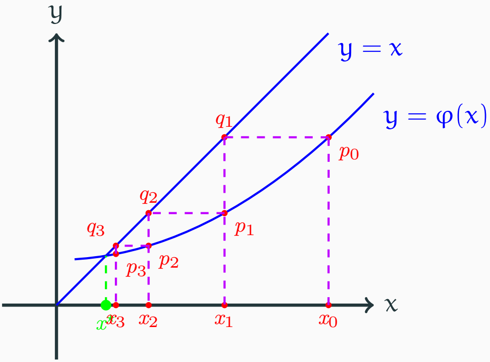



**图 1:** 几何解释 (1): $0 < \varphi'(x^{\star}) < 1$

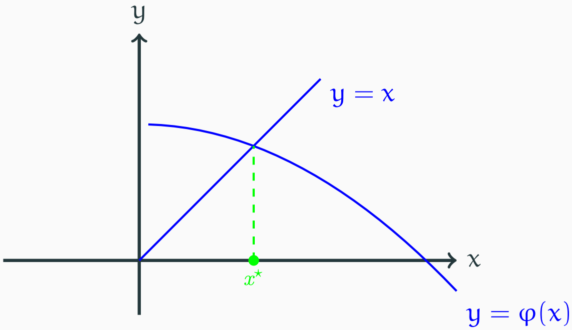



图 2: 几何解释 (2): $-1 < \varphi'(x^{\star}) < 0$

# 不动点迭代法

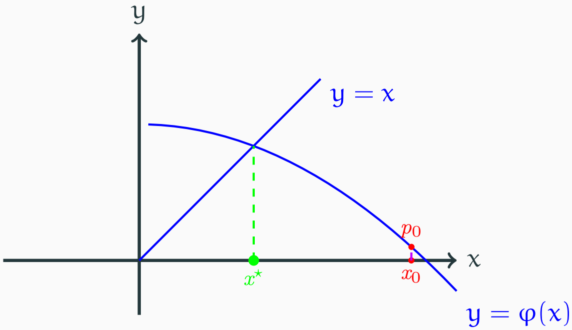



**图 2:** 几何解释 (2)： $-1 < \varphi'(x^\star) < 0$

# 不动点迭代法

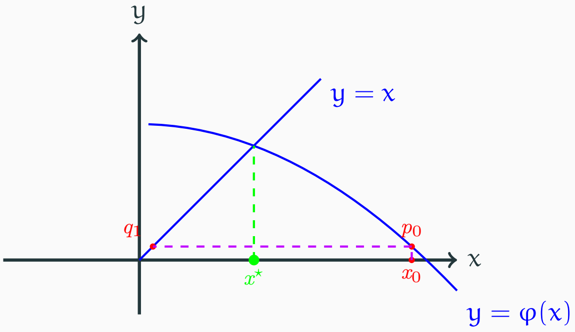



**图 2:** 几何解释 (2)：$-1 < \varphi'(x^\star) < 0$

# 不动点迭代法

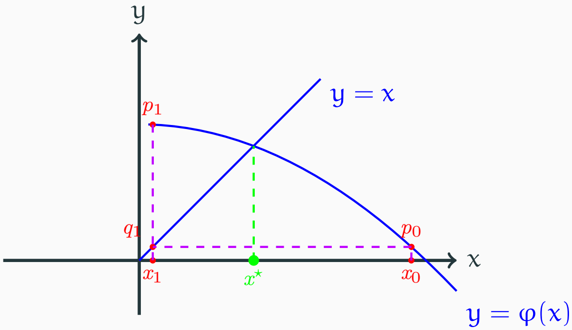



**图 2:** 几何解释 (2)：$-1 < \varphi'(x^\star) < 0$

# 不动点迭代法

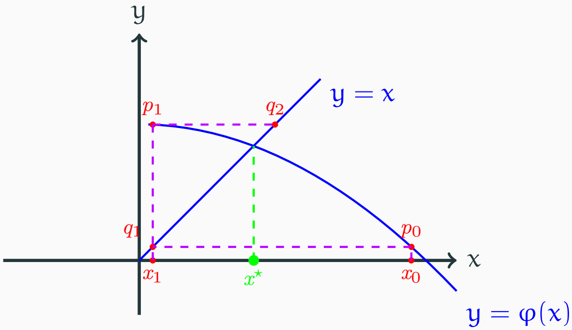



**图 2:** 几何解释 (2): $-1 < \varphi'(x^\star) < 0$

# 不动点迭代法

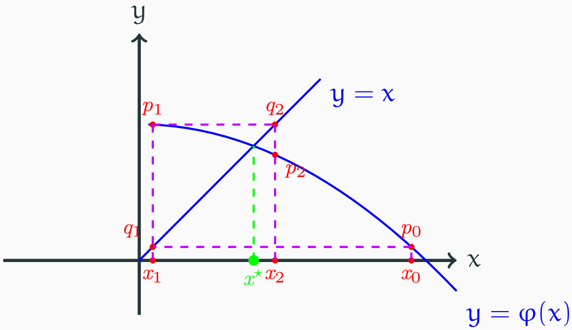



**图 2:** 几何解释 (2)：$-1 < \varphi'(x^\star) < 0$

# 不动点迭代法

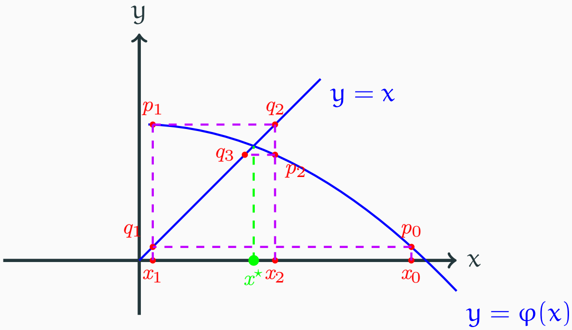



**图 2:** 几何解释 (2)：$-1 < \varphi'(x^\star) < 0$

# 不动点迭代法

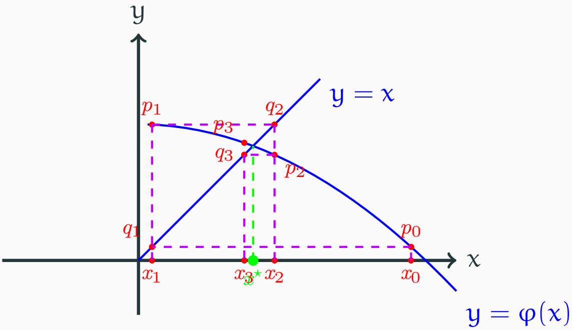



**图 2:** 几何解释 (2)： $-1 < \varphi'(x^\star) < 0$

# 不动点迭代法

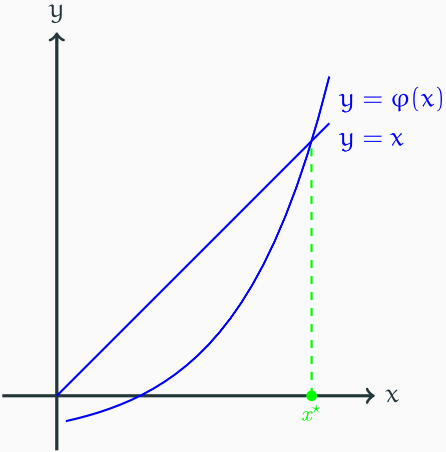



**图 3:** 几何解释 (3)： $\varphi'(x^\star) > 1$

# 不动点迭代法

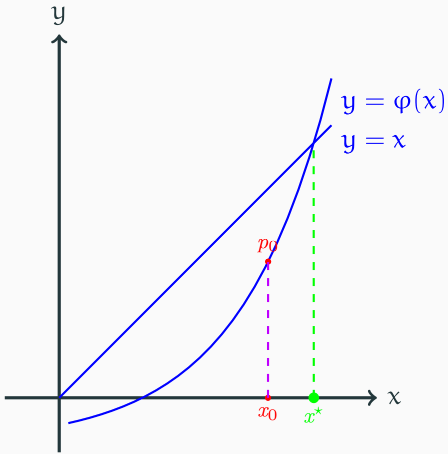



**图 3:** 几何解释 (3)： $\varphi'(x^\star) > 1$

# 不动点迭代法

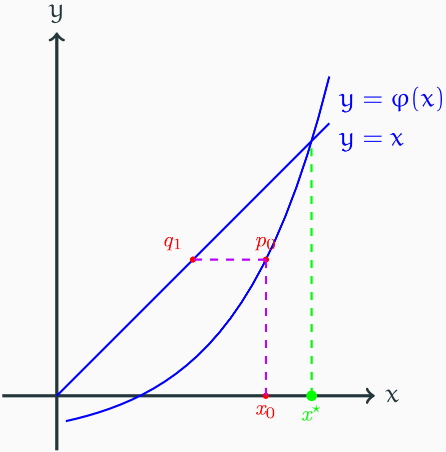



**图 3:** 几何解释 (3)： $\varphi'(x^\star) > 1$

# 不动点迭代法

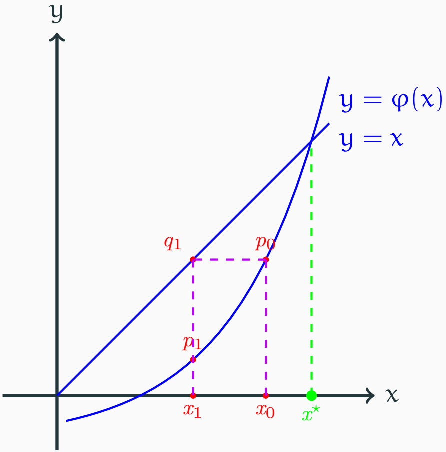



**图 3:** 几何解释 (3)： $\varphi'(x^\star) > 1$

# 不动点迭代法

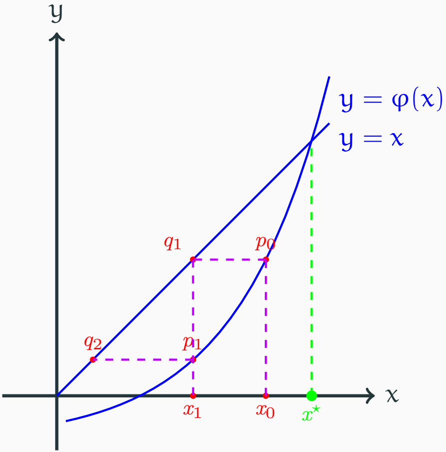



**图 3:** 几何解释 (3)： $\varphi'(x^\star) > 1$

# 不动点迭代法

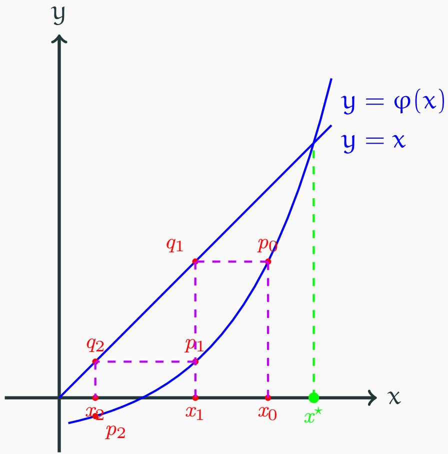



**图 3:** 几何解释 (3)： $\varphi'(x^\star) > 1$

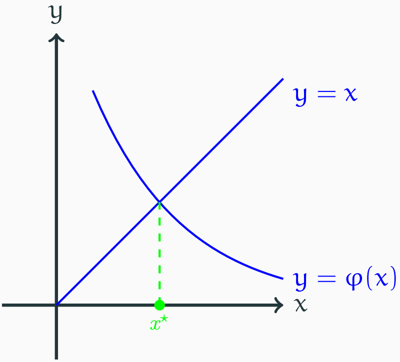



图 4: 几何解释 (4): $\varphi'(x^\star) < -1$

# 不动点迭代法

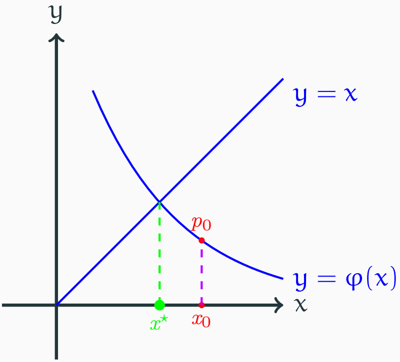



**图 4:** 几何解释 (4)： $\varphi'(x^\star) < -1$

# 不动点迭代法

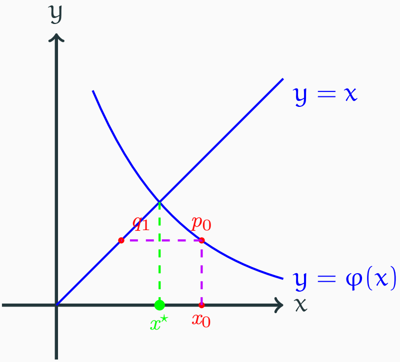



**图 4:** 几何解释 (4)： $\varphi'(x^\star) < -1$

# 不动点迭代法

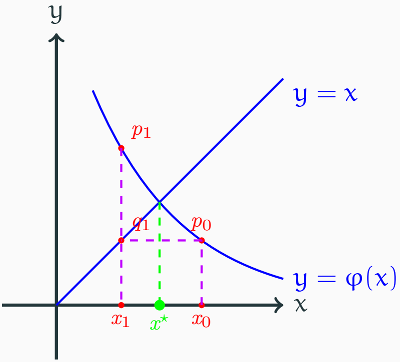



**图 4:** 几何解释 (4): $\varphi'(x^\star) < -1$

# 不动点迭代法

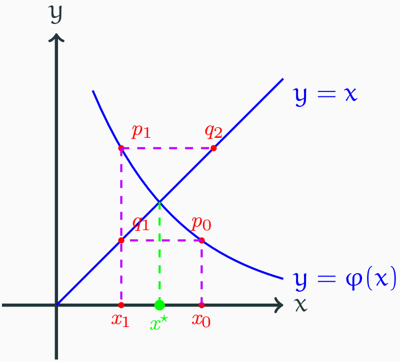



**图 4:** 几何解释 (4)： $\varphi'(x^\star) < -1$

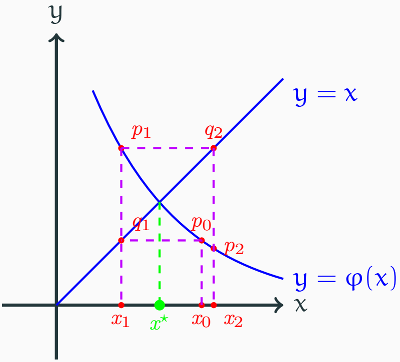



**图 4:** 几何解释 (4): $\varphi'(x^\star) < -1$

# 不动点迭代法

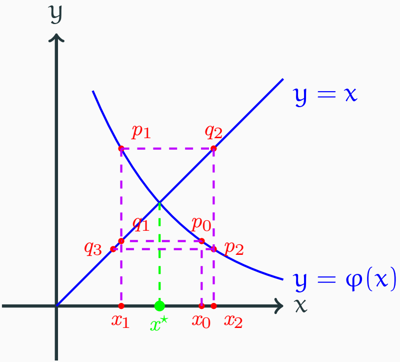



**图 4:** 几何解释 (4)： $\varphi'(x^\star) < -1$

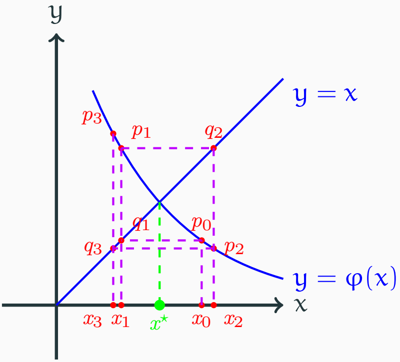



**图 4:** 几何解释 (4)： $\varphi'(x^\star) < -1$

# 不动点迭代法

由图可看出，

- 当 $\varphi'(x)$ 在 $x^\star$ 处满足不同条件时，迭代过程的收敛情况也有所不同。
- 迭代过程的收敛依赖于迭代函数的构造，为使迭代法有效，必须保证其收敛性。

# 不动点迭代法

**定义：不动点**

设 $\varphi(x)$ 为连续函数，则

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star \quad\Longrightarrow\quad x^\star = \varphi(x^\star) \quad\Longrightarrow\quad x^\star\text{是}x = \varphi(x)\text{的解},$$

称 $x^\star$ 为迭代函数的不动点，简单迭代法又称为不动点迭代法。

**定义：不动点**

设 $\varphi(x)$ 为连续函数，则

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star \quad \Longrightarrow \quad x^\star = \varphi(x^\star) \quad \Longrightarrow \quad x^\star\text{是}x = \varphi(x)\text{的解},$$

称 $x^\star$ 为迭代函数的不动点，简单迭代法又称为不动点迭代法。

将 $f(x) = 0$ 转化为等价方程 $x = \varphi(x)$ 的方法有多种，且不惟一。如

$$f(x) = x - \sin x - 0.5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1) & x = \varphi_1(x) = \sin x + 0.5 \\ (2) & x = \varphi_2(x) = \arcsin(x - 0.5). \end{cases}$$

**定义：不动点**

设 $\varphi(x)$ 为连续函数，则

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star \quad \Longrightarrow \quad x^\star = \varphi(x^\star) \quad \Longrightarrow \quad x^\star \text{是} x = \varphi(x) \text{的解},$$

称 $x^\star$ 为迭代函数的不动点，简单迭代法又称为不动点迭代法。

将 $f(x) = 0$ 转化为等价方程 $x = \varphi(x)$ 的方法有多种，且不惟一。如

$$f(x) = x - \sin x - 0.5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1) \quad x = \varphi_1(x) = \sin x + 0.5 \\ (2) \quad x = \varphi_2(x) = \arcsin(x - 0.5). \end{cases}$$

对于不动点迭代法，选择迭代函数非常重要。 不同的迭代函数会产生不同的迭代序列，且收敛情况也不一定相同，即使初始值选择相同。

# 不动点迭代法

**例**

已知 $10^x - x - 2 = 0$ 在 $[0.3, 0.4]$ 内有一个根，用两种不同的迭代公式，

$$(1) \quad x_{k+1} = 10^{x_k} - 2$$

$$(2) \quad x_{k+1} = \log(x_k + 2)$$

# 不动点迭代法

**例**

已知 $10^x - x - 2 = 0$ 在 $[0.3, 0.4]$ 内有一个根，用两种不同的迭代公式，

$$(1) \quad x_{k+1} = 10^{x_k} - 2$$

$$(2) \quad x_{k+1} = \log(x_k + 2)$$

**表 2: 计算结果**

| $k$ | 迭代格式 (1) | 迭代格式 (2) |
|---|---|---|
| 0 | $x_0 = 0.3$ | $x_0 = 0.3$ |
| 1 | $x_1 = -0.0047$ | $x_1 = 0.3617$ |
| 2 | $x_2 = -1.0108$ | $x_2 = 0.3732$ |
| 3 | | $x_3 = 0.3753$ |
| 4 | | $x_4 = 0.3757$ |

# 不动点迭代法

由迭代法的几何意义可知，为了保证迭代过程收敛，就要求迭代函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上变化不是很大，即 $\varphi'(x)$ 的绝对值应较小。

# 不动点迭代法

**定理**

设有方程 $x = \varphi(x)$，若 $\varphi(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 上满足

(1) 当 $x \in [a, b]$ 时，$\varphi(x) \in [a, b]$

(2) $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，且有 $|\varphi'(x)| \leqslant L < 1$，$x \in [a, b]$

# 不动点迭代法

**定理**

设有方程 $x=\varphi(x)$，若 $\varphi(x)$ 在有根区间 $[a,b]$ 上满足

(1) 当 $x\in[a,b]$ 时，$\varphi(x)\in[a,b]$

(2) $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且有 $|\varphi'(x)|\leqslant L<1$，$x\in[a,b]$

则

(1) $x=\varphi(x)$ 存在惟一解 $x^\star$

(2) 对任意初值 $x_0\in[a,b]$，迭代公式
$x_{k+1}=\varphi(x_k)$，$k=0,1,2,\cdots$ 产生的数列 $\{x_k\}$ 收敛于方程的惟一根 $x^\star$，即 $\lim_{k\to\infty}x_k=x^\star$

(3) 误差估计

$$
\begin{aligned}
|x_k-x^\star| &\leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \\
|x_k-x^\star| &\leqslant \frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|
\end{aligned}
$$

# 不动点迭代法

利用

$$|x_k - x^\star| \leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|,$$

可用于

- 估计迭代 $k$ 次时的误差
- 估计达到给定精度要求 $\epsilon$ 时，所需迭代的次数 $k$

# 不动点迭代法

利用

$$|x_k - x^\star| \leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|,$$

可用于

- 估计迭代 $k$ 次时的误差
- 估计达到给定精度要求 $\epsilon$ 时，所需迭代的次数 $k$

若欲使 $|x_k - x^\star| \leqslant \epsilon$，只要

$$\frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \leqslant \epsilon$$

# 不动点迭代法

利用

$$|x_k - x^\star| \leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|,$$

可用于

- 估计迭代 $k$ 次时的误差
- 估计达到给定精度要求 $\epsilon$ 时，所需迭代的次数 $k$

若欲使 $|x_k - x^\star| \leqslant \epsilon$，只要

$$\frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \leqslant \epsilon \quad \Longrightarrow \quad k > \frac{\ln \frac{\epsilon(1-L)}{|x_1-x_0|}}{\ln L}$$

# 不动点迭代法

由

$$|x_k - x^\star| \leqslant \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|,$$

可知:

- $0 < L < 1$ 越小，$\{x_k\}$ 收敛越快。
- 只要相邻两次迭代的差 $|x_k - x_{k-1}|$ 足够小，就可保证近似解 $x_k$ 有足够的精度

# 不动点迭代法

由

$$|x_k - x^\star| \leqslant \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|,$$

可知：

- $0 < L < 1$ 越小，$\{x_k\}$ 收敛越快。
- 只要相邻两次迭代的差 $|x_k - x_{k-1}|$ 足够小，就可保证近似解 $x_k$ 有足够的精度

实际计算时，常采用条件

$$|x_k - x_{k-1}| \leqslant \epsilon$$

来控制迭代终止。

# 不动点迭代法

**定理：局部收敛性**

设 $x^\star$ 是方程 $x = \varphi(x)$ 的根，$\varphi'(x)$ 在 $x^\star$ 的某一邻域连续，且 $|\varphi'(x^\star)| < 1$，则存在 $x^\star$ 的一个邻域 $S = \{x : |x - x^\star| \leqslant \delta\}$，使得 $\forall x_0 \in S$，由迭代公式

$$\boxed{x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots}$$

产生的数列 $\{x_k\}$ 收敛于方程的根 $x^\star$。

**证明**

取 $[a, b] = [x^\star - \delta, x^\star + \delta]$，只需验证前面定理的条件 (1)。

**定理：局部收敛性**

设 $x^\star$ 是方程 $x=\varphi(x)$ 的根，$\varphi'(x)$ 在 $x^\star$ 的某一邻域连续，且 $|\varphi'(x^\star)|<1$，则存在 $x^\star$ 的一个邻域 $S=\{x:\ |x-x^\star|\leqslant\delta\}$，使得 $\forall x_0\in S$，由迭代公式

$$\boxed{x_{k+1}=\varphi(x_k),\quad k=0,1,2,\cdots}$$

产生的数列 $\{x_k\}$ 收敛于方程的根 $x^\star$。

**证明**

取 $[a,b]=[x^\star-\delta,x^\star+\delta]$，只需验证前面定理的条件 (1)。设 $x\in S$，即当 $|x-x^\star|\leqslant\delta$ 时，由微分中值定理及 $|\varphi'(x)|<1$，有

$$|\varphi(x)-x^\star|=|\varphi(x)-\varphi(x^\star)|=|\varphi'(x-x^\star)|\leqslant L|x-x^\star|<|x-x^\star|\leqslant\delta,$$

故 $\varphi(x)\in S$。

# 不动点迭代法

**例**

求 $f(x) = 2x - \log x - 7 = 0$ 的最大根，要求精度为 $10^{-4}$。

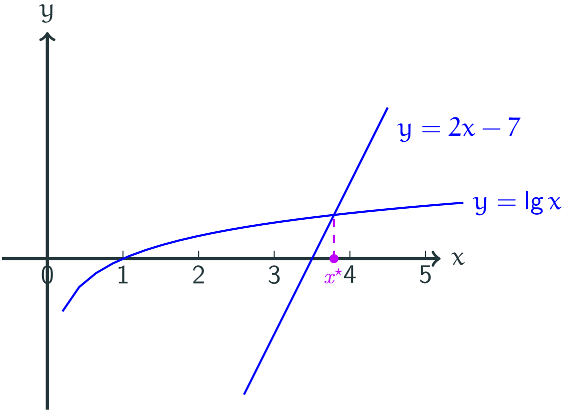
# 不动点迭代法

**解**

(1) 等价方程为

$$2x - 7 = \log x$$

由以下示意图知方程的最大根在 $[3.5, 4]$ 内。



**解（续）：**

(2) 建立迭代公式，判别收敛性

将方程等价变形为 $x = \frac{1}{2}(\log x + 7)$ 迭代公式为

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(\log x_k + 7)$$

**解（续）：**

(2) **建立迭代公式，判别收敛性**

将方程等价变形为 $x=\frac{1}{2}(\log x+7)$ 迭代公式为

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(\log x_k+7)$$

因 $\varphi'(x)=\frac{1}{2\ln 10}\cdot\frac{1}{x}$，故 $\varphi(x)$ 在 $[3.5,4]$ 内可导。因 $\varphi(x)$ 在 $[3.5,4]$ 内为增函数，且

$$\varphi(3.5)\approx 3.77,\quad \varphi(4)\approx 3.80$$

故当 $x\in[3.5,4]$ 时，$\varphi(x)\in[3.5,4]$。因为

$$L=\max|\varphi'(x)|\approx\varphi'(3.5)\approx 0.06<1$$

故迭代法收敛。

**解（续）：**

(3) **计算**

取 $x_0 = 3.5$，有

$$x_1 = \frac{1}{2}(\log x_0 + 7) \approx 3.78989,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\log x_1 + 7) \approx 3.78931,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(\log x_2 + 7) \approx 3.78928.$$

因为 $|x_3 - x_2| \leqslant 10^{-4}$，故方程的最大根为

$$x^\star \approx x_3 = 3.789.$$

# 不动点迭代法

**例**

用迭代法求 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在隔根区间 $[1.4, 1.5]$ 内的根，要求精确到小数点后第 4 位。

**例**

用迭代法求 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在隔根区间 $[1.4, 1.5]$ 内的根，要求精确到小数点后第 4 位。

**解**

(1) 构造迭代公式

方程的等价形式为

$$x = (x^2 + 1)^{1/3} = \varphi(x)$$

迭代公式为

$$x_{k+1} = (x_k^2 + 1)^{1/3}$$

**解（续）：**

(2) 判断迭代法的收敛性

$$\varphi'(x) = \frac{2x}{3(x^2+1)^{2/3}}$$

因 $\varphi(x)$ 在区间 $[1.4, 1.5]$ 内可导，且

$$|\varphi'(x)| \leqslant 0.5 < 1$$

故迭代法收敛

# 不动点迭代法

**解（续）：**

(3) 计算结果

| $k$ | $x_k$ | $\lvert x_{k+1}-x_k\rvert \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}$ |
|---|---|---|
| 0 | $x_0 = 1.5$ | |
| 1 | $x_1 = 1.4812480$ | $\lvert x_1 - x_0\rvert \approx 0.02$ |
| 2 | $x_2 = 1.4727057$ | $\lvert x_2 - x_1\rvert \approx 0.009$ |
| 3 | $x_3 = 1.4688173$ | $\lvert x_2 - x_1\rvert \approx 0.004$ |
| 4 | $x_4 = 1.4670480$ | $\lvert x_2 - x_1\rvert \approx 0.002$ |
| 5 | $x_5 = 1.4662430$ | $\lvert x_2 - x_1\rvert \approx 0.0009$ |
| 6 | $x_6 = 1.4658786$ | $\lvert x_2 - x_1\rvert \approx 0.0004$ |
| 7 | $x_7 = 1.4657020$ | $\lvert x_2 - x_1\rvert \approx 0.0002$ |
| 8 | $x_8 = 1.4656344$ | $\lvert x_2 - x_1\rvert \approx 0.00007$ |
| 9 | $x_9 = 1.4656000$ | $\lvert x_2 - x_1\rvert \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}$ |

## 不动点迭代法

**计算步骤**

(1) 准备

选取初值 $x_0$，确定 $f(x)=0$ 的等价方程 $x=\varphi(x)$；

(2) 迭代

依公式

$$x_1=\varphi(x_0)$$

迭代一次得新近似值 $x_1$；

(3) 控制

若 $|x_1-x_0|<\epsilon$，则终止迭代，$x_1$ 即为所求的根；否则转(4)；

(4) 准备迭代

若迭代次数超过预先指定的次数 $N$，则方法失败；

否则

$$x_1\to x_0,$$

转(2)继续迭代。

# 不动点迭代法

**优点**

- 计算程序简单，可计算复根
- 若迭代公式收敛，只要迭代次数足够，可使结果达到指定精度
- $L$ 越接近于零，收敛速度越快

# 不动点迭代法

**优点**

- 计算程序简单，可计算复根
- 若迭代公式收敛，只要迭代次数足够，可使结果达到指定精度
- $L$ 越接近于零，收敛速度越快

**缺点**

- 需自行选取合适的迭代函数
- $L$ 接近于 $1$ 时，收敛速度越很慢

# 牛顿迭代法

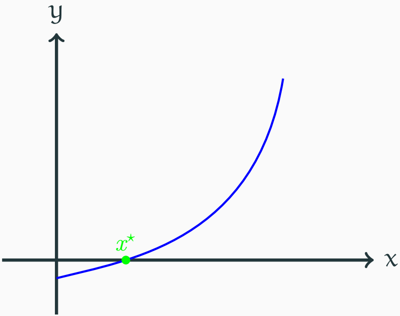
# 牛顿迭代法

**牛顿法的条件**

设 $x^\star$ 为 $f(x) = 0$ 在隔根区间 $[a, b]$ 内的根，

- $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导
- $\forall x \in [a, b]$ 有 $f'(x) \neq 0$。

# 牛顿迭代法



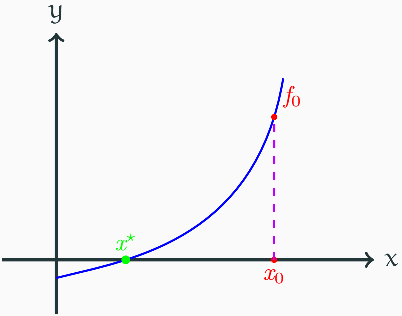

(1) 任取初值 $x_0 \in [a, b]$，过点$(x_0, f(x_0))$作切线，切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

# 牛顿迭代法



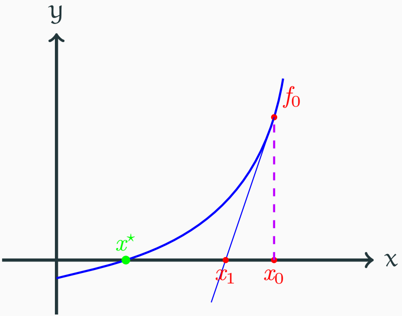

(1) 任取初值 $x_0 \in [a, b]$，过点 $(x_0, f(x_0))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

# 牛顿迭代法



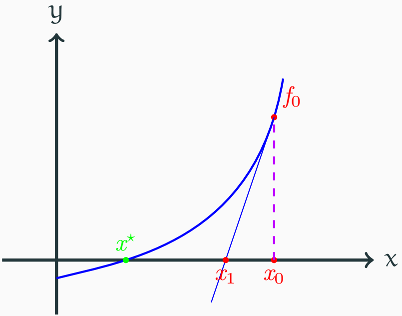

(1) 任取初值 $x_0 \in [a, b]$，过点$(x_0, f(x_0))$作切线，切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

# 牛顿迭代法



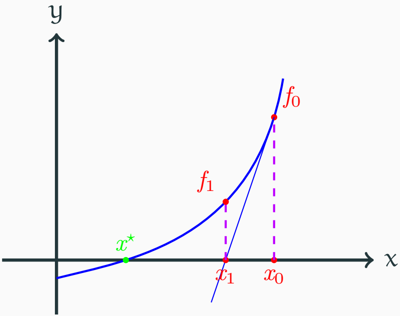

(2) 过点$(x_1, f(x_1))$作切线，切线方程为

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

# 牛顿迭代法



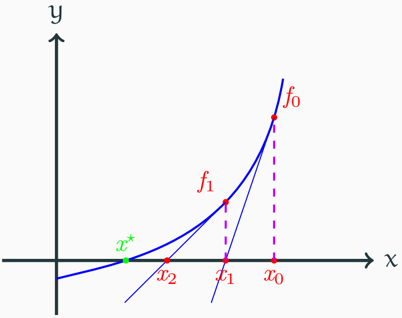

(2) 过点 $(x_1, f(x_1))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

# 牛顿迭代法



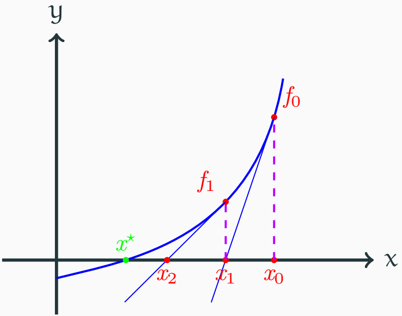

(2) 过点$(x_1, f(x_1))$作切线，切线方程为

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

# 牛顿迭代法



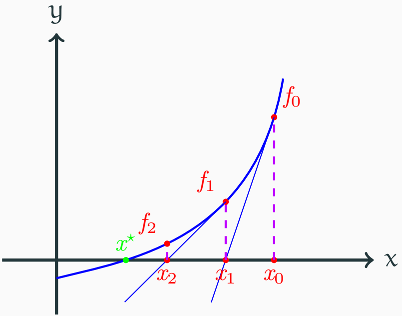

(3) 过点$(x_2, f(x_2))$作切线，切线方程为

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2).$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

# 牛顿迭代法



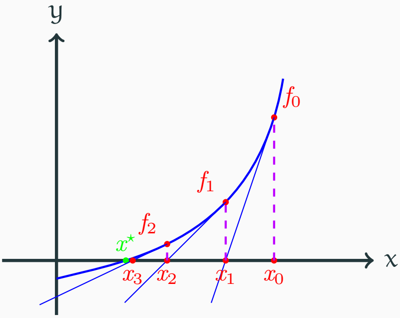

(3) 过点$(x_2, f(x_2))$作切线，切线方程为

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2).$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

# 牛顿迭代法




(3) 过点 $(x_2, f(x_2))$ 作切线，切线方程为

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2).$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

# 牛顿迭代法

如此下去，第 $n+1$ 条切线为

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.} \tag{1}$$

该方法称为牛顿法，(2) 为牛顿迭代公式。

因为

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

故牛顿迭代法可由等价方程写出，迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

# 牛顿迭代法

**定理：局部收敛性定理**

设 $x^\star$ 为 $f(x)=0$ 的根，若

1. $f(x)$ 在 $x^\star$ 的邻域内有连续的二阶导数
2. 在 $x^\star$ 的邻域内 $f'(x)\neq 0$

则 $\exists S=\{x|\ |x-x^\star|\leqslant\delta\}$，$s.t.\ \forall x_0\in S$，牛顿迭代所产生的数列收敛到 $x^\star$。

**定理：局部收敛性定理**

设 $x^{\star}$ 为 $f(x)=0$ 的根，若

1 $f(x)$ 在 $x^{\star}$ 的邻域内有连续的二阶导数

2 在 $x^{\star}$ 的邻域内 $f'(x)\neq 0$

则 $\exists S=\{x|\ |x-x^{\star}|\leqslant\delta\}$, $s.t.\ \forall x_0\in S$，牛顿迭代所产生的数列收敛到 $x^{\star}$。

**证明**

由 $\varphi'(x)=\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ 及条件 (1)、(2) 可知，$\varphi(x)$ 在 $x^{\star}$ 的邻域内可导。由 $\varphi'(x^{\star})$ 及连续函数的性质，必存在 $x^{\star}$ 的某个邻域 $S=\{x|\ |x-x^{\star}|\leqslant\delta\}$, $s.t.\ \forall x\in S$ 有

$$|\varphi'(x)|\leqslant L<1.$$

牛顿法的局部收敛性对初值 $x_0$ 要求较高，即**要求初值必须选取得充分接近方程的根才能保证迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛到 $x^\star$**。

# 牛顿迭代法

牛顿法的局部收敛性对初值 $x_0$ 要求较高，即**要求初值必须选取得充分接近方程的根才能保证迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛到 $x^\star$**。

事实上，若 $x_0$ 不是选取得充分接近根 $x^\star$ 时，牛顿法则收敛得很慢，甚至会发散。

# 牛顿迭代法

**定理**

设 $x^\star$ 为 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内的根，若

- $\forall x\in[a,b]$，$f'(x)$，$f''(x)$ 连续且不变号
- 选取 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)f''(x_0)>0$

则牛顿迭代所产生的数列收敛到 $x^\star$。

# 牛顿迭代法

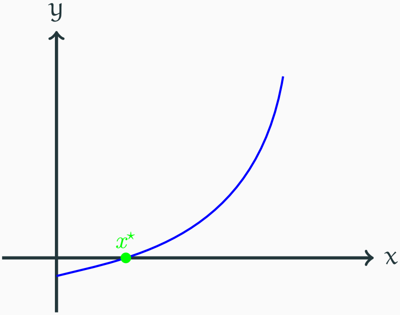



**图 5:** $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0,\ f(x_0) > 0$

# 牛顿迭代法

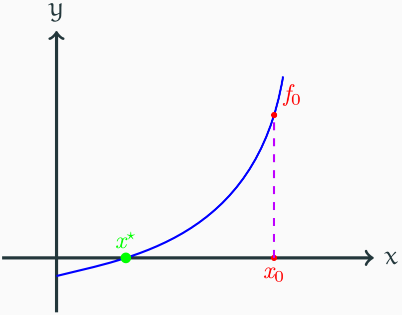



**图 5:** $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0,\ f(x_0) > 0$

# 牛顿迭代法

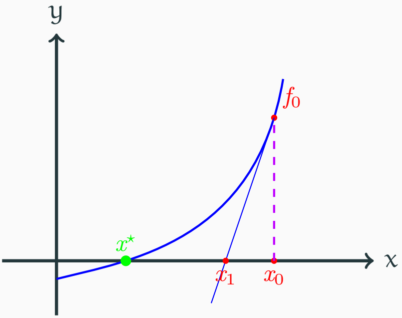



**图 5:** $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0,\ f(x_0) > 0$

# 牛顿迭代法

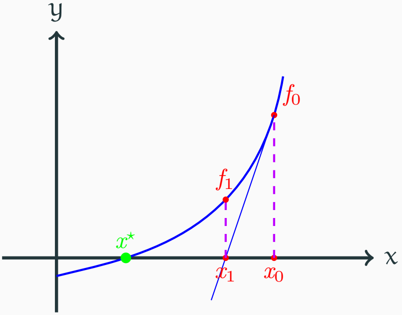



**图 5:** $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0,\ f(x_0) > 0$

# 牛顿迭代法

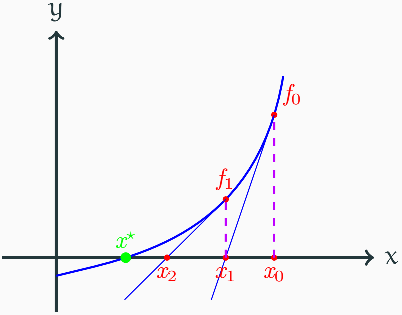



**图 5:** $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0,\ f(x_0) > 0$

# 牛顿迭代法

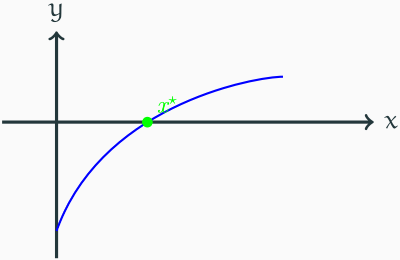



**图 6:** $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0,\ f(x_0) < 0$

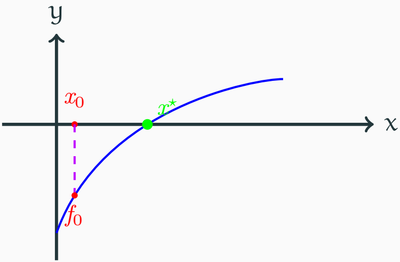



图 6: $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0,\ f(x_0) < 0$

# 牛顿迭代法

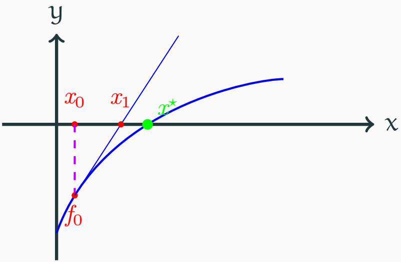



**图 6:** $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0,\ f(x_0) < 0$

# 牛顿迭代法

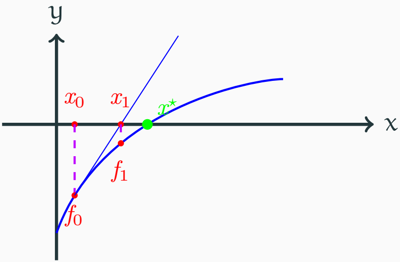



**图 6:** $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0,\ f(x_0) < 0$

# 牛顿迭代法

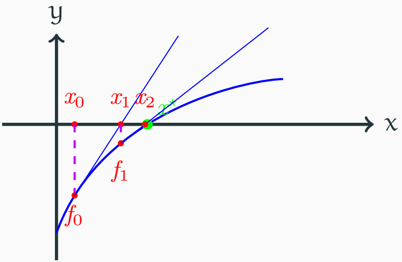



**图 6:** $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0,\ f(x_0) < 0$

# 牛顿迭代法

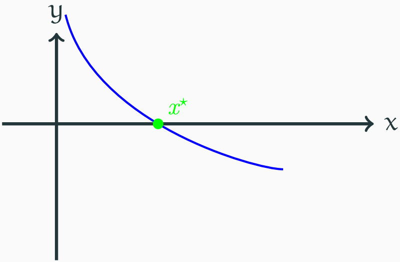



**图 7:** $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0,\ f(x_0) > 0$

# 牛顿迭代法

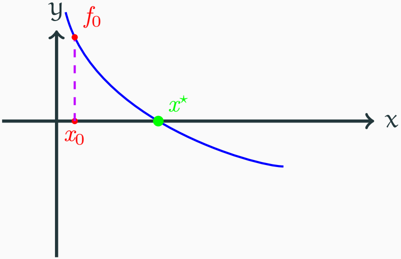



**图 7:** $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0,\ f(x_0) > 0$

# 牛顿迭代法

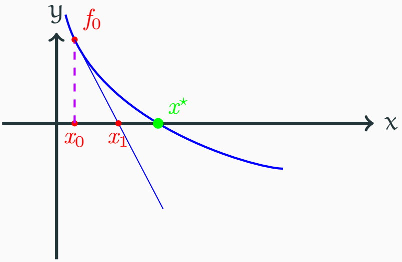



**图 7:** $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0,\ f(x_0) > 0$

# 牛顿迭代法

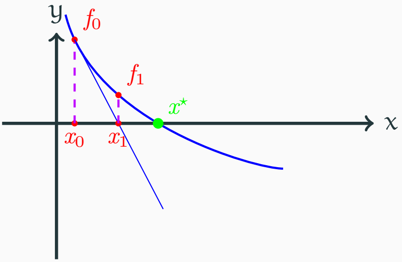



**图 7:** $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0,\ f(x_0) > 0$

# 牛顿迭代法

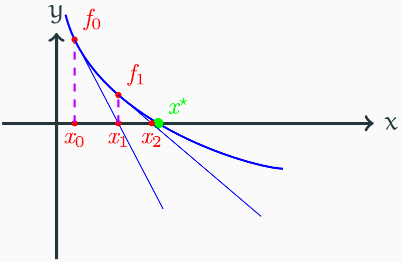



**图 7:** $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0,\ f(x_0) > 0$

# 牛顿迭代法

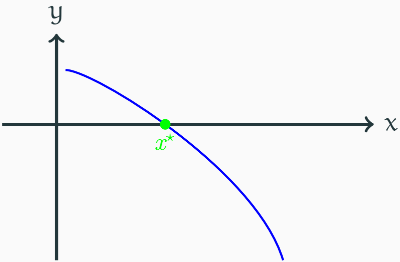



**图 8:** $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0,\ f(x_0) < 0$

# 牛顿迭代法

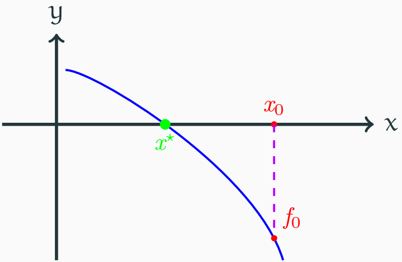



**图 8:** $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0,\ f(x_0) < 0$

# 牛顿迭代法

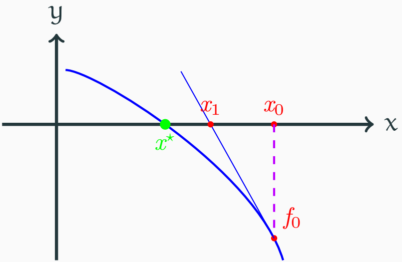



**图 8:** $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0,\ f(x_0) < 0$

# 牛顿迭代法

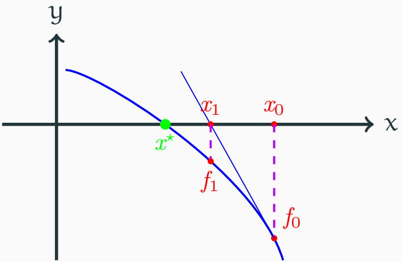



**图 8:** $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0,\ f(x_0) < 0$

# 牛顿迭代法

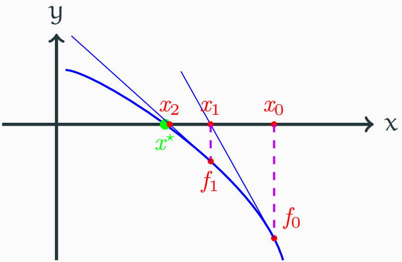



**图 8:** $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0,\ f(x_0) < 0$

# 牛顿迭代法

由图可看出，用牛顿法求得的序列 $\{x_n\}$ 都是单调地趋于 $x^\star$，故牛顿法是收敛的，并且凡满足关系式

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

的 $x_0$ 都可做初值。

使用牛顿法，初始值的选取非常重要。

**问题**

若 $[a, b]$ 上 $f'(x)$，$f''(x)$ 的符号不容易判别，该如何选取初值？

# 牛顿迭代法

$$
\begin{aligned}
& x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
\Longrightarrow \quad & \underbrace{x_1 - x^\star}_{e_1} = \underbrace{(x_0 - x^\star)}_{e_0} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
\Longrightarrow \quad & \frac{e_1}{e_0} = 1 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)(x_0 - x^\star)} = -\frac{f(x_0) + f'(x_0)(x^\star - x_0)}{f'(x_0)(x^\star - x_0)}
\end{aligned}
$$

# 牛顿迭代法

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{x_1 - x^\star}_{e_1} = \underbrace{(x_0 - x^\star)}_{e_0} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{e_1}{e_0} = 1 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)(x_0 - x^\star)} = -\frac{f(x_0) + f'(x_0)(x^\star - x_0)}{f'(x_0)(x^\star - x_0)}$$

由泰勒展开

$$0 = f(x^\star) = f(x_0) + f'(x_0)(x^\star - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^\star - x_0)^2$$

$$0 = f(x^\star) = f(x_0) + f'(\eta)(x^\star - x_0)$$

可得

$$\frac{e_1}{e_0} = \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)(x^\star - x_0)^2}{-f'(x_0)(x^\star - x_0)} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)(x^\star - x_0)}{f'(x_0)} = \frac{f''(\xi)f(x_0)}{2f'(x_0)f'(\eta)}$$

# 牛顿迭代法

若 $f'(x), f''(x)$ 在 $x_0$ 附近变化不大，可用 $f'(x_0), f''(x_0)$ 近似代替 $f'(\xi), f''(\eta)$。

# 牛顿迭代法

若 $f'(x), f''(x)$ 在 $x_0$ 附近变化不大，可用 $f'(x_0), f''(x_0)$ 近似代替 $f'(\xi), f''(\eta)$。于是，只要 $f'(x_0) \neq 0$，就有近似公式

$$\frac{e_1}{e_0} \approx \frac{f''(x_0)f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

# 牛顿迭代法

若 $f'(x), f''(x)$ 在 $x_0$ 附近变化不大，可用 $f'(x_0), f''(x_0)$ 近似代替 $f'(\xi), f''(\eta)$。于是，只要 $f'(x_0) \neq 0$，就有近似公式

$$\frac{e_1}{e_0} \approx \frac{f''(x_0)f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

要使牛顿法收敛，则误差必须减少，即 $|e_1| < |e_0|$，亦即

$$[f'(x_0)]^2 > \left|\frac{f''(x_0)}{2}\right| \cdot |f(x_0)| \qquad (*)$$

# 牛顿迭代法

若 $f'(x), f''(x)$ 在 $x_0$ 附近变化不大，可用 $f'(x_0), f''(x_0)$ 近似代替 $f'(\xi), f''(\eta)$。于是，只要 $f'(x_0) \neq 0$，就有近似公式

$$\frac{e_1}{e_0} \approx \frac{f''(x_0)f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

要使牛顿法收敛，则误差必须减少，即 $|e_1| < |e_0|$，亦即

$$[f'(x_0)]^2 > \left|\frac{f''(x_0)}{2}\right| \cdot |f(x_0)| \qquad (*)$$

**初值的选取**

若在 $x_0$ 处，$f(x)$ 满足式$(*)$且 $f'(x_0) \neq 0$，就可用 $x_0$ 作为牛顿法的初值。

# 牛顿迭代法

**计算步骤**

(1) 准备

选取初值 $x_0$，计算 $f(x_0)$，$f'(x_0)$

(2) 迭代

依公式

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

迭代一次得新近似值 $x_1$，并计算 $f(x_1)$，$f'(x_1)$

(3) 控制

若 $|f(x_1)| < \epsilon$，则终止迭代，$x_1$ 即为所求的根；否则转(4)

(4) 准备迭代

若迭代次数超过预先指定的次数 $N$，或 $f'(x_1) = 0$，则方法失败；

否则

$$x_1 \to x_0, \quad f(x_1) \to f(x_0), \quad f'(x_1) \to f'(x_0),$$

# 牛顿迭代法

**例**

用牛顿迭代法求解 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $[1.4,\ 1.5]$ 内的根

# 牛顿迭代法

**例**

用牛顿迭代法求解 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $[1.4,\ 1.5]$ 内的根

**解**

令 $f(x) = x^3 - x^2 - 1$

(1) 牛顿迭代公式为 $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 - x_n^2 + 1}{3x_n^2 - 2x_n}$

(2) 判断牛顿迭代法的收敛性

$$f(1.4) \approx -0.2, \quad f(1.5) \approx 0.2,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x > 0 \quad (x \in [1.4, 1.5]),$$

$$f''(x) = 6x - 2 > 0 \quad (x \in [1.4, 1.5]),$$

因为 $f(1.5)f''(1.5) > 0$，故可选取初值 $x_0 = 1.5$，此时牛顿迭代法收敛。

# 牛顿迭代法

**表 3: 计算结果**

| $n$ | $x_n$ | $\lvert x_{n+1}-x_n\rvert \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}$ |
|---|---|---|
| 0 | $x_0 = 1.5$ | |
| 1 | $x_1 = 1.466667$ | $\lvert x_2 - x_1\rvert \approx 0.04$ |
| 2 | $x_2 = 1.465572$ | $\lvert x_3 - x_2\rvert \approx 0.002$ |
| 3 | $x_3 = 1.465571$ | $\lvert x_4 - x_3\rvert \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}$ |

# 牛顿迭代法

**例**

用牛顿法求方程

$$f(x) = x^{41} + x^3 + 1 = 0$$

在 $x_0 = -1$ 附近的实根，精确到小数点后第 4 位。

# 牛顿迭代法

**例**

用牛顿法求方程

$$f(x) = x^{41} + x^3 + 1 = 0$$

在 $x_0 = -1$ 附近的实根，精确到小数点后第 4 位。

**解**

(1) 牛顿迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{41} + x_n^3 + 1}{41x_n^{40} + 3x_n^2}$$

(2) 判断收敛性

$$f'(x) = 41x^{40} + 3x^2, \quad \frac{1}{2}f''(x) = 820x^{39} + 3x,$$

$$f(-1) = -1, \quad f'(-1) = 44, \quad \frac{1}{2}f''(-1) = -823,$$

$$[f'(-1)]^2 = 44^2 = 1936 > |\tfrac{1}{2}f''(-1)| \cdot |f(-1)| = 823$$

# 牛顿迭代法

**表 4: 计算结果**

| $n$ | $x_n$ |
|---|---|
| 0 | $x_0 = -1$ |
| 1 | $x_1 = -0.9773$ |
| 2 | $x_2 = -0.9605$ |
| 3 | $x_3 = -0.9525$ |
| 4 | $x_4 = -0.9525$ |

# 牛顿迭代法

**例**

用牛顿法建立计算 $\sqrt{C}(C > 0)$ 近似值的迭代公式。

# 牛顿迭代法

**例**

用牛顿法建立计算 $\sqrt{C}(C>0)$ 近似值的迭代公式。

**解**

$$x=\sqrt{C} \implies f(x)=x^2-C=0$$

**例**

用牛顿法建立计算 $\sqrt{C}(C>0)$ 近似值的迭代公式。

**解**

$$x=\sqrt{C} \implies f(x)=x^2-C=0$$

(1) 牛顿迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-C}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{C}{x_n}\right)$$

(2) 收敛性判别

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f''=2>0$，故任意选取 $x_0>\sqrt{C}$ 作为初值，迭代序列必收敛到 $\sqrt{C}$，故迭代公式是收敛的。

# 牛顿迭代法

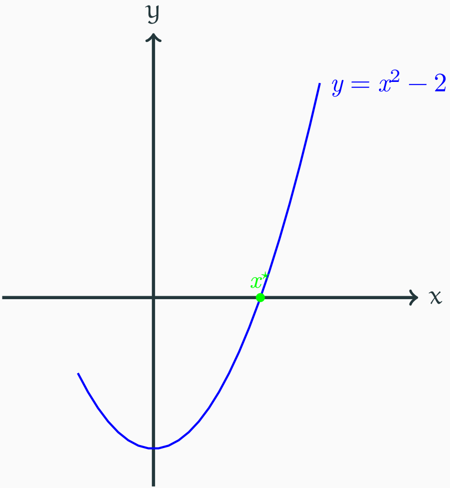



**图 9:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

**图 10:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$（局部放大）

# 牛顿迭代法

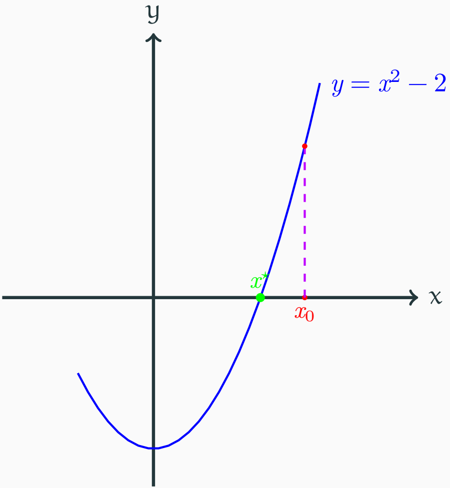



**图 9:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$ **图 10:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$（局部放大）

# 牛顿迭代法

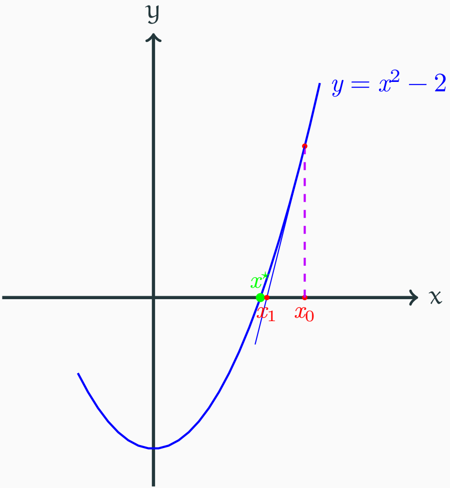



**图 9:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

**图 10:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$（局部放大）

# 牛顿迭代法

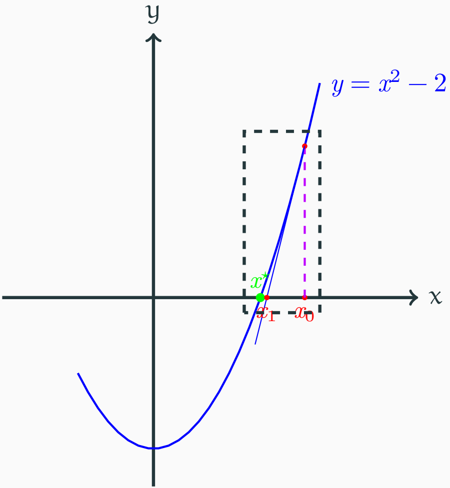



**图 9:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

**图 10:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$（局部放大）

# 牛顿迭代法

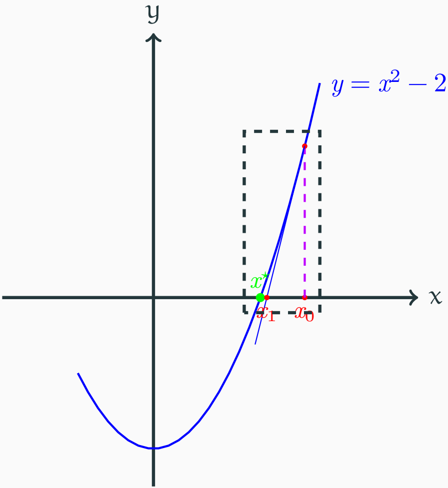



**图 9:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$


**图 10:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$（局部放大）

# 牛顿迭代法

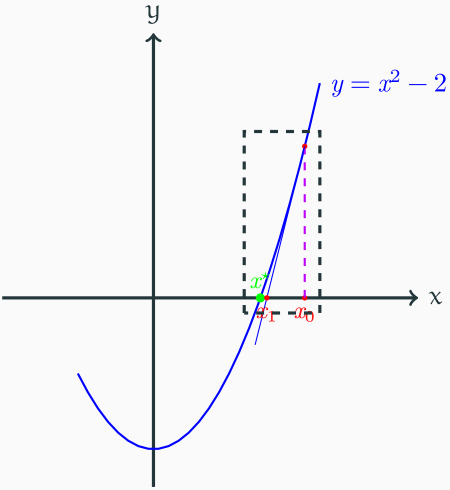



**图 9:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

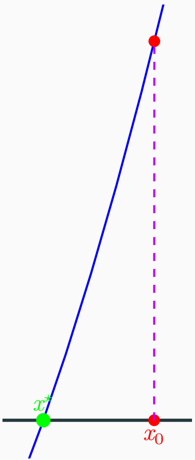



**图 10:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$（局部放大）

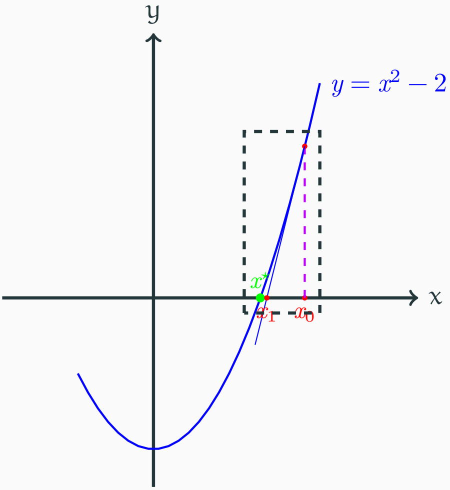



**图 9:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

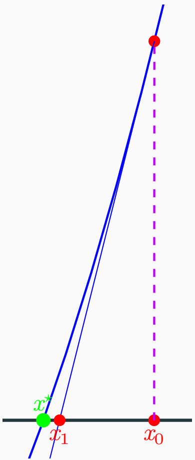



**图 10:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$（局部放大）

# 牛顿迭代法

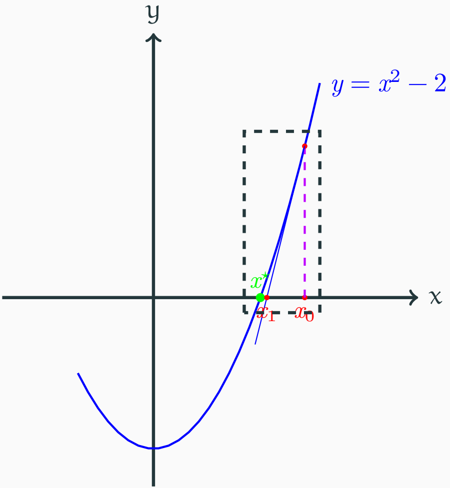



**图 9:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

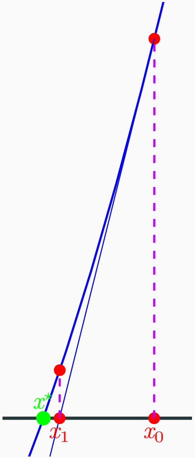



**图 10:** 用牛顿法求 $\sqrt{2}$（局部放大）

# 牛顿迭代法

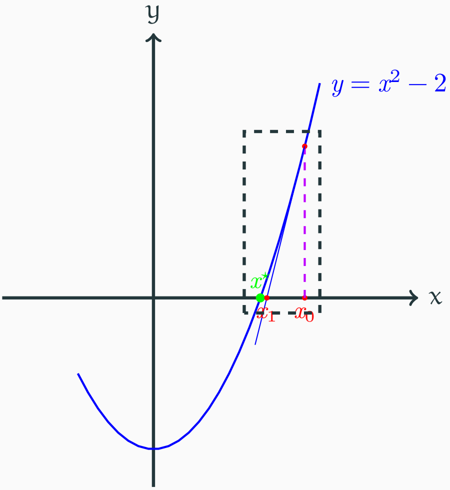



图 9: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$

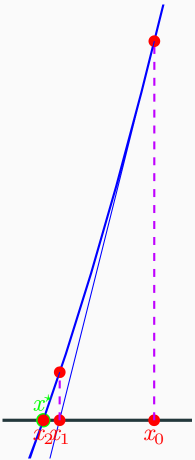



图 10: 用牛顿法求 $\sqrt{2}$（局部放大）

# 迭代法的收敛阶

**定义：迭代法的收敛阶**

设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x^\star$，令误差 $e_n = x_n - x^\star$，若存在某个实数 $p \geqslant 1$ 及常数 $C > 0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为 $p$ 阶收敛，相应的迭代法是 $p$ 阶方法。

- 线性收敛：$p = 1$ 且 $0 < C < 1$
- 平方收敛：$p = 2$
- 超线性收敛：$p > 1$

# 迭代法的收敛阶

**定义：迭代法的收敛阶**

设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x^\star$，令误差 $e_n = x_n - x^\star$，若存在某个实数 $p \geqslant 1$ 及常数 $C > 0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为 $p$ 阶收敛，相应的迭代法是 $p$ 阶方法。

- 线性收敛：$p = 1$ 且 $0 < C < 1$
- 平方收敛：$p = 2$
- 超线性收敛：$p > 1$

$p$ 越大，数列收敛越快。故迭代法的收敛阶是对迭代法收敛速度的一种度量。

# 迭代法的收敛阶

**定理**

(1) 若在根 $x^\star$ 的某个领域内有 $\varphi'(x) \neq 0$，则不动点迭代法**线性收敛**

(2) 若在根 $x^\star$ 的某个领域内连续，且有

$$\varphi'(x^\star) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^\star) = 0$$

而 $\varphi^{(p)}(x^\star) \neq 0$，则不动点迭代法**$p$ 阶收敛**

(3) 牛顿迭代法**平方收敛**

# 弦截法

# 弦截法

对于牛顿迭代法，

**优点**

1. 迭代格式自动生成
2. 收敛速度快，具有 2 阶精度

# 弦截法

对于牛顿迭代法，

**优点**

1. 迭代格式自动生成
2. 收敛速度快，具有 2 阶精度

**缺点**

1. 对初值敏感
2. 每次迭代都需要计算 $f$ 的导数

   当 $f$ 比较复杂时，计算 $f$ 的导数就可能十分麻烦，特别是当 $f'(x_k)$ 很小时，必须精确计算，否则会产生很大的误差

# 弦截法

对于牛顿迭代法，

**优点**

1 迭代格式自动生成

2 收敛速度快，具有 2 阶精度

**缺点**

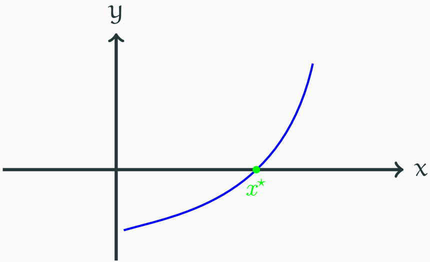
1 对初值敏感

2 每次迭代都需要计算 $f$ 的导数

当 $f$ 比较复杂时，计算 $f$ 的导数就可能十分麻烦，特别是当 $f'(x_k)$ 很小时，必须精确计算，否则会产生很大的误差

本节介绍的弦截法，不需要计算导数，其收敛速度低于牛顿迭代法但高于不动点迭代法。

# 弦截法



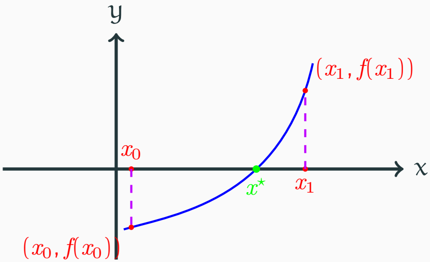

(1) 设方程 $f(x) = 0$ 的一个隔根区间为 $[a, b]$，连接 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_1, f(x_1))$，得弦的方程为

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

# 弦截法



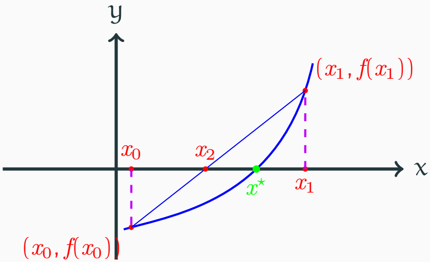

(1) 设方程 $f(x)=0$ 的一个隔根区间为 $[a,b]$，连接 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_1, f(x_1))$，得弦的方程为

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

# 弦截法



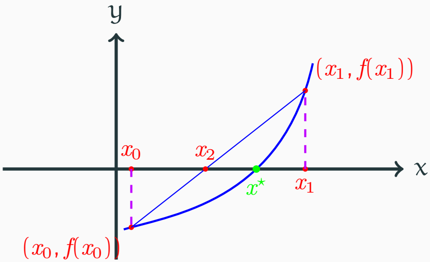

(1) 设方程 $f(x) = 0$ 的一个隔根区间为 $[a, b]$，连接 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_1, f(x_1))$，得弦的方程为

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

# 弦截法



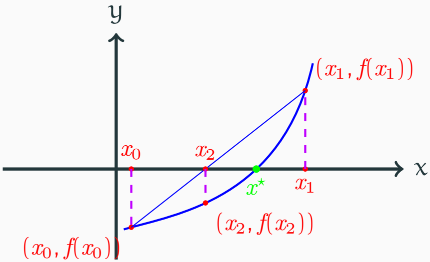

(2) 以 $x_2$ 为 $x^\star$ 的近似值，连接 $(x_1, f(x_1))$ 与 $(x_2, f(x_2))$，得弦的方程为

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1)$$

# 弦截法



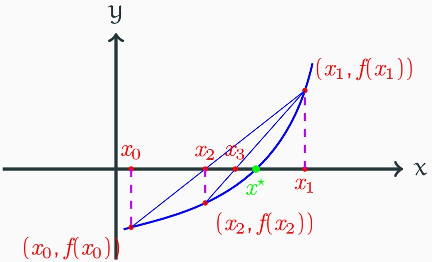

(2) 以 $x_2$ 为 $x^\star$ 的近似值，连接 $(x_1, f(x_1))$ 与 $(x_2, f(x_2))$，得弦的方程为

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1)$$

# 弦截法




(2) 以 $x_2$ 为 $x^\star$ 的近似值，连接 $(x_1, f(x_1))$ 与 $(x_2, f(x_2))$，得弦的方程为

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

它与 $x$ 轴交点的横坐标为

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1)$$

# 弦截法

如此下去，即可得到迭代公式

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.} \tag{2}$$

该方法称为**弦截法**。

# 弦截法

如此下去，即可得到迭代公式

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.} \tag{2}$$

该方法称为**弦截法**。

**几何意义**： 依次用弦线代替曲线，用线性函数的零点作为函数 $f(x)$ 零点的近似值。

# 弦截法

**计算步骤**

(1) **准备**　选取初值 $x_0, x_1$，计算 $f(x_0)$，$f(x_1)$

(2) **迭代**　依公式

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

迭代一次得新近似值 $x_2$，并计算 $f(x_2)$

(3) **控制**　若 $|f(x_2)| < \epsilon_1$ 或 $|x_2 - x_1| < \epsilon_2$，则终止迭代，$x_2$ 即为所求的根；否则转(4)

(4) **准备迭代**　若迭代次数超过预先指定的次数 $N$，则方法失败；否则

$$(x_1, f(x_1)) \to (x_0, f(x_0)), \quad (x_2, f(x_2)) \to (x_1, f(x_1)).$$

转(2)继续迭代

# 弦截法

**定理**

**条件**

- $f$ 在 $x^\star$ 的某邻域 $S$ 内有二阶连续导数
- $\forall x \in S$，有 $f'(x) \neq 0$

**结论**

- 当 $S$ 充分小时，$\forall x_0, x_1 \in S$，弦截法生成的迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛到 $x^\star$
- 弦截法的收敛速度为$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

# 弦截法

**牛顿法与弦截法的区别**

顿法和弦截法都是先将 $f(x)$ 线性化后再求根（化曲为直），但线性化方式不同：

- 牛顿法是作切线的方程
- 弦截法是作弦线的方程

另外

- 牛顿法只需一个初值
- 弦截法需要两个初值