线性代数

向量组

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 11 月 7 日

目录

目录

考察三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

我们用向量工具给出其几何解释。

考察三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

我们用向量工具给出其几何解释。记

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix},$$

记线性方程组(1)的解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

考察三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

我们用向量工具给出其几何解释。记

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix},$$

记线性方程组(1)的解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

向量的垂直

两个向量 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 垂直的充分必要条件是

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

即

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0.$$

三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

几何解释

由以上方程组可看出，解向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都垂直。

三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

几何解释

由以上方程组可看出，解向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都垂直。

1. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面，只有零向量与三者都垂直，即（2）只有零解；

三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

几何解释

由以上方程组可看出，解向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都垂直。

1. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面，只有零向量与三者都垂直，即（2）只有零解；
2. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共面但不共线，则与该平面垂直的向量都是（2）的解，故（2）有无穷多个彼此平行的解向量

三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

几何解释

由以上方程组可看出，解向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都垂直。

1. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面，只有零向量与三者都垂直，即（2）只有零解；
2. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共面但不共线，则与该平面垂直的向量都是（2）的解，故（2）有无穷多个彼此平行的解向量
3. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共线，则过原点且与该直线垂直的平面上的全体向量都是（2）的解向量，此时任一解向量均可表示为

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{x}^{(1)} + k_2\boldsymbol{x}^{(2)},$$

其中 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}$ 为（2）的某两个不共线的非零解向量，k_1, k_2 为任意常数。

n 维向量

实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的有序数组称为 $\mathbb{R}$ 上的一个 n 维向量，记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{3}$$

其中 a_i 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量。

n 维向量

实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的有序数组称为 $\mathbb{R}$ 上的一个 n 维向量，记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{3}$$

其中 a_i 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量。

- 形如

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

  的向量称为行向量；

n 维向量

实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的有序数组称为 $\mathbb{R}$ 上的一个 n 维向量，记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{3}$$

其中 a_i 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量。

- 形如
$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$
的向量称为行向量；
- 形如
$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
的向量称为列向量。

n 维向量

实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的有序数组称为 $\mathbb{R}$ 上的一个 n 维向量，记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{3}$$

其中 a_i 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量。

- 形如

  $$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

  的向量称为行向量；

- 形如

  $$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

  的向量称为列向量。

$\mathbb{R}$ 上全体 n 维向量组成的集合，记作 $\mathbb{R}^n$。

向量运算

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$， $k\in\mathbb{R}$，定义

(1) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 当且仅当 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$；

(2) 向量加法

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

(3) 向量数乘

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

向量运算

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$， $k\in\mathbb{R}$，定义

(1) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 当且仅当 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$；

(2) 向量加法

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

(3) 向量数乘

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

- 在 (3) 中取 $k=-1$，得

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

  右端的向量称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

- 向量的减法定义为

$$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\alpha})$$

向量的 8 条运算规则

设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n, 1, k, l \in \mathbb{R}$，则

(1) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$

(2) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$

(3) 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$

(4) 对任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，存在负向量 $-\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$

(5) $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$

(7) $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$

(8) $(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$

向量空间

在 $\mathbb{R}^n$ 中定义加法与数乘运算，且 $\mathbb{R}^n$ 对加法和数乘封闭，即

- $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \implies k\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$
- $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n \implies \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$

则称 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维向量空间，仍记为 $\mathbb{R}^n$。

定义 (线性组合)

设有向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$， 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^n$ 以及 $x_i \in \mathbb{R}$，则

$$\sum_{i=1}^{n_A} x_i \boldsymbol{\alpha}_i = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_A} \boldsymbol{\alpha}_{n_A} \tag{4}$$

称为向量组 A 在数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性组合。

定义 (线性组合)

设有向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^n$ 以及 $x_i \in \mathbb{R}$，则

$$\sum_{i=1}^{n_A} x_i \boldsymbol{\alpha}_i = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_A} \boldsymbol{\alpha}_{n_A} \tag{4}$$

称为向量组 A 在数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性组合。

注

定义

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{n_A} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_A},$$

则线性组合（4）可表示为

$$\sum_{i=1}^{n_A} x_i \boldsymbol{\alpha}_i = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_A} \boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{n_A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_A} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

定义 (线性表示)

给定向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，若

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n_A} x_i \boldsymbol{\alpha}_i,$$

则称向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 A 线性表示（或线性表出）。

定义 (线性表示)

给定向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，若

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n_A} x_i \boldsymbol{\alpha}_i,$$

则称向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 A 线性表示（或线性表出）。

注

设向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{n_A} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_A},$$

则

$$\begin{aligned} \text{向量 } \boldsymbol{b} \text{ 可由向量组 } A \text{ 线性表示} &\iff \text{线性方程组 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ 有解} \\ &\iff \text{存在 } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n_A} \text{ 使得 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

定义 (向量组的线性表示)

给定两向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 和 $B:\ \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_B}$，若向量组 B 中的每个向量都可由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 可由向量组 A 线性表示。

定义 (向量组的线性表示)

给定两向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 和 $B:\ \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_B}$，若向量组 B 中的每个向量都可由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 可由向量组 A 线性表示。

注

设向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 和向量组 $B:\ \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_B}$ 对应的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{n_A} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_A}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_{n_B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_B}.$$

则

$$\begin{aligned} \text{向量组 } B \text{ 可由向量组 } A \text{ 线性表示} &\iff \text{矩阵方程 } \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}\text{有解} \\ &\iff \text{存在 } \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n_A \times n_B} \text{ 使得 } \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}. \end{aligned}$$

定义 (向量组的线性表示)

给定两向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 和 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_B}$，若向量组 B 中的每个向量都可由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 可由向量组 A 线性表示。

注

设向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 和向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_B}$ 对应的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{n_A}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_A}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_{n_B}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_B}.$$

则

向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Longleftrightarrow$ 矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$有解

$\Longleftrightarrow$ 存在 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n_A \times n_B}$ 使得 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.

定义 (两向量组的等价)

若两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组等价。

设有三个向量组 A, B, C.

注

向量组的线性表示，具备

- **自反性**： A 可由自身线性表示；

设有三个向量组 A, B, C.

注

向量组的线性表示，具备

- 自反性：A 可由自身线性表示；
- 传递性：设 A 可由 B 线性表示，B 又可由 C 线性表示，则 A 可由 C 线性表示；

设有三个向量组 A, B, C.

注

向量组的线性表示，具备

- 自反性：A 可由自身线性表示；
- 传递性：设 A 可由 B 线性表示，B 又可由 C 线性表示，则 A 可由 C 线性表示；
- 不具备对称性：A 可由 B 线性表示，但 B 不一定能由 A 线性表示。
  例如，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ 可由 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ 线性表示，反之则不然。

设有三个向量组 A, B, C.

注

向量组的线性表示，具备

- 自反性：A 可由自身线性表示；
- 传递性：设 A 可由 B 线性表示，B 又可由 C 线性表示，则 A 可由 C 线性表示；
- 不具备对称性：A 可由 B 线性表示，但 B 不一定能由 A 线性表示。
  例如，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ 可由 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ 线性表示，反之则不然。

注

向量组的等价，具备

- 自反性：A 和自身等价；

设有三个向量组 A, B, C.

注

向量组的线性表示，具备

- 自反性：A 可由自身线性表示；
- 传递性：设 A 可由 B 线性表示，B 又可由 C 线性表示，则 A 可由 C 线性表示；
- 不具备对称性：A 可由 B 线性表示，但 B 不一定能由 A 线性表示。
  例如，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ 可由 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ 线性表示，反之则不然。

注

向量组的等价，具备

- 自反性：A 和自身等价；
- 对称性：若 A 与 B 等价，则必有 B 与 A 等价；

设有三个向量组 A, B, C.

注

向量组的线性表示，具备

- 自反性：A 可由自身线性表示；
- 传递性：设 A 可由 B 线性表示，B 又可由 C 线性表示，则 A 可由 C 线性表示；
- 不具备对称性：A 可由 B 线性表示，但 B 不一定能由 A 线性表示。
  例如，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ 可由 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ 线性表示，反之则不然。

注

向量组的等价，具备

- 自反性：A 和自身等价；
- 对称性：若 A 与 B 等价，则必有 B 与 A 等价；
- 传递性：设 A 与 B 等价，B 与 C 等价，则 A 与 C 等价。

定义 (线性相关与线性无关)

给定向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$，若存在 n_A 个不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_A} \in \mathbb{R}$，使得

$$\sum_{i=1}^{n_A} x_i \boldsymbol{\alpha}_i = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_A} \boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0} \tag{5}$$

成立，则称向量组 A 线性相关；否则，称向量组 A 线性无关。

定义 (线性相关与线性无关)

给定向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$，若存在 n_A 个不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_A} \in \mathbb{R}$，使得

$$\sum_{i=1}^{n_A} x_i \boldsymbol{\alpha}_i = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_A} \boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0} \tag{5}$$

成立，则称向量组 A 线性相关；否则，称向量组 A 线性无关。

注

向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，指的是

- 只有当 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_A}$ 全为零时，（5）才会成立；
- 若（5）成立，则 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_A}$ 必须全为零。

定义 (线性相关与线性无关)

给定向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$，若存在 n_A 个不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_A} \in \mathbb{R}$，使得

$$\sum_{i=1}^{n_A} x_i \boldsymbol{\alpha}_i = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_A} \boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0} \tag{5}$$

成立，则称向量组 A 线性相关；否则，称向量组 A 线性无关。

注

向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，指的是

- 只有当 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_A}$ 全为零时，（5）才会成立；
- 若（5）成立，则 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_A}$ 必须全为零。

定理 (线性相关性与齐次线性方程组解的关系)

- A 线性相关 $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解。
- A 线性无关 $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解。

对于只含有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量组,

对于只含有一个向量 α的向量组,

- 若存在不为零的数 k 使得

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

对于只含有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$的向量组，

- 若存在不为零的数 k 使得
$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$
则
$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

- 若 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，要使
$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$
必须 $k = 0$.

对于只含有一个向量 α的向量组，

- 若存在不为零的数 k 使得

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

- 若 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，要使

$$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

必须 $k = 0$.

只包含单个向量的向量组的线性相关性

- 当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关；
- 当 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关。

定理

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}(n_A\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 A 中至少有一个向量可由其余向量线性表出。

定理

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}(n_A\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 A 中至少有一个向量可由其余向量线性表出。

证明.

$(\Rightarrow)$ 若向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}(n_A\geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_A}$ 使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=\mathbf{0}.$$

定理

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}(n_A\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 A 中至少有一个向量可由其余向量线性表出。

证明.

(⇒) 若向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}(n_A\geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_A}$ 使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=\mathbf{0}.$$

不妨设 $x_1\neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{x_2}{x_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{x_{n_A}}{x_1}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性表示，从而必要性得证。

定理

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}(n_A\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 A 中至少有一个向量可由其余向量线性表出。

证明.

$(\Rightarrow)$ 若向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}(n_A\geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_A}$ 使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=\mathbf{0}.$$

不妨设 $x_1\neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{x_2}{x_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{x_{n_A}}{x_1}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性表示，从而必要性得证。

$(\Leftarrow)$ 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1=x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$$

定理

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}(n_A\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 A 中至少有一个向量可由其余向量线性表出。

证明.

$(\Rightarrow)$ 若向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}(n_A\geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_A}$ 使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=\mathbf{0}.$$

不妨设 $x_1\neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{x_2}{x_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{x_{n_A}}{x_1}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性表示，从而必要性得证。

$(\Leftarrow)$ 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1=x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_1-x_2\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=\mathbf{0},$$

定理

向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}(n_A\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 A 中至少有一个向量可由其余向量线性表出。

证明.

$(\Rightarrow)$ 若向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}(n_A\geq 2)$ 线性相关，则必存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_A}$ 使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=\mathbf{0}.$$

不妨设 $x_1\neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{x_2}{x_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{x_{n_A}}{x_1}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性表示，从而必要性得证。

$(\Leftarrow)$ 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1=x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_1-x_2\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=\mathbf{0},$$

显然 $1,-x_2,\cdots,-x_{n_A}$ 不全为零，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关。 □

例

设 $\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$，则 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关。

例

设 $\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$，则 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关。

证明.

欲证行向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关，即证列向量组 $\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2^T, \cdots, \boldsymbol{e}_n^T$ 线性无关。考察相应的齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^T & \boldsymbol{e}_2^T & \cdots & \boldsymbol{e}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

显然它只有零解，故 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关。 □

例

设 $\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$，则 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关。

证明.

欲证行向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关，即证列向量组 $\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2^T, \cdots, \boldsymbol{e}_n^T$ 线性无关。考察相应的齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^T & \boldsymbol{e}_2^T & \cdots & \boldsymbol{e}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

显然它只有零解，故 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关。 $\square$

注

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ 称为基本向量。$\mathbb{R}^n$ 中任何向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 都可以由 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n.$$

例

包含零向量的向量组是线性相关的。

例

包含零向量的向量组是线性相关的。

证明.

设该向量组为 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$，则存在 n_A 个不全为零的数 $1, 0, \cdots, 0$ 使得

$$1\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0},$$

故该向量组线性相关。 □

例 (部分相关，则整体相关)

若向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 的某个部分组线性相关，则向量组 A 也线性相关。

例 (部分相关，则整体相关)

若向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 的某个部分组线性相关，则向量组 A 也线性相关。

证明.

不妨设部分组 $A' : \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}} (n_{A'} < n_A)$ 线性相关，则存在 $n_{A'}$ 个不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_{A'}}$ 使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_{A'}}\boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}} = \mathbf{0},$$

例 (部分相关，则整体相关)

若向量组 A : $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 的某个部分组线性相关，则向量组 A 也线性相关。

证明.

不妨设部分组 A' : $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}} (n_{A'} < n_A)$ 线性相关，则存在 $n_{A'}$ 个不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_{A'}}$ 使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_{A'}}\boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}} = \mathbf{0},$$

从而有 n_A 个不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_{A'}}, 0, \cdots, 0$，使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_{A'}}\boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}} + 0\boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关。 □

例 (部分相关，则整体相关)

若向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 的某个部分组线性相关，则向量组 A 也线性相关。

证明.

不妨设部分组 A' : $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}} (n_{A'} < n_A)$ 线性相关，则存在 $n_{A'}$ 个不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_{A'}}$ 使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_{A'}}\boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}} = \mathbf{0},$$

从而有 n_A 个不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_{A'}}, 0, \cdots, 0$，使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_{A'}}\boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}} + 0\boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关。 □

例 (整体无关，则部分无关)

若向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，则其任一部分向量组也线性无关。

例 (线性相关的向量组中，不是每一个向量都能由其余向量线性表示)

对于向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 1), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -2), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1)$$

由于部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，故整体组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性相关，但 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示。

定理

对于齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

若 $m < n$，即方程个数小于未知量个数（$\boldsymbol{A}$ 为扁长型矩阵），则其必有非零解。

定理

对于齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

若 $m < n$，即方程个数小于未知量个数（$\boldsymbol{A}$ 为扁长型矩阵），则其必有非零解。

证明.

对于 $\boldsymbol{A}$，总是可以通过初等行变换，将其转化为行简化阶梯型矩阵。由于 $m < n$，故必存在自由未知量，从而必有非零解。 □

定理

任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的。

定理

任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的。

证明.

考察向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$，其对应的齐次线性方程组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)},$$

为扁长型矩阵，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解，从而向量组 A 线性相关。 □

定理

任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的。

证明.

考察向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$，其对应的齐次线性方程组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)},$$

为扁长型矩阵，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解，从而向量组 A 线性相关。 $\square$

注

- 向量个数 $>$ 向量维数 $\Longrightarrow$ 向量组必线性相关。

定理

任意 $n+1$ 个 n 维向量都是线性相关的。

证明.

考察向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$，其对应的齐次线性方程组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)},$$

为扁长型矩阵，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解，从而向量组 A 线性相关。 $\square$

注

- 向量个数 $>$ 向量维数 $\Longrightarrow$ 向量组必线性相关。
- $\mathbb{R}^n$ 的任一线性无关组最多只能含 n 个向量。

定理

若向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，而向量组 B： $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示，并且表示法惟一。

定理

若向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，而向量组 B： $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示，并且表示法惟一。

证明.

- 由于向量组 B 线性相关，故存在不全为零的数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0}.$$

  下证 $k \neq 0$。

定理

若向量组 A : $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，而向量组 B : $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示，并且表示法惟一。

证明.

- 由于向量组 B 线性相关，故存在不全为零的数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0}.$$

  下证 $k \neq 0$。若 $k = 0$，则由向量组 A 线性无关可知 $k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 全为零，这与 $k, k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 不全为零矛盾。

定理

若向量组 A : $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，而向量组 B : $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示，并且表示法惟一。

证明.

- 由于向量组 B 线性相关，故存在不全为零的数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0}.$$

下证 $k \neq 0$。若 $k = 0$，则由向量组 A 线性无关可知 $k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 全为零，这与 $k, k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 不全为零矛盾。于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 A 线性表示，即

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_{n_A}}{k}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}.$$

定理

若向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，而向量组 B：$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示，并且表示法惟一。

证明.

- 由于向量组 B 线性相关，故存在不全为零的数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0}.$$

  下证 $k \neq 0$。若 $k = 0$，则由向量组 A 线性无关可知 $k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 全为零，这与 $k, k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 不全为零矛盾。于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 A 线性表示，即

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_{n_A}}{k}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}.$$

- （唯一性）设有两种表示法

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}, \quad \boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}.$$

定理

若向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，而向量组 B： $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示，并且表示法惟一。

证明.

- 由于向量组 B 线性相关，故存在不全为零的数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0}.$$

  下证 $k \neq 0$。若 $k = 0$，则由向量组 A 线性无关可知 $k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 全为零，这与 $k, k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 不全为零矛盾。于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 A 线性表示，即

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_{n_A}}{k}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}.$$

- （唯一性）设有两种表示法

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}, \quad \boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}.$$

  于是

$$(k_1 - l_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 - l_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_{n_A} - l_{n_A})\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0},$$

定理

若向量组 A : $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，而向量组 B : $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示，并且表示法惟一。

证明.

- 由于向量组 B 线性相关，故存在不全为零的数 $k, k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 使得

$$k\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0}.$$

  下证 $k \neq 0$。若 $k = 0$，则由向量组 A 线性无关可知 $k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 全为零，这与 $k, k_1, k_2, \cdots, k_{n_A}$ 不全为零矛盾。于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 A 线性表示，即

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_{n_A}}{k}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}.$$

- （唯一性）设有两种表示法

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}, \quad \boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}.$$

  于是

$$(k_1 - l_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 - l_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_{n_A} - l_{n_A})\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0},$$

  由向量组 A 线性无关可知 $k_i = l_i$。故向量 $\boldsymbol{\beta}$ 由向量组 A 线性表示的表示法惟一。

$\square$

推论

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$（向量个数 $=$ 向量维数）线性无关，则 $\mathbb{R}^n$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示法惟一。

推论

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$（向量个数 $=$ 向量维数）线性无关，则 $\mathbb{R}^n$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示法惟一。

证明.

由"任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关"知，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，由前述定理可得结论成立。 □

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 0, 3)$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (2, -3, 7)$. 问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关?

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 如能表示求出其表示式。

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关?

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 如能表示求出其表示式。

解

(1) 考察 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T & \boldsymbol{\alpha}_2^T & \boldsymbol{\alpha}_3^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关?

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 如能表示求出其表示式。

解

(1) 考察 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T & \boldsymbol{\alpha}_2^T & \boldsymbol{\alpha}_3^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$. 由 $|\boldsymbol{A}|=7$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关?

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 如能表示求出其表示式。

解

(1) 考察 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T & \boldsymbol{\alpha}_2^T & \boldsymbol{\alpha}_3^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$. 由 $|\boldsymbol{A}|=7$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

(2) 由“任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关”知，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法惟一。

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关?

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 如能表示求出其表示式。

解

(1) 考察 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T \quad \boldsymbol{\alpha}_2^T \quad \boldsymbol{\alpha}_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 由 $|\boldsymbol{A}|=7$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

(2) 由“任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关”知，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法惟一。设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$$

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关?

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 如能表示求出其表示式。

解

(1) 考察 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T \quad \boldsymbol{\alpha}_2^T \quad \boldsymbol{\alpha}_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 由 $|\boldsymbol{A}|=7$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

(2) 由"任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关"知，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法惟一。设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4 \implies x_1\boldsymbol{\alpha}_1^T+x_2\boldsymbol{\alpha}_2^T+x_3\boldsymbol{\alpha}_3^T=\boldsymbol{\alpha}_4^T$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^T \quad \boldsymbol{\alpha}_2^T \quad \boldsymbol{\alpha}_3^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$$

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)$. 问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关?

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 如能表示求出其表示式。

解

(1) 考察 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T\quad\boldsymbol{\alpha}_2^T\quad\boldsymbol{\alpha}_3^T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$. 由 $|\boldsymbol{A}|=7$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

(2) 由“任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关”知，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法惟一。设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4 \Longrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1^T+x_2\boldsymbol{\alpha}_2^T+x_3\boldsymbol{\alpha}_3^T=\boldsymbol{\alpha}_4^T$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^T\quad\boldsymbol{\alpha}_2^T\quad\boldsymbol{\alpha}_3^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$$

解此方程组得惟一解 $x_1=1,x_2=-1,x_3=2$，故 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

解

由已知有

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}}$$

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

解

由已知有

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}}$$

欲证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，只需证明 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解。

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

解

由已知有

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}}$$

欲证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，只需证明 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解。因 $|\boldsymbol{C}|=0$，故存在 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，从而使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

例

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

例

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

证明.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}}$$

例

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

证明.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}}$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}$。

例

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

证明.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}}$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}$。

$(\Rightarrow)$ 欲证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，只需证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解。由 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关知 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \implies \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$；再由 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 可逆知，$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。

例

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

证明.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}}$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}$。

($\Rightarrow$)　欲证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，只需证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解。由 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关知 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \implies \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$；再由 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 可逆知，$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。

($\Leftarrow$)　欲证 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，只需证 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解。由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \implies \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$；再由 $\boldsymbol{C}$ 可逆知，$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。 □

定理 (短无关，则长无关；长相关，则短相关)

(1) 若向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A} \in \mathbb{R}^n$ 线性无关，则把这些向量各任意添加 m 个分量所得的向量组 A'： $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}^* \in \mathbb{R}^{n+m}$ 也线性无关。

(2) 若向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A} \in \mathbb{R}^n$ 线性相关，则它们各去掉相同位置的若干个分量所得到的新向量组也线性相关。

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

向量组及其线性相关性

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \end{pmatrix} \text{线性无关} \quad {\color{blue}\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ {\color{red}a_{n+1,1}} \\ {\color{red}\vdots} \\ {\color{red}a_{n+m,1}} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \\ {\color{red}a_{n+1,n_A}} \\ {\color{red}\vdots} \\ {\color{red}a_{n+m,n_A}} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \end{pmatrix} \text{线性无关} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \color{red}{a_{n+1,1}} \\ \vdots \\ \color{red}{a_{n+m,1}} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \\ \color{red}{a_{n+1,n_A}} \\ \vdots \\ \color{red}{a_{n+m,n_A}} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \color{red}{a_{n+1,1}} \\ \vdots \\ \color{red}{a_{n+m,1}} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \\ \color{red}{a_{n+1,n_A}} \\ \vdots \\ \color{red}{a_{n+m,n_A}} \end{pmatrix} \text{线性相关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \end{pmatrix} \text{线性无关} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \\ a_{n+1,n_A} \\ \vdots \\ a_{n+m,n_A} \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \\ a_{n+1,n_A} \\ \vdots \\ a_{n+m,n_A} \end{pmatrix} \text{线性相关} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \end{pmatrix} \text{线性相关}$$

证明.

两者互为逆否命题，证明第一个即可。

证明.

两者互为逆否命题，证明第一个即可。向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，则齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=\mathbf{0},$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n_A}x_{n_A} & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n_A}x_{n_A} & = & 0 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n_A}x_{n_A} & = & 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

只有零解。

证明.

两者互为逆否命题，证明第一个即可。向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，则齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=\mathbf{0},$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n_A}x_{n_A} & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n_A}x_{n_A} & = & 0 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n_A}x_{n_A} & = & 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

只有零解。不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^*=\begin{pmatrix}a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ni} & a_{n+1,i}\end{pmatrix}^T,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

证明.

两者互为逆否命题，证明第一个即可。向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，则齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=\mathbf{0},$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n_A}x_{n_A} & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n_A}x_{n_A} & = & 0 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n_A}x_{n_A} & = & 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

只有零解。不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^*=\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ni} & a_{n+1,i}\end{pmatrix}^T,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

考察齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^*+x_2\boldsymbol{\alpha}_2^*+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}^*=\mathbf{0}$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n_A}x_{n_A} & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n_A}x_{n_A} & = & 0, \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n_A}x_{n_A} & = & 0, \\ a_{n+1,1}x_1 & + & a_{n+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n+1,n_A}x_{n_A} & = & 0, \end{array}\right. \tag{7}$$

显然，方程组 (7) 的解必为方程组 (6) 的解。

证明.

两者互为逆否命题，证明第一个即可。向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性无关，则齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}=\mathbf{0},$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n_A}x_{n_A} & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n_A}x_{n_A} & = & 0 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n_A}x_{n_A} & = & 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

只有零解。不妨设每个向量增加了一个分量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^*=\begin{pmatrix}a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ni} & a_{n+1,i}\end{pmatrix}^T,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

考察齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^*+x_2\boldsymbol{\alpha}_2^*+\cdots+x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}^*=\mathbf{0}$$

即

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n_A}x_{n_A} & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n_A}x_{n_A} & = & 0, \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n_A}x_{n_A} & = & 0, \\ a_{n+1,1}x_1 & + & a_{n+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n+1,n_A}x_{n_A} & = & 0, \end{array}\right. \tag{7}$$

显然，方程组 (7) 的解必为方程组 (6) 的解。而方程组 (6) 只有零解，故方程组 (7) 也只有零解，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}^*$ 线性无关。 □

注

设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

注

设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

证明.

设向量组 A : $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关，把这些向量各任意添加 m 个全为零的分量，所得到的新向量组记为 A' : $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}^*$。

注

设向量组线性相关，若增加的分量全为零，则得到的新向量组也线性相关。

证明.

设向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$ 线性相关，把这些向量各任意添加 m 个全为零的分量，所得到的新向量组记为 A'： $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}^*$。由于向量组 A 与向量组 A' 对应的齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A} = \mathbf{0}$$

与

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \cdots + x_{n_A}\boldsymbol{\alpha}_{n_A}^* = \mathbf{0},$$

完全相同，故新向量组 A' 也线性相关。 □

小结

对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。

小结

对应位置全为零的向量，不影响向量组的线性相关性。

如

$$A: \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ 0 \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad A': \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1,n_A} \\ a_{2,n_A} \\ \vdots \\ a_{n,n_A} \end{pmatrix}$$

线性相关性一致。

例

考察以下向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例

考察以下向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\5\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\\6\\9\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\\3\end{pmatrix}$$

解

去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

线性无关，故原向量组线性无关。

目录

定义 (向量组的秩)

对于向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$，若能从中挑出部分组 $A':\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}}$ $(n_{A'}\leq n_A)$，满足

- 部分组 A' 线性无关；
- 整体组 A 可由部分组 A' 线性表示,

则称 $n_{A'}$ 为向量组 A 的秩 (rank)，记作

$$r_A=n_{A'}.$$

定义 (向量组的秩)

对于向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_A}$，若能从中挑出部分组 $A':\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_{A'}}$ $(n_{A'}\leq n_A)$，满足

- 部分组 A' 线性无关；
- 整体组 A 可由部分组 A' 线性表示，

则称 $n_{A'}$ 为向量组 A 的秩 (rank)，记作

$$r_A=n_{A'}.$$

注

- 若向量组 A 线性无关，则 $r_A=n_A$；
- 只含零向量的向量组的秩为零；
- 只含一个非零向量的向量组的秩为 1。

设有三个向量组 A, B, C.

注

向量组的线性表示，具备

- 自反性：A 可由自身线性表示；
- 传递性：设 A 可由 B 线性表示，B 又可由 C 线性表示，则 A 可由 C 线性表示；
- 不具备对称性：A 可由 B 线性表示，但 B 不一定能由 A 线性表示。

设有三个向量组 A, B, C.

注

向量组的线性表示，具备

- 自反性：A 可由自身线性表示；
- 传递性：设 A 可由 B 线性表示，B 又可由 C 线性表示，则 A 可由 C 线性表示；
- 不具备对称性：A 可由 B 线性表示，但 B 不一定能由 A 线性表示。

注

向量组的等价，具备

- 自反性：A 和自身等价；
- 对称性：若 A 与 B 等价，则必有 B 与 A 等价；
- 传递性：设 A 与 B 等价，B 与 C 等价，则 A 与 C 等价。

定理

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，且 $n_B > n_A$，则向量组 B 线性相关。

定理

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，且 $n_B > n_A$，则向量组 B 线性相关。

证明.

设向量组 A, B 对应的矩阵分别为 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n_A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n_B}$。由向量组 B 可由向量组 A 线性表示可知，存在矩阵 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n_A\times n_B}$ 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.$$

定理

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，且 $n_B > n_A$，则向量组 B 线性相关。

证明.

设向量组 A, B 对应的矩阵分别为 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n_A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n_B}$。由向量组 B 可由向量组 A 线性表示可知，存在矩阵 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n_A \times n_B}$ 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.$$

欲证向量组 B 线性相关，只需证齐次线性方程组

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

有非零解。

定理

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，且 $n_B > n_A$，则向量组 B 线性相关。

证明.

设向量组 A, B 对应的矩阵分别为 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n_A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n_B}$。由向量组 B 可由向量组 A 线性表示可知，存在矩阵 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n_A \times n_B}$ 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.$$

欲证向量组 B 线性相关，只需证齐次线性方程组

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

有非零解。由 $n_A < n_B$ 知 $\boldsymbol{C}$ 为扁长型矩阵，故 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 存在非零解，从而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解。

□

推论

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，且 B 线性无关，则

$$n_B \leq n_A.$$

推论

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，且 B 线性无关，则

$$n_B \leq n_A.$$

推论

设向量组 A 的秩 r，则 A 中任何 $r+1$ 个向量线性相关。

向量组的秩及其极大线性无关组

推论

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，且 B 线性无关，则

$$n_B \leq n_A.$$

推论

设向量组 A 的秩 r，则 A 中任何 $r+1$ 个向量线性相关。

证明.

设

- 向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$；
- 向量组 $B: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 由 A 的 r 个线性无关的向量组成，且 A 可由 B 线性表示；
- 向量组 C 由 A 中任选的 $r+1$ 个向量组成。

由于 A 中可由向量组 B 线性表示，故 C 可由 B 线性表示，又 $n_C = r+1 > r = n_B$，故 C 线性相关。 □

定理 (向量组秩的等价定义与极大线性无关组)

对于向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$，若能从其中挑出部分组 A'：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，满足

- 部分组 A' 线性无关；
- 整体组 A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关，

则称该部分组 A' 为向量组 A 的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

定理 (向量组秩的等价定义与极大线性无关组)

对于向量组 A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$，若能从其中挑出部分组 A'： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，满足

- 部分组 A' 线性无关；
- 整体组 A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关，

则称该部分组 A' 为向量组 A 的一个极大线性无关组，简称极大无关组。
极大无关组 A' 所含向量的个数 $n_{A'} = r$，称为向量组 A 的秩。

定理 (向量组秩的等价定义与极大线性无关组)

对于向量组 $A:\ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_A}$，若能从其中挑出部分组 $A':\ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，满足

- 部分组 A' 线性无关；
- 整体组 A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关，

则称该部分组 A' 为向量组 A 的一个极大线性无关组，简称极大无关组。
极大无关组 A' 所含向量的个数 $n_{A'} = r$，称为向量组 A 的秩。

注

- 秩为 r 的向量组中，任一个线性无关的部分组最多含有 r 个向量；
- 一般来说，极大无关组不惟一；
- 不同的极大无关组所含向量个数相同；
- 极大无关组与原向量组等价;
- 极大无关组是原向量组的全权代表。

定理

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，则 $r_B \leq r_A$.

定理

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，则 $r_B \leq r_A$.

证明.

不妨设 A' 与 B' 分别为 A 和 B 的极大无关组。

定理

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，则 $r_B \leq r_A$.

证明.

不妨设 A' 与 B' 分别为 A 和 B 的极大无关组。

- 由 B 与 B' 等价知，B' 可由 B 线性表示；
- 由已知，B 可由 A 线性表示；
- 由 A 与 A' 等价知，A 可由 A' 线性表示；

向量组的秩及其极大线性无关组

定理

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，则 $r_B \leq r_A$.

证明.

不妨设 A' 与 B' 分别为 A 和 B 的极大无关组。

- 由 B 与 B' 等价知，B' 可由 B 线性表示；
- 由已知，B 可由 A 线性表示；
- 由 A 与 A' 等价知，A 可由 A' 线性表示；

于是，B' 可由 A' 线性表示，由前述推论知

$$r_B = n_{B'} \leq n_{A'} = r_A.$$

□

定理

若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，则 $r_B \leq r_A$.

证明.

不妨设 A' 与 B' 分别为 A 和 B 的极大无关组。

- 由 B 与 B' 等价知，B' 可由 B 线性表示；
- 由已知，B 可由 A 线性表示；
- 由 A 与 A' 等价知，A 可由 A' 线性表示；

于是，B' 可由 A' 线性表示，由前述推论知

$$r_B = n_{B'} \leq n_{A'} = r_A.$$

□

定理

等价向量组的秩相等。

目录

定义 (行秩 & 列秩)

- A 的行向量组的秩，称为矩阵 A 的行秩。
- A 的列向量组的秩，称为矩阵 A 的列秩。

定义 (行秩 & 列秩)

- $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩。
- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩。

注

对于 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，其行秩 $\leq m$，列秩 $\leq n$。

定义 (阶梯型矩阵)

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 零行在最下方；

(2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯型矩阵。

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 (行简化阶梯型矩阵)

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

(1) 它是阶梯型矩阵；

(2) 非零首元为 1；

(3) 非零行首元所在的列除其自身外，其余元素全为零，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为行简化阶梯型矩阵。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例

验证阶梯型矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ a_{11} \neq 0, a_{23} \neq 0, a_{34} \neq 0$$

的行秩 $= 3$，列秩 $= 3$。

解

(1)

$$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\ 0&0&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\ 0&0&0&a_{34}&a_{35}\\ 0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

取短向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2^*=\begin{pmatrix}0&a_{23}&a_{24}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3^*=\begin{pmatrix}0&0&a_{34}\end{pmatrix}$,
其对应的齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{*T}&\boldsymbol{\alpha}_2^{*T}&\boldsymbol{\alpha}_3^{*T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&&\\ a_{13}&a_{23}&\\ a_{14}&a_{24}&a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

只有零解，故 $\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\boldsymbol{\alpha}_3^*$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关（短无关则长无关）
。

解

(1)

$$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\alpha}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\0&0&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\0&0&0&a_{34}&a_{35}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

取短向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2^*=\begin{pmatrix}0&a_{23}&a_{24}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3^*=\begin{pmatrix}0&0&a_{34}\end{pmatrix}$，其对应的齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{*T}&\boldsymbol{\alpha}_2^{*T}&\boldsymbol{\alpha}_3^{*T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&&\\a_{13}&a_{23}&\\a_{14}&a_{24}&a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

只有零解，故 $\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\boldsymbol{\alpha}_3^*$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关（短无关则长无关）。而零向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由任何向量线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大无关组，从而矩阵 A 的行秩为 3。

解

(2) 注意

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 & \boldsymbol{\beta}_4 & \boldsymbol{\beta}_5 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{\beta}_1^* & \boldsymbol{\beta}_2^* & \boldsymbol{\beta}_3^* & \boldsymbol{\beta}_4^* & \boldsymbol{\beta}_5^* \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \end{array}$$

有相同的线性关系，故只需考虑向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_2^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*, \boldsymbol{\beta}_5^*$。

解

(2) 注意

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 & \boldsymbol{\beta}_4 & \boldsymbol{\beta}_5 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{\beta}_1^* & \boldsymbol{\beta}_2^* & \boldsymbol{\beta}_3^* & \boldsymbol{\beta}_4^* & \boldsymbol{\beta}_5^* \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

有相同的线性关系，故只需考虑向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_2^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*, \boldsymbol{\beta}_5^*$。取其部分组 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*$，其对应的齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{\beta}_1^* \quad \boldsymbol{\beta}_3^* \quad \boldsymbol{\beta}_4^*) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

只有零解，故 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*$ 线性无关。

解

(2) 注意

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 & \boldsymbol{\beta}_4 & \boldsymbol{\beta}_5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{\beta}_1^* & \boldsymbol{\beta}_2^* & \boldsymbol{\beta}_3^* & \boldsymbol{\beta}_4^* & \boldsymbol{\beta}_5^*
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\text{ 与 }
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35}
\end{pmatrix}
$$

有相同的线性关系，故只需考虑向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_2^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*, \boldsymbol{\beta}_5^*$。取其部分组 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*$，其对应的齐次线性方程组

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^* & \boldsymbol{\beta}_3^* & \boldsymbol{\beta}_4^* \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{13} & a_{14} \\
0 & a_{23} & a_{24} \\
0 & 0 & a_{34}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{pmatrix}
= \mathbf{0}
$$

只有零解，故 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*$ 线性无关。因任意 $(3+1) = 4$ 个 3 维向量必线性相关，故 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*$ 为向量组 $\boldsymbol{\beta}_1^*, \boldsymbol{\beta}_2^*, \boldsymbol{\beta}_3^*, \boldsymbol{\beta}_4^*, \boldsymbol{\beta}_5^*$ 的极大无关组，从而 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 也是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4, \boldsymbol{\beta}_5$ 的极大无关组，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 3。

结论

对于阶梯型矩阵，其行秩等于列秩，即非零行的行数。

定理

初等行变换不改变矩阵的行秩。

定理

初等行变换不改变矩阵的行秩。

证明（只需证明每做一次交换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变）

(1) 交换变换不改变矩阵的行秩。

定理

初等行变换不改变矩阵的行秩。

证明（只需证明每做一次交换、倍乘和倍加变换，矩阵的行秩不改变）

(1) 交换变换不改变矩阵的行秩。

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \boldsymbol{B}$$

因 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, , \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, , \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩。

证明（续）

(2) 倍乘变换不改变矩阵的行秩。

证明（续）

(2) 倍乘变换不改变矩阵的行秩。

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[c\neq 0]{r_i\times c} \boldsymbol{B}.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩。

证明（续）

(2) 倍乘变换不改变矩阵的行秩。

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[c\neq 0]{r_i \times c} \boldsymbol{B}.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩。

(3) 倍加变换不改变矩阵的行秩。

证明（续）

(2) 倍乘变换不改变矩阵的行秩。

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[c\neq 0]{r_i\times c} \boldsymbol{B}.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩。

(3) 倍加变换不改变矩阵的行秩。

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i+r_j\times c} \boldsymbol{B},$$

因 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

$$A: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组

$$B: \ \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i + c\boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$$

等价，故 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩。

定理

初等行变换不改变矩阵的列秩。

定理

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明.

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，且

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = \boldsymbol{B}$$

定理

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明.

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，且

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = \boldsymbol{B}$$

在 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 中相同位置任取某 s 个列向量：

$$A' : \boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_s} \quad \text{和} \quad B' : \boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_s},$$

定理

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明.

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$，且

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = \boldsymbol{B}$$

在 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 中相同位置任取某 s 个列向量：

$$A' : \boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_s} \quad \text{和} \quad B' : \boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_s},$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

定理

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明.

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，且

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = \boldsymbol{B}$$

在 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 中相同位置任取某 s 个列向量：

$$A' : \boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_s} \quad \text{和} \quad B' : \boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_s},$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

注意到方程组 (10) 是方程组 (9) 经过高斯消元法得到，故两方程组同解。

定理

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明.

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，且

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = \boldsymbol{B}$$

在 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 中相同位置任取某 s 个列向量：

$$A' : \boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_s} \quad \text{和} \quad B' : \boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_s},$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

注意到方程组 (10) 是方程组 (9) 经过高斯消元法得到，故两方程组同解。即向量组 A' 和 B' 有完全相同的线性关系，从而 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列秩相等。 □

定理

初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明.

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，且

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = \boldsymbol{B}$$

在 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 中相同位置任取某 s 个列向量：

$$A' : \boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_s} \quad \text{和} \quad B' : \boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_s},$$

设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_{i_s} = \boldsymbol{0}, \tag{9}$$
$$x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1} + x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{\beta}_{i_s} = \boldsymbol{0}, \tag{10}$$

注意到方程组 (10) 是方程组 (9) 经过高斯消元法得到，故两方程组同解。即向量组 A' 和 B' 有完全相同的线性关系，从而 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列秩相等。 □

注

上述定理提供了求向量组的秩与极大无关组的一种简便而有效的方法。

例 (重要题型)

设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

例 (重要题型)

设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\6\\4\\-1\end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解

作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$，由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\\&\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\div 3}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

解 (续)

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

将最后一个阶梯型矩阵 $\boldsymbol{B}$ 记为 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4, \boldsymbol{\beta}_5)$。

解 (续)

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

将最后一个阶梯型矩阵 $\boldsymbol{B}$ 记为 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4, \boldsymbol{\beta}_5)$。
易知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组，故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 也为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，故

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5) = 3,$$

且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \\ \boldsymbol{\alpha}_5 &= \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_4, \end{aligned}$$

同理可证，初等列变换也不改变矩阵的列秩与行秩。

同理可证，初等列变换也不改变矩阵的列秩与行秩。

定理

初等变换不改变矩阵的行秩与列秩。

同理可证，初等列变换也不改变矩阵的列秩与行秩。

定理

初等变换不改变矩阵的行秩与列秩。

定理

矩阵的行秩等于其列秩。

同理可证，初等列变换也不改变矩阵的列秩与行秩。

定理

初等变换不改变矩阵的行秩与列秩。

定理

矩阵的行秩等于其列秩。

证明.

对 A 做初等行变换得到阶梯型矩阵 B，则有

$$A\text{的行秩} = B\text{的行秩} = B\text{的列秩} = A\text{的列秩}.$$

$\square$

定义 (矩阵的秩)

既然矩阵的行秩等于列秩，就把它们定义为矩阵的秩，记作

$$r(\boldsymbol{A}) \quad \text{或} \quad R(\boldsymbol{A}) \quad \text{或} \quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$$

定义 (矩阵的秩)

既然矩阵的行秩等于列秩，就把它们定义为矩阵的秩，记作

$$r(\boldsymbol{A}) \quad \text{或} \quad R(\boldsymbol{A}) \quad \text{或} \quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$$

定义 (满秩矩阵)

对于 n 阶方阵，若

$$r(\boldsymbol{A}) = n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

定理

对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$。

定理

对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$。

证明.

只需证明前两个表述等价。

定理

对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$。

证明.

只需证明前两个表述等价。

- (1)⇒(2) 设 $r(\boldsymbol{A}) = n$，记 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯型矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行，

定理

对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$。

证明.

只需证明前两个表述等价。

- (1)⇒(2) 设 $r(\boldsymbol{A}) = n$，记 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯型矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行，由行简化阶梯型矩阵的结构知 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$，

定理

对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$。

证明.

只需证明前两个表述等价。

- (1)⇒(2) 设 $r(\boldsymbol{A}) = n$，记 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯型矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行，由行简化阶梯型矩阵的结构知 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{I}$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

定理

对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$。

证明.

只需证明前两个表述等价。

- (1)⇒(2) 设 $r(\boldsymbol{A}) = n$，记 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯型矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行，由行简化阶梯型矩阵的结构知 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{I}$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆。
- (2)⇒(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，记 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_0$，则

$$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

定理

对于 n 阶方阵，下列表述等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

(2) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵。

(3) $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵。

(4) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$。

证明.

只需证明前两个表述等价。

- (1)⇒(2) 设 $r(\boldsymbol{A}) = n$，记 $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯型矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个非零行，由行简化阶梯型矩阵的结构知 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆。
- (2)⇒(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，记 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_0$，则

$$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换可以得到 $\boldsymbol{I}$，故 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{I}) = n$。

□

定义 (子式与主子式)

对矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，任意挑选 k 行 $(i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行) 与 k 列 $(j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列)，其交点上的 k^2 个元素按原顺序排成的 k 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix} \tag{11}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子行列式，简称 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式。

定义 (子式与主子式)

对矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，任意挑选 k 行 $(i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行) 与 k 列 $(j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列)，其交点上的 k^2 个元素按原顺序排成的 k 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix} \tag{11}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子行列式，简称 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式。

- 当 (11) 等于零时，称为 k 阶零子式;
- 当 (11) 不等于零时，称为 k 阶非零子式;
- 当 (11) 的 $j_1=i_1$，$j_2=i_2$，$\cdots$，$j_k=i_k$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶主子式。

注

若 $\boldsymbol{A}$ 存在 r 阶非零子式，而所有 $r+1$ 阶子式 (如果有) 都等于零，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

注

若 $\boldsymbol{A}$ 存在 r 阶非零子式，而所有 $r+1$ 阶子式 (如果有) 都等于零，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

事实上，由行列式的按行展开可知，若所有 $r+1$ 阶子式都等于零，可得到所有更高阶的子式都等于零。

定理

$r(\boldsymbol{A}) = r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

定理

$r(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

$(\Rightarrow)$ 设 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关。记 $\boldsymbol{A}$ 前 r 行构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_1$，则其行秩和列秩皆为 r。不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，记 $\boldsymbol{A}_1$ 前 r 个列向量构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_{11}$。

定理

$r(\boldsymbol{A}) = r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

$(\Rightarrow)$ 设 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关。记 $\boldsymbol{A}$ 前 r 行构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_1$，则其行秩和列秩皆为 r。不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，记 $\boldsymbol{A}_1$ 前 r 个列向量构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_{11}$。

- $\boldsymbol{A}_{11}$ 为满秩矩阵，其行列式为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶非零子式；

定理

$r(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

($\Rightarrow$) 设 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关。记 $\boldsymbol{A}$ 前 r 行构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_1$，则其行秩和列秩皆为 r。不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，记 $\boldsymbol{A}_1$ 前 r 个列向量构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_{11}$。

- $\boldsymbol{A}_{11}$ 为满秩矩阵，其行列式为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶非零子式；
- 因 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关，故其任意 $r+1$ 阶子式皆为零（长相关则短相关）。

定理

$r(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

$(\Rightarrow)$ 设 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关。记 $\boldsymbol{A}$ 前 r 行构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_1$，则其行秩和列秩皆为 r。不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，记 $\boldsymbol{A}_1$ 前 r 个列向量构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_{11}$。

- $\boldsymbol{A}_{11}$ 为满秩矩阵，其行列式为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶非零子式；
- 因 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关，故其任意 $r+1$ 阶子式皆为零（长相关则短相关）。

综上，$\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

矩阵的秩

定理

$r(\boldsymbol{A}) = r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

($\Rightarrow$) 设 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关。记 $\boldsymbol{A}$ 前 r 行构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_1$，则其行秩和列秩皆为 r。不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，记 $\boldsymbol{A}_1$ 前 r 个列向量构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_{11}$。

- $\boldsymbol{A}_{11}$ 为满秩矩阵，其行列式为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶非零子式；
- 因 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关，故其任意 $r+1$ 阶子式皆为零（长相关则短相关）。

综上，$\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

($\Leftarrow$) 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子阵 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆。

定理

$r(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

$(\Rightarrow)$ 设 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关。记 $\boldsymbol{A}$ 前 r 行构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_1$，则其行秩和列秩皆为 r。不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，记 $\boldsymbol{A}_1$ 前 r 个列向量构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_{11}$。

- $\boldsymbol{A}_{11}$ 为满秩矩阵，其行列式为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶非零子式；
- 因 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关，故其任意 $r+1$ 阶子式皆为零（长相关则短相关）。

综上，$\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

$(\Leftarrow)$ 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子阵 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆。

- 因 $\boldsymbol{A}_{11}$ 的 r 个行向量线性无关，故 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个行向量线性无关（短无关则长无关）；

矩阵的秩

定理

$r(\boldsymbol{A}) = r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

($\Rightarrow$) 设 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关。记 $\boldsymbol{A}$ 前 r 行构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_1$，则其行秩和列秩皆为 r。不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，记 $\boldsymbol{A}_1$ 前 r 个列向量构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_{11}$。

- $\boldsymbol{A}_{11}$ 为满秩矩阵，其行列式为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶非零子式；
- 因 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关，故其任意 $r+1$ 阶子式皆为零（长相关则短相关）。

综上，$\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

($\Leftarrow$) 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子阵 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆。

- 因 $\boldsymbol{A}_{11}$ 的 r 个行向量线性无关，故 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个行向量线性无关（短无关则长无关）；
- $\boldsymbol{A}$ 的任何 $r+1$ 个行向量必线性相关（否则，$\boldsymbol{A}$ 中存在 $r+1$ 阶非零子式，这与题设矛盾）。

定理

$r(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

证明.

($\Rightarrow$) 设 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关。记 $\boldsymbol{A}$ 前 r 行构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_1$，则其行秩和列秩皆为 r。不妨设 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r 个列向量线性无关，记 $\boldsymbol{A}_1$ 前 r 个列向量构成的子阵为 $\boldsymbol{A}_{11}$。

- $\boldsymbol{A}_{11}$ 为满秩矩阵，其行列式为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶非零子式；
- 因 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关，故其任意 $r+1$ 阶子式皆为零（长相关则短相关）。

综上，$\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 r。

($\Leftarrow$) 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 阶子阵 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆。

- 因 $\boldsymbol{A}_{11}$ 的 r 个行向量线性无关，故 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个行向量线性无关（短无关则长无关）；
- $\boldsymbol{A}$ 的任何 $r+1$ 个行向量必线性相关（否则，$\boldsymbol{A}$ 中存在 $r+1$ 阶非零子式，这与题设矛盾）。

综上，$\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=r(\boldsymbol{A})=r$.

□

矩阵的秩

关于矩阵的秩的基本结论

1. A 的秩 $=$ A 的行秩 $=$ A 的列秩 $=$ A 的非零子式的最高阶数
2. 初等变换不改变矩阵的秩

性质 1

$$\max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}).$$

特别地，当 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}$ 为非零向量时，有

$$r(\boldsymbol{A}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \leq r(\boldsymbol{A}) + 1.$$

性质 1

$$\max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \le r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \le r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}).$$

特别地，当 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}$ 为非零向量时，有

$$r(\boldsymbol{A}) \le r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \le r(\boldsymbol{A}) + 1.$$

注

$$r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{cases} r(\boldsymbol{A}) & \Longleftrightarrow \boldsymbol{b}\text{可以被}\boldsymbol{A}\text{的列向量线性表示} \\ r(\boldsymbol{A}) + 1 & \Longleftrightarrow \boldsymbol{b}\text{不能被}\boldsymbol{A}\text{的列向量线性表示} \end{cases}$$

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(1) 取 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，则

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-(c_1+2c_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{0}),$$

故 $r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{0}) = r(\boldsymbol{A})$。

例

设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

(1) 取 $b=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，则

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-(c_1+2c_2)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=(A,0),$$

故 $r(A,b)=r(A,0)=r(A)$。

(2) 取 $b=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，则

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

b 不能由 A 的列向量线性表示，故 $r(A,b)=r(A)+1$.

证明.

- 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列线性表示，故

$$r(\boldsymbol{A}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

证明.

- 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列线性表示，故

$$r(\boldsymbol{A}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

同理

$$r(\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

证明.

- 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列线性表示，故

$$r(\boldsymbol{A}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

同理

$$r(\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

所以

$$\max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

证明.

- 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列线性表示，故

$$r(\boldsymbol{A}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

同理

$$r(\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

所以

$$\max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

- 设 $r(\boldsymbol{A}) = p, r(\boldsymbol{B}) = q$， $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p 和 \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

证明.

- 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列线性表示，故

$$r(\boldsymbol{A}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

同理

$$r(\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

所以

$$\max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

- 设 $r(\boldsymbol{A}) = p, r(\boldsymbol{B}) = q$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{和} \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

证明.

- 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列线性表示，故
$$r(\boldsymbol{A}) \leq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$
同理
$$r(\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$
所以
$$\max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$
- 设 $r(\boldsymbol{A}) = p, r(\boldsymbol{B}) = q$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为
$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{和} \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$
显然 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列向量组可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 线性表示，故
$$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\text{的列秩} \leq r(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q) \leq p + q.$$

□

性质 2

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}).$$

性质 2

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}).$$

证明.

设 $r(\boldsymbol{A})=p, r(\boldsymbol{B})=q$, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

性质 2

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}).$$

证明.

设 $r(\boldsymbol{A})=p, r(\boldsymbol{B})=q$, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

性质 2

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}).$$

证明.

设 $r(\boldsymbol{A})=p, r(\boldsymbol{B})=q$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q.$$

显然 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 线性表示，故

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \text{ 的列秩} \leq r(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q) \leq p+q.$$

$\square$

性质 3

$$r(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}.$$

性质 3

$$r(\boldsymbol{AB}) \le \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}.$$

证明.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，则

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

性质 3

$$r(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}.$$

证明.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，则

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故

$$r(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{AB} \text{ 的列秩} \leq \boldsymbol{A} \text{ 的列秩} = r(\boldsymbol{A}).$$

性质 3

$$r(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}.$$

证明.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，则

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故

$$r(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{AB} \text{ 的列秩} \leq \boldsymbol{A} \text{ 的列秩} = r(\boldsymbol{A}).$$

类似地，将 $\boldsymbol{B}$ 按行分块，可得

$$r(\boldsymbol{AB}) \leq r(\boldsymbol{B}).$$

$\square$

性质 3

$$r(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}.$$

证明.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，则

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故

$$r(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{AB} \text{ 的列秩} \leq \boldsymbol{A} \text{ 的列秩} = r(\boldsymbol{A}).$$

类似地，将 $\boldsymbol{B}$ 按行分块，可得

$$r(\boldsymbol{AB}) \leq r(\boldsymbol{B}).$$

□

注

对一个向量组进行线性组合，可能会使向量组的秩减小。

性质 4

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{PA}) = r(\boldsymbol{AQ}) = r(\boldsymbol{PAQ}).$$

性质 4

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{PA}) = r(\boldsymbol{AQ}) = r(\boldsymbol{PAQ}).$$

证明.

- (方法一) 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 可表示为若干个初等矩阵的乘积，而初等变换不改变矩阵的秩，故结论成立。

性质 4

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{PA}) = r(\boldsymbol{AQ}) = r(\boldsymbol{PAQ}).$$

证明.

- (方法一) 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 可表示为若干个初等矩阵的乘积，而初等变换不改变矩阵的秩，故结论成立。
- (方法二) 因

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{PA})) \leq r(\boldsymbol{PA}) \leq r(\boldsymbol{A})$$

故

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{PA}).$$

性质 4

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{PA}) = r(\boldsymbol{AQ}) = r(\boldsymbol{PAQ}).$$

证明.

- (方法一) 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 可表示为若干个初等矩阵的乘积，而初等变换不改变矩阵的秩，故结论成立。
- (方法二) 因

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{PA})) \leq r(\boldsymbol{PA}) \leq r(\boldsymbol{A})$$

故

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{PA}).$$

同理可证其他等式。

□

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，且 $m < n$，证明：$|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| = 0.$

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，且 $m < n$，证明：$|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| = 0$.

解

由

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^T) \leq \min\{m, n\} < n$$

可知

$$r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) \leq \min\{r(\boldsymbol{A}^T), r(\boldsymbol{A})\} < n,$$

于是 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 不满秩，从而 $|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| = 0$。

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，且 $r(\boldsymbol{A}) = r$，则一定存在可逆的 m 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m \times n} := \boldsymbol{U}.$$

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，且 $r(\boldsymbol{A}) = r$，则一定存在可逆的 m 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m \times n} := \boldsymbol{U}.$$

证明.

对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换，可将 $\boldsymbol{A}$ 化为有 r 个非零行的行简化阶梯型矩阵 $\boldsymbol{U}_1$，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_1.$$

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，且 $r(\boldsymbol{A}) = r$，则一定存在可逆的 m 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m\times n} := \boldsymbol{U}.$$

证明.

对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换，可将 $\boldsymbol{A}$ 化为有 r 个非零行的行简化阶梯型矩阵 $\boldsymbol{U}_1$，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_1.$$

对 $\boldsymbol{U}_1$ 做初等列变换可将 $\boldsymbol{U}_1$ 化为 $\boldsymbol{U}$，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$ 使得

$$\boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{Q}_2 \cdots \boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{U}$$

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=r$，则一定存在可逆的 m 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}_{m\times n}:=\boldsymbol{U}.$$

证明.

对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换，可将 $\boldsymbol{A}$ 化为有 r 个非零行的行简化阶梯型矩阵 $\boldsymbol{U}_1$，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_1.$$

对 $\boldsymbol{U}_1$ 做初等列变换可将 $\boldsymbol{U}_1$ 化为 $\boldsymbol{U}$，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使得

$$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{U}$$

记

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{Q},$$

则有

$$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{U}.$$

□

例 (重要题型)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,3,1,2), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,5,3,3), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,-1,a), \boldsymbol{\alpha}_4 = (3,10,k,4)$，试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩，并将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

例 (重要题型)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,3,1,2), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,5,3,3), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,-1,a), \boldsymbol{\alpha}_4 = (3,10,k,4)$，试求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩，并将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

解

将 4 个向量按列排成一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，将其化为阶梯型矩阵 $\boldsymbol{U}$，即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

解 (续)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

解 (续)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\3&5&1&10\\1&3&-1&k\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&a-1&-3\\0&0&0&k-2\end{pmatrix}$$

- 当 $k=2$ 时，最后一行为零行，此时 $r(\boldsymbol{A})=3$。
  - 当 $k=2$ 且 $a\neq 1$ 时，因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且
  $$\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{1+5a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2+a}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{3}{1-a}\boldsymbol{\alpha}_3.$$
  - 当 $k=2$ 且 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

解 (续)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- 当 $k = 2$ 时，最后一行为零行，此时 $r(A) = 3$。
  - 当 $k = 2$ 且 $a \neq 1$ 时，因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，故 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，且
  $$\alpha_4 = -\frac{1+5a}{1-a}\alpha_1 + \frac{2+a}{1-a}\alpha_2 + \frac{3}{1-a}\alpha_3.$$
  - 当 $k = 2$ 且 $a = 1$ 时，α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。
- 当 $k \neq 2$ 时，α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。
  - 当 $k \neq 2$ 且 $a \neq 1$ 时，$r(A) = 4$；
  - 当 $k \neq 2$ 且 $a = 1$ 时，$r(A) = 3$。

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $r(A) = 2$，求 t。

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $r(A) = 2$，求 t。

解

$$A \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

矩阵的秩

例

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $r(\boldsymbol{A})=2$，求 t。

解

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

由于 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$，故 $\boldsymbol{B}$ 中第 2、3 行必须成比例，即

$$\frac{-2}{2+t}=\frac{-4}{6},$$

即得 $t=1$。