线性代数
特征值问题

张晓平

武汉大学数学与统计学院

2023 年 12 月 27 日

目录

目录

目录

定义 (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶矩阵，如果存在数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零的 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 特征值，$\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的 特征向量。

定义 (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶矩阵，如果存在数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零的 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 特征值，$\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的 特征向量。

注

(1) 特征值问题是对方阵而言的；

定义 (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶矩阵，如果存在数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零的 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 特征值，$\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的 特征向量。

注

(1) 特征值问题是对方阵而言的；

(2) 特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$；

特征值与特征向量的定义

定义 (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶矩阵，如果存在数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零的 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 特征值，$\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的 特征向量。

注

(1) 特征值问题是对方阵而言的；

(2) 特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$；

(3) 由定义，$\boldsymbol{A}$ 的特征值，就是使 $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的 λ 值，即方程 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$ 的根都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

定义 (特征多项式、特征矩阵、特征方程)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 特征多项式，$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 特征方程，$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 特征矩阵。

特征值与特征向量的定义

定义 (特征多项式、特征矩阵、特征方程)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 特征多项式，$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 特征方程，$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 特征矩阵。

注

- $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 λ 的 n 次多项式。

定义 (特征多项式、特征矩阵、特征方程)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 特征多项式，$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 特征方程，$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 特征矩阵。

注

- $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 λ 的 n 次多项式。
- 特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$ 的 k 重称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值。

矩阵特征值问题的计算步骤

1. 特征值

   求解特征方程 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$，算得特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

矩阵特征值问题的计算步骤

1. 特征值

   求解特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$，算得特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

2. 特征向量

   对 $\boldsymbol{A}$ 的每个互异特征值 λ_i，求 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的 全部非零解，即 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量。

特征值与特征向量的定义

矩阵特征值问题的计算步骤

1. 特征值

   求解特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$，算得特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

2. 特征向量

   对 $\boldsymbol{A}$ 的每个互异特征值 λ_i，求 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的 全部非零解，即 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量。

定义 (特征子空间)

对 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ，$(\boldsymbol{A}\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间称为特征值 λ 的 特征子空间，记为 V_λ，即

$$V_\lambda=\{\lambda\text{对应的全部特征向量}\}\cup\{\boldsymbol{0}\}.$$

定义 (几何重数与代数重数)

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，

- 若 λ 为 k 重特征值，则称 k 为 λ 的 代数重数；
- 称 V_λ 的维数为 λ 的 几何重数，即 $\dim V_\lambda$。

定义 (几何重数与代数重数)

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，

- 若 λ 为 k 重特征值，则称 k 为 λ 的 代数重数；
- 称 V_λ 的维数为 λ 的 几何重数，即 $\dim V_\lambda$。

深入理解几何重数

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

定义 (几何重数与代数重数)

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,

- 若 λ 为 k 重特征值，则称 k 为 λ 的 代数重数;
- 称 V_λ 的维数为 λ 的 几何重数，即 $\dim V_\lambda$。

深入理解几何重数

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

- 其几何重数即为 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的向量个数，即

$$l = n - r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}),$$

定义 (几何重数与代数重数)

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，

- 若 λ 为 k 重特征值，则称 k 为 λ 的代数重数；
- 称 V_λ 的维数为 λ 的几何重数，即 $\dim V_\lambda$。

深入理解几何重数

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

- 其几何重数即为 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的向量个数，即

$$l = n - r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}),$$

- 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$ 为 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则它构成 V_λ 的一组基，且

$$V_\lambda = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_l\}$$

定理

矩阵特征值的几何重数不超过代数重数。

证明.

略。

定理

矩阵特征值的几何重数不超过代数重数。

证明.

略。

注

该定理说明：设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，求解

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

时，基础解系中向量的个数不会超过 λ 的代数重数。

例

对角阵、上（下）三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的特征多项式皆为

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})$$

故 对角阵、上（下）三角矩阵的 n 个特征值为 n 个主对角元。

例

对于数量矩阵 $k\boldsymbol{I}$,

例

对于数量矩阵 $k\boldsymbol{I}$,

- 全部特征值为 k（n 重）。

例

对于数量矩阵 $k\boldsymbol{I}$,

- 全部特征值为 k（n 重）。
- $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$，有
$$(k\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x},$$
故特征值 k 对应的特征向量是任意非零向量。

例

对于数量矩阵 $k\boldsymbol{I}$，

- 全部特征值为 k（n 重）。
- $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，有

$$(k\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x},$$

  故特征值 k 对应的特征向量是任意非零向量。
- 特征值 k 的代数重数为 n，几何重数为 n。

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

例

求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-2)^2=0$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2}=2$（二重特征值），$\lambda_3=3$。

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2} = 2$ 时，解 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 & = & \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{cases}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,2)^T$，

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,2)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_{1,2}=2$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1\ (k_1\neq 0).$$

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 4 & -2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3\\ x_2 = \frac{1}{2}x_3\\ x_3 = x_3\end{cases}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,2)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_{1,2}=2$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1 \ (k_1\neq 0).$$

特征值 $\lambda_{2,3}=2$ 的代数重数为 2，而几何重数为 1。

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 4 & -2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,2)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_{1,2}=2$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1\ (k_1\neq 0).$$

特征值 $\lambda_{2,3}=2$ 的代数重数为 2，而几何重数为 1。

- 当 $\lambda_3=3$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & -2 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 4 & -2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3\\ x_2 = \frac{1}{2}x_3\\ x_3 = x_3\end{cases}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,2)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_{1,2}=2$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1\ (k_1\neq 0).$$

特征值 $\lambda_{2,3}=2$ 的代数重数为 2，而几何重数为 1。

- 当 $\lambda_3=3$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & -2 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3\\ x_2 = x_3\\ x_3 = x_3\end{cases}$$

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array} \right.$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,2)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_{1,2}=2$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1 \ (k_1 \neq 0).$$

特征值 $\lambda_{2,3}=2$ 的代数重数为 2，而几何重数为 1。

- 当 $\lambda_3=3$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。由

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array} \right.$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,1)^T$，

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，即

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 4 & -2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}x_3\\ x_2 &= \frac{1}{2}x_3\\ x_3 &= x_3\end{cases}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,2)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_{1,2}=2$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1\ (k_1\neq 0).$$

特征值 $\lambda_{2,3}=2$ 的代数重数为 2，而几何重数为 1。

- 当 $\lambda_3=3$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。由

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -1\\ 4 & -2 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= x_3\\ x_2 &= x_3\\ x_3 &= x_3\end{cases}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,1)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3=3$ 的全部特征向量为

$$k_2\boldsymbol{\xi}_2\ (k_2\neq 0).$$

特征值与特征向量的定义

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{cases}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,2)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_{1,2}=2$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1 \ (k_1\neq 0).$$

特征值 $\lambda_{2,3}=2$ 的代数重数为 2，而几何重数为 1。

- 当 $\lambda_3=3$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{cases}$$

得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,1)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3=3$ 的全部特征向量为

$$k_2\boldsymbol{\xi}_2 \ (k_2\neq 0).$$

特征值 $\lambda_3=3$ 的代数重数为 1，几何重数也为 1。

目录

性质 1

若 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量（其中 k_1, k_2 为任意常数，但 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 \neq 0$）。

性质 1

若 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量（其中 k_1, k_2 为任意常数，但 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 \neq 0$）。

证明.

由已知条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda\boldsymbol{x}_2$ 知

$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2) = k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = k_1\lambda\boldsymbol{x}_1 + k_2\lambda\boldsymbol{x}_2 = \lambda(k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2)$$

从而 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 (\neq \boldsymbol{0})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量。 □

性质 2

$\boldsymbol{A}$ 的任一特征向量所属的特征值是唯一的。

性质 2

$\boldsymbol{A}$ 的任一特征向量所属的特征值是唯一的。

证明.

若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 的特征向量，即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

这与 $\boldsymbol{x}$ 非零矛盾。 □

定义 (矩阵的迹)

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其主对角元之和 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 迹（trace）。

定义 (矩阵的迹)

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其主对角元之和 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 迹（trace）。

性质 3

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$；

(2) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(\boldsymbol{A})$。

特征值与特征向量的性质

定义 (矩阵的迹)

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，其主对角元之和 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 迹（trace）。

性质 3

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$；

(2) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(\boldsymbol{A})$。

注

- 可逆矩阵的所有特征值皆非零；
- 奇异矩阵至少有一个零特征值。

证明.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，故

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

证明.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，故

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

左边的展开式为

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|\boldsymbol{A}| \tag{1}$$

右边的展开式为

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{2}$$

证明.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，故

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

左边的展开式为

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|\boldsymbol{A}| \tag{1}$$

右边的展开式为

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{2}$$

比较（1）和（2）知

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}, \quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |\boldsymbol{A}|.$$

性质 4

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则

- $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值（k 为任意常数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值（m 为正整数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。

特征值与特征向量的性质

性质 4

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则

- $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值（k 为任意常数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值（m 为正整数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。

证明.

由已知有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$。

性质 4

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则

- $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值（k 为任意常数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值（m 为正整数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。

证明.

由已知有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$。

- 由 $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = k\lambda\boldsymbol{x}$ 知 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$。

特征值与特征向量的性质

性质 4

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则

- $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值（k 为任意常数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值（m 为正整数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。

证明.

由已知有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$。

- 由 $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = k\lambda\boldsymbol{x}$ 知 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$。
- 由 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{k-1}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}$ 可得 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \lambda^k\boldsymbol{x}$，从而 λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值，对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。

性质 4

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则

- $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值（k 为任意常数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值（m 为正整数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。

证明.

由已知有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$。

- 由 $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = k\lambda\boldsymbol{x}$ 知 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$。
- 由 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{k-1}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}$ 可得 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \lambda^k\boldsymbol{x}$，从而 λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值，对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。
- 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则其特征值皆非零，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x}$，从而 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。

性质 4

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则

- $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值（k 为任意常数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值（m 为正整数），其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$；
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，其对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。

证明.

由已知有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$。

- 由 $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = k\lambda\boldsymbol{x}$ 知 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$。
- 由 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{k-1}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}$ 可得 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \lambda^k\boldsymbol{x}$，从而 λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值，对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。
- 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则其特征值皆非零，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x}$，从而 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。
- 由 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 知，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}\boldsymbol{x}$，从而 $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{x}$。

性质 5

设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量是 $\boldsymbol{x}$，则

$$g(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$$

是

$$g(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m$$

的特征值，且

$$g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = g(\lambda)\boldsymbol{x}.$$

推论

设 $g(x)$ 是一个多项式，若 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ 必满足 $g(\lambda)=0$。

推论

设 $g(x)$ 是一个多项式，若 $g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ 必满足 $g(\lambda) = 0$。

证明.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，其对于的特征向量为 $\boldsymbol{x}$。由已知条件和前述定理可知

$$g(\lambda)\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{x}$ 非零，故 $g(\lambda) = 0$。 □

例

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = 5\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}$，试证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 4。

例

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = 5\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}$，试证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 4。

证明.

记 $g(x) = x^2 - 5x + 4$，则 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}.$$

因此，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值必满足

$$g(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 4。 □

例

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 2, 3$，求 $|\boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}|$。

例

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 2, 3$，求 $|\boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}|$。

解

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $g(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$ 是

$$g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}$$

的特征值。

例

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,3$，求 $|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|$。

解

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $g(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$ 是

$$g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}$$

的特征值。故 $g(\boldsymbol{A})$ 的全部特征值为 $g(1)=3,g(2)=2,g(3)=3$，从而

$$|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|=3\times 2\times 3=18.$$

例

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，求 $\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 的特征值。

例

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，求 $\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 的特征值。

解

由题设知 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|=-2\lambda^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值。

例

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，求 $\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 的特征值。

解

由题设知 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|=-2\lambda^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值。因此，若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

$$g(\lambda)=-2\lambda^{-1}+3\lambda-2$$

是 $\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 的特征值。

例

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -1, 2$，求 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值。

解

由题设知 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}| = -2\lambda^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值。因此，若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

$$g(\lambda) = -2\lambda^{-1} + 3\lambda - 2$$

是 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值。于是，$\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的全部特征值为

$$g(1) = -1,\ g(-1) = -3,\ g(2) = 3.$$

性质 6

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 的特征值相同。

性质 6

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 的特征值相同。

证明.

由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^T=\boldsymbol{A}^T-\lambda\boldsymbol{I}$$

知

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^T|=|\boldsymbol{A}^T-\lambda\boldsymbol{I}|$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值。 □

例

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量
- 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵。

例

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

- 求 A 的特征值与特征向量
- 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

解

由

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 2 & -2-\lambda & 2\\ -1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+2)$$

知 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=0$ 和 $\lambda_3=-2$。

特征值与特征向量的性质

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} x_1 & = & x_2 & -x_3 \\ x_2 & = & x_2 & \\ x_3 & = & & x_3 \end{array} \right.$$

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{ccrr} x_1 & = & x_2 & -x_3\\ x_2 & = & x_2 & \\ x_3 & = & & x_3\end{array}\right.$$

得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^T$，

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1&=&x_2&-x_3\\x_2&=&x_2&\\x_3&=&&x_3\end{cases}$$

得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的全体特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\ （k_1,k_2\ \text{不全为零}）.$$

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1&=&x_2&-x_3\\x_2&=&x_2&\\x_3&=&&x_3\end{cases}$$

得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的全体特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\ （k_1,k_2\ 不全为零）.$$

特征值 0 的代数重数为 2，几何重数也为 2。

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x_1 & = & x_2 & -x_3 \\ x_2 & = & x_2 & \\ x_3 & = & & x_3 \end{array}\right.$$

得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的全体特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2 \text{（} k_1,k_2 \text{ 不全为零）.}$$

特征值 0 的代数重数为 2，几何重数也为 2。

- 当 $\lambda_3=-2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & -2x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array}\right.$$

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rclr}x_1&=&x_2&-x_3\\x_2&=&x_2&\\x_3&=&&x_3\end{array}\right.$$

得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的全体特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\ (k_1,k_2\ \text{不全为零}).$$

特征值 0 的代数重数为 2，几何重数也为 2。

- 当 $\lambda_3=-2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&2\\-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcr}x_1&=&-x_3\\x_2&=&-2x_3\\x_3&=&x_3\end{array}\right.$$

得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,-2,1)^T$，

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcrr}x_1 & = & x_2 & -x_3\\ x_2 & = & x_2 & \\ x_3 & = & & x_3\end{array}\right.$$

得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的全体特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\ （k_1,k_2\ \text{不全为零}）.$$

特征值 0 的代数重数为 2，几何重数也为 2。

- 当 $\lambda_3=-2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcr}x_1 & = & -x_3\\ x_2 & = & -2x_3\\ x_3 & = & x_3\end{array}\right.$$

得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,-2,1)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -2 的全体特征向量为

$$k_3\boldsymbol{\xi}_3\ (k_3\neq 0).$$

解 (续)

- 当 $\lambda_{1,2}=0$ 时，解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcrr}x_1 & = & x_2 & -x_3\\ x_2 & = & x_2 & \\ x_3 & = & & x_3\end{array}\right.$$

得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的全体特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\ (k_1,k_2\text{ 不全为零}).$$

特征值 0 的代数重数为 2，几何重数也为 2。

- 当 $\lambda_3=-2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcr}x_1 & = & -x_3\\ x_2 & = & -2x_3\\ x_3 & = & x_3\end{array}\right.$$

得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,-2,1)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -2 的全体特征向量为

$$k_3\boldsymbol{\xi}_3\ (k_3\neq 0).$$

特征值 -2 的代数重数为 1，几何重数也为 1。

解 (续)

将

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3 = \lambda_3\boldsymbol{\xi}_3$$

写成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

解 (续)

将

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3 = \lambda_3\boldsymbol{\xi}_3$$

写成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3) = (\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

取

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & -2\end{pmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}.$$

由 $|\boldsymbol{P}| = 2 \neq 0$ 知 $\boldsymbol{P}$ 可逆。

目录

定义 (相似矩阵)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B},$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 相似矩阵，或者说 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。

定义 (相似矩阵)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B},$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 相似矩阵，或者说 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$。

相似矩阵的性质

- 运算规则

$$\boldsymbol{P}^{-1}(k_1\boldsymbol{A}_1 + k_2\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{P} = k_1\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P} + k_2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}$$
$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P})$$

- 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则
  - $\boldsymbol{A}^k \sim \boldsymbol{B}^k$（$k$ 为任意非负整数）
  - $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都可逆或者都不可逆。当它们都可逆时，$\boldsymbol{A}^{-1} \sim \boldsymbol{B}^{-1}$。

定理

相似矩阵的特征值相同。

定理

相似矩阵的特征值相同。

证明.

设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B},$$

故

$$|\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{I}| = |\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}||\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}|.$$

□

推论

若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则

- $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的秩；
- $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的迹；
- $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的行列式。

推论

若

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

推论

若

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

定义 (矩阵的对角化)

对 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 进行对角化，就是寻找可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

换句话说，矩阵能否对角化，等价于矩阵是否相似于某个对角阵。

定理

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

定理

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

证明.

$$P^{-1}AP = \Lambda \quad \Longleftrightarrow \quad AP = P\Lambda$$

定理

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

证明.

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$$

将 $\boldsymbol{P}$ 按列分块，即

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1, \ \boldsymbol{x}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{x}_n),$$

则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1, \ \boldsymbol{x}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \ \boldsymbol{x}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

定理

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

证明.

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$$

将 $\boldsymbol{P}$ 按列分块，即

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1, \ \boldsymbol{x}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{x}_n),$$

则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1, \ \boldsymbol{x}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \ \boldsymbol{x}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

故 $\boldsymbol{x}_1, \ \boldsymbol{x}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{x}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 分别对应于 $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \cdots, \ \lambda_n$ 的特征向量。由于 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以它们是线性无关的。 □

特征值与特征向量的性质

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，下证：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，下证：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。对 m 做数学归纳法。

1^o 当 $m=1$ 时，结论显然成立。

2^o 设 k 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_k$ 线性无关。下面考虑 $k+1$ 个互异特征值的特征向量的情况。

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，下证：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。对 m 做数学归纳法。

1^o 当 $m=1$ 时，结论显然成立。

2^o 设 k 个互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_k$ 线性无关。下面考虑 $k+1$ 个互异特征值的特征向量的情况。设

$$a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_k\boldsymbol{x}_k+a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，下证：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。对 m 做数学归纳法。

1^o 当 $m=1$ 时，结论显然成立。

2^o 设 k 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_k$ 线性无关。下面考虑 $k+1$ 个互异特征值的特征向量的情况。设

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \qquad (1)$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) = \boldsymbol{0}$$

特征值与特征向量的性质

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，下证：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。对 m 做数学归纳法。

1^o 当 $m = 1$ 时，结论显然成立。

2^o 设 k 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_k$ 线性无关。下面考虑 $k+1$ 个互异特征值的特征向量的情况。设

$$
\begin{aligned}
& a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1) \\
\Longrightarrow \quad & \boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow \quad & a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，下证：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。对 m 做数学归纳法。

1^o 当 $m=1$ 时，结论显然成立。

2^o 设 k 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_k$ 线性无关。下面考虑 $k+1$ 个互异特征值的特征向量的情况。设

$$\begin{aligned}
& a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1) \\
\Longrightarrow\ & \boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (2) \\
\xRightarrow{\lambda_{k+1}(1)-(2)}\ & a_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，下证：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。对 m 做数学归纳法。

1^o 当 $m=1$ 时，结论显然成立。

2^o 设 k 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_k$ 线性无关。下面考虑 $k+1$ 个互异特征值的特征向量的情况。设

$$
\begin{aligned}
& a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (1) \\
\Longrightarrow\ & \boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (2) \\
\xRightarrow{\lambda_{k+1}(1)-(2)}\ & a_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & a_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k
\end{aligned}
$$

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，下证：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。对 m 做数学归纳法。

1^o 当 $m=1$ 时，结论显然成立。

2^o 设 k 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_k$ 线性无关。下面考虑 $k+1$ 个互异特征值的特征向量的情况。设

$$
\begin{aligned}
& a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \qquad (1)\\
\Longrightarrow\ & \boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) = \boldsymbol{0}\\
\Longrightarrow\ & a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \qquad (2)\\
\xLongrightarrow{\lambda_{k+1}(1)-(2)}\ & a_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}\\
\Longrightarrow\ & a_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k\\
\Longrightarrow\ & a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k
\end{aligned}
$$

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，下证：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。对 m 做数学归纳法。

1^o 当 $m = 1$ 时，结论显然成立。

2^o 设 k 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_k$ 线性无关。下面考虑 $k+1$ 个互异特征值的特征向量的情况。设

$$
\begin{aligned}
& a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \qquad (1)\\
\Longrightarrow\ & \boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) = \boldsymbol{0}\\
\Longrightarrow\ & a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \quad (2)\\
\xrightarrow{\lambda_{k+1}(1)-(2)}\ & a_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}\\
\Longrightarrow\ & a_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k\\
\Longrightarrow\ & a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k\\
\Longrightarrow\ & a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = 0
\end{aligned}
$$

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，下证：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。对 m 做数学归纳法。

1^o 当 $m = 1$ 时，结论显然成立。

2^o 设 k 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_k$ 线性无关。下面考虑 $k+1$ 个互异特征值的特征向量的情况。设

$$
\begin{aligned}
& a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \qquad (1) \\
\Longrightarrow\ & \boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) = \boldsymbol{0} \\
\Longrightarrow\ & a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \quad (2) \\
\xRightarrow{\lambda_{k+1}(1)-(2)}\ & a_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0} \\
\Longrightarrow\ & a_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\ & a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\ & a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = 0 \\
\xRightarrow{\boldsymbol{x}_{k+1}\neq\boldsymbol{0}}\ & a_{k+1} = 0
\end{aligned}
$$

特征值与特征向量的性质

定理

$\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$，下证：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。对 m 做数学归纳法。

1^o 当 $m = 1$ 时，结论显然成立。

2^o 设 k 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_k$ 线性无关。下面考虑 $k+1$ 个互异特征值的特征向量的情况。设

$$\begin{aligned}
& a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \qquad (1) \\
\Longrightarrow\ & \boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}) = \boldsymbol{0} \\
\Longrightarrow\ & a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0} \quad (2) \\
\xRightarrow{\lambda_{k+1}(1)-(2)}\ & a_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0} \\
\Longrightarrow\ & a_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\ & a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\
\Longrightarrow\ & a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = 0 \\
\xRightarrow{\boldsymbol{x}_{k+1}\neq\boldsymbol{0}}\ & a_{k+1} = 0 \\
\Longrightarrow\ & \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_k,\ \boldsymbol{x}_{k+1}\text{线性无关}
\end{aligned}$$

推论

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

推论

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

定理

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_{r_i}}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$，则由所有这些特征向量（共 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ 个）构成的向量组线性无关。

推论

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

定理

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_{r_i}}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$，则由所有这些特征向量（共 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ 个）构成的向量组线性无关。

例证

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，且 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$，且 λ_1 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，而 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_3$，下证：$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关。

推论

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

定理

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_{r_i}}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$，则由所有这些特征向量（共 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ 个）构成的向量组线性无关。

例证

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，且 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$，且 λ_1 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，而 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_3$，下证：$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关。

设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

则

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0} \iff k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\lambda_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

推论

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

定理

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_{i_1},\boldsymbol{x}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{x}_{i_{r_i}}$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则由所有这些特征向量（共 $r_1+r_2+\cdots+r_m$ 个）构成的向量组线性无关。

例证

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，且 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，且 λ_1 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，而 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_3$，下证：$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 线性无关。
设有 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}, \tag{3}$$

则

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0} \iff k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+k_3\lambda_3\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}, \tag{4}$$

由“$\lambda_1\times$（3）-（4）”并结合 $\lambda_1=\lambda_2$ 知

$$k_3(\lambda_3-\lambda_1)\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$$

推论

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

定理

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_{i_1},\boldsymbol{x}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{x}_{i_{r_i}}$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则由所有这些特征向量（共 $r_1+r_2+\cdots+r_m$ 个）构成的向量组线性无关。

例证

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，且 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，且 λ_1 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，而 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_3$，下证：$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 线性无关。
设有 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3=\mathbf{0}, \tag{3}$$

则

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3=\mathbf{0} \iff k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+k_3\lambda_3\boldsymbol{x}_3=\mathbf{0}, \tag{4}$$

由“$\lambda_1\times$ (3) - (4)”并结合 $\lambda_1=\lambda_2$ 知

$$k_3(\lambda_3-\lambda_1)\boldsymbol{x}_3=\mathbf{0}$$

由 $\lambda_3-\lambda_1\neq 0,\boldsymbol{x}_3\neq\mathbf{0}$ 知 $k_3=0$。

推论

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

定理

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_{r_i}}$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则由所有这些特征向量（共 $r_1+r_2+\cdots+r_m$ 个）构成的向量组线性无关。

例证

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，且 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，且 λ_1 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，而 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_3$，下证：$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关。

设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3=\mathbf{0}, \tag{3}$$

则

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3=\mathbf{0} \iff k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+k_3\lambda_3\boldsymbol{x}_3=\mathbf{0}, \tag{4}$$

由“$\lambda_1\times$（3）-（4）”并结合 $\lambda_1=\lambda_2$ 知

$$k_3(\lambda_3-\lambda_1)\boldsymbol{x}_3=\mathbf{0}$$

由 $\lambda_3-\lambda_1\neq 0, \boldsymbol{x}_3\neq\mathbf{0}$ 知 $k_3=0$。代入（3）知 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2=\mathbf{0}$。

相似矩阵与矩阵的对角化

推论

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

定理

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_{r_i}}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$，则由所有这些特征向量（共 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ 个）构成的向量组线性无关。

例证

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，且 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$，且 λ_1 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，而 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_3$，下证：$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关。

设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

则

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0} \iff k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\lambda_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

由“$\lambda_1\times$（3）-（4）”并结合 $\lambda_1 = \lambda_2$ 知

$$k_3(\lambda_3 - \lambda_1)\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

由 $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0, \boldsymbol{x}_3 \neq \boldsymbol{0}$ 知 $k_3 = 0$。代入（3）知 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$。由 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 线性无关得 $k_1 = k_2 = 0$，

相似矩阵与矩阵的对角化

推论

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

定理

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异的特征值，对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_{r_i}}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$，则由所有这些特征向量（共 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ 个）构成的向量组线性无关。

例证

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，且 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$，且 λ_1 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，而 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_3$，下证：$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关。
设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

则

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0} \iff k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\lambda_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

由“$\lambda_1 \times$（3）-（4）”并结合 $\lambda_1 = \lambda_2$ 知

$$k_3(\lambda_3 - \lambda_1)\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

由 $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0, \boldsymbol{x}_3 \neq \boldsymbol{0}$ 知 $k_3 = 0$。代入（3）知 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$。由 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 线性无关得 $k_1 = k_2 = 0$，从而 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关。

定理

$\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是对于 $\boldsymbol{A}$ 的所有互异特征值，代数重数皆等于几何重数。

定理

$\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是对于 $\boldsymbol{A}$ 的所有互异特征值，代数重数皆等于几何重数。

注

判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化，只需检查多重特征值的代数重数是否等于几何重数，而单重特征值无需检查。

例

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

问 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化？若能，则求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$。

例

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

问 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化？若能，则求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$。

解

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=2$。

解 (续)

- 当 $\lambda_1 = -1$，解 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$。由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & x_3 \end{cases}$$

得其基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解 (续)

- 当 $\lambda_1 = -1$，解 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$。由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & x_3 \end{cases}$$

得其基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

特征值 -1 的代数重数为 1，几何重数也为 1。

解 (续)

- 当 $\lambda_1 = -1$，解 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$。由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得其基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

特征值 -1 的代数重数为 1，几何重数也为 1。

- 当 $\lambda_{2,3} = 2$，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$。由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 & \\ x_2 = & x_2 \\ x_3 = 4x_1 & -x_2 \end{cases}$$

得对应的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

解 (续)

- 当 $\lambda_1=-1$，解 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$。由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1&=&x_3\\x_2&=&0\\x_3&=&x_3\end{cases}$$

得其基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

特征值 -1 的代数重数为 1，几何重数也为 1。

- 当 $\lambda_{2,3}=2$，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$。由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1&=&x_1&\\x_2&=&&x_2\\x_3&=&4x_1&-x_2\end{cases}$$

得对应的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

特征值 2 的代数重数为 2，几何重数也为 2。

解 (续)

由于对 $\boldsymbol{A}$ 的每个互异特征值，代数重数等于几何重数，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。记

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

目录

实对称矩阵的对角化

定义 (共轭矩阵)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$，则称 $\bar{\boldsymbol{A}}=(\bar{a}_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵。

定义 (共轭矩阵)

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$，则称 $\bar{\boldsymbol{A}} = (\bar{a}_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵。

注

- $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$
- $\overline{\boldsymbol{A}}^T = \overline{\boldsymbol{A}^T}$ (共轭转置)
- 当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵时，$\overline{\boldsymbol{A}}^T = \overline{\boldsymbol{A}^T} = \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$

实对称矩阵的对角化

定义 (共轭矩阵)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$，则称 $\bar{\boldsymbol{A}}=(\bar{a}_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵。

注

- $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}=\boldsymbol{A}$
- $\overline{\boldsymbol{A}}^{T}=\overline{\boldsymbol{A}^{T}}$ (共轭转置)
- 当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵时，$\overline{\boldsymbol{A}}^{T}=\overline{\boldsymbol{A}^{T}}=\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{A}$

共轭矩阵的性质

- $\overline{k\boldsymbol{A}}=\bar{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$
- $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$
- $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$
- $\overline{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})}^{T}=\overline{\boldsymbol{B}}^{T}\overline{\boldsymbol{A}}^{T}$
- $\overline{\boldsymbol{A}^{-1}}=\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}$
- $|\overline{\boldsymbol{A}}|=\overline{|\boldsymbol{A}|}$

实对称矩阵的对角化

定理

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值都是实数。

定理

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值都是实数。

证明.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad & \Longrightarrow \quad \overline{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}^T = \overline{\lambda\boldsymbol{x}}^T \\
& \Longrightarrow \quad \overline{\boldsymbol{x}}^T\overline{\boldsymbol{A}}^T = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^T \\
& \Longrightarrow \quad \overline{\boldsymbol{x}}^T\overline{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} \\
& \Longrightarrow \quad \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^T\ \boldsymbol{x} \\
& \Longrightarrow \quad \lambda\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} \\
& \Longrightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda}
\end{aligned}
$$

$\square$

定理

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的。

定理

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的。

证明.

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$， $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$， $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$，则

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2)^T \boldsymbol{x}_1 = (\lambda_2 \boldsymbol{x}_2)^T \boldsymbol{x}_1 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_1$$

定理

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的。

证明.

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$， $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2)$， $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$，则

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2)^T\boldsymbol{x}_1 = (\lambda_2\boldsymbol{x}_2)^T\boldsymbol{x}_1 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_1$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以

$$\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_1 = 0.$$

□

实对称矩阵的对角化

定理

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的。

证明.

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$, 则

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2)^T\boldsymbol{x}_1 = (\lambda_2\boldsymbol{x}_2)^T\boldsymbol{x}_1 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_1$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以

$$\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_1 = 0.$$

□

注

对于一般方阵 $\boldsymbol{A}$, 其对应于不同特征值的特征向量是线性无关的。

实对称矩阵的对角化

定理

对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，必存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

证明.

略 $\square$

定理

对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$，必存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

证明.

略 □

注

实对称矩阵一定可以对角化。

实对称矩阵对角化的步骤

1. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互异特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，重数分别为 $k_1, \cdots, k_s$。

实对称矩阵对角化的步骤

1. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互异特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，重数分别为 $k_1, \cdots, k_s$。
2. 对每个 k_i 重特征值 λ_i，
   - 求 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，得 k_i 个线性无关的特征向量。

实对称矩阵对角化的步骤

1. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互异特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，重数分别为 $k_1, \cdots, k_s$。
2. 对每个 k_i 重特征值 λ_i，
   - 求 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，得 k_i 个线性无关的特征向量。
   - 利用施密特正交化过程，将它们正交化和标准化，得 k_i 个两两正交的单位特征向量。

实对称矩阵的对角化

实对称矩阵对角化的步骤

1. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互异特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，重数分别为 $k_1, \cdots, k_s$。
2. 对每个 k_i 重特征值 λ_i，
   - 求 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，得 k_i 个线性无关的特征向量。
   - 利用施密特正交化过程，将它们正交化和标准化，得 k_i 个两两正交的单位特征向量。
3. 把这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，便有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

例

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵。

例

设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ 为对角阵。

解

由

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

可求得 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 1$。

解 (续)

对 $\lambda_1=-2$，解 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解 (续)

对 $\lambda_1=-2$，解 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1&=&-x_3\\x_2&=&-x_3\\x_3&=&x_3\end{cases}$$

解 (续)

对 $\lambda_1 = -2$，解 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= -x_3 \\ x_2 &= -x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{cases}$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解 (续)

对 $\lambda_1 = -2$，解 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将其标准化得

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解 (续)

对 $\lambda_{2,3}=1$，解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解 (续)

对 $\lambda_{2,3}=1$，解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1 = -x_2 + x_3\\ x_2 = x_2\\ x_3 = x_3\end{cases}$$

解 (续)

对 $\lambda_{2,3}=1$，解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcrr} x_1 & = & -x_2 & +x_3\\ x_2 & = & x_2 & \\ x_3 & = & & x_3\end{array}\right.$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

解 (续)

对 $\lambda_{2,3}=1$，解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcrr} x_1 & = & -x_2 & +x_3\\ x_2 & = & x_2 & \\ x_3 & = & & x_3\end{array}\right.$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

正交化

$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2,\quad \boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{(\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\xi}_3)}{(\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2)}\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

解 (续)

对 $\lambda_{2,3}=1$，解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{lcrr} x_1 & = & -x_2 & +x_3\\ x_2 & = & x_2 & \\ x_3 & = & & x_3\end{array}\right.$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

正交化

$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2,\quad \boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{(\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\xi}_3)}{(\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2)}\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

标准化

$$\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

解 (续)

构成正交矩阵

$$Q = (q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

有

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

例

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$。

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\implies\begin{cases}x_1=x_2\\ x_2=x_2\end{cases}$$

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1)^T$。

例

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解

由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$。

- 当 $\lambda_1 = 1$ 时，解 $(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。由

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

  得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1)^T$。标准化得 $\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$。

实对称矩阵的对角化

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases} x_1=x_2 \\ x_2=x_2 \end{cases}$$

  得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1)^T$。标准化得 $\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$。

- 当 $\lambda_2=3$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_2=x_2\end{cases}$$

  得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1)^T$。标准化得 $\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$。

- 当 $\lambda_2=3$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}x_1 & = & -x_2\\ x_2 & = & x_2\end{array}\right.$$

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_2=x_2\end{cases}$$

  得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1)^T$。标准化得 $\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$。

- 当 $\lambda_2=3$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1 & = & -x_2\\ x_2 & = & x_2\end{cases}$$

  得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1)^T$。

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$。

- 当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_2=x_2\end{cases}$$

  得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1)^T$。标准化得 $\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$。

- 当 $\lambda_2=3$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{ccr}x_1 & = & -x_2\\ x_2 & = & x_2\end{array}\right.$$

  得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1)^T$。标准化得 $\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$。

解 (续)

令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

解 (续)

令

$$Q = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$A^n = Q\Lambda^n Q^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}.$$

例

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^{2022}$。

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^{2022}$。

注

求矩阵幂时，不要一味地使用对角化方法，有时可以灵活地根据题目的特点求解。

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^{2022}$。

注

求矩阵幂时，不要一味地使用对角化方法，有时可以灵活地根据题目的特点求解。

解

注意到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}(1,-1,-1)$$

实对称矩阵的对角化

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^{2022}$。

注

求矩阵幂时，不要一味地使用对角化方法，有时可以灵活地根据题目的特点求解。

解

注意到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}(1,-1,-1)$$

则

$$\boldsymbol{A}^{2022}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\color{red}{(1,-1,-1)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}}(1,-1,-1)\cdots\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}(1,-1,-1)$$

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^{2022}$。

注

求矩阵幂时，不要一味地使用对角化方法，有时可以灵活地根据题目的特点求解。

解

注意到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}(1,-1,-1)$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{2022}&=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}{\color{red}(1,-1,-1)}{\color{red}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}}(1,-1,-1)\cdots\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}(1,-1,-1)\\ &=(-3)^{2021}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}(1,-1,-1)=(-3)^{2021}\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

例

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (0,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_2 = (1,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_3 = (1,1,0)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

例

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (0, 1, 1)^T$，$\boldsymbol{p}_2 = (1, 1, 1)^T$，$\boldsymbol{p}_3 = (1, 1, 0)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$,

例

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (0,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_2 = (1,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_3 = (1,1,0)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，则 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\Lambda}$，从而

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

例

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_2=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_3=(1,1,0)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，则 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

由

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\\\hline 0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\\\hline -2&0&1\\-2&2&1\\-2&2&0\end{pmatrix}$$

例

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (0,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_2 = (1,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_3 = (1,1,0)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，则 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\Lambda}$，从而

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

由

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 \div (-1)]{c_3 - c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline -2 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

例

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_2=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_3=(1,1,0)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，则 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\\\hline 0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\left(\begin{array}{ccc}1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\\\hline -2&0&1\\-2&2&1\\-2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow[c_3\div(-1)]{c_3-c_1}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\\hline -2&0&-3\\-2&2&-3\\-2&2&-2\end{array}\right)\xrightarrow[c_2-c_3]{c_1-c_2}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline -2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{array}\right)$$

例

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_2=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_3=(1,1,0)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，$\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，则 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

由

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\\\hline 0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\\\hline -2&0&1\\-2&2&1\\-2&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3\div(-1)]{c_3-c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\\hline -2&0&-3\\-2&2&-3\\-2&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2-c_3]{c_1-c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline -2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{pmatrix}$$

知

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{pmatrix}$$

例

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$，对应 λ_1, λ_2 的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1 = (1, 2, 2)^T$，$\boldsymbol{p}_2 = (2, 1, -2)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

例

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$，对应 λ_1, λ_2 的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,2,2)^T$，$\boldsymbol{p}_2 = (2,1,-2)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解

设 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (x,y,z)^T$。

实对称矩阵的对角化

例

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$，对应 λ_1, λ_2 的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,2,2)^T$，$\boldsymbol{p}_2 = (2,1,-2)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解

设 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (x,y,z)^T$。由 $\boldsymbol{A}$ 对称及 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ 知 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 两两正交，即

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

例

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$，对应 λ_1, λ_2 的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1 = (1, 2, 2)^T$，$\boldsymbol{p}_2 = (2, 1, -2)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解

设 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (x, y, z)^T$。由 $\boldsymbol{A}$ 对称及 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ 知 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 两两正交，即

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

由

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div (-3)]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

知

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{p}_3 \text{ 可取为 } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$，对应 λ_1,λ_2 的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1=(1,2,2)^T$，$\boldsymbol{p}_2=(2,1,-2)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解

设 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(x,y,z)^T$。由 $\boldsymbol{A}$ 对称及 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$ 知 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 两两正交，即

$$\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$$

由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\div(-3)]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

知

$$\begin{cases} x_1 &= & 2x_3 \\ x_2 &= & -2x_3 \\ x_3 &= & x_3 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{p}_3 \text{ 可取为 } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解 (续)

由于 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 两两正交，对它们标准化即得正交矩阵

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \operatorname{diag}(1, -1, 0) := \boldsymbol{\Lambda}.$$

解 (续)

由于 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 两两正交，对它们标准化即得正交矩阵

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(1, -1, 0) := \boldsymbol{\Lambda}.$$

于是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

例

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$，对应 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,1,1)^T$，求 $\boldsymbol{A}$。

例

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$，对应 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^T$，求 $\boldsymbol{A}$。

解

设 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_2, λ_3 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$。

例

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$，对应 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^T$，求 $\boldsymbol{A}$。

解

设 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_2, λ_3 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$。因为 $\boldsymbol{A}$ 对称，故 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交。设 $(x, y, z)^T$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交，即

$$x + y + z = 0,$$

例

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$，对应 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,1,1)^T$，求 $\boldsymbol{A}$。

解

设 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_2, λ_3 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$。因为 $\boldsymbol{A}$ 对称，故 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交。设 $(x,y,z)^T$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交，即

$$x + y + z = 0,$$

它的一组正交的基础解系为

$$(1,-1,0)^T,\ (1,1,-2)^T.$$

故可取

$$\boldsymbol{p}_2 = (1,-1,0)^T,\ \boldsymbol{p}_3 = (1,1,-2)^T.$$

实对称矩阵的对角化

解 (续)

由于 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 两两正交，对它们标准化即得正交矩阵

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(6, 3, 3) := \boldsymbol{\Lambda}.$$

解 (续)

由于 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 两两正交，对它们标准化即得正交矩阵

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \operatorname{diag}(6, 3, 3) := \boldsymbol{\Lambda}.$$

于是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{Q}^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$