【第十一講】

樹

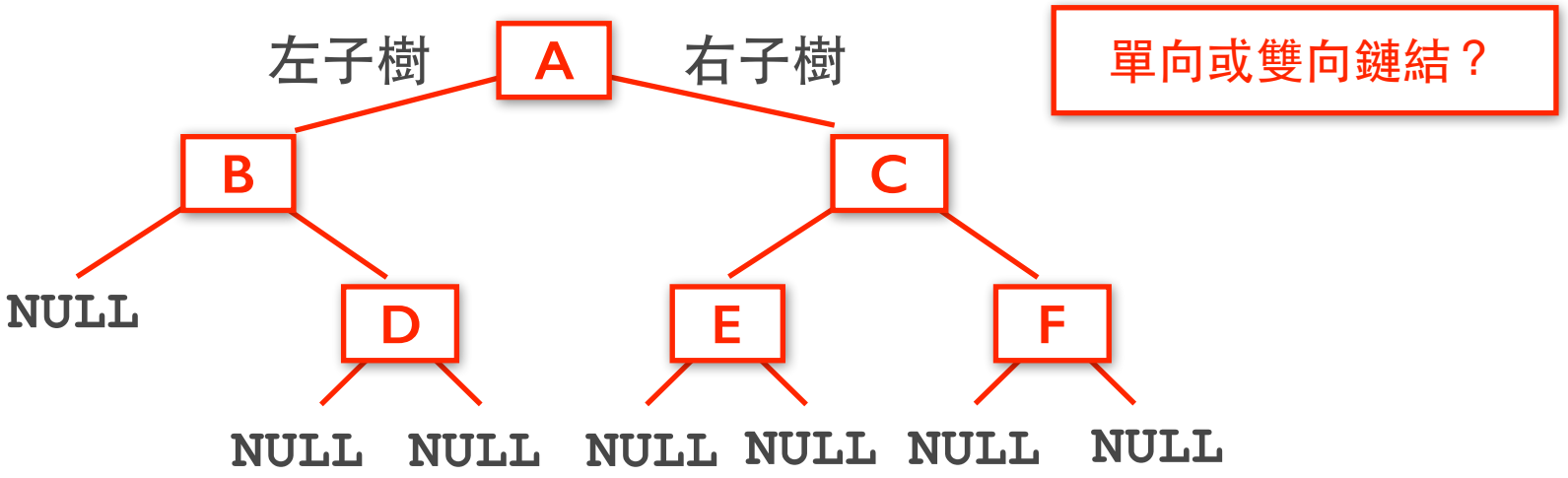
講師: 李根逸 (Ken-Yi Lee), E-mail: feis.tw@gmail.com

課程大綱

- 二元樹 (binary tree)
- 堆積 (heap)
- 使用 STL 的堆積
- 二元搜尋樹 (binary search tree)
  - 二元搜尋樹的刪除
- 使用 STL 的集合與映射 (std::set, std::map)

二元樹

- 樹（**tree**）由節點構成，在樹中任兩個節點之間不重複經過的路徑只有一條
  - 大部分節點都有一個親節點，唯一沒有親節點的我們稱為樹根 (**root**)
  - 沒有子節點的節點稱為樹葉 (**leaf**)
- 二元樹指的是每個節點最多可以有兩個子節點



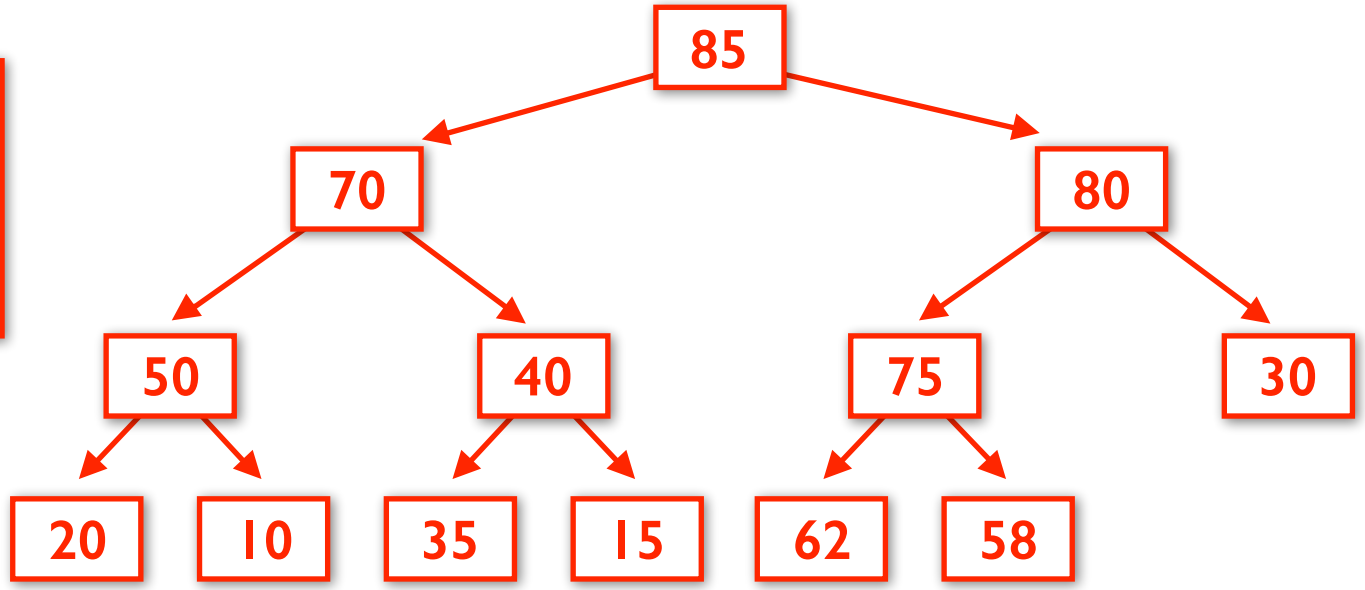
堆積

- 堆積 (heap) 裡，第 k 號元素要"大於等於"第 2k+1 與 2k+2 號元素
  - 上面這稱為 max-heap；"小於等於" 則稱為 min-heap

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
85	70	80	50	40	75	30	20	10	35	15	62	58

  - 概念上可對應到一個完整二元樹：

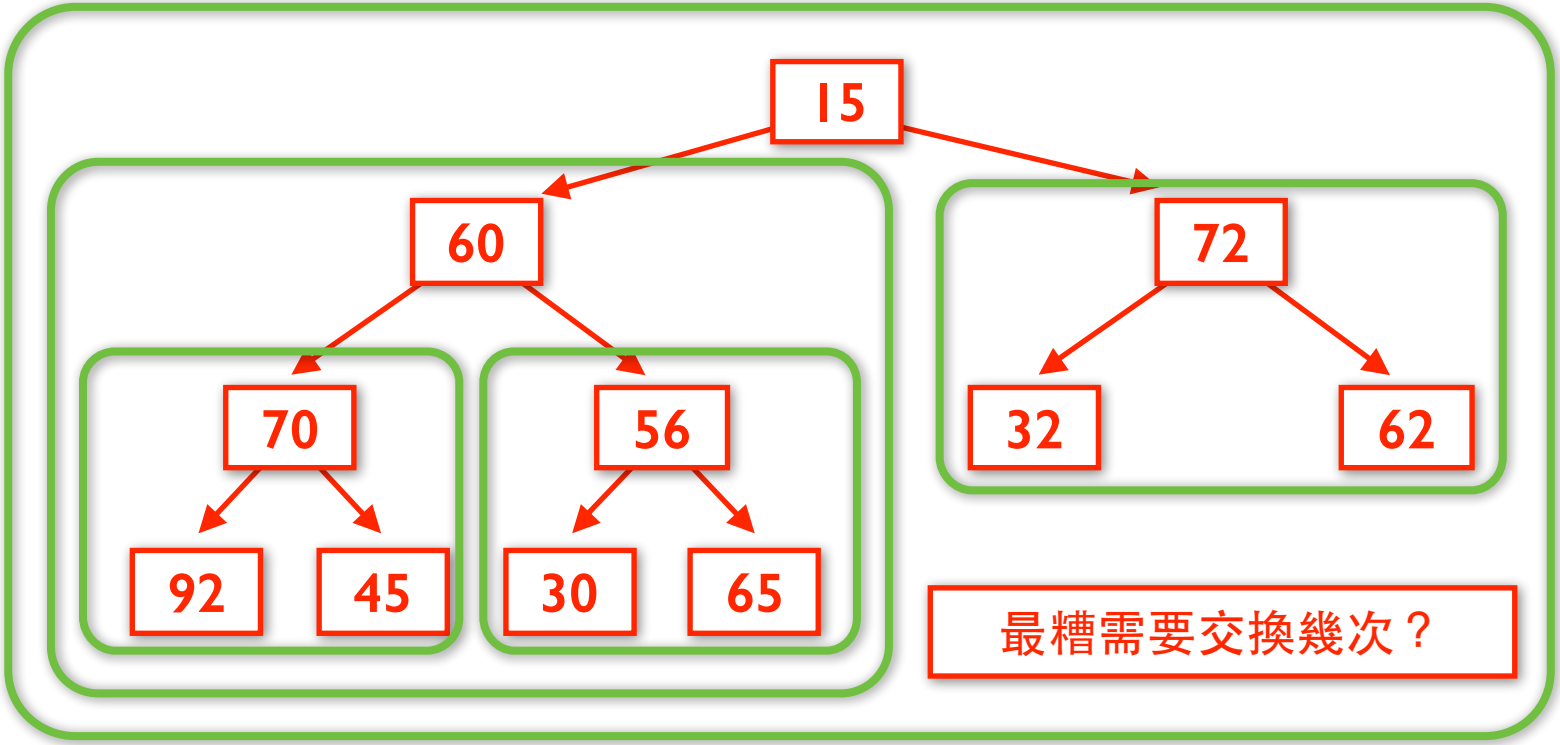
如果有 N 個元素的話，這個樹的高度 (從 root 走到 leaf) 會是多少？



【範例】建立堆積

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
15	60	72	70	56	32	62	92	45	30	65

參考動畫：http://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Heap.html



由下往上執行

上面的要比下面的大

[範例] heapify.cpp

【範例】使用堆積排序

- 建立堆積
- 放置在堆積的樹根（第一個）的值，為堆積中值最大的。我們可以利用這點來做排序：
  - 重複執行以上步驟直到堆積大小為零：
    - 將堆積中第一個與堆積中最後一個交換
    - 將堆積的大小少一
    - 此時第一個不一定是剩下的堆積中最大的，所以由第一個開始重新整理堆積 (由上往下)

參考動畫：http://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/HeapSort.html

[範例] heapify.cpp

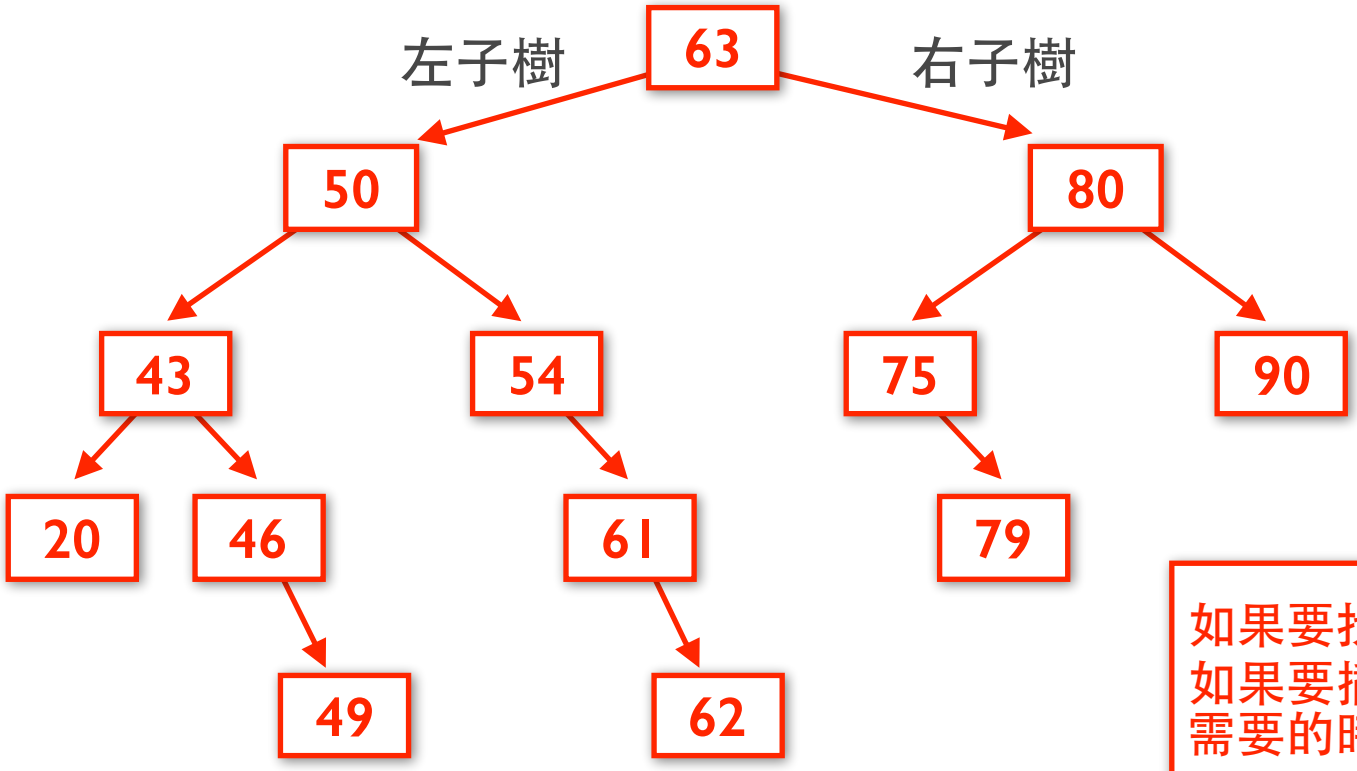
【範例】使用 STL 的堆積

- C++ STL 的 <queue> 內有 std::priority_queue 可以用來快速找出目前所有元素的極值
  - std::priority_queue 也是個自適應容器，可以使用不同的底層容器去實作：
    - 底層容器需支援隨機存取
    - 底層容器需支援 front(), push_back(), pop_back()
  - 可選擇 std::vector (預設) 或 std::deque
- C++ STL 的 <algorithm> 內有 make_heap(), push_heap(), pop_heap() 和 sort_heap() 等函式可以用來以堆積方式處理容器

[範例] priority_queue.cpp

二元搜尋樹

- 任何一個節點的值會比該節點的左子樹的值都大，會比右子樹的值都小
  - 堆積是任何一個節點的值都會大於兩邊的子樹值




```
Search(75);
Search(62);
Search(44);

Insert(76);
Insert(60);
Insert(44);
```

如果要找值的話怎麼找？
如果要插入新的值怎麼做？
需要的時間跟個數有關？

【範例】二元搜尋樹

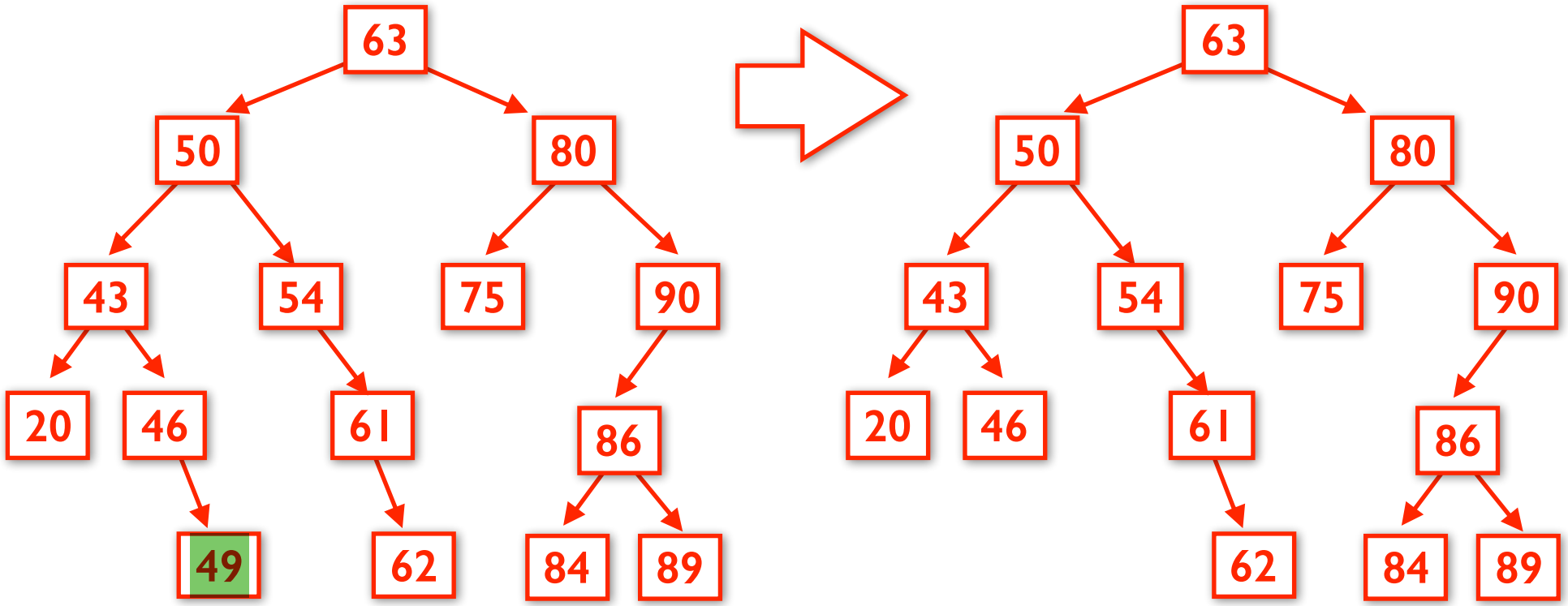
```
template<class ElemType>
class BinarySearchTree {
 public:
  BinarySearchTree();
  BinarySearchTree(const BinarySearchTree<ElemType> &rhs);
  ~BinarySearchTree();

  void Insert(const ElemType &elem);
  bool Search(const ElemType &elem);
  void Erase(const ElemType &elem);

  const BinarySearchTree<ElemType< &operator=(
      const BinarySearchTree<ElemType> &rhs);
};
```

參考動畫：http://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BST.html

[範例] binary_search_tree.cpp

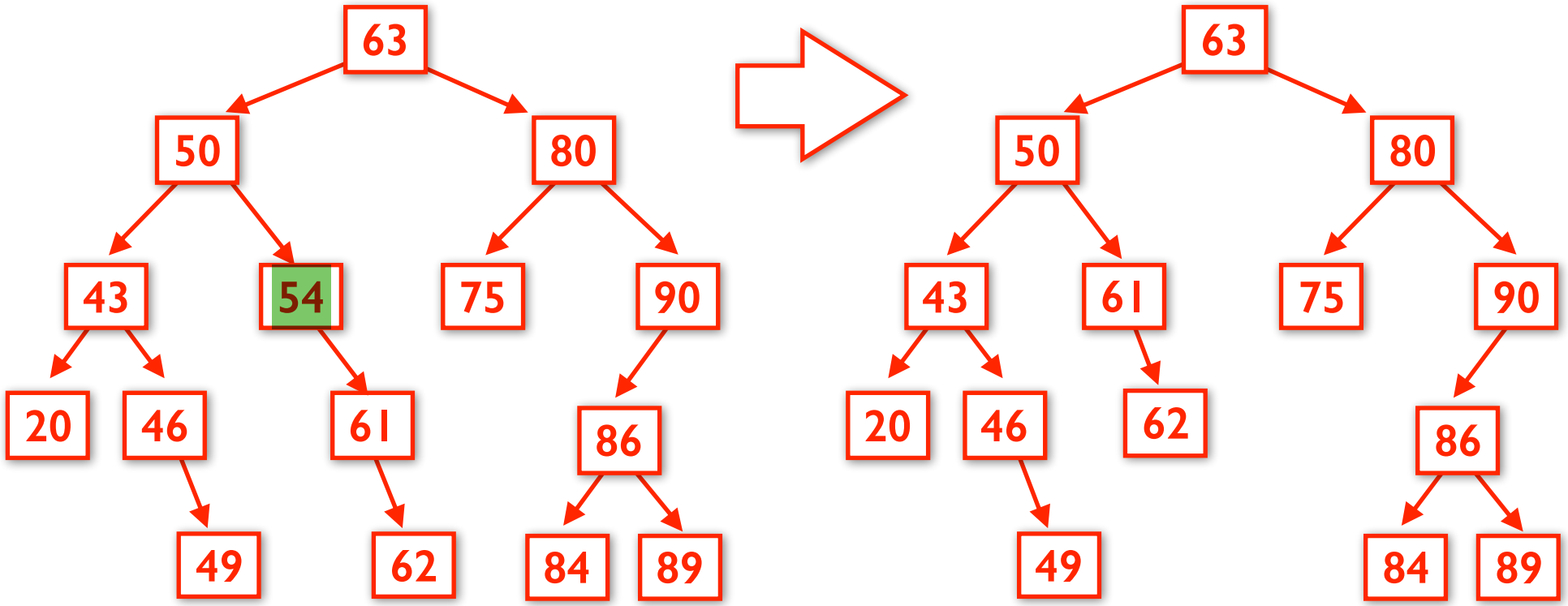
二元搜尋樹的刪除 [1]

- **Case 1.** 刪除葉子
  - `Erase(49);`



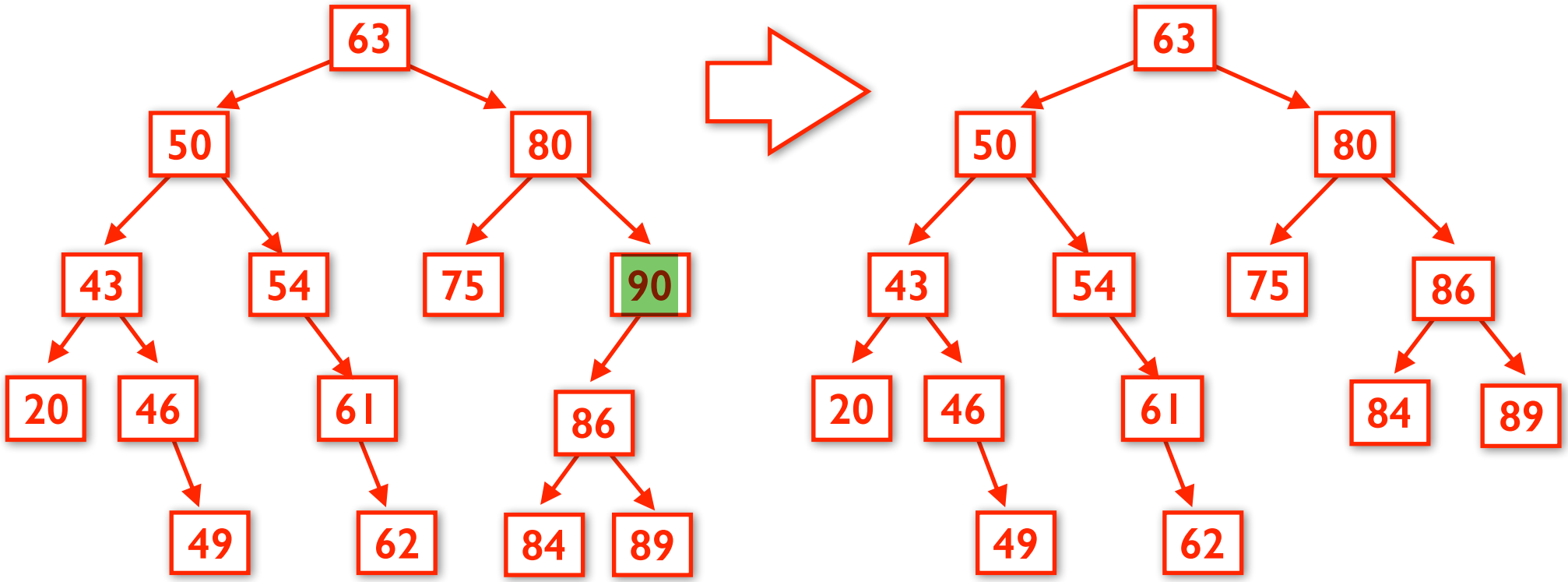
二元搜尋樹的刪除 [2]

- **Case 2.** 刪除無左樹的節點
  - `Erase(54);`



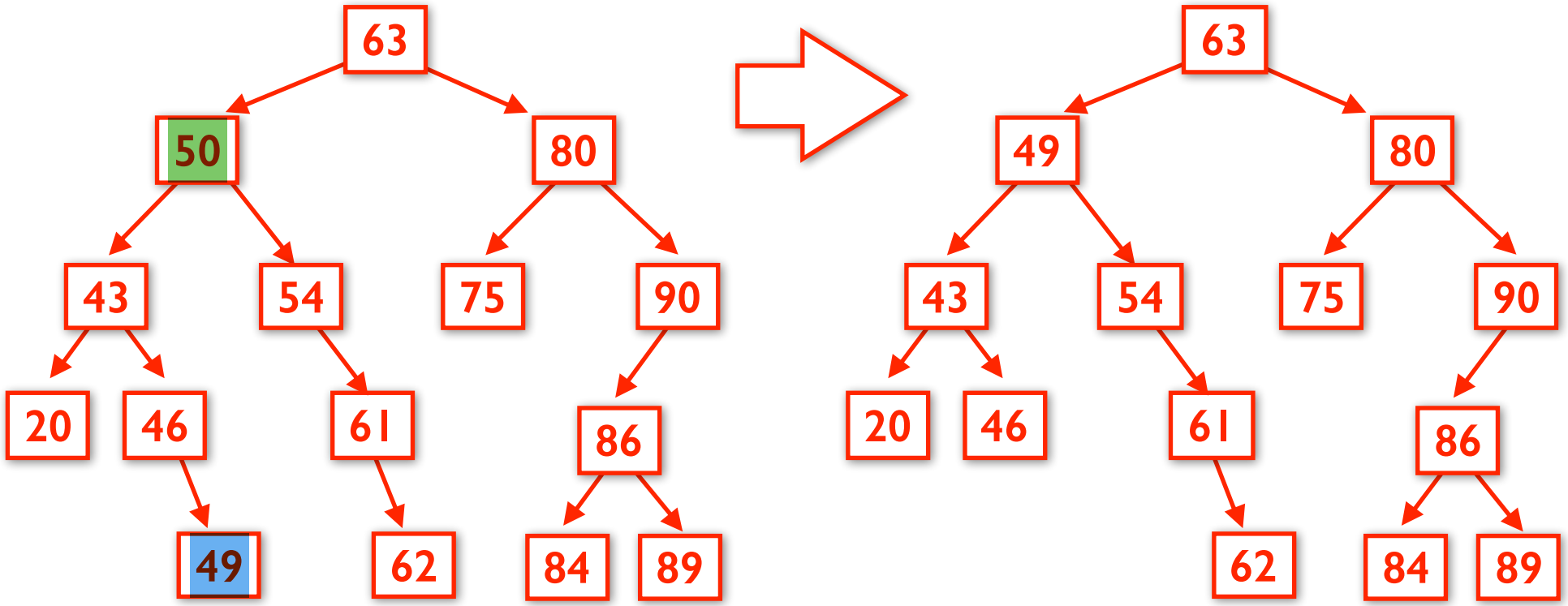
二元搜尋樹的刪除 [3]

- **Case 3.** 刪除無右樹的節點
  - `Erase(90);`



二元搜尋樹的刪除 [4]

- **Case 4.** 兩邊都有子樹
  - `Erase(50);` (找左邊子樹中最大的來交換)



二元搜尋樹分析

- 各種操作需要的時間比較：**1** 表示與原有個數無關，**N** 表示與原有個數成正比，**$\log_2(N)$** 表示與原有個數取對數成正比

操作	有序型陣列	有序型串列	二元搜尋樹
Search (搜尋值)	$\log_2(N)$	N	約為 $\log_2(N)$
Insert (插入值)	N	移動為 N 插入為 1	約為 $\log_2(N)$
Erase (刪除值)	N	移動為 N 插入為 1	約為 $\log_2(N)$

二元搜尋樹的效率與該樹長得是否『平衡、均勻』有關

使用 STL 的集合與映射

- C++ STL 的 <set> 內有 std::set 這個集合的類別模版可以使用
- C++ STL 的 <map> 內有 std::map 這個映射的類別模版可以使用
  - map 支援 operator[]
- 通常 C++ STL 會使用更複雜的二元搜尋樹結構 (例如紅黑樹) 實作來盡量保持『平衡、均勻』以提升效率

[範例] set.cpp

[範例] map.cpp

	線性搜尋 **(linear search)**	二元搜尋 **(binary search)**	雜湊 **(hash)**
相關函式	**std::find,** **std::find_if**	**std::lower_bound,** **std::upper_bound,** **std::binary_search**	**std::hash** (函式類別模版)
適用容器	一般容器： **std::array** **std::vector** **std::deque** **std::forward_list** **std::list**	排序後的一般容器 (如左格) 以及 **std::set** **std::map**	特殊容器： **std::unordered_set,** **std::unordered_map**
搜尋時間	與元素個數成正比	排序的成本 + 與元素個數的對數成正比	可能與元素個數無關，但 與碰撞程度相關
插入新增或修改元素時間	與使用容器相關 (無額外負擔)	與使用容器相關 + 維持排序的成本	可能與元素個數無關，但 可能需要重新配置雜湊 (與個數成正比)