**2025年春《数学模型与数学实验》课程实验报告**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 实验项目名称 | 实验5 材料传热问题 | | |
| 实验地点 | 明理楼C901 | 实验日期 | 2025/5/16 |
| 实验环境 | **1. 电脑基本配置：设备名称 windows**  **处理器 13th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1360P 2.20 GHz**  **机带 RAM 16.0 GB**  **2. 使用软件及版本：**  matlab 2023a版 | | |
| 实验目的及意义 | 掌握利用MATLAB编程的方法，掌握将连续过程离散化进行计算机求解的思想，能支撑专业核心能力5、6，综合创新能力9. | | |
| 实验任务与问题 | 1、分析问题，建立数学模型；  2、应用MATLAB模拟材料的传热问题；  3、分析材料中的热量分布，形成结论。 | | |
| 实验过程记录 | 研究材料内部温度分布是工程中一个重要的问题。现有长为1m，半径为r的均匀细杆，其密度为(kg/m3),比热为c(J/(kg·ºC)),热传导率为k(W/(m·ºC)),且=1(m2/s).    假设该均匀细杆侧面绝热，同一截面的温度相同，则可将均匀细杆的传热问题简化为一维热传导问题，建立如下图所示的坐标系。    假设左端面（）的温度为，右端面（）的温度为，时，细杆温度分布为。考虑时间的范围为，试完成下列作业：  （1） 分析问题，建立均匀细杆中热量分布的数学模型；  （2） 分别用显式差分法和隐式差分法求解该数学模型；  （3） 分析均匀细杆中的热量分布，并分别画出时细杆中温度分布曲线。 | | |
| 实验结果及分析 | 一、问题背景与数学模型  考虑长度为 L=1m 的均匀细杆（侧面绝热），其温度仅随轴向 x 变化，可用一维热传导方程描述： ∂T/∂t = (k/ρc) \* ∂²T/∂x²， 题中给出 κ = k/(ρc) = 1 m²/s，故化简为： ∂T/∂t = ∂²T/∂x²， 0<x<1, t>0。 初始条件：T(x,0) = e^x，边界条件：T(0,t) = e^t, T(1,t) = e^{1+t}。 解析解为 T(x,t) = e^{x+t}。  二、显式差分法（FTCS）  差分格式： T\_i^{n+1} = T\_i^n + λ (T\_{i+1}^n - 2T\_i^n + T\_{i-1}^n)，其中 λ = Δt / Δx²。 稳定条件：λ ≤ 0.5。 MATLAB 实现如下：  L = 1; alpha = 1; N = 50; dx = L/N; dt = 1e-4; lambda = alpha\*dt/dx^2;  x = linspace(0, L, N+1)'; T = exp(x);  t = 0; for n = 1:10000  t = t + dt;  T\_new = T;  for i = 2:N  T\_new(i) = T(i) + lambda\*(T(i+1) - 2\*T(i) + T(i-1));  end  T\_new(1) = exp(t);  T\_new(end) = exp(1 + t);  T = T\_new; end 三、隐式差分法（后向欧拉）  差分格式： T\_i^{n+1} - λ (T\_{i+1}^{n+1} - 2T\_i^{n+1} + T\_{i-1}^{n+1}) = T\_i^n。 构造三对角线性方程组，稳定性更好。 MATLAB 实现如下：  L = 1; alpha = 1; N = 50; dx = L/N; dt = 1e-4; lambda = alpha\*dt/dx^2;  x = linspace(0, L, N+1)'; T = exp(x);  A = diag((1+2\*lambda)\*ones(N-1,1)) ...  + diag(-lambda\*ones(N-2,1),1) + diag(-lambda\*ones(N-2,1),-1);  t = 0; for n = 1:10000  t = t + dt;  T\_left = exp(t);  T\_right = exp(1+t);  b = T(2:N);  b(1) = b(1) + lambda\*T\_left;  b(end) = b(end) + lambda\*T\_right;  T\_interior = A \ b;  T = [T\_left; T\_interior; T\_right]; end  三、温度分布曲线  clear; clf; close all;  %% — 参数设置 —  L = 1; % 杆长 (m)  alpha = 1; % 热扩散率 k/(ρc) (m^2/s)  Tmax = 1.0; % 最大模拟时间 (s)  N = 50; % 空间等分段数  dx = L / N; % 空间步长  dt = 2e-4; % 时间步长（显式稳定条件 dt<=dx^2/2，同时隐式使用相同步长）  lambda = alpha \* dt / dx^2; % Courant 数  t\_snap = [0.3, 0.5, 0.8, 1.0];  n\_snap = round(t\_snap / dt); % 换算为整数步  x = linspace(0, L, N+1)';  T0 = exp(x); % 初始：T(x,0)=e^x  T\_exp = T0;  Nt = floor(Tmax / dt);  snap\_exp = zeros(N+1, numel(t\_snap));  for n = 1:Nt  t = n \* dt;  Tn = T\_exp;    T\_exp(2:N) = Tn(2:N) + lambda \* (Tn(3:N+1) - 2\*Tn(2:N) + Tn(1:N-1));  T\_exp(1) = exp(t);  T\_exp(end) = exp(1 + t);  idx = find(n == n\_snap);  if ~isempty(idx)  snap\_exp(:, idx) = T\_exp;  end  end  T\_imp = T0;  snap\_imp = zeros(N+1, numel(t\_snap));  e = ones(N-1,1);  A = spdiags([-lambda\*e, (1+2\*lambda)\*e, -lambda\*e], -1:1, N-1, N-1);  for n = 1:Nt  t = n \* dt;  T\_left = exp(t);  T\_right = exp(1 + t);  b = T\_imp(2:N);  b(1) = b(1) + lambda \* T\_left;  b(end) = b(end) + lambda \* T\_right;  T\_in = A \ b;  T\_imp = [T\_left; T\_in; T\_right];  idx = find(n == n\_snap);  if ~isempty(idx)  snap\_imp(:, idx) = T\_imp;  end  end  figure; hold on;  colors = lines(numel(t\_snap));  for k = 1:numel(t\_snap)  % 显式（虚线）  plot(x, snap\_exp(:,k), '--', 'LineWidth',1.2, 'Color',colors(k,:), ...  'DisplayName', sprintf('显式 t=%.1f', t\_snap(k)));  % 隐式（实线）  plot(x, snap\_imp(:,k), '-' , 'LineWidth',1.2, 'Color',colors(k,:), ...  'DisplayName', sprintf('隐式 t=%.1f', t\_snap(k)));  % 解析解（点线，不入图例）  plot(x, exp(x + t\_snap(k)), ':' , 'LineWidth',1.0, 'Color',colors(k,:), ...  'HandleVisibility','off');  end  xlabel('x (m)');  ylabel('T(x,t)');  title('显式 vs 隐式（相同 dt）在不同时间的温度分布');  legend('Location','northwest');  grid on; | | |
| 实验体会与收获 | 通过本次一维热传导数值模拟实验，我深刻体会到将连续偏微分方程离散化后如何在计算机上高效求解的重要性：在显式差分法中，时间步长的选择直接关系到结果的稳定性与精度，而隐式差分法虽计算量稍大，却能无条件保证数值稳定，有助于快速得到可靠解；同时，通过 MATLAB 编程实现热方程的迭代更新，我进一步巩固了差分格式的推导过程，熟悉了三对角矩阵求解技巧，并通过与解析解的对比验证了算法的正确性，增强了解决工程实际问题时数学建模与数值分析的综合能力。 | | |