《离散数学》考试样题参考解答

一. 填空题

1. $P(A)=\underline{\{\emptyset\}}$, $P(P(A))=\underline{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}$,

   $P(P(P(A)))=\underline{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}$.

2. $\underline{2^6=64}$,

3. $m_2=\underline{m_{010}=\neg P\wedge Q\wedge \neg R}$,

   $M_2=\underline{M_{010}=P\vee\neg Q\vee R}$,

   $M_6=\underline{M_{110}=\neg P\vee\neg Q\vee R}$.

4. $\neg(G\wedge H)=\underline{\neg G\vee\neg H}$.

   $\neg(\exists x)G(x)=\underline{(\forall x)\neg G(x)}$.

   $G\to H,\ H\to I\Rightarrow \underline{G\to I}$.

5. 引入谓词: $P(x)$: x犯错; $Q(x)$: x是人.

   符号化为 $\underline{\neg(\exists x)(Q(x)\wedge\neg P(x))}$ 或 $\underline{(\forall x)(Q(x)\to P(x))}$

6. $\underline{2^{n^2}}$, $\underline{n^n}$, $\underline{n!}$

7. $r(R) =$ $\underline{R \cup I_A}$ ， $s(R) =$ $\underline{R \cup R^{-1}}$.

$t(R) =$ $\underline{\bigcup_{i=1}^{n} R^i}$.

8. <u>g是B到C的满射</u>； （这两题都是书上定理的结论）

<u>f是A到B的单射</u>；

<u>f是A到B的单射且g是B到C的满射</u>.

9. <u>S_1、S_3、S_5</u>.

（该题选择的依据是考察所选子集是否对运算*保持封闭，即子集中的元素之间运算结果没有出现超子集之外的元素即可。以$S_1=\{a,b\}$为例，在题中所给的运算表中查找a、b行与列的第1、2行与第1、2列交叉位置上的4个元素，没有出现a、b之外的元素，所以S_1对*封闭，则S_1可以成为B的子代数的载体）.

10. <u>满足</u>交换律、<u>满足</u>结合律.

其单位元 <u>无</u>.

二. 证明：当用7作除数对整数进行整除时，其余数为 0～6 这7个数字。将任选的8个整数视为8只鸽子，~~0～6~~数字0～6视为7个鸽笼，由鸽笼原理：此选8个整数中至少有两个具有相同的余数。

证毕.

三. 1. 证明：$P\to(Q\to R)$

$$= \neg P\vee(\neg Q\vee R)$$
$$= \neg Q\vee(\neg P\vee R)$$
$$= P\to(Q\to R)$$

所以 $P\to(Q\to R) = Q\to(P\to R)$

2. 公式 $A = \neg P\wedge Q\to R$ 的真值表为如下：

P	Q	R	A
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A的主析取范式由真值表中7个公式真值为1的解释对应的极小项构成

即：$A = m_{000}\vee m_{001}\vee m_{011}\vee m_{110}$
$\vee m_{101}\vee m_{110}\vee m_{111}$

$=(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$
$\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

所以 A的主合取范式由真值表中唯一一个真值为0的解释对应的极大项构成

即 $A = M_{010} = (P\vee\neg Q\vee R)$

四. 1. 证:

(1) 任取 $x\in P(A)$，显然有 $x\subseteq x$.
于是关系 $\subseteq$ 是自反的.

(2) 任取 $x, y\in P(A)$，若 $x\subseteq y$ 且 $y\subseteq x$
则必然有 $x=y$. 所以关系 $\subseteq$ 是反对称的.

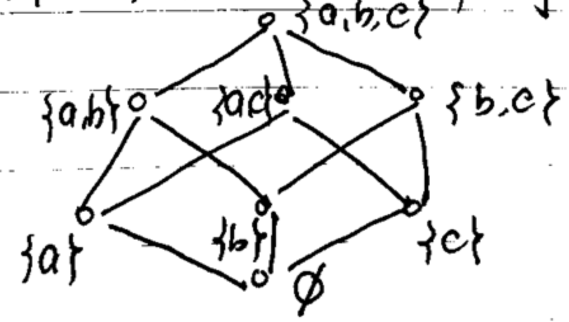
(3) 任取 $x, y, z\in P(A)$.
若 $x\subseteq y$ 且 $y\subseteq z$，则必有 $x\subseteq z$.
即关系 $\subseteq$ 是传递的.

综上所述，$\subseteq$ 为 $P(A)$ 上的偏序关系，证毕.

2. $A=\{a,b,c\}$.

$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

偏序集 $\langle P(A),\subseteq\rangle$ 的哈斯图如下:



对子集 $B=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

3.

最大元	极大元	最小元	极小元
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	无	$\{a\},\{b\}$.
上界	上确界	下界	下确界
$\{a,b\},\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\varnothing$.

五. 1. 设 P: 6是个偶数; Q: 2能整除7;

R: 5是素数.

推断符号化为: $P \to \neg Q,\ \neg R \vee Q,\ R \Rightarrow \neg P$.

证明:

(1)	$\neg R \vee Q$	P
(2)	R	P
(3)	Q	T, (1), (2), I
(4)	$P \to \neg Q$	P
(5)	$\neg P$	T, (3), (4), I.

2. 证明:

(1)	$\neg(\forall x)(P(x) \to R(x))$	P.
(2)	$(\exists x)(P(x) \wedge \neg R(x))$	T, (1), E.
(3)	$P(c) \wedge \neg R(c)$	ES, (2).
(4)	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	P
(5)	$P(c) \to Q(c)$	US, (4).
(6)	$P(c)$	T, (3), I.
(7)	$Q(c)$	T, (5), (6), I.
(8)	$\neg R(c)$	T, (3), I.
(9)	$Q(c) \wedge \neg R(c)$	T, (7), (8), I.
(10)	$(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$	EG, (9)

(该题应所注意的地方: 1° 不能直接对第二个前提去掉量词前边的否定词 $\neg$; 2° 将第二个前提否定词后移后, $(\forall x)$ 要变成了 $(\exists x)$. 证明. [illegible]

六. 证明:

任取元素 $x, y, z \in A$. (x, y, z 是针对传递中 $R \cap S$ 取的)

设 $\langle x, y \rangle \in R \cap S$, 且 $\langle y, z \rangle \in R \cap S$.

有 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle x, y \rangle \in S$ 且 $\langle y, z \rangle \in R$ 且 $\langle y, z \rangle \in S$.

由于 R 是传递的 (此时引入条件)

则由 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in R$ 可得 $\langle x, z \rangle \in R$.

同理, S 是传递的,

由 $\langle x, y \rangle \in S$, $\langle y, z \rangle \in S$ 可得 $\langle x, z \rangle \in S$.

则 $\langle x, z \rangle \in R \cap S$.

(即对 $\forall x, y, z \in A$. 由 $\langle x, y \rangle \in R \cap S$ 且 $\langle y, z \rangle \in R \cap S$

推得 $\langle x, z \rangle \in R \cap S$)

所以, $R \cap S$ 是传递的. 证毕.

七. 证明.

(首先证 f 是 $\langle R,+\rangle$ 到 $\langle R^+,\times\rangle$ 的同态映射)

(1). 对任意 $x, y \in R$.

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = f(x) \times f(y).$$

所以, f 是 $\langle R,+\rangle$ 到 $\langle R^+,\times\rangle$ 的同态映射.

(其次证 f 是双射函数).

(2)

1° 任取 $x, y \in R$, 且令 $x \neq y$,

$$f(x) = e^x \neq e^y = f(y).$$

即 f 是单射函数.

2° 任取 $y \in R^+$. 令 $x = \ln y$, $x \in R$.

有 $f(x) = e^x = e^{\ln y} = y$.

即 R^+ 中任意元素在函数 f 映射下都有原像.

所以, f 是满射函数.

即 f 是双射函数.

综上所述, f 是 $\langle R,+\rangle$ 到 $\langle R^+,\times\rangle$ 的同构映射.

证毕.