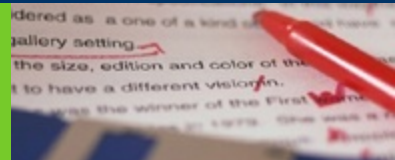




灰色预测模型

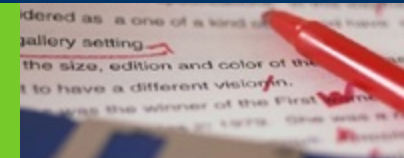
主讲人：泰山教育 小石老师

灰色系统理论简介



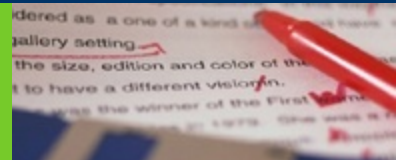
灰色预测模型 (Gray Forecast Model) 是通过少量的、不完全的信息，建立数学模型并做出预测的一种预测方法. 当我们应用运筹学的思想方法解决实际问题，制定发展战略和政策、进行重大问题的决策时，都必须对未来进行科学的预测. 预测是根据客观事物的过去和现在的发展规律，借助于科学的方法对其未来的发展趋势和状况进行描述和分析，并形成科学的假设和判断.

灰色系统理论简介



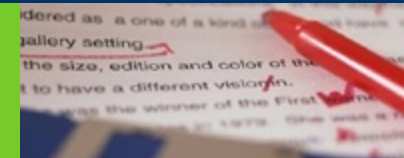
灰色系统理论是研究解决灰色系统分析、建模、预测、决策和控制的理论. 灰色预测是对灰色系统所做的预测. 目前常用的一些预测方法（如回归分析等），需要较大的样本. 若样本较小，常造成较大误差，使预测目标失效. 灰色预测模型所需建模信息少，运算方便，建模精度高，在各种预测领域都有着广泛的应用，是处理小样本预测问题的有效工具.

灰色系统理论简介



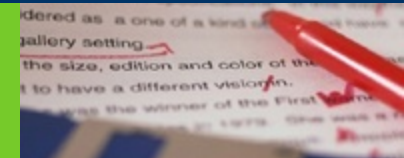
灰色系统理论是由**华中理工大学邓聚龙教授**于1982年提出并加以发展的。二十几年来，引起了不少国内外学者的关注，得到了长足的发展。目前，在我国已经成为社会、经济、科学技术在等诸多领域进行预测、决策、评估、规划控制、系统分析与建模的重要方法之一。特别是它对时间序列短、统计数据少、信息不完全系统的分析与建模，具有独特的功效，因此得到了广泛的应用。

灰色系统理论简介



灰色系统是黑箱概念的一种推广。我们把既含有已知信息又含有未知信息的系统称为灰色系统。作为两个极端，我们将称信息完全未确定的系统为黑色系统；称信息完全确定的系统为白色系统。区别白色系统与黑色系统的重要标志是系统各因素之间是否具有确定的关系。

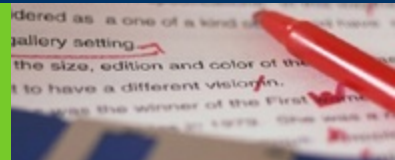
灰色系统理论简介



灰色系统的特点

- (1) 用灰色数学处理不确定量，使之量化.
- (2) 充分利用已知信息寻求系统的运动规律.
- (3) 灰色系统理论能处理贫信息系统.

灰色生成

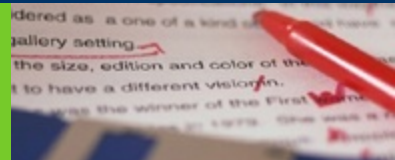


灰色生成

将原始数据列中的数据,按某种要求作数据处理称为生成. 客观世界尽管复杂,表述其行为的数据可能是杂乱无章的,然而它必然是有序的,都存在着某种内在规律,不过这些规律被纷繁复杂的现象所掩盖,人们很难直接从原始数据中找到某种内在的规律. 对原始数据的生成就是企图从杂乱无章的现象中去发现内在规律.

常用的灰色系统生成方式有:累加生成,累减生成,均值生成,级比生成等,下面主要介绍累加生成.

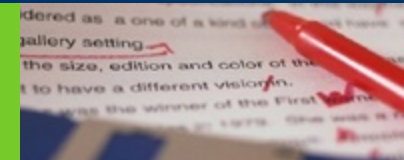
累加生成简介



累加生成

累加生成, 即通过数列间各时刻数据的依个累加以得到新的数据与数列. 累加前的数列称原始数列, 累加后的数列称为生成数列. 累加生成是使灰色过程由灰变白的一种方法, 它在灰色系统理论中占有极其重要地位, 通过累加生成可以看出灰量积累过程的发展态势, 使离乱的原始数据中蕴含的积分特性或规律加以显化. 累加生成是对原始数据列中各时刻的数据依次累加, 从而生成新的序列的一种手段.

累加生成简介



原始数据序列

$$x^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(N)\} = \{6, 3, 8, 10, 7\}$$

$$x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) = 6,$$

$$x^{(1)}(2) = x^{(0)}(1) + x^{(0)}(2) = 6 + 3 = 9,$$

$$x^{(1)}(3) = x^{(0)}(1) + x^{(0)}(2) + x^{(0)}(3) = 6 + 3 + 8 = 17,$$

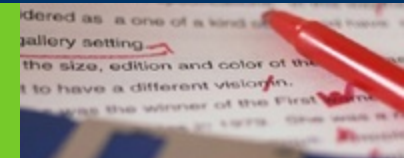
$$x^{(1)}(4) = x^{(0)}(1) + x^{(0)}(2) + x^{(0)}(3) + x^{(0)}(4) = 6 + 3 + 8 + 10 = 27,$$

$$\begin{aligned} x^{(1)}(5) &= x^{(0)}(1) + x^{(0)}(2) + x^{(0)}(3) + x^{(0)}(4) + x^{(0)}(5) \\ &= 6 + 3 + 8 + 10 + 7 = 34. \end{aligned}$$

于是得到一个新数据序列

$$x^{(1)} = \{6, 9, 17, 27, 34\}$$

累加生成简介

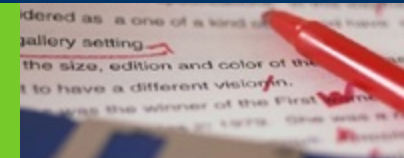


归纳上面的式子可写为

$$x^{(1)}(i) = \left\{ \sum_{j=1}^i x^{(0)}(j) \mid i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

称此式所表示的数据列为原始数据列的一次累加生成，
简称为一次累加生成

GM(1,1)模型



灰色系统是对离散序列建立的微分方程,GM(1,1)是一阶微分方程模型,其形式为:

$$\frac{dx}{dt} + ax = u \quad GM(1.1)$$

离散形式和预测公式如下

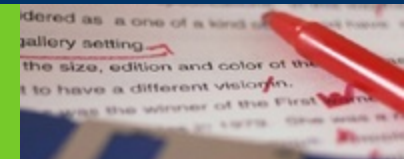
$$\Delta^{(1)}(x^{(1)}(k+1)) + a(x(k+1)) = u \quad \hat{x}^{(1)}(k+1) = [x^{(1)}(1) - \frac{\hat{u}}{\hat{a}}]e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{u}}{\hat{a}}$$

由导数定义知: $\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

当 Δt 很小时并且取很小的1单位时,则近似地有

$$x(t+1) - x(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

GM(1,1)模型



写成离散形式为

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = x(k+1) - x(k) = \Delta^{(1)}(x(k+1))$$

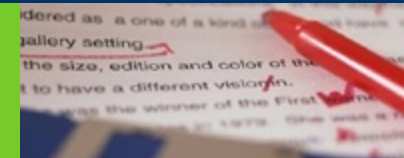
由于 $\frac{\Delta x^{(1)}}{\Delta t}$ 涉及到累加列 $x^{(1)}$ 的两个时刻的值，因此， $x^{(1)}(i)$ 取前后两个时刻的平均代替更为合理，即将 $x^{(i)}(i)$ 替换为

$$\frac{1}{2}[x^{(i)}(i) + x^{(i)}(i-1)], (i = 2, 3, \dots, N).$$

$$x^{(i)} = \frac{1}{2}[x^{(i)}(i) + x^{(i)}(i-1)], (i = 2, 3, \dots, N).$$

$$x^{(1)}(k+1) = \frac{1}{2}[x^{(1)}(k+1) + x^{(1)}(k)]$$

GM(1,1)模型



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = x(k+1) - x(k) = \Delta^{(1)}(x(k+1))$$

$$\Delta^{(1)}(x^{(1)}(k+1)) = x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) = x^{(0)}(k+1)$$

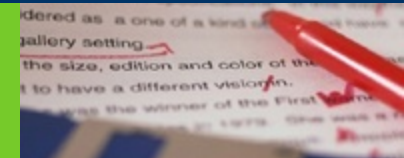
$$x^{(1)}(k+1) = \frac{1}{2}[x^{(1)}(k+1) + x^{(1)}(k)]$$

$$\Delta^{(1)}(x^{(1)}(k+1)) + a(x(k+1)) = u$$

将上面四式整理后的下面式子

$$x^{(0)}(k+1) = a[-\frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k+1))] + u$$

GM(1,1)模型



写为矩阵表达式

$$\begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \mathbf{M} \\ x^{(0)}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x^{(1)}(3) + x^{(1)}(2)] & 1 \\ \mathbf{M} & 1 \\ -\frac{1}{2}[x^{(1)}(N) + x^{(1)}(N-1)] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix}.$$

令 $y = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \mathbf{L}, x^{(0)}(N))^T$.

这里，T表示转置，令

GM(1,1)模型

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x^{(1)}(3) + x^{(1)}(2)] & 1 \\ \mathbf{n} & \\ -\frac{1}{2}[x^{(1)}(N) + x^{(1)}(N-1)] & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix},$$

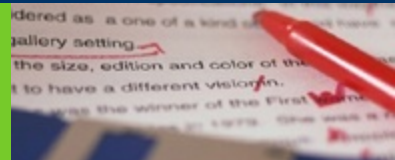
$$y = BU$$

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T y$$

预测值的求解

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = [x^{(1)}(1) - \frac{\hat{u}}{\hat{a}}]e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{u}}{\hat{a}}$$

GM(1,1)模型精度检验



GM(1.1)模型的精度检验

模型选定之后,一定要经过检验才能判定其是否合理,只有通过检验的模型才能用来作预测,灰色模型的精度检验一般有三种方法:相对误差大小检验法,关联度检验法和后验差检验法.下面主要介绍后验差检验法

设按GM(1.1)建模法已求出 $\hat{X}^{(1)}$,并将 $\hat{X}^{(1)}$ 做一次累减转化为 $\hat{X}^{(0)}$,即

$$\hat{X}^{(0)} = [\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), n, \hat{x}^{(0)}(n)]$$

GM(1,1)模型精度检验

计算残差得

其中, $e(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k), k = 1, 2, \dots, n$

原始序列 $X^{(0)}$ 及残差序列 E 的方差
分别为 S_1^2 和 S_2^2 , 则

$$S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x^{(0)}(k) - \bar{x}]^2$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [e(k) - \bar{e}]^2$$

$$\text{其中, } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k), \bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(k)$$

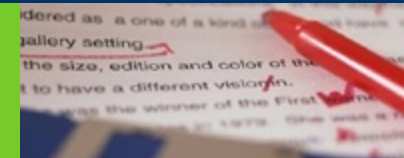
GM(1,1)模型精度检验

计算后验差比为

$$C = S_2 / S_1$$

指标 C 和 p 是后验差检验的两个重要指标. 指标 C 越小越好, C 越小表示 S_1 大而 S_2 越小. S_1 大表示原始数据方差大,即原始数据离散程度大. S_2 小表示残方差小,即残差离散程度小. C 小就表明尽管原始数据很离散,而模型所得计算值与实际值之差并不太离散.

GM(1,1)模型精度检验



精度检验等级参照表

模型精度等级	均方差比值C
1级（好）	$C \leq 0.35$
2级（合格）	$0.35 < C \leq 0.5$
3级（勉强）	$0.5 < C \leq 0.65$
4级（不合格）	$0.65 < C$



Thank You !