算法学习笔记(79): 四边形不等式优化DP

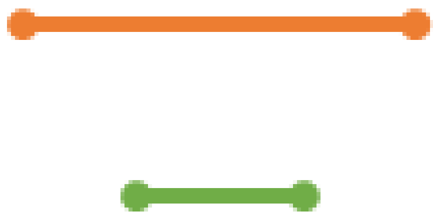
Pecco

下面这个式子是**区间DP**的经典方程：

$$dp[l][r]=\min_{l\le k<r}(dp[l][k]+dp[k+1][r])+w(l,r)$$

这是一个2D/1D动态规划（一共有约 n^2 个状态，每次状态转移需要 $O(n)$ 的时间），所以朴素的算法的时间复杂度是 $O(n^3)$ 。然而，如果上面的 $w(l,r)$ 这个二元函数符合一些条件，我们可以在 $O(n^2)$ 内解决它。

第一是**区间包含单调性**，即若 $l\le l'\le r'\le r$ ，则 $w(l',r')\le w(l,r)$ 。

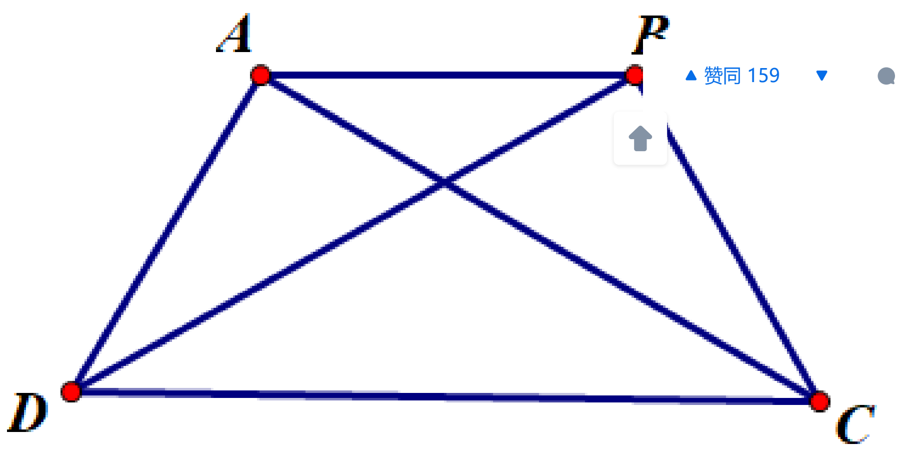


被包含者不大于包含者

第二是**四边形不等式**，即若 $l\le l'\le r'\le r$ ，则 $w(l,r')+w(l',r)\le w(l,r)+w(l',r')$ 。

交叉不大于包含

为什么叫四边形不等式呢？可能是因为这个不等式的形式与四边形对边长度和≤对角线长度和的形式非常类似。[1]（下图中 $dis(A,D)+dis(B,C)\le dis(A,C)+dis(B,D)$ ）

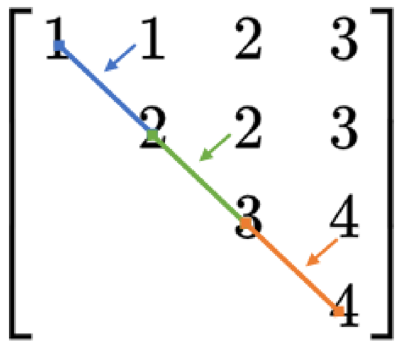


接下来有两个非常神奇的结论（证明略[2]）：

- 当 $w(l,r)$ 同时满足这两个条件时，$dp[l][r]$ 也将符合四边形不等式。
- 如果 $dp[l][r]$ 满足四边形不等式，假设 $m[l][r]$ 为 $dp[l][r]$ 的**最优决策点**，那么 $m[l][r-1]\le m[l][r]\le m[l+1][r]$ 。

什么叫最优决策点？考虑 $dp[l][r]=\min_{l\le k<r}(dp[l][k]+dp[k+1][r])+w(l,r)$，我们把使 $dp[l][k]+dp[k+1][r]$ 取到最小值的那个 k ，称为 $dp[l][r]$ 的最优决策点。

利用结论，我们可以在DP的过程中记录最优决策点，这样，我们对于每个状态点，枚举的范围就从 $l \le k < r$ 缩小到了 $m[l][r-1] \le k \le m[l+1][r]$ 。



区间DP的DP顺序是从主对角线开始，一条条对角线地往上转移的。在上图中，对于每一条对角线，考察它枚举的区间，可以发现每两个相邻的区间只有一个元素重叠，所以处理每条对角线需要花费 $O(n)$ 的时间，处理所有对角线也就只需要 $O(n^2)$ 的时间。

优化后的代码如下：

```
for (int i = 1; i <= n; ++i)
    m[i][i] = i; // 初始化边界决策点
for (int d = 2; d <= n; ++d)
    for (int l = 1, r = d; r <= n; ++l, ++ r)
    {
        dp[l][r] = INF;
        for (int k = m[l][r - 1]; k <= m[l + 1][r]; ++k) // 利用结论，缩小了枚举范
            if (dp[l][k] + dp[k + 1][r] + w(l, r) < dp[l][r])
            {
                dp[l][r] = dp[l][k] + dp[k + 1][r] + w(l, r); // 更新dp数组
                m[l][r] = k; // 更新决策点
            }
    }
```

那么哪些二元函数符合四边形不等式呢？根据oi-wiki，我们有以下结论：

1. 如果 $f(l,r)$ 和 $g(l,r)$ 符合四边形不等式/区间包含单调性，则对于任意 $A,B \ge 0$ ，$Af(l,r)+Bg(l,r)$ 也符合四边形不等式/区间包含单调性。
2. 如果存在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 使 $w(l,r)=f(r)-g(l)$ ，则 $w(l,r)$ 符合**四边形恒等式**（即等号总是成立的四边形不等式）。如果 f ， g 单增，则 w 还符合区间包含单调性。
3. 若 $h(x)$ 单增且下凸[3]， $w(l,r)$ 符合四边形不等式和区间包含单调性，则 $h(w(l,r))$ 也符合四边形不等式和区间包含单调性。
4. 若 $h(x)$ 下凸，$w(l,r)$ 符合四边形**恒**等式和区间包含单调性，则 $h(w(l,r))$ 也符合四边形不等式。

例如，在经典的石子合并问题中， $w(l,r)=S[r]-S[l-1]$ ，稍作推导或根据结论2可以知道，它符合四边形恒等式和区间包含单调性，所以可以使用四边形不等式优化DP。

再比如若 $w(l,r)=(r-l)^2$ ，因为 $h(x)=x^2$ 是单增的下凸函数，而 $r-l$ 符合四边形不等式和区间包含单调性，所以 $h(r-l)=(r-l)^2$ 也符合四边形不等式和区间包含单调性。

$dp[i][j]=\min\limits_{1\le k\le j} dp[i-1][k]+w(k,j)$

如果 $w(i,k)$ 符合区间包含单调性和四边形不等式，则 $dp[i][j]$ 符合四边形不等式， 的最优决策点 $m[i][j]$ 满足 $m[i-1][j]\le m[i][j]\le m[i][j+1]$ 。

虽然这个结论的不等式看起来和上面有点不一样，但本质是相同的，都是m矩阵每一行、每一列单调不减。只是因为DP顺序不同，采取了不同的写法。这次的DP顺序不再是按对角线DP，而是按行DP。需要注意，如果要用四边形不等式优化DP，第二层循环需要逆序进行，因为我们要在获知 $m[i][j]$ 前获知 $m[i][j+1]$ 。

（CF321E Ciel and Gondolas）

> Fox Ciel is in the Amusement Park. And now she is in a queue in front of the Ferris wheel. There are n people (or foxes more precisely) in the queue: we use first people to refer one at the head of the queue, and n -th people to refer the last one in the queue.
> There will be k gondolas, and the way we allocate gondolas looks like this:
> When the first gondolas come, the q_1 people in head of the queue go into the gondolas.
> Then when the second gondolas come, the q_2 people in head of the remain queue go into the gondolas. ...
> The remain q_k people go into the last (k -th) gondolas.
> Note that $q1$, $q2$, ..., qk $q_1,q_2,...,q_k$ must be positive. You can get from the statement that $\sum_{i=1}^{k} q_i=n$ and $q_i>0$.
> You know, people don't want to stay with strangers in the gondolas, so your task is to find an optimal allocation way (that is find an optimal sequence q) to make people happy. For every pair of people i and j , there exists a value u_{ij} denotes a level of unfamiliar. You can assume $u_{ij}=u_{ji}$ for all $i,\ j$ ($1\le i,\ j\le n$)and $u_{ii}=0$ for all i ($1\le i\le n$). Then an unfamiliar value of a gondolas is the sum of the levels of unfamiliar between any pair of people that is into the gondolas.
> A total unfamiliar value is the sum of unfamiliar values for all gondolas. Help Fox Ciel to find the minimal possible total unfamiliar value for some optimal allocation.
> **Input**
> The first line contains two integers n and k ($1\le n\le 4000$ and $1\le k\le \min(n,\ 800)$) — the number of people in the queue and the number of gondolas. Each of the following n lines contains n integers — matrix u , ($0\le u_{ij}\le 9$, $u_{ij}=u_{ji}$ and uii = 0 $u_{ii}=0$).
> Please, use fast input methods (for example, please use BufferedReader instead of Scanner for Java).
> **Output**
> Print an integer — the minimal possible total unfamiliar value.

这道题就是典型的符合上面方程的例子。用 $dp[i][j]$ 表示前 i 艘船载前 j 个人的最小陌生值。很容易写出转移方程：

$$dp[i][j]=\min_{1\le k\le j} dp[i-1][k-1]+cal(k,j)$$

其中 $cal(k,j)$ 表示从第 k 个人到第 j 个人坐在同一艘船上的陌生值，可以用二位前缀和算出，且显然符合四边形不等式与区间包含单调性。你可能注意到方程里是 $dp[i-1][k-1]$ 而不是前面提到的 $dp[i-1][k]$ ，但是这里并不会影响结论。

优化后的核心代码如下：

```
for (int i = 1; i <= N; ++i)
    m[0][i] = 1, m[i][N + 1] = N; // 初始化边界决策点
memset(dp, 63, sizeof(dp));
dp[0][0] = 0;
for (int i = 1; i <= K; ++i)
    for (int j = N; j >= 1; --j)
    {
        for (int k = m[i - 1][j]; k <= m[i][j + 1]; ++k)
```

```
                dp[i][j] = dp[i - 1][k - 1] + cal(k, j);
                m[i][j] = k;
            }
    }
```

算法学习笔记（目录）
2951 赞同 · 98 评论 文章

参考

1. ^ 严格地说，这里不能取等号，因为取等号时四边形会退化
2. ^ 证明可以参见 https://wenku.baidu.com/view/c44cd84733687e21af45a906.html
3. ^ 下凸即h'(x)单增

编辑于 2022-11-11 21:09 · IP 属地未知

算法 ACM 竞赛 OI（信息学奥林匹克）