1 网络流建图

1.1 最小路径覆盖

最小路径覆盖 ：

在一个有向无环图中，找出最少的路径，使得这些路径经过了所有的点。最小路径覆盖分为**最小不相交路径覆盖**和**最小可相交路径覆盖**，区别是这些路径是否可以相交

1.1.1 最小不相交路径覆盖

建图方法:

把原图的每个点 u 拆成两个点 u_1,u_2,如果有一条有向边 (a,b)，则连边 (a_2,b_1)，容易发现这是一个二分图，那么用下面的定理就可以求出答案

定理：最小路径覆盖 = 原图节点数-新图最大匹配数

证明：

一开始每个点都是一条路径，每次找一条匹配边，代表合并两条路径
由于路径不相交（即每个点的入度和出度至少有一个为 1），所以二分图上的边也不相交（如果相交则说明某个点的入度或出度大于 1），这正好是匹配的定义
每条匹配边代表答案 -1，所以**最小路径覆盖 = 原图节点数-新图最大匹配数**

1.1.2 最小可相交路径覆盖

对原图传递闭包，即若原图中 (u,v) 连通，则增加边 (u,v). 这可以用 $Floyd$ 算法 $O(n^3)$ 实现。然后对新图做最小不相交路径覆盖即可。因为在原图中相交的路径在传递闭包后可以拆分成另一条边，这样就不相交了

1.1.3 最多不相交路径

这种问题变化比较多，但都能表示成以下形式：

已知一些路径，每个节点只能属于一条路径，求能选择多少条路径使它们不相交.

主要的方法是拆点，将一个点拆成两个，然后连边，容量表示该点最多经过次数

1.2 最小割

1.2.1 最大权闭合子图

定义：

有一个有向图，每一个点都有一个权值，选择一个权值和最大的子图，使得每个点的后继都在子图里面，这个子图就叫最大权闭合子图。

建图方法：

从源点 s 向每个正权点连一条容量为权值的边，每个负权点向汇点 t 连一条容量为权值的绝对值的边，有向图原来的边容量全部为无限大。

定理：

最大权闭合子图 = 所有正权点之和-最小割

关键性质：

如果 s 与 i 有边，表示 i 在子图中。如果 i 与 t 有边，表示 i 不在于子图中。即：割掉 s 与 i 表示不选 i，割掉 i 与 t 表示选 i。

性质 1：

原图之间的边一定不会被割掉

边权为无穷大，当然不会被选进最小割

性质 2：

只有 s 到 t 不联通时，才得到最大权闭合子图

反证法：

若 s 到 t 连通，则一定存在节点 i,j 使 s 到 i 有边，i 到 j 有边（引理 1），j 到 t 有边. 而根据性质 1:i 在子图中，j 不在子图中，这与最大权闭合子图的定义矛盾，证毕由引理 2 可得，图的一个割就是一个闭合子图

由于一个割的边权和 = 不选的正权点 + 选的负权点绝对值 = 不选的正权点 − 选的负权点一个割的边权和 = 不选的正权点 + 选的负权点绝对值 = 不选的正权点 − 选的负权点.

闭合子图 = 正权点 + 负权点 = 所有正权和 − 不选的正权点 + 选的负权点 = 所有正权和 − 割的边权和闭合子图 = 正权点 + 负权点 = 所有正权和 − 不选的正权点 + 选的负权点 = 所有正权和 − 割的边权和

显然割的边权和最小的时候得到最大权闭合子图，证毕

1.3 最小割

定理:

二分图最大独立集 =n-二分图最大匹配

其实二分图独立集是**特殊的一种最大权闭合子图**。我们根据上文“收益”的思想，把选某个点的收益看为 1，左部节点为正权点，右部节点为负权点. 按照最大权闭合子图的方式建图，答案为正权和-最小割 =n-最小割 =n-最大流。我们发现把最大权闭合子图中 INF 的边换成 1 也不影响答案，因为图中其他边的容量都为 1。这样图就变成了二分图匹配中的图，最大流 = 二分图最大匹配

1.4 最大密度子图

定义: 图的密度是图上的边的数量除以点数。求密度最大的子图。

建图: 看到平均数想到 01 分数规划。二分答案 mid，那么问题转化为判定是否存在一个子图，使得边数 $-mid\cdot$ 点数 >0 边数 $-mid\cdot$ 点数 >0. 那么可以把每条边的权看成 1，每个点的权看成 $-mid$，限制是选择一条边就必须选择边连接的两个点。于是把边看成左部点，点看成右部点，跑最大权闭合子图，若答案 >0，则合法。

1.5 二元关系最小割模型

定义: 有若干个变量，每个变量有 2 种取值，有若干个现在，每个限制形如”若变量 $x=a,y=b$，就要付出 c 的代价”。最大化所有变量的值之和减去最小代价。

建图: 每个变量建一个点,S 到 x 连边表示 x 的一种取值的代价,x 到 T 连边表示 x 的另一种取值的代价。对于一个限制，在两个点之间连边。边权需要列方程解出。

1.6 二分图带权匹配

定义: 每条边有边权，求匹配边权值之和最大的匹配

建图: 在边上加上权，跑费用流即可

1.7 最大权不相交路径

定义: 每条路径有一个权值 (一般是边权和)，在 ** 不相交路径数最多的情况下 **，最大化费用

建图: 同最多不相交路径，在连接两个拆点的边上加上费用跑费用流即可

1.8 不等式差分模型（网络流解线性规划）

定义： 对于一些不太好直接想到建图的问题，我们可以数学建模，列出方程然后用线性规划求解。这样的好处是思维量较小，只要做代数变换就可以建图，而不用考虑建图的实际意义。我们需要把式子做差，使得每个未知数仅在两个等式中出现。

根据网络流中每个点流量平衡的思想，我们可以把 $-xi$ 看成从点 i 流出 x_i 的流量，$+x_i$ 看成流入 x_i 的流量。等式为 0 就代表流量平衡。

建图： 每个等式为图中一个顶点，添加源点 S 和汇点 T。
如果一个等式右边为非负整数 c，从源点 S 向该等式对应的顶点连接一条容量为 c，权值为 0 的有向边；如果一个等式右边为负整数 c，从该等式对应的顶点向汇点 T 连接一条容量为 c，权值为 0 的有向边。
如果一个变量 x_i 在第 j 个等式中出现为 x_i，在第 k 个等式中出现为 $-x_i$，且在目标函数里的系数为 c_i，从顶点 j 向顶点 k 连接一条容量为 $+\infty$，费用为 c_i 的有向边。
- 如果一个变量 y_i 在第 j 个等式中出现为 y_i，在第 k 个等式中出现为 $-y_i$，且在目标函数里没有出现，从顶点 j 向顶点 k 连接一条容量为 $+\infty$，权值为 0 的有向边。

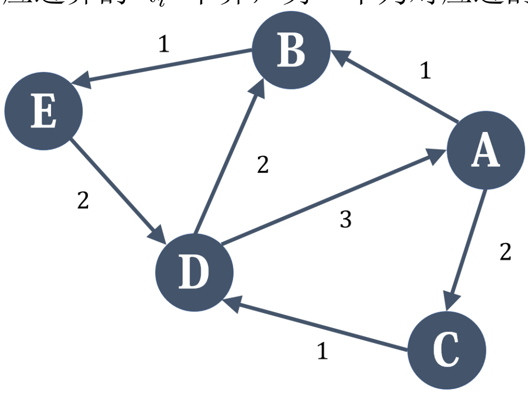
1.9 有上下界的网络流

1.9.1 无源汇有上下界可行流

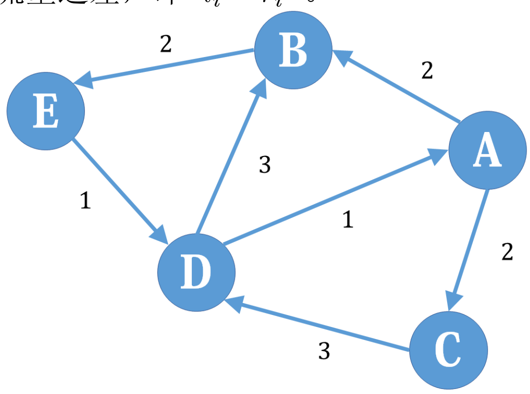
定义： 无源汇网络指的是**没有源点和汇点**，每个点都有入边和出边且满足流量守恒即满足上下界要求的网络。在这个网络上求一个流量方案，使得每条边的流量必须在 $[l_i, r_i]$ 之间，且每个点流量守恒。

有上下界的费用流的核心是**补偿**。我们先假设每条边的流量均为 l_i，那么一定会有一些点流量不守恒。现在我们需要构造一个附加网络，使得把附加网络和原网络叠加（即对应边流量相加）之后的图满足流量守恒。

如下图，将原网络拆分为两个结构与原图相同的普通网络，左图边界的容量为原网络对应边界的 l_i 下界，另一个为对应边的上下界流量之差，即 $l_i - r_i$ 。



下界网络

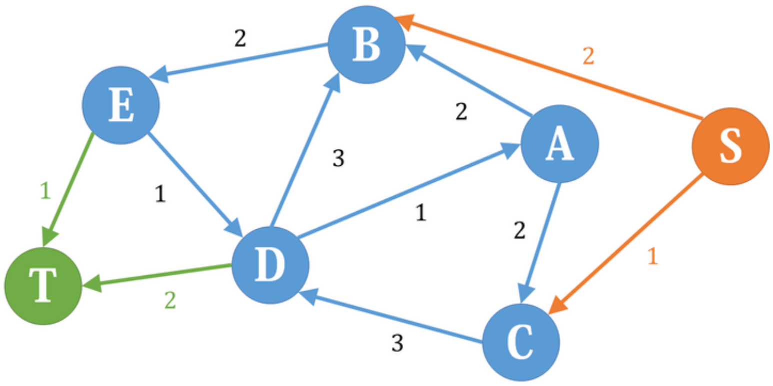


差网络

我们希望下届网络和差网络相加后恰好是原图的一个可行流，这首先要求下届网络是满流的（可行流必须达到每条边的下界）。但是下界网络满流之后不一定流量平衡，所以我们要对差网络进行一定的修改弥补这种不平衡。

我们分别考虑下界网络的每个点。A 点，流入量为 3，流出量也为 3，A 点平衡。那么在差网络中也是平衡的，所以不做修改。B 点，流入量为 3，流出量为 1，流入比流出多 2，那么我们希望在差网络中，B 的流出应该比流入多 2，于是我们在差网络中新设立一个**源点**，然后加入一条流量为 2 的**附加边**从源点到 B 点，这样在差网络平衡是，出去附加边，B 点的流出恰好比流入多 2。C 点与 B 点类似，然而 D 点相反。我们希望在差网络中 D 点流入比流出多 2，所以新设立一个**汇点**，然后从 D 点连一条容量为 2 的附加边到汇点，E 点与 D 点类似。

也就是说，如果下界网络中某个点有 x 的净流入，在差网络中我们就从源点向它连一条容量为 x 的附加边；相反，如果下界网络中某个点有 x 的净流出，在差网络中我们就从它向汇点连一条容量为 x 的附加边。这样，我们把差网络修改如下：



在差网络上跑一遍最大流，把每条非附加边的流，加上下界网络的满流，就是一个可行流。但是，如果跑完最大流发现，存在**附加边未满流**，那说明平衡条件没有得到满足，于是原图不存在可行流。

在实际中，是不需要建立下界网络的，只需要对差网络进行操作即可。另外最后判断的时候**并无必要遍历所有附加边**，而只需要判断所有从源点出发的边，或者判断所有连向汇点的边即可，因为根据网络流的性质，两者容量和应该相等，于是它们要么都满流，要么都不满流。

因为 $DINIC$ 只能求有源汇最大流，所以是不能直接求出附加网络的流量的。那么我们可以在附加网络上添加一些不在原网络上的边和点，来实现我们的限制.

记 $d_i =$ 点 D 的入流 $-$ 点 i 的出流，然后建附加网络：

1. 新建源点 ss 和汇点 tt

2. 对于原图中的每条边 $e_i = (u, v)$，连边 $(u, v, r_i - l_i)$，也就是说附加网络包括原网络的边。

3. 新建边来满足流量守恒

若 $d_i = 0$ 则该点流量平衡，不用处理

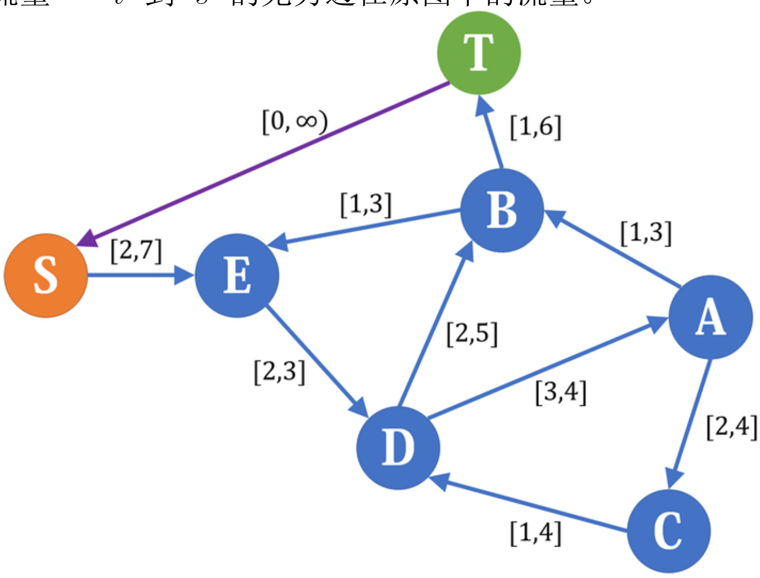
若 $d_i > 0$ 则入流 D> 出流，那么附加网络中 i 的出边需要增加流量，我们连边 (ss, i, d_i)，这样求最大流的时候出边的流量会增加 $d+i$，叠加后满足流量守恒
若 $d[i] < 0$ 则入流 $<$ 出流，那么附加网络中 i 的入边需要增加流量，同理连边 $(i, tt, -d_i)$，这样求最大流的时候入边的流量会增加 $-d_i$，叠加后满足流量守恒
那么当且仅当步骤 3 中新建边满流时有解，总可行流为 $maxfolw(ss, tt) + \sum l_i$。每条边在原图中流量 = 容量下界 + 附加流中它的流量

1.9.2 有源汇有上下界可行流

定义： 在有源汇网络上求一个流量方案，使得每条边的流量必须在 $[l_i, r_i]$ 之间，且除源汇外每个点流量守恒。
设原网络的源和汇分别为 s, t 我们在原网络上加一条边 $(t, s, +\infty)$，相当于把到汇点的所有流量都流回源点，这样每个点流量都守恒。

然后套无源汇的方法即可。因为此时的源点汇点已经被处理成普通点。

注意此时总流量 $= t$ 到 s 的无穷边在原图中的流量。



1.9.3 有源汇有上下界最大流和最小流

定义： 在有源汇网络上求一个流量方案，使得每条边的流量必须在 $[l_i, r_i]$ 之间，且除源汇外每个点流量守恒。在这个条件下使得总流量最大/最小。
先按上面的方法求出一个有源汇有上下界可行流. 然后在附加网络上再跑一次 s 到 t 的最大流（注意不是 ss,tt!）。最大流 = 可行流 + 第二次跑的 s 到 t 最大流。
再跑一次最大流是因为附加网络上属于原图的边还有流量没被"榨干"。容易发现只要附加网络上不属于原图的边满流，属于原图的边怎么跑流量都是守恒的。因为第一次跑最大流已经保证所有点守恒，第二次跑最大流不会经过不属于原图的边，因此等价于对原图

跑一次普通的最大流，除源汇外流量守恒。两次合起来总流量一定守恒，这就保证了正确性。
同理求最小流就跑一次 t 到 s 的最大流。最小流 = 可行流-第二次跑的 t 到 s 最大流。这是因为 Dinic 过程中反向边的流量增加等价于正向边的的流量减少。

1.9.4 有源汇有上下界最小费用流

定义： 在有源汇网络上求一个流量方案，使得每条边的流量必须在 $[l_i, r_i]$ 之间，且除源汇外每个点流量守恒。每条边单位流量的费用为 c_i. 在这个条件下使得总费用最小，费用定义同一般费用流。(不要求总流量最大)
这是有上下界费用流常被误解的一点，即最小费用流求的是费用最小的可行流，而不是最大流。
因此按有源汇可行流的方法建图，把原图中的边带上费用。总费用
$= mincost(ss, tt) + \sum l_i c_i$