

目 录

第一章 电动力学	(1)
§1. 引言	(1)
§2. 预备知识	(2)
2.1. 库仑 (Coulomb) 定律, 静电场的散度与旋度	(2)
2.1.1. 库仑定律, 电场强度	(2)
2.1.2. 高斯 (Gauss) 定理	(4)
2.2. 安培 - 毕奥 - 萨伐尔 (Ampère-Biot-Savart) 定律, 静磁场的散度与旋度	(9)
2.2.1. 电流密度, 电荷守恒定律	(9)
2.2.2. 安培 - 毕奥 - 萨伐尔定律, 磁感强度	(11)
2.2.3. 安培定理	(12)
2.3. 法拉第 (Faraday) 电磁感应定律	(16)
§3. 真空中的麦克斯韦方程组, 洛伦兹力	(18)
3.1. 真空中的麦克斯韦方程组	(18)
3.2. 洛伦兹力	(22)
§4. 电磁能量和电磁动量, 能量、动量守恒与转化定律	(23)
4.1. 电磁能量, 能量守恒与转化定律	(23)
4.2. 电磁动量, 动量守恒与转化定律	(25)
4.3. 电磁能量 (动量) 密度, 电磁能量流 (动量流) 密度	(28)
§5. 麦克斯韦方程组的数学结构, 电磁场的波动性 ...	(30)
5.1. 麦克斯韦方程组的数学结构	(30)
5.2. 一阶对称双曲型偏微分方程组	(32)
5.3. 电磁场的波动性, 自由电磁波	(37)

§6. 电磁场的标势与矢势	(42)
6.1. 预备知识	(43)
6.2. 电磁场的标势与矢势	(46)
6.3. 例 —— 电偶极辐射	(50)
§7. 介质中的麦克斯韦方程组	(56)
7.1. 介质中的麦克斯韦方程组	(56)
7.2. 介质交界面上的条件	(60)
7.3. 介质中电磁场量的表示	(64)
§8. 静电场和静磁场	(65)
8.1. 静电场	(65)
8.2. 稳定电流的电场	(70)
8.3. 静磁场	(73)
§9. 达尔文 (Darwin) 模型	(79)
9.1. 拟静电模型及其修正形式	(79)
9.2. 麦克斯韦方程组的一个定解问题	(80)
9.3. 达尔文模型	(81)
习题	(91)
参考文献	(93)
第二章 流体力学	(96)
§1. 理想流体力学方程组	(96)
1.1. 预备知识	(96)
1.2. 理想流体力学方程组	(98)
1.3. 理想流体力学方程组的数学结构	(106)
1.4. 一维理想流体力学方程组	(121)
§2. 粘性流体力学方程组	(125)
2.1. 引言	(125)
2.2. 应力张量	(129)
2.3. 广义牛顿法则 —— 本构方程	(133)
2.4. 粘性热传导流体动力学方程组	(136)

2.5. 粘性热传导流体动力学方程组的数学结构 ..	(139)
2.6. 一维粘性热传导流体动力学方程组	(145)
§3. 纳维 - 斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程组	(147)
§4. 激波	(152)
4.1. 间断连接条件	(152)
4.2. 熵条件	(157)
§5. 一维流体力学方程组的拉格朗日形式	(167)
5.1. 引言	(167)
5.2. 拉格朗日坐标	(168)
5.3. 一维理想流体力学方程组的拉格朗日形式 ..	(171)
5.4. 一维粘性热传导流体力学方程组的拉格朗日 形式	(173)
习题	(176)
参考文献	(179)
第三章 磁流体力学	(181)
§1. 等离子体	(181)
§2. 磁流体力学方程组	(184)
2.1. 考虑到导电介质 (等离子体) 的运动对麦克斯 韦方程组的修正	(185)
2.2. 考虑到电磁场的存在对流体力学方程组 的修正	(187)
2.3. 磁流体力学方程组	(195)
2.4. 不可压缩情形的磁流体力学方程组	(197)
§3. 电导率 σ 为无穷大时的磁流体力学方程组	(199)
3.1. 电导率 σ 为无穷大时的磁流体力学方程组 ..	(199)
3.2. 向量场过任一随流体运动的曲面的通量对时 间的微分式及其应用	(200)
3.3. 磁力线“冻结”原理	(202)
§4. 磁流体力学方程组的数学结构	(204)

§5. 一维磁流体力学方程组	(210)
5.1. 一维磁流体力学方程组	(210)
5.2. 一维磁流体力学方程组的拉格朗日形式	(216)
习题	(218)
参考文献	(219)
第四章 反应流体力学	(220)
§1. 引言	(220)
§2. 反应流体力学方程组	(221)
2.1. 粘性热传导反应流体力学方程组	(221)
2.2. 反应流体力学方程组形式的化约	(224)
2.3. 混合气体的状态方程	(227)
2.4. 反应流体力学方程组的数学结构	(230)
§3. 一维反应流体力学方程组	(231)
3.1. 一维反应流体力学方程组	(231)
3.2. 一维反应流体力学方程组的拉格朗日形式 ..	(233)
3.3. 一维反应流体力学方程组的数学结构	(234)
习题	(235)
参考文献	(235)
第五章 弹性力学	(237)
§1. 引言	(237)
§2. 变形的描述, 应变张量	(240)
2.1. 变形梯度张量	(240)
2.2. 柯西 - 格林应变张量	(241)
2.3. 位移梯度张量与无穷小应变张量	(243)
§3. 守恒定律, 应力张量	(246)
3.1. 质量守恒定律	(246)
3.2. 应力	(248)
3.3. 动量守恒定律的积分形式	(250)
3.4. 动量矩守恒定律的积分形式	(251)

3.5. 柯西应力张量	(252)
3.6. 在空间描述下动量守恒定律的微分形式, 柯西应力张量的对称性	(255)
3.7. 彼奥拉 (Piola) 应力张量, 物质描述下动量守恒定律的微分形式	(258)
§4. 本构方程——应力与变形之间的关系	(263)
4.1. 本构关系的一般形式	(263)
4.2. 各向同性材料的本构方程	(267)
4.3. 贮能函数的例子	(273)
4.4. 线性弹性——广义胡克定律	(276)
§5. 弹性动力学方程组及其数学结构	(281)
5.1. 线性弹性动力学方程组	(281)
5.2. 非线性弹性动力学方程组	(289)
5.3. 非线性弹性动力学方程组的守恒定律形式 ..	(291)
5.4. 化弹性动力学方程组为一阶对称双曲组	(298)
5.5. 一维非线性弹性动力学方程	(302)
§6. 弹性静力学方程组的定解问题	(305)
6.1. 线性弹性静力学方程组	(306)
6.2. 非线性弹性静力学方程组	(309)
习题	(318)
参考文献	(319)
附录一 笛卡儿张量	(321)
1. 张量的定义	(321)
2. 张量的计算	(324)
3. 二阶对称张量的不变量	(327)
4. 各向同性张量	(329)
5. 张量的微分运算	(334)
附录二 热力学概述	(337)
1. 热力学的研究对象	(337)

2. 热力学第一定律, 内能	(338)
3. 热力学第二定律, 熵	(338)
4. 勒让德 (Legendre) 变换	(342)
5. 热力学函数	(346)
6. 内能与熵的表达式	(350)
索引	(353)

第二章 流体力学

§1. 理想流体力学方程组

1.1. 预备知识

在本节中，我们将对理想流体建立其动力学方程组。所谓理想流体，是指忽略粘性及热传导的流体。实际的流体，通常总是有粘性及热传导的，在下一节中将进一步加以讨论。必须指出，理想流体在很多情况下，是一个合理的近似。例如，在研究飞行器周围的流场分布时，除飞行器表面附近一薄层中通常必须考虑粘性及热传导的影响外，在流场中其余的部分均可假设为理想流体来进行讨论；即使对整个流场均假设为理想流体，也可得出相当合理的结果。因此，对理想流体的讨论，不仅具有理论上的重要意义，而且具有实际上的重大价值。此外，这里所讨论的是可压缩的流体，即气体或在高压下的液体。对不可压缩流体（在常压下的流体）的讨论，也将在下一节中进行。

我们用 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 及 p, ρ, T 等来描述流体的状态（运动状态及热力学状态）。在定常运动的情形，它们都是时间 t 及位置的笛卡儿坐标 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 的函数。现将其意义分别说明如下。

\mathbf{u} 为速度向量。这是指流体微元的宏观运动速度，不是指个别流体分子的不规则运动速度。这样，若有过点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 的面积微元 dS ，其单位法向量为 \mathbf{n} ，则在时间区间 $[t, t + dt]$ 内沿 \mathbf{n} 方向流过 dS 的流体体积为

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS dt. \quad (1.1)$$

ρ 为质量密度, 即单位体积流体的质量。这样, 在时间区间 $[t, t + dt]$ 内沿 \mathbf{n} 方向流过 dS 的流体质量为

$$\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS dt. \quad (1.2)$$

我们称 $\rho \mathbf{u}$ 为质量流向量。由上述可知, 在单位时间内, 沿任何方向 \mathbf{n} 流过垂直于 \mathbf{n} 的单位面积的流体质量为 $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ 。

$\rho \mathbf{u}$ 又称动量密度向量, 即单位体积流体的动量。在时间区间 $[t, t + dt]$ 中沿 \mathbf{n} 方向流过 dS 的流体动量为

$$\rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS dt = \rho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{n} dS dt, \quad (1.3)$$

其中 $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ 为速度向量的张量积, 即

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3^2 \end{pmatrix},$$

而 $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{n}$ 表示矩阵 $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ 与向量 \mathbf{n} 按普通意义下的乘法, 下同。称 $\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ 为动量流张量。

p 为压强, 即作用在单位面积上的流体压力, 其方向垂直于该面积, 这是由于忽略了流体的内摩擦 (粘性) 的缘故。在各向同性的假设下, 在过同一点具不同法线方向的单位面积上, 所受的压力大小均相等。这里所谓各向同性, 是指流体的物理性质不与任何特殊的预先给定的空间方向有关。通常的流体均能满足这一性质。这样, 面积微元 dS 受到其单位法向量 \mathbf{n} 的正向一侧的流体压力为

$$- p n dS, \quad (1.4)$$

其中负号表示是压力。

T 为绝对温度。根据热力学知识, 一切描述热力学状态的量中只有两个是相互独立的。因此, ρ, p 及 T 这三个热力学量

之间有一个确定的函数关系式

$$p = f(\rho, T). \quad (1.5)$$

对不同的流体,它具有不同的形式。(1.5)式称为流体的状态方程。特别,若状态方程可写为

$$p = R\rho T, \quad (1.6)$$

则称为理想气体,其中 R 为一个正常数。

下面再引入一个热力学量,以 e 表示单位质量流体的内能,即由流体分子的不规则热运动所具有的动能以及由于分子间相对位置所决定的势能的总和。对理想气体,可以证明它的分子间没有相互作用,因而没有分子势能,而其内能只和温度有关,即 e 只是 T 的函数。特别若成立

$$e = c_v T, \quad (1.7)$$

其中 c_v 为一正常数,称为定容比热,就称气体为多方 (polytropic) 气体。

流体的能量由内能及宏观动能两部分组成,因此 $\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2$ 为能量密度,即单位体积中流体的能量,其中 $u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ 。这样,在时间区间 $[t, t + dt]$ 内沿 \mathbf{n} 方向流过 dS 的流体能量为

$$(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2)\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt. \quad (1.8)$$

我们称 $(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2)\mathbf{u}$ 为能量流向量。

1.2. 理想流体力学方程组

对于理想流体,根据在运动过程中应满足的质量、动量及能量守恒定律,就可推导出理想流体动力学的基本方程组。

1) 质量守恒定律

在所考察的区域中任取一光滑的闭曲面 Γ , 其所围的区域记为 Ω . 根据质量守恒定律, 在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内, 区域 Ω 中流体质量的增加量

$$\int_{\Omega} \rho(t_2, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \rho(t_1, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(其中 $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$), 应等于在此段时间内经过边界 Γ 流入 Ω 中的流体的质量, 而后者, 根据 (1.2) 式应为

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt.$$

这样, 质量守恒定律可写为如下的积分形式:

$$\int_{\Omega} (\rho(t_2, \mathbf{x}) - \rho(t_1, \mathbf{x})) d\mathbf{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt, \\ \forall \Omega, \forall [t_1, t_2]. \quad (1.9)$$

在所考察的函数连续可微的条件下, 由格林公式, 上式可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x} dt = 0, \quad \forall \Omega, \forall [t_1, t_2].$$

于是, 由 Ω 及 $[t_1, t_2]$ 的任意性及被积函数的连续性, 就得到质量守恒定律的微分形式如下:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.10)$$

这通常称为连续性方程。

这儿及今后要注意的是, 只有在有关状态函数为连续可微的前提下, 微分形式的守恒定律才有意义。而在这些状态函数的连

续可微性不具备的情形 (对应于气体动力学中的激波, 无论在理论上还是应用上, 这恰恰是最为重要的情形), 相应的积分形式的守恒定律还是有意义的, 且这构成一切进一步讨论的出发点 (参见 §4) .

2) 动量守恒定律

根据动量守恒定律, 在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内区域 Ω 中流体动量的增加量

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u}(t_2, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}(t_1, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

应等于在此段时间内经过边界 Γ 流入 Ω 中的流体的动量, 再加上此段时间内作用在 Ω 上的力的冲量. 其中前者, 由于 (1.3) 式应为

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \rho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{n} dS dt;$$

而后者由作用在 Ω 上的体积力所构成的冲量及作用在 Ω 的边界 Γ 上的表面力所构成的冲量这两部分组成. 设体积力密度, 即单位质量流体所受的外力, 为 $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, 那么冲量的第一部分为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} d\mathbf{x} dt;$$

而作用在 Γ 上的表面力只有 Ω 外的流体对它的压力, 故由 (1.4) 式知冲量的第二部分为

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} p \mathbf{n} dS dt.$$

这样, 动量守恒定律可写为如下的积分形式:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u}(t_2, \mathbf{x}) - \rho \mathbf{u}(t_1, \mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \rho (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{n} dS dt \end{aligned}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} p n dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} dx dt, \\ \forall \Omega, \forall [t_1, t_2]. \quad (1.11)$$

在所考察的函数连续可微的条件下, 由格林公式, 上式可写为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) dx dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} dx dt, \quad \forall \Omega, \forall [t_1, t_2], \quad (1.12)$$

其中 \mathbf{I} 为二阶单位张量。由上式, 利用被积函数的连续性以及 Ω 与 $[t_1, t_2]$ 的任意性, 即得动量守恒定律的微分形式如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) = \rho \mathbf{F}, \quad (1.13)$$

或写成分量的形式为

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k u_i + p \delta_{ki}) = \rho F_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.14)$$

其中 δ_{ki} 为克罗内克 (Kronecker) 记号。

这儿指出, 利用连续性方程 (1.10) 可将上述方程的形式加以化简, 而得

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.15)$$

或写为

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{F}, \quad (1.16)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (1.17)$$

表示固定流体质点 (而不是空间点!) 时对 t 的导数。事实上, 由于对任意固定的流体质点的运动规律 $x_k = x_k(t)$ ($k = 1, 2, 3$) 成立 $\dot{x}_k(t) = u_k$ ($k = 1, 2, 3$), 于是在固定流体质点时, 一函数 $f(t, \mathbf{x})$ 关于 t 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)) &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_k} \dot{x}_k(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

方程 (1.15) 或 (1.16) 通常称为 欧拉 (Euler) 方程。它与 (1.14) 不同, 不具有散度型的守恒定律形式。

3) 能量守恒定律

根据能量守恒定律, 在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内区域 Ω 中流体能量的增加量

$$\int_{\Omega} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2)(t_2, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2)(t_1, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

应等于在此段时间内经过边界 Γ 流入 Ω 中的流体的能量, 再加上此段时间内作用在 Ω 上的力所作的功。由 (1.8) 式知, 前者应为

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt.$$

而后者则应由两部分组成: 第一部分为作用在 Ω 上的体积力所作的功

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} dt;$$

而第二部分为作用在 Γ 上的表面力 (此时为 Ω 外的流体对它的压力) 所作的功, 由 (1.4) 式应为

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt.$$

于是能量守恒定律可写为如下的积分形式:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2)(t_2, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2)(t_1, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ = & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} dt, \quad \forall \Omega, \forall [t_1, t_2]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

在有关函数连续可微的假设下, 利用格林公式, 上式可改写为

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) d\mathbf{x} dt \\ = & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \operatorname{div}((\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + p) \mathbf{u}) d\mathbf{x} dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} dt, \quad \forall \Omega, \forall [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

于是利用 Ω 与 $[t_1, t_2]$ 的任意性以及被积函数的连续性, 由上式可得能量守恒定律的微分形式如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) + \operatorname{div}((\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + p) \mathbf{u}) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}. \quad (1.19)$$

利用连续性方程 (1.10), 上式可简化为如下的形式:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (e + \frac{u^2}{2}) + \rho \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(e + \frac{u^2}{2}) + \operatorname{div}(p \mathbf{u}) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \quad (1.20)$$

或

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + \operatorname{div}(p\mathbf{u}) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \quad (1.21)$$

其中 $\frac{d}{dt}$ 的意义见 (1.17) 式. 注意到

$$\operatorname{div}(p\mathbf{u}) = p \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} p$$

及 $\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}$, 利用欧拉方程 (1.16), 可将 (1.21) 式改写为

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1.22)$$

又注意到连续性方程 (1.10) 可写为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

(1.22) 式又可进一步改写为

$$\frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (1.23)$$

上面得到的质量、动量及能量守恒方程共有五个. 我们可取, 例如说, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, ρ 及 T 为未知函数, 并利用状态方程 $p = f(\rho, T)$ 及相应的 $e = e(\rho, T)$, 而构成一个封闭的偏微分方程组, 它在连续可微的流场中有效. 这是一个含四个自变数 (t, x_1, x_2, x_3) 及五个未知函数的一阶拟线性偏微分方程组. 对这一方程组的研究, 特别是有关其间断解 (以激波为原型) 的研究, 迄今为止一直是一个十分重要的课题. 1986 年美国国家研究委员会 (National Research Council) 等单位对数学发展提出的六个重点课题中, 有一个即为 “非线性双曲守恒律组” (参见 [11]).

下面我们说明，在连续可微的流场中，能量守恒方程 (1.23) 可改写为如下简单的形式：

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (1.24)$$

即

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } S = 0. \quad (1.25)$$

这里 S 是单位质量流体的熵，由

$$dS = \frac{1}{T}(de + pd\tau) \quad (1.26)$$

确定。其中 τ 为流体的比容，即单位质量流体的体积；显然有 $\tau = \frac{1}{\rho}$ 。(1.24) 式表示在连续可微流场中熵 S 在任一固定的质点上保持为常数。这与流体是理想流体的假设是一致的。但这一事实仅在连续可微流场中才能成立，在流场有间断的情况，质点越过间断（激波）时熵要增加（参见 §4）。

(1.24) 式的证明 以 $\rho = \frac{1}{\tau}$ 代入 (1.23)，得

$$\frac{de}{dt} + p \frac{d\tau}{dt} = 0.$$

利用熵的定义 (1.26) 式，上式可写为

$$T \frac{dS}{dt} = 0.$$

这样便证明了 (1.24) 式。

(1.24) 或 (1.25) 式在连续可微的流场中（也仅限于此！）可用来代替能量守恒方程。此时在流体动力学方程组中宜采用 $\mathbf{u} =$

(u_1, u_2, u_3) , ρ 及 S 作为未知函数, 并利用形如 $p = f(\rho, S)$, $e = e(\rho, S)$ 等形式的状态方程.

特别对多方气体, 状态方程具有如下形式

$$p = A(S)\rho^\gamma, \quad (1.27)$$

其中

$$A(S) = (\gamma - 1) \exp\left(\frac{S - S_0}{c_v}\right), \quad (1.28)$$

这里 $\gamma > 1$ 为一常数, 称绝热指数, 而 S_0 也为常数. 对于常见气体, γ 之值在 1 与 $\frac{5}{3}$ 之间; 对于空气, $\gamma = 1.4$. 对多方气体, 熵方程 (1.25) 可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0. \quad (1.29)$$

这时, 又宜于采用 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 、 ρ 及 p 为未知函数, 而利用形如 $e = e(\rho, p)$ 的状态方程.

1.3. 理想流体力学方程组的数学结构

现在我们说明, 理想流体力学方程组可写为一阶拟线性对称双曲组的形式.

为此, 先将欧拉方程 (动量守恒定律) (1.15) 改写为

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.30)$$

并将熵守恒方程 (1.25) 写为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial S}{\partial x_k} = 0. \quad (1.31)$$

利用状态方程 $p = p(\rho, S)$, 又记

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} > 0,$$

这里 c 为局部音速, 质量守恒方程 (见 (1.10))

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

可利用 (1.31) 式改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \\ + \frac{\partial p}{\partial S} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial S}{\partial x_k} \right) = 0, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \rho c^2 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0,$$

或

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^3 \frac{u_k}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0. \quad (1.32)$$

这样, 若以 (u_1, u_2, u_3, p, S) 为未知函数, 将上述方程按动量守恒定律 (1.30)、质量守恒定律 (1.32) 及熵守恒 (能量守恒) 定律 (1.31) 的次序排列, 此方程组可写为如下的矩阵形式:

$$A_0 \frac{\partial U}{\partial t} + A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = C, \quad (1.33)$$

其中, $U = (u_1, u_2, u_3, p, S)^T$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-1}c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \rho u_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & u_1 \rho^{-1} c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \rho u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \rho^{-1} c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \rho u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \rho^{-1} c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix},$$

而

$$C = (\rho F_1, \rho F_2, \rho F_3, 0, 0)^T.$$

在 $\rho > 0$ (即不出现真空) 的范围内, A_0 为对称正定阵, A_1 、 A_2 及 A_3 均为对称阵。因此方程组 (1.33) 是一个一阶拟线性对称双曲型偏微分方程组。

对一阶拟线性对称双曲组 (1.33) 可提出柯西问题: 在 $t > 0$ 时求该方程组的解, 使其满足初始条件

$$t = 0 : U = U^0(x_1, x_2, x_3), \quad (1.34)$$

这里 $U^0(x_1, x_2, x_3)$ 为事先给定的向量函数。在 $U^0(x_1, x_2, x_3)$ 足够光滑的假设下, 可以证明该问题的解 (在局部的时间范围 $0 \leq t \leq \delta$ ($\delta > 0$) 中) 的存在唯一性。对方程组 (1.33), 也可以如同第一章 §5 所述那样, 提出相应的初-边值问题。

方程组 (1.33) 是从守恒定律的微分形式出发推导得的, 它只在连续可微的流场中有意义。但由于有间断的流场通常可以由一些连续可微的流场拼接而成, 利用这种方程组来间接地构造问题的间断解仍是有意义的。至于对间断解的直接构造, 则要借助于积分形式的守恒定律或相应的散度形式的守恒律方程组。从数值计算及理论研究的角度, 如果能够使得散度形式的守恒律方程组同时又是对称双曲型方程组, 即使得具散度形式的守恒律方程组

$$\frac{\partial G_i(V)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial G_i^k(V)}{\partial x_k} = C_i(V) \quad (i = 1, \dots, 5), \quad (1.35)$$

其中 $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^T$ 为未知函数, 其展开的形式

$$\sum_{l=1}^5 \frac{\partial G_i(V)}{\partial v_l} \frac{\partial v_l}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^5 \frac{\partial G_i^k(V)}{\partial v_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} = C_i(V) \quad (i = 1, \dots, 5) \quad (1.36)$$

同时为对称双曲组, 即

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G_i(V)}{\partial v_l} \right) & \text{为对称正定阵,} \\ \left(\frac{\partial G_i^k(V)}{\partial v_l} \right) & (k = 1, 2, 3) \text{为对称阵,} \end{aligned}$$

则将会带来一定的方便。

对理想流体力学方程组, 有没有可能通过选取 $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^T$ 为 u_1, u_2, u_3, p 及 S 的适当的组合或函数, 来实现这

一要求,是一个有趣的研究课题。这一问题在本世纪六十年代为苏联数学家戈都诺夫 (C. K. Godounov) 所解决 (见 [10] 及其中的参考文献)。美国数学家弗里德里克斯 (K. O. Friedrichs) 与拉克斯 (P. D. Lax) 等也对此进行了研究 (见 [8] 和 [9])。下面我们对这一问题作进一步的讨论。

我们从守恒定律形式的方程组 (1.10)、(1.14) 及 (1.19), 即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0, \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k u_i + p \delta_{ki}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} ((\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + p) u_k) = 0 \quad (1.39)$$

出发。这里为简单计, 假设 $\mathbf{F} = 0$ 。利用连续性方程 (1.37), 熵守恒方程 (1.31) 可写为如下的守恒定律形式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho S u_k) = 0, \quad (1.40)$$

其中 ρS 为单位体积流体的熵, 而 $\rho S \mathbf{u}$ 则称为熵流向量。

现在设法引进新的未知函数 $V = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ (这里为方便计, 将分量的下标从零开始), 将方程组 (1.37) — (1.39) 化为如下守恒定律形式的方程组

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{v_i}^0 + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} L_{v_i}^k = 0, \quad i = 0, \dots, 4, \quad (1.41)$$

其中 $L_{v_i}^j$ 表示 L^j 关于 v_i 的偏导数 ($j = 0, 1, 2, 3$)。将方程组 (1.41) 写为 (1.36) 的形式, 易见

$$\left(\frac{\partial G_i}{\partial v_l} \right) = (L_{v_i v_l}^0),$$

$$\left(\frac{\partial G_i^k}{\partial v_l}\right) = \left(L_{v_i v_l}^k\right), \quad k = 1, 2, 3.$$

显然, 若能找到 (1.41) 形式的守恒律组, 由于以上矩阵都是对称阵, 只要 $(L_{v_i v_l}^0)$ 为正定, 即函数 $L^0(V)$ 是严格凸的, 则 (1.41) 即为守恒定律形式的一阶对称双曲组。

由前几段的讨论知, 熵守恒方程 (1.40) 在连续可微流场中可由守恒律组 (1.37)–(1.39) 推出。仔细考察以上推导过程, 可以看出, 存在因子 v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 使

$$\begin{aligned} & v_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \right) \\ & + \sum_{i=1}^3 v_i \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k u_i + p \delta_{ki}) \right) \\ & + v_4 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + p \right) u_k \right) \right) \\ \equiv & \frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho S u_k), \end{aligned} \quad (1.42)$$

其中

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{e + \rho e_\rho - S e_S - \frac{1}{2} u^2}{e_S}, \\ v_i &= -\frac{u_i}{e_S} \quad (i = 1, 2, 3), \quad v_4 = \frac{1}{e_S}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

这里 $e = e(\rho, S)$ 视为 ρ 及 S 的函数。实际上, 我们很容易由 V 的表达式 (1.43) 直接验证 (1.42) 式的正确性。记

$$L^0 = v_0 \rho + \sum_{i=1}^3 v_i \rho u_i + v_4 \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) - \rho S, \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned}
L^k &= v_0 \rho u_k + \sum_{i=1}^3 v_i (\rho u_k u_i + p \delta_{ki}) \\
&\quad + v_4 (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + p) u_k - \rho S u_k, \quad k = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

利用 V 的表达式 (1.43), 容易验证

$$v_0 d\rho + \sum_{i=1}^3 v_i d(\rho u_i) + v_4 d(\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) = d(\rho S), \tag{1.46}$$

故由 (1.44) 式得到

$$dL^0 = \rho dv_0 + \sum_{i=1}^3 \rho u_i dv_i + (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) dv_4. \tag{1.47}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}
dL^k &= \rho u_k dv_0 + \sum_{i=1}^3 (\rho u_k u_i + p \delta_{ki}) dv_i \\
&\quad + (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + p) u_k dv_4, \quad k = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

以上两式说明

$$L_{v_0}^0 = \rho, \quad L_{v_i}^0 = \rho u_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad L_{v_4}^0 = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \tag{1.49}$$

及

$$\begin{aligned}
L_{v_0}^k &= \rho u_k, \quad L_{v_i}^k = \rho u_k u_i + p \delta_{ki} \quad (i = 1, 2, 3), \\
L_{v_4}^k &= (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + p) u_k \quad (k = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{1.50}$$

这样, 方程组 (1.37) — (1.39) 即可写为如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{v_0}^0 + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} L_{v_0}^k = 0, \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{v_i}^0 + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} L_{v_i}^k = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{v_4}^0 + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} L_{v_4}^k = 0. \quad (1.53)$$

这就是形如 (1.41) 的守恒律方程组.

上面引进的 v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 及 L^0, L^1, L^2, L^3 可以利用热力学关系式写为比较简单的形式. 事实上, 由 (1.26) 式有

$$de = TdS + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (1.54)$$

所以

$$e_S = T, \quad e_\rho = \frac{p}{\rho^2}. \quad (1.55)$$

这样, 由 (1.43) 式给出的 V 可写为

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{e + \rho e_\rho - TS - \frac{1}{2}u^2}{T}, \\ v_i &= -\frac{u_i}{T} \quad (i = 1, 2, 3), \quad v_4 = \frac{1}{T}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

再由 (1.44) 及 (1.45) 式, 就有

$$L^0 = -\frac{p}{T}, \quad L^k = -\frac{p}{T} u_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.57)$$

下面说明 $L^0(V)$ (或 $-L^0$) 关于 $V = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)^\top$ 的严格凸性.

对于所讨论的理想流体, 我们假定其内能 e 视为 τ 及 S 的函数 $e(\tau, S)$ 是严格凸的 (这个假定的合理性见附录二), 即矩阵

$$\begin{pmatrix} e_{\tau\tau} & e_{\tau S} \\ e_{\tau S} & e_{SS} \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

是正定的. 对 τ, S 及 e 作勒让德 (Legendre) 变换 (见附录二), 由勒让德变换的性质知 $\tau e_{\tau} + S e_S - e$ 是 e_{τ} 与 e_S 的严格凸函数. 这样

$$\tau e_{\tau} + S e_S + \frac{1}{2} u^2 - e (= T v_0) \quad (1.59)$$

就是 $e_{\tau}, e_S, u_1, u_2, u_3$ 的严格凸函数, 从而也是 $-e_{\tau}, e_S, u_1, u_2, u_3$ 的严格凸函数.

引理 1.1. 设

$$L = L(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad (1.60)$$

为其变元的严格凸函数, 且

$$L_{\xi_0} < 0. \quad (1.61)$$

则由 (1.60) 式确定的函数

$$\xi_0 = \xi_0(L, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad (1.62)$$

也是其变元的严格凸函数.

证明 为书写简单起见, 只对 $n = 1$ 的情况给出证明. 由 L 的严格凸性有

$$\begin{aligned} & L(\lambda \eta_0 + \mu \zeta_0, \lambda \eta_1 + \mu \zeta_1) \\ & < \lambda L(\eta_0, \eta_1) + \mu L(\zeta_0, \zeta_1), \\ & \quad \forall 0 < \lambda, \mu < 1; \lambda + \mu = 1. \end{aligned} \quad (1.63)$$

由 (1.61) 式知, 由下式可以唯一确定 $\xi_0 = \xi_0(\lambda L(\eta_0, \eta_1) + \mu L(\zeta_0, \zeta_1), \lambda\eta_1 + \mu\zeta_1)$:

$$L(\xi_0, \lambda\eta_1 + \mu\zeta_1) = \lambda L(\eta_0, \eta_1) + \mu L(\zeta_0, \zeta_1), \quad (1.64)$$

且

$$\xi_0 < \lambda\eta_0 + \mu\zeta_0, \quad (1.65)$$

即成立

$$\begin{aligned} & \xi_0(\lambda L(\eta_0, \eta_1) + \mu L(\zeta_0, \zeta_1), \lambda\eta_1 + \mu\zeta_1) \\ & < \lambda\xi_0(L(\eta_0, \eta_1), \eta_1) + \mu\xi_0(L(\zeta_0, \zeta_1), \zeta_1), \\ & \quad \forall 0 < \lambda, \mu < 1; \lambda + \mu = 1. \end{aligned} \quad (1.66)$$

这就证明了引理。

因为

$$\frac{\partial}{\partial(-e_\tau)}(Tv_0) = -\tau < 0, \quad (1.67)$$

由引理 1.1 易知, $-e_\tau = p$ 为

$$-Tv_0 = e + pe_p - TS - \frac{1}{2}u^2, \quad u_1, u_2, u_3, e_S = T$$

的严格凸函数。

引理 1.2. 设函数 $L(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ 关于其变量 $\xi_0 (> 0)$, ξ_1, \dots, ξ_n 为严格凸的, 则

$$M = \frac{1}{\xi_0} L(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

关于变量

$$\eta_0 = \frac{1}{\xi_0}, \eta_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \eta_n = \frac{\xi_n}{\xi_0}$$

是严格凸的。

这个引理的证明作为练习留给读者。

前面已经证明, p 为 $-Tv_0, u_1, u_2, u_3, T$ 的严格凸函数, 利用引理 1.2, 我们知道, $\frac{p}{T}$ 为变元 $-v_0, \frac{u_1}{T}, \frac{u_2}{T}, \frac{u_3}{T}, \frac{1}{T}$ 的严格凸函数, 即为变元

$$e + \frac{\rho e_\rho - TS - \frac{1}{2}u^2}{T}, \frac{u_1}{T}, \frac{u_2}{T}, \frac{u_3}{T}, \frac{1}{T}$$

的严格凸函数, 从而也是由 (1.56) 式给出的 v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 的严格凸函数。这就证明了我们的结论。

这里指出, 由形如 (1.41) 的守恒律方程组, 可以得到另一个附加的守恒定律

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=0}^4 v_i L_{v_i}^0 - L^0 \right) \\ & + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=0}^4 v_i L_{v_i}^k - L^k \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

容易验证, 上式就是熵守恒方程 (1.40)。

此外, 由 L^0 及其关于新未知函数 V 的偏导数的表达式 (1.44) 及 (1.49) 以及我们已经证明的 L^0 关于 V 的严格凸性, 可以看出, v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 及 L^0 恰为原未知函数 $\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, (\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2)$ 及 ρS 的勒让德变换。

最后, 我们讨论一般的守恒律方程组

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} B^k(U) = 0, \quad (1.69)$$

其中 $U = (u_1, \dots, u_n)^T$, $B^k = (b_1^k, \dots, b_n^k)^T$ ($k = 1, 2, 3$)。对于这个方程组, 我们下面给出能够通过引入新的未知函数化为

守恒定律形式的一阶对称双曲组的一个充分必要条件。

定理 1.1. 守恒定律形式的一阶拟线性偏微分方程组 (1.69) 可以通过未知函数变换

$$U = U(V) \quad (1.70)$$

即

$$u_i = u_i(v_1, \dots, v_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.71)$$

化为守恒定律形式的一阶对称双曲组的充要条件为：存在严格凸的标量函数 $W(U)$ 与向量函数 $\mathbf{H} = (h_1(U), h_2(U), h_3(U))^T$ ，使成立如下的附加守恒定律

$$\frac{\partial}{\partial t} W(U) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} h_k(U) = 0. \quad (1.72)$$

这里， $W(U)$ 的严格凸性系指其黑赛矩阵 (Hessian)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial U^2} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} \right)$$

的正定性。

数量函数 $W(U)$ 也称为守恒律方程组 (1.69) 的 熵函数，而 $\mathbf{H}(U)$ 称为 熵流向量。

证明 必要性。设未知函数变换 (1.70) 使方程组 (1.69) 化为守恒定律形式的一阶对称双曲组。这样，方程组 (1.69) 可写为

$$\frac{\partial U}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial B^k}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0, \quad (1.73)$$

其中

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial v_j} \right), \quad \left(\frac{\partial B^k}{\partial V} \right) = \left(\frac{\partial b_i^k}{\partial v_j} \right) \quad (k = 1, 2, 3),$$

且 $\frac{\partial U}{\partial V}$ 为对称正定阵, $\frac{\partial B^k}{\partial V}$ ($k = 1, 2, 3$) 为对称阵.

由 $\frac{\partial U}{\partial V}$ 的对称性, 即

$$\frac{\partial u_i}{\partial v_j} = \frac{\partial u_j}{\partial v_i}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

知道一定存在标量函数 $L^0(V)$, 使 U 为 L^0 的梯度:

$$\frac{\partial L^0(V)}{\partial v_i} = u_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.74)$$

又由 $\frac{\partial U}{\partial V}$ 的正定性知 $L^0(V)$ 是严格凸函数. 同理, 存在 $L^k(V)$ ($k = 1, 2, 3$) 使

$$\frac{\partial L^k(V)}{\partial v_i} = b_i^k \quad (k = 1, 2, 3; i = 1, \dots, n). \quad (1.75)$$

令

$$W(U) = \sum_{j=1}^n u_j v_j - L^0(V), \quad (1.76)$$

$$h_k(U) = \sum_{j=1}^n b_j^k v_j - L^k(V) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1.77)$$

则 $W(U)$, $H(U) = (h_1(U), h_2(U), h_3(U))^T$ 即为满足要求的熵函数与熵流向量.

为说明这一点, 首先证明 $W(U)$ 的严格凸性. 将 (1.76) 式对 u_i 求偏导数并利用 (1.74) 式, 得

$$\frac{\partial W(U)}{\partial u_i} = v_i + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial v_j}{\partial u_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L^0}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial u_i} = v_i$$

$$(i = 1, \cdots, n). \quad (1.78)$$

(1.76)、(1.74) 与 (1.78) 式说明 u_1, \cdots, u_n 及 W 为 v_1, \cdots, v_n 及 L^0 的勒让德变换. 这样, 由 $L^0(V)$ 的严格凸性即得 $W(U)$ 为 U 的严格凸函数.

其次证明附加守恒定律 (1.72) 成立. 类似于得到 (1.78) 式的过程, 利用 (1.75), 由 (1.77) 式不难验证

$$\frac{\partial h^k(U)}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j^k}{\partial u_i} v_j. \quad (1.79)$$

由 (1.78) 与 (1.79) 式, 并利用原方程组 (1.69), 立即有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} W(U) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} h_k(U) \\ &= \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial b_j^k}{\partial u_i} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\ &= \sum_{j=1}^n v_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial b_j^k}{\partial x_k} \right) = 0. \end{aligned}$$

这就证明了必要性.

充分性. 设存在满足定理条件的 $W(U)$ 与 $\mathbf{H}(U)$. 首先说明熵函数 $W(U)$ 与熵流向量 $\mathbf{H}(U)$ 必满足下述关系式:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial u_i} \frac{\partial b_i^k}{\partial u_j} - \frac{\partial h_k}{\partial u_j} = 0$$

$$(k = 1, 2, 3; j = 1, \cdots, n). \quad (1.80)$$

事实上, 利用原方程组 (1.69), 可将附加守恒定律 (1.72) 写为

$$-\sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^3 \frac{\partial W}{\partial u_i} \frac{\partial b_i^k}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_k}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0. \quad (1.81)$$

(1.81) 式应对一切满足原方程组 (1.69) 的 U 成立, 由上式立即得到 (1.80) 式*.

由 $W(U)$ 的严格凸性知

$$v_i = \frac{\partial}{\partial u_i} W(U) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.82)$$

为一可逆变换. 因此可由 (1.82) 式定义 U 为 V 的函数.

令

$$L^0(V) = \sum_{i=1}^n v_i u_i - W(U), \quad (1.83)$$

$$L^k(V) = \sum_{i=1}^n v_i b_i^k - h_k(U) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.84)$$

将 (1.83) 式关于 v_j 求偏导数, 并利用 (1.82) 式, 可得

$$\frac{\partial L^0(V)}{\partial v_j} = u_j \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.85)$$

* 要说明这一点, 只要证明若

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^3 a_{jk}(U) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0$$

对满足方程组 (1.69) 的一切 U 成立, 则 $a_{jk}(V^0) = 0$ ($j = 1, \dots, n; k = 1, 2, 3$) 对任意给定的 $V^0 = (v_1^0, \dots, v_n^0)^T \in \mathbb{R}^n$ 成立. 为此, 令 $u_j^0(x) = v_j^0 + \sum_{k=1}^3 c_{jk} x_k$ ($j = 1, \dots, n$), 其中 c_{jk} 为常数. 则对方程组 (1.69) 以 $U^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0)^T$ 为初始值的柯西问题的解 U , 由上式在 $t = x_1 = \dots = x_n = 0$ 处给出 $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^3 a_{jk}(V^0) c_{jk} = 0$. 适当选取 c_{jk} , 即得所需的结果.

类似地, 将 (1.84) 式关于 v_j 求偏导数, 并利用 (1.80) 与 (1.82) 式, 易得

$$\frac{\partial L^k(V)}{\partial v_j} = b_j^k \quad (k = 1, 2, 3; j = 1, \dots, n). \quad (1.86)$$

(1.85) 与 (1.86) 式说明, 矩阵

$$\frac{\partial U}{\partial V} \quad \text{及} \quad \frac{\partial B^k}{\partial V} \quad (k = 1, 2, 3)$$

均为对称阵. 而 (1.83)、(1.82) 以及 (1.85) 式则说明 v_1, \dots, v_n 与 L^0 为 u_1, \dots, u_n 与 W 的勒让德变换. 这样, 由 $W(U)$ 的严格凸性即可推得 $L^0(V)$ 为严格凸函数, 从而 $\frac{\partial U}{\partial V}$ 是正定阵. 这就完成了定理的证明.

1.4. 一维理想流体力学方程组

现在考察一个特殊而重要的情况——理想流体的一维运动. 假设运动在一柱形管道中进行, 其轴为 $x = x_1$ 轴, 又设速度方向沿 x 轴, 外力也如此, 且在垂直于 x 轴的每一截面上, 流体的状态均相同. 于是速度分量只有 $u = u_1$, 而 $u_2 = u_3 = 0$, 且一切状态量均与 x_2, x_3 无关.

这时, 若记 F 为外力在 x 方向的分量, 理想流体力学方程组 (1.10)、(1.14) 及 (1.19) 化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = \rho F, \quad (1.88)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 + p)u) = \rho F u, \quad (1.89)$$

或利用 (1.10)、(1.15) 及 (1.25) 式得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (1.90)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F, \quad (1.91)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (1.92)$$

它们均为一阶拟线性双曲组。

由于以上两个方程组都不是一阶对称双曲组，为了说明它们的双曲性，有必要在这里介绍一下一个空间变量的一阶拟线性双曲型方程组的定义。考察如下的一阶拟线性偏微分方程组

$$A(t, x, U) \frac{\partial U}{\partial t} + B(t, x, U) \frac{\partial U}{\partial x} = F(t, x, U), \quad (1.93)$$

其中 $U = (u_1, \dots, u_n)^T$ 为未知函数向量， $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ， $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 和 $F = (f_1, \dots, f_n)^T$ 在所考察的区域中为 t 、 x 及 U 的适当光滑的矩阵函数。

下面我们总假定在所考察的区域中成立

$$\det A \neq 0. \quad (1.94)$$

定义 1.2. 假设对所考察区域中任一 (t, x, U) ，成立

(a) 特征方程

$$\det(B - \lambda A) = 0 \quad (1.95)$$

有 n 个实根

$$\lambda_1(t, x, U), \lambda_2(t, x, U), \dots, \lambda_n(t, x, U); \quad (1.96)$$

(b) 设 $\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i, \dots, \eta_n^i)$ 为相应于上述广义特征值 λ_i 的广义左特征向量:

$$\eta^i B = \lambda_i \eta^i A, \quad (1.97)$$

则 η^i ($i = 1, \dots, n$) 构成完全组, 即成立

$$\det(\eta_j^i) \neq 0. \quad (1.98)$$

此时称方程组 (1.93) 为双曲型方程组。

若特征方程 (1.95) 具有 n 个相异的实根:

$$\lambda_1(t, x, U) < \lambda_2(t, x, U) < \dots < \lambda_n(t, x, U), \quad (1.99)$$

则假设 (b) 自动成立, 此时称方程组 (1.93) 为严格双曲型方程组。

设在 (t, x) 平面上有一光滑曲线 C , 其参数方程为

$$C: t = t(\sigma), x = x(\sigma), \quad |t'(\sigma)|^2 + |x'(\sigma)|^2 \neq 0.$$

若沿该曲线 C 成立

$$\det(t'(\sigma)B - x'(\sigma)A) = 0, \quad (1.100)$$

则称曲线 C 为方程组 (1.93) 的特征曲线。注意到假设 (1.94), 易知在上式成立时, 曲线 C 必可写为

$$C: x = x(t) \quad (1.101)$$

的形式, 而 (1.100) 式则可改写为

$$\det\left(B - \frac{dx}{dt}A\right) = 0. \quad (1.102)$$

现在考察方程组 (1.87)–(1.89) 或方程组 (1.90)–(1.92) 的双曲性。考虑到未知函数的可逆变换与方程组中方程的可逆线性组合不会改变方程组的类型，下面我们仅需对方程组 (1.90)–(1.92) 进行讨论。取 $U = (\rho, u, S)^T$ 为未知函数向量，此时 $p = p(\rho, S)$ ，将此方程组写为 (1.93) 式的形式，不难得到

$$A = I, \quad (1.103)$$

$$B = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & \frac{p_S}{\rho} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad (1.104)$$

其中 I 为单位阵， $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ 为局部音速的平方 (参见 §1.3)，而 $p_S = \frac{\partial p}{\partial S}$ 。所以

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda A) &= \begin{vmatrix} u - \lambda & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u - \lambda & \frac{p_S}{\rho} \\ 0 & 0 & u - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (u - \lambda)((u - \lambda)^2 - c^2). \end{aligned} \quad (1.105)$$

方程组 (1.90)–(1.92) 的特征方程为

$$(u - \lambda)((u - \lambda)^2 - c^2) = 0, \quad (1.106)$$

其根为

$$\lambda_1 = u - c, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u + c. \quad (1.107)$$

这说明，在不出现真空的范围内 (此时 $c > 0$)，方程组 (1.90)–(1.92) 是严格双曲型的，其三族特征曲线分别由

$$\frac{dx}{dt} = u - c, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dx}{dt} = u + c \quad (1.108)$$

给出。

最后考虑在整个流场中熵恒为常数 (而不仅仅沿流线为常数) 的特殊情况: $S \equiv \text{常数}$, 此时称为均熵流。在这一假设下, $p = p(\rho)$, 而 $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$ 。这样, 方程组 (1.90)—(1.92) 可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (1.109)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = F. \quad (1.110)$$

容易验证, 在不出现真空的范围内, 它是含有两个未知函数 ρ 及 u 的严格双曲型方程组。在 $F \equiv 0$ 的情形, 对这种方程组有一系列有意义的讨论 (参见 [6], [7])。这是一种相对说来比较容易处理的情形, 但仍然有不少问题有待进一步研究。

§2. 粘性流体力学方程组

2.1. 引言

实际的流体和理想流体的主要区别, 就在于前者有粘性 (内摩擦) 和热传导性。这一现象是由流体 (气体与液体) 的分子结构所产生的。摩擦应力和由热传导而交换的热量, 由流体的速度分布和温度分布表示出来的基本规律性, 原则上可以由流体分子运动论导出 (参见第八章)。但是作为宏观现象的描述, 这些规律性必须作为 (根据实验结果得出的) 某种附加的物理定律而预先给出。如何给出这些附加的物理定律, 是建立有关的数学模型的关键步骤。

在这里首先作一个初步的考察。

先看粘性（内摩擦性）。牛顿对此指出了一个简单的法则：沿切线方向运动的两层粘性流体平面之间的摩擦切应力，与该方向流体速度沿与平面垂直方向的梯度成正比；简言之，摩擦力和速度梯度成正比。例如，假设两层粘性流体平行于平面 Oxy ，并沿 Ox 轴方向运动，其速度为 u ，则摩擦切应力 p_{xz} 应为

$$p_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.1)$$

这儿 p_{xz} 中的下标 z 表示考虑的是垂直于 z 的平面上的摩擦切应力，而下标 x 表示力的方向沿 x 轴。式中 μ 称为粘性系数，在各向同性的情况，它和所考虑的平面的取向无关，只依赖于所考虑的流体，同时一般也依赖于流体的温度（通常可认为与流体压力无关）。

这儿对牛顿法则作一些说明。两层粘性流体之间作用的摩擦力是一种内部相互作用的力。这一层对另一层有摩擦力，而另一层对这一层也有摩擦力，按作用反作用定律，它们大小相等，方向相反。因此，只有将一团流体从整个流体中割裂开来，才能体现出此团流体之外的流体对此团流体在其表面上的摩擦力。因此，摩擦力是一种内力，而单位面积上所受的内力称为应力；同时，摩擦力总应是在与表面相切的方向，故是一种切应力。

只有当两层流体之间有相对运动，才能在其间有摩擦力，而摩擦力起着阻碍运动的作用。如果两层流体之间没有相对运动，摩擦力应为零。因此，只有在两层流体之间有速度梯度时，才能有摩擦应力。牛顿法则指出摩擦应力应与速度梯度成正比，而比例系数只依赖于所考虑的流体及其温度。这是一种线性的假设。满足这一要求的流体称为牛顿流体；而不满足这一要求的流体则称为非牛顿流体。

由 (2.1) 式，粘性系数的量纲是

$$\frac{\text{力}}{\text{长度}^2} \cdot \frac{\text{长度}}{\text{速度}} = \frac{\text{力}}{\text{长度} \cdot \text{速度}} = \frac{\text{力} \cdot \text{时间}}{\text{长度}^2} = \frac{\text{质量}}{\text{长度} \cdot \text{时间}},$$

其单位在国际单位制中是 帕·秒 ($\text{Pa} \cdot \text{s}$):

$$1 \text{ 帕} \cdot \text{秒} = 1 \frac{\text{牛顿} \cdot \text{秒}}{\text{米}^2} = 1 \frac{\text{千克}}{\text{米} \cdot \text{秒}},$$

而 $1 \text{ 帕} = 1 \text{ 牛顿} / \text{米}^2$ ，通常取 毫帕·秒 ($\text{mPa} \cdot \text{s}$) 为单位:

$$1 \text{ 毫帕} \cdot \text{秒} = 10^{-3} \text{ 帕} \cdot \text{秒},$$

它相当于水在 20.5°C 时的粘性系数值。

流体的粘性系数是和温度有关的，例如水的粘性系数随着温度的升高而下降，见下表。

水的粘性系数随温度的变化情况

温度 / $^\circ\text{C}$	$\mu / (\text{mPa} \cdot \text{s})$	温度 / $^\circ\text{C}$	$\mu / (\text{mPa} \cdot \text{s})$
0	1.792	40	0.656
5	1.519	45	0.599
10	1.308	50	0.549
15	1.140	60	0.469
20	1.005	70	0.406
25	0.894	80	0.357
30	0.801	90	0.317
35	0.723	100	0.284

而空气的粘性系数则与此相反，随温度升高，它反而增大，见下表。

空气的粘性系数随温度的变化情况

温度 /°C	$\mu/(10^{-2} \text{ mPa}\cdot\text{s})$	温度 /°C	$\mu/(10^{-2} \text{ mPa}\cdot\text{s})$
0	1.709	260	2.806
20	1.808	280	2.877
40	1.904	300	2.946
60	1.997	320	3.014
80	2.088	340	3.080
100	2.175	360	3.146
120	2.260	380	3.212
140	2.344	400	3.277
160	2.425	420	3.340
180	2.505	440	3.402
200	2.582	460	3.463
220	2.658	480	3.523
240	2.733	500	3.583

有的液体粘性很大, 如甘油, 在 3°C 时 $\mu = 4.220$ 帕·秒; 机油, 在 10°C 时 $\mu = 0.6755$ 帕·秒。有的液体, 其粘性随着温度增高而很快下降, 如甘油, 其粘性系数随温度的变化情况如下:

温度 /°C	3	18	21
$\mu/(\text{Pa}\cdot\text{s})$	4.220	1.069	0.778

在寒冷的地区, 机油因冷却而粘性加大, 失去效用, 常用加温的方法减低其粘性。

粘性系数和温度的关系, 对气体来说, 常可用如下的幂函数来表达:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^n, \quad (2.2)$$

其中 n 随气体不同而不同, 且有时还和温度有微弱的依赖关系。例如, 空气的 $n \approx 0.72$, 氮气的 $n \approx 0.64$, 氢气的 $n \approx 0.69$, 二

氧化碳 $n \approx 0.95$. 在近似计算中, 对比较高温的气体, 有时用 $n = 0.5$; 而对低温情形, 用 $n = 1$.

现再看热传导性. 这在数学物理方程课程中已有讨论, 已知可用傅里叶 (Fourier) 实验定律来刻画: 在单位时间内沿法线方向 \boldsymbol{n} 通过曲面微元 dS 的热量

$$dq = -\kappa \frac{\partial T}{\partial n} dS, \quad (2.3)$$

其中负号表示热流方向是由高温流向低温. (2.3) 式表明热流量和温度梯度成正比 (这也是一个线性关系!), 而比例系数 κ 称为导热系数. 导热系数决定于所考察的流体, 并可与温度有关. 可将 (2.3) 式改写为

$$dq = -\kappa \text{grad } T \cdot \boldsymbol{n} dS, \quad (2.4)$$

其中 $-\kappa \text{grad } T$ 称为热量流密度向量.

下面我们要着重将描述粘性的牛顿法则推广到流体作任意运动的一般情况.

2.2. 应力张量

为将前面在简单运动情况所提出的牛顿法则, 推广到任意运动的一般情况, 为建立粘性流体力学方程组作准备, 下面先介绍应力张量的概念.

现在回到 §1 中建立动量守恒方程组的过程. 在理想流体的情形, 表面力的冲量项

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \text{div}(p\boldsymbol{I}) d\boldsymbol{x} dt$$

是由外界流体的压力产生的. 这里及今后, 记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, 而 $d\boldsymbol{x} = dx_1 dx_2 dx_3$. 在有粘性的情形, 外界流体对 Ω 的作

用力, 不仅有表面上的压力 (正应力), 而且有表面上的内摩擦力 (切应力); 它们的联合作用给出相应的表面力冲量。因此, 动量守恒方程组的一般形式还应保持, 但二阶张量 $p\mathbf{I}$ 应改为考虑到粘性在内的应力张量 $\{p_{ij}\}$ 。

对流场中一点 M 处的一面积元素 ΔS , 设其法线方向为 \mathbf{n} , 又设 \mathbf{n} 所指一侧的流体作用在 ΔS 上的面力为 $\Delta \mathbf{p}$, 则

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta S} \quad (2.5)$$

为 M 点处以 \mathbf{n} 为法线方向的单位面积上受到的面力, 称为应力向量。因为过这一点 M 有无穷多个方向, 相应的应力向量一般也不相同。要描述一点的应力状态就需要知道过该点所有面上所受的应力。但是同一点对不同方向的应力向量不是互不相关的。事实上, 只要知道作用在与三个坐标面平行的面上的应力向量就够了。记 p_{ij} 为以 x_j 的正向为法线方向的面积元素上的应力向量的第 i 个分量, 那么 $\{p_{ij}\}$ 就称为应力张量。

下面说明以上定义的 $\{p_{ij}\}$ 是二阶张量。为此我们证明: 若一面积微元 dS , 其单位法向量为 \mathbf{n} , 则其上的应力向量 (即 \mathbf{n} 指向的一侧作用在 dS 的单位面积上的力) 为

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{P}\mathbf{n}, \quad (2.6)$$

其中 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$, $\mathbf{P}\mathbf{n}$ 为矩阵 \mathbf{P} 与向量 \mathbf{n} 按普通意义下的乘法, 即是分量为 $\sum_{j=1}^3 p_{ij}n_j$ ($i = 1, 2, 3$) 的向量, 而 n_j ($j = 1, 2, 3$) 是 \mathbf{n} 的分量。利用张量识别定理 (见附录一), 由 (2.6) 式即知 \mathbf{P} 为二阶张量。

现证明 (2.6) 式。不妨设所讨论的点为原点 O 。考察图 1 所示的四面体微元上力的平衡。此四面体受体积力 (包括外力及惯性力) 以及表面力的作用。当四面体的棱长趋于零时, 体积力为

棱长的三阶无穷小量；而面力则为二阶无穷小量。设平面 ABC 的单位外法线向量为 $\boldsymbol{n}(n_1, n_2, n_3)$ ，则显然

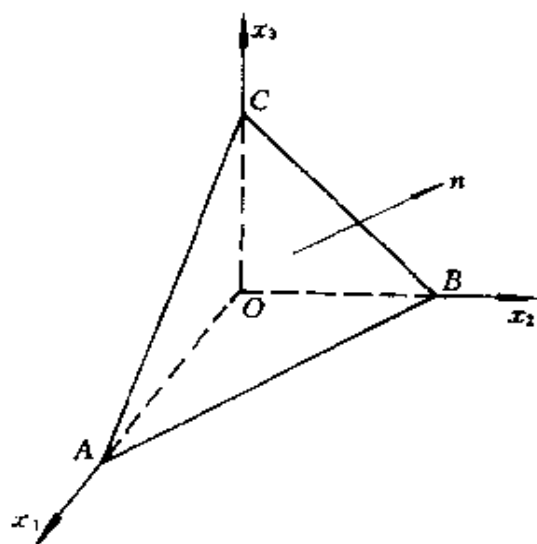


图 1

$$\Delta OBC \text{ 的面积} = n_1 \cdot \Delta ABC \text{ 的面积},$$

$$\Delta OAC \text{ 的面积} = n_2 \cdot \Delta ABC \text{ 的面积},$$

$$\Delta OAB \text{ 的面积} = n_3 \cdot \Delta ABC \text{ 的面积}.$$

此外，由 p_{ij} 的定义，有

$$\begin{aligned} \Delta OBC \text{ 所受的面力} &= -(p_{11}, p_{21}, p_{31}) \cdot \Delta OBC \text{ 的面积} \\ &= -n_1(p_{11}, p_{21}, p_{31}) \cdot \Delta ABC \text{ 的面积}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta OAC \text{ 所受的面力} &= -(p_{12}, p_{22}, p_{32}) \cdot \Delta OAC \text{ 的面积} \\ &= -n_2(p_{12}, p_{22}, p_{32}) \cdot \Delta ABC \text{ 的面积}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta OAB \text{ 所受的面力} &= -(p_{13}, p_{23}, p_{33}) \cdot \Delta OAB \text{ 的面积} \\ &= -n_3(p_{13}, p_{23}, p_{33}) \cdot \Delta ABC \text{ 的面积}. \end{aligned}$$

设平面 ABC 上的应力向量为 \mathbf{p}_n ，则由四面体上力的平衡条件得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}_n - n_1(p_{11}, p_{21}, p_{31}) - n_2(p_{12}, p_{22}, p_{32}) \\ & \quad - n_3(p_{13}, p_{23}, p_{33})) \cdot \Delta ABC \text{ 的面积} \\ & \quad + \text{四面体所受的体积力} \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

将上式两端除以 ΔABC 的面积，然后令 OA , OB 及 OC 在保持 n 不变的条件下趋向于零，由 (2.7) 式立即给出 (2.6) 式。

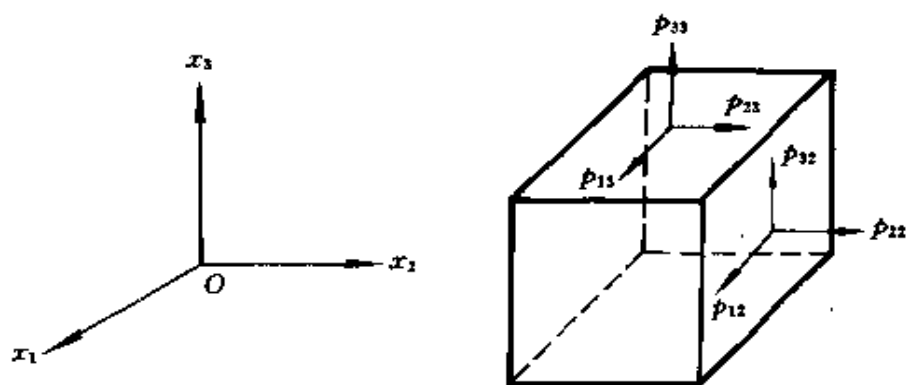


图 2

下面我们证明 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$ 是对称张量，即成立

$$p_{ij} = p_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.8)$$

考察图 2 所示的立方体微元，设其边长分别为 dx_1 , dx_2 及 dx_3 。现考察作用在该立方体上的力对其中心（设为 O 点）的力矩。由

平衡条件，它应为零。与前面一样，由于体积力形成的力矩为高阶无穷小量，可以略去。此外，表面上应力的法向分量通过此立方体的中心，对力矩的贡献为零。于是，考察力矩在 x_1 方向的分量易得

$$p_{32}dx_3dx_1 \cdot dx_2 - p_{23}dx_1dx_2 \cdot dx_3 = 0,$$

即

$$p_{32} = p_{23}.$$

同理可证 $p_{13} = p_{31}$ 及 $p_{12} = p_{21}$ 。

2.3. 广义牛顿法则 —— 本构方程

现在的问题是如何根据粘性流的特点具体地表示出这个二阶张量 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$ ，从而给出所要求的广义牛顿法则。为此，将 \mathbf{P} 写为如下形式：

$$\{p_{ij}\} = -p\{\delta_{ij}\} + \{\tau_{ij}\}. \quad (2.9)$$

这里 $\{\tau_{ij}\}$ 是 \mathbf{P} 中对应于摩擦应力的部分，应着重予以讨论。

首先，容易看到，由于内摩擦力本质上由流体各层之间的相对运动而产生，在整个流体上加一个平移运动时，粘性应力不应该改变。因此， $\{\tau_{ij}\}$ 应和流体速度无关，而只是速度分量的偏导数的函数。当速度梯度不大时，可认为 τ_{ij} 仅为速度分量的一阶偏导数的函数，且为线性的。这一事实已为实验很好地证实。这样，以下我们假定 τ_{ij} 是速度梯度 $\left\{ \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right\}$ 的线性齐次函数：

$$\tau_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (2.10)$$

其中 c_{ijkl} 是表征流体粘性的常数, 共有 $3^4 = 81$ 个. 因为 $\left\{\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right\}$ 及 $\{\tau_{ij}\}$ 均为二阶张量, 由张量识别定理 (见附录一), $\{c_{ijkl}\}$ 是四阶张量. 因为 $\{p_{ij}\}$ 为对称张量, 故 $\{\tau_{ij}\}$ 亦然, 这样就有

$$c_{ijkl} = c_{jikl}. \quad (2.11)$$

假设流体是各向同性的, 这意味着 $\{c_{ijkl}\}$ 是各向同性的四阶张量. 由四阶各向同性张量的一般形式 (见附录一), 有

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (2.12)$$

令 $\alpha = \mu + \nu$, $\beta = \mu - \nu$, 有

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \nu (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$c_{jikl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{jl} \delta_{ik}) + \nu (\delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{jl} \delta_{ik}).$$

注意到 (2.11) 式, 由此易得

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.13)$$

由上式还可以看出, $\{c_{ijkl}\}$ 关于下标 k 及 l 亦是对称的, 即

$$c_{ijkl} = c_{ijlk}. \quad (2.14)$$

这样, 为决定 $\{c_{ijkl}\}$, 只需决定 λ 及 μ . 将 (2.13) 代入 (2.10) 式, 就有

$$\tau_{ij} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} + 2\mu s_{ij}, \quad (2.15)$$

其中

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.16)$$

由 (2.9) 与 (2.15) 式, 即得应力张量的表达式

$$p_{ij} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu s_{ij} \quad (2.17)$$

或

$$\mathbf{P} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{S}, \quad (2.18)$$

这里 $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}$.

下面说明上式中 λ 及 μ 的意义.

首先考察沿 x_1 方向的剪切运动:

$$u_1 = u_1(x_3), u_2 = u_3 = 0.$$

由 (2.17) 式, 对于这一运动有

$$p_{13} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3}.$$

这与第一段中由牛顿法则给出的形式 (2.1) 完全一致. μ 称为第一粘性系数或动力学粘性系数.

由 (2.15) 可得

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \tau_{ii} = (\lambda + \frac{2}{3}\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

上式左端为由粘性而引起的平均摩擦正应力, 而 $\operatorname{div} \mathbf{u}$ 则表示体积变化率 (即单位时间内单位体积的变化量). 事实上, 由连续性方程 (1.10) 不难得到

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt},$$

其中 $\tau = \frac{1}{\rho}$ 为比容, 而 $\frac{d}{dt}$ 由 (1.17) 式定义. 这样, 若记

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (2.19)$$

则 μ' 作为平均摩擦正应力与体积变化率之比, 描述流体运动过程中由膨胀或收缩而引起的平均摩擦正应力的变化. μ' 称为第二粘性系数或膨胀粘性系数. 对于单原子气体, 在压力不是特别高的条件下, 可认为 $\mu' = 0$. 对于像空气这样的双原子气体, 在温度不太高时, 也可认为 $\mu' = 0$. 但在一般的情况下, 必须考虑 μ' 的影响.

利用 μ' 的定义 (2.19), (2.17) 式可写为

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(s_{ij} - \frac{1}{3}\text{div } \mathbf{u}\delta_{ij}) + \mu'\text{div } \mathbf{u}\delta_{ij}. \quad (2.20)$$

从而, 摩擦应力张量为

$$\tau_{ij} = 2\mu(s_{ij} - \frac{1}{3}\text{div } \mathbf{u}\delta_{ij}) + \mu'\text{div } \mathbf{u}\delta_{ij}. \quad (2.21)$$

这就是广义牛顿法则, 其中 $\mu > 0$, $\mu' \geq 0$. (2.20) 亦称为流体的本构方程.

2.4. 粘性热传导流体动力学方程组

现在考察具有粘性及热传导的流体的动力学方程组. 质量守恒定律仍具有原有的形式 (见 (1.10) 式):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.22)$$

在动量守恒定律中, 代替原先的压力张量 $-p\mathbf{I}$, 现采用应力张量 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$. 类似于 (1.13) 式, 应有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{P}) = \rho \mathbf{F}, \quad (2.23)$$

其中

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\text{div } \mathbf{u}\delta_{ij} \right) + \mu'\text{div } \mathbf{u}\delta_{ij}. \quad (2.24)$$

利用连续性方程 (2.22), 动量方程 (2.23) 可改写为

$$\rho \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\mu' - \frac{2}{3}\mu) \operatorname{div} \mathbf{u} \right) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) = \rho F_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.25)$$

或写为向量形式

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \operatorname{grad} p - \operatorname{grad} \left((\mu' - \frac{2}{3}\mu) \operatorname{div} \mathbf{u} \right) - 2\operatorname{div}(\mu \mathbf{S}) = \rho \mathbf{F}, \quad (2.26)$$

其中 $\frac{d}{dt}$ 的意义见 (1.17) 式, 而 μ 及 μ' 均可以是温度 T 的函数. (2.25) 或 (2.26) 也称为欧拉方程.

在能量守恒定律中, 代替原先压力张量作的功, 现采用应力张量作的功. 由 (2.6) 式, 在时间区间 $[t_1, t_2]$ 中, 应力张量对 Ω 中流体所作的功为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{P}\mathbf{n}) dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{P}\mathbf{u}) d\mathbf{x} dt,$$

其中 Γ 为 Ω 的边界. 这样, 在理想流体情形的方程 (1.19) 中的 $-\operatorname{div}(p\mathbf{u})$ 项应改为

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{P}\mathbf{u}) &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{ij} u_j) \\ &= -\operatorname{div}(p\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) u_j \right. \\ &\quad \left. + (\mu' - \frac{2}{3}\mu) u_i \operatorname{div} \mathbf{u} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

除此之外, 考虑到热传导性, 在时间区间 $[t_1, t_2]$ 中, Ω 内流体能量的增加还必须包含在这段时间内经过界面 Γ 流入 Ω 中的热量所折合的功 (或能). 由傅里叶定律 (2.4), 这一项的贡献应为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_F \kappa \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) dx dt. \quad (2.28)$$

这样, 能量守恒方程的形式为 (参见 (1.19))

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2) + \operatorname{div}((\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2)\mathbf{u} - \mathbf{P}\mathbf{u}) \\ &= \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2) + \operatorname{div}((\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 + p)\mathbf{u}) \\ & - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) u_j + (\mu' - \frac{2}{3}\mu) u_i \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \\ &= \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

利用连续性方程 (2.22), 上式可改写为

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + \operatorname{div}(p\mathbf{u}) \\ & - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) u_j + (\mu' - \frac{2}{3}\mu) u_i \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \\ &= \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

其中 $\frac{d}{dt}$ 的意义见 (1.17) 式.

注意到 $\operatorname{div}(p\mathbf{u}) = p \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} p$ 及 $\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}$, 并利用欧拉方程 (2.25), 方程 (2.31) 又可化为

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$-(\mu' - \frac{2}{3}\mu)(\operatorname{div} \mathbf{u})^2 = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T). \quad (2.32)$$

和理想流体力学方程组的情形一样, 还要配上适当的状态方程, 例如 $p = p(\rho, T)$, $e = e(\rho, T)$ 以及 μ, μ' 对 T 的依赖关系式. 这样, (2.22)、(2.23) 和 (2.29), 或者 (2.22)、(2.25) 和 (2.32) 诸式就构成包含五个未知函数的封闭的偏微分方程组.

2.5. 粘性热传导流体动力学方程组的数学结构

现在我们说明, 粘性热传导流体动力学方程组可写为拟线性的对称双曲-抛物耦合方程组的形式, 其意义下文说明.

质量守恒方程 (2.22) 可写为如下形式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = f_0(\rho, \operatorname{grad} \mathbf{u}), \quad (2.33)$$

其中

$$f_0(\rho, \operatorname{grad} \mathbf{u}) = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (2.34)$$

动量守恒方程 (2.25) 可写为

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \mu \Delta u_i - (\mu' + \frac{1}{3}\mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \\ &= \rho F_i + \tilde{f}_i(\rho, T, \mathbf{u}, \operatorname{grad} \rho, \operatorname{grad} \mathbf{u}, \operatorname{grad} T) \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2.35)$$

其中

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_i(\rho, T, \mathbf{u}, \operatorname{grad} \rho, \operatorname{grad} \mathbf{u}, \operatorname{grad} T) \\ &= -c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^3 \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
& + \frac{d(\mu' - \frac{2}{3}\mu)}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.36)
\end{aligned}$$

而 $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ ，写成分量形式，即为

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \left((\mu' + \frac{4}{3}\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \\
& - \frac{1}{\rho} (\mu' + \frac{1}{3}\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{\rho} (\mu' + \frac{1}{3}\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\
& = F_1 + f_1(\rho, T, \mathbf{u}, \operatorname{grad} \rho, \operatorname{grad} \mathbf{u}, \operatorname{grad} T), \quad (2.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{1}{\rho} (\mu' + \frac{1}{3}\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\
& - \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\mu' + \frac{4}{3}\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) \\
& - \frac{1}{\rho} (\mu' + \frac{1}{3}\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \\
& = F_2 + f_2(\rho, T, \mathbf{u}, \operatorname{grad} \rho, \operatorname{grad} \mathbf{u}, \operatorname{grad} T), \quad (2.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{1}{\rho} (\mu' + \frac{1}{3}\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{1}{\rho} (\mu' + \frac{1}{3}\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \\
& - \frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + (\mu' + \frac{4}{3}\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) \\
& = F_3 + f_3(\rho, T, \mathbf{u}, \operatorname{grad} \rho, \operatorname{grad} \mathbf{u}, \operatorname{grad} T), \quad (2.39)
\end{aligned}$$

其中 $f_i = \frac{\tilde{f}_i}{\rho}$ ($i = 1, 2, 3$)。

最后, 看能量守恒方程 (2.32). 由状态方程 $e = e(\rho, T)$ (特别, 对理想气体有 $e = e(T)$), 并利用连续性方程 (2.22), 有

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \frac{\partial e}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial e}{\partial T} \frac{dT}{dt} \\ &= -\frac{\partial e}{\partial \rho} \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\partial e}{\partial T} \frac{dT}{dt}.\end{aligned}$$

将其代入 (2.32) 式, 即得

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho \frac{\partial e}{\partial \rho}} \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) = \tilde{f}(\rho, T, \operatorname{grad} \mathbf{u}), \quad (2.40)$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\rho, T, \operatorname{grad} \mathbf{u}) &= \left\{ \left(\rho \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho} \right) \operatorname{div} \mathbf{u} \right. \\ &\quad + \frac{\mu}{\rho} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} \left(\mu' - \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \right\} / \frac{\partial e}{\partial T}.\end{aligned} \quad (2.41)$$

(2.40) 式还可写为

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho \frac{\partial e}{\partial T}} \Delta T = f_4(\rho, T, \mathbf{u}, \operatorname{grad} \mathbf{u}, \operatorname{grad} T), \quad (2.42)$$

其中

$$\begin{aligned}f_4(\rho, T, \mathbf{u}, \operatorname{grad} \mathbf{u}, \operatorname{grad} T) &= \tilde{f}(\rho, T, \operatorname{grad} \mathbf{u}) \\ &\quad - \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho \frac{\partial e}{\partial T}} \operatorname{grad} k \cdot \operatorname{grad} T,\end{aligned} \quad (2.43)$$

且 $\frac{\partial e}{\partial T} > 0$ 。

在上面五个方程 (2.33)、(2.37)—(2.39) 及 (2.42) 所构成的方程组中, 质量守恒定律 (2.33) 是一个一阶偏微分方程, 将其视为关于 ρ 的方程, 是对称双曲型方程组的特例, 因而是一个一阶双曲型方程, 但其系数与右端还与 u 有关。

现考察后面的四个方程。令 $U = (u_1, u_2, u_3, T)^T$, 则方程 (2.37)—(2.39) 及 (2.42) 的左端只包含 U 对 t 的一阶偏导数及对 x 的二阶偏导数, 这四个方程组成的方程组, 可以写为如下的矩阵形式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^3 B_{ij}(\rho, U) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = C(\rho, \text{grad } \rho, U, \text{grad } U), \quad (2.44)$$

其中

$$\begin{aligned} B_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{\mu' + \frac{4}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{\rho \frac{\partial e}{\partial T}} \end{pmatrix}, \\ B_{22} &= \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu' + \frac{4}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{\rho \frac{\partial e}{\partial T}} \end{pmatrix}, \\ B_{33} &= \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu' + \frac{4}{3}\mu}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{\rho \frac{\partial e}{\partial T}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$B_{12} = B_{21} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu' + \frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ \frac{\mu' + \frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{23} = B_{32} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu' + \frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\mu' + \frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{13} = B_{31} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\mu' + \frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu' + \frac{1}{3}\mu}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它们均为对称阵。此外，对任何给定的 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, $|\xi| = 1$,

$$\sum_{i,j=1}^3 B_{ij} \xi_i \xi_j$$

均为正定阵。事实上，

$$\sum_{i,j=1}^3 B_{ij} \xi_i \xi_j = \begin{pmatrix} a\xi_1^2 + b & a\xi_1\xi_2 & a\xi_1\xi_3 & 0 \\ a\xi_1\xi_2 & a\xi_2^2 + b & a\xi_2\xi_3 & 0 \\ a\xi_1\xi_3 & a\xi_2\xi_3 & a\xi_3^2 + b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \end{pmatrix},$$

其中

$$a = \frac{\mu' + \frac{1}{3}\mu}{\rho}, \quad b = \frac{\mu}{\rho}.$$

由于 $\mu > 0$, $\mu' \geq 0$, 在 $\rho > 0$ (不出现真空) 时, a 及 b 均为正

数。因而上述矩阵的主子式

$$a\xi_1^2 + b > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a\xi_1^2 + b & a\xi_1\xi_2 \\ a\xi_1\xi_2 & a\xi_2^2 + b \end{vmatrix} = ab(\xi_1^2 + \xi_2^2) + b^2 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a\xi_1^2 + b & a\xi_1\xi_2 & a\xi_1\xi_3 \\ a\xi_1\xi_2 & a\xi_2^2 + b & a\xi_2\xi_3 \\ a\xi_1\xi_3 & a\xi_2\xi_3 & a\xi_3^2 + b \end{vmatrix} = ab^2 > 0.$$

因此此矩阵为正定阵。

此时，我们称方程组 (2.44) 为对称抛物型的。

一般地说，一个方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n B_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = C,$$

其中 $U = (u_1, \dots, u_m)^T$, B_{ij} 为 $m \times m$ 阵，若满足

1° B_{ij} ($i = 1, \dots, n$) 为对称阵；

2° 对任意给定的 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$,

$$\sum_{i,j=1}^n B_{ij} \xi_i \xi_j \text{ 均为对称正定阵,}$$

则称该方程组属于彼得罗夫斯基 (I. G. Petrovsky) 意义下的对称抛物型方程组。

这样，粘性流体力学方程组的后面四个方程以 (u_1, u_2, u_3, T) 为未知函数构成二阶对称抛物组，而其第一个方程以 ρ 为未知函数为一个一阶对称双曲型方程，它们之间又互相耦合在一起，构成一个拟线性对称双曲—抛物耦合方程组。这就是这一方程组的数学结构。

通常对这类方程组可以提出柯西问题, 即给定初始状态

$$\begin{aligned} t=0: & (\rho, u_1, u_2, u_3, T) \\ & = (\rho^0(\boldsymbol{x}), u_1^0(\boldsymbol{x}), u_2^0(\boldsymbol{x}), u_3^0(\boldsymbol{x}), T^0(\boldsymbol{x})), \end{aligned} \quad (2.45)$$

要求以后 (即 $t > 0$ 时) 的状态。在初值适当光滑时, 这个问题的经典解在局部时间范围 $0 \leq t \leq \delta$ ($\delta > 0$) 中的存在唯一性, 利用能量积分及叠代方法是容易证明的。这种解称为局部经典解。和没有粘性及热传导的理想流体情形不同, 在现在的情况, 力学上不会发生激波型的间断。但对任意给定的光滑初值, 是否存在整体经典解 (即对一切时间 $t \geq 0$ 存在的经典解) 还是未能完全解决的问题。目前已能证明的是, 如果初值充分小, 那么该初值问题一定存在整体经典解 (例如, 见 [12])。这也是近年来的一个比较重要的研究成果。

除初始条件外, 有时还可能有边界条件。在研究粘性流体的绕流问题时, 在绕流物体表面 Γ 上, 不仅流体的法向分速度应为零 (因流体不渗入), 而且由于粘性, 流体的切向分速度也为零, 故速度边界条件为

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma} = 0. \quad (2.46)$$

而对温度 T 的边界条件, 则可采用通常的三类边界条件之一 (即在边界 Γ 上给定 T , $\frac{\partial T}{\partial n}$ 或 $\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T$ ($\alpha > 0$) 这三者之一, 其中 \boldsymbol{n} 为 Γ 上的单位外法线向量)。此时, 对未知函数 ρ 不需要任何边界条件。

2.6. 一维粘性热传导流体动力学方程组

现在考虑一个重要的特殊情况——一维运动的情形。此时假设流动在一圆柱形管道内进行, 该管道的轴为 $x = x_1$ 轴, 运动速度只有 x 方向的分量, 且在垂直于 x 轴的任一截面上状态量均相同, 即状态量只与 t 及 x 有关。因此在 §2.4 中所述的方

程组中, 应略去一切对 x_2 及 x_3 的偏导数, 且 $u_2 = u_3 = 0$, 外力亦只有 $x = x_1$ 方向的分量. 于是, 相应于 (2.22)、(2.23) 与 (2.29) 的方程组此时为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u^2 + p - \left(\frac{4}{3}\mu + \mu' \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho F, \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial x} \left((\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 + p)u \right. \\ \left. - \left(\frac{4}{3}\mu + \mu' \right) u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho F u. \end{aligned} \quad (2.49)$$

或同样地相应于 (2.22)、(2.25) 与 (2.32), 我们有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{4}{3}\mu + \mu' \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F, \quad (2.51)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u \frac{\partial e}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{4}{3}\mu + \mu' \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (2.52)$$

其中最后一式又可写为

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} \\ - \left(\frac{4}{3}\mu + \mu' \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

这儿, 第一个方程 (2.50) 对未知函数 ρ 仍为一阶双曲型方程, 后两个方程 (2.51) 及 (2.52) 对未知函数 u 与 T 为二阶抛

物组, 上述方程组仍为拟线性双曲-抛物耦合方程组. 对此方程可提柯西问题:

$$t = 0 : (\rho, u, T) = (\rho^0(x), u^0(x), T^0(x)), \quad (2.54)$$

或再加上下述边界条件的初-边值问题:

$$x = 0 : u = 0, T \text{ 满足通常的三类边界条件之一,}$$

$$x = 1 : \text{类似的边界条件.}$$

这里我们假定所讨论的流体界于 $x = 0$ 与 $x = 1$ 之间. 对上述问题, ρ 不需给定边界条件.

这些问题的局部可解性已彻底解决, 但其整体可解性仍是目前研究的课题.

§3. 纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程组

现在我们考察不可压缩的粘性流体的运动. 这是一种很有实际意义的情况. 典型的不可压缩流体是常温常压下的水. 由于其密度几乎不随压力、温度而改变, 因而可近似地视为不可压缩的. 对不可压缩流体, 其状态方程为密度 $\rho \equiv \text{常数}$. 不妨设

$$\rho \equiv 1. \quad (3.1)$$

对于这种流体的运动, 由于 (3.1) 式, 质量守恒方程 (2.22) 化为

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.2)$$

由 (3.2) 式, 此时在本构方程 (2.20) 中, 因而在流体力学方程组中不出现 μ' . 此外, 可设 μ 为常数. 这样, 注意到 (3.1)—(3.2) 式, 欧拉方程 (2.26) 可化为

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mu \Delta \mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{F}, \quad (3.3)$$

其中 p 是 t 及 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 的函数。需要指出的是, 即使在常温下, 也不能由状态方程推得 p 为常数。因为此时状态方程为 (3.1), 而不再采取 $p = p(\rho, T)$ 的形式。实际上, 不存在绝对不可压缩的流体。所谓不可压缩性, 是对流体在压力 p 及温度 T 改变时, 密度 ρ 的变化很小的这种现象的一种简化。换一句话说, 对这种流体, 密度 ρ 的微小变化即可引起压力 p 等的显著改变。因此如果将状态方程取为 (3.1) 的形式, 就必须将 p 视为 t 及 \mathbf{x} 的函数。

对现在这种情况, 将方程 (3.2) 及 (3.3) 视为未知函数 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ 及 p 的方程组已经是一个封闭的方程组。这样, 我们得到不可压缩流体运动的基本方程组为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} + \text{grad } p = \mathbf{F}, \quad (3.4)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (3.5)$$

这个方程组通常称为 纳维 - 斯托克斯方程组, 或更精确地称为三维纳维 - 斯托克斯方程组。

对纳维 - 斯托克斯方程组 (3.4) — (3.5), 通常考虑的定解问题是如下的柯西问题: 已知初始速度

$$t = 0 : \mathbf{u} = \mathbf{u}^0(x_1, x_2, x_3), \quad (3.6)$$

决定以后时刻 ($t > 0$) 的流速 $\mathbf{u}(t, x_1, x_2, x_3)$ 及压强 $p(t, x_1, x_2, x_3)$ 。这里自然假定初始速度 \mathbf{u}^0 满足条件 $\text{div } \mathbf{u}^0 = 0$, 而 p 的决定自然允许相差一个 t 的任意函数 (与 \mathbf{x} 无关)。

除初值问题外, 对这个方程组也可以考虑初 - 边值问题, 即要求该方程组的解除满足初始条件 (3.6) 外, 还在流体所占区域 Ω 的边界 Γ 上满足一定的边界条件, 如

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0. \quad (3.7)$$

这个条件说明：由于粘性，流体的速度在壁面上应为零。

纳维－斯托克斯方程组 (3.4)——(3.5) 的形式虽然比一般的粘性流体力学方程组简单，但仍是一个相当复杂的非线性方程组。由于纳维－斯托克斯方程组不仅可以用来描述粘性流体（如水）的运动，而且，目前比较倾向于认为可利用它来解释湍流发生的机制，因而具有极大的重要性，是无穷维动力系统的重要研究对象（参见 [14]）。到现在为止，关于其初－边值问题在三维情形的解的存在唯一性，关于其整体吸引子及惯性流形的存在性等基本问题尚有待进一步的研究，预期在今后相当一段长的时间内，无论在理论上还是在数值解法上，都将是非常热门的研究对象。

方程组 (3.4)——(3.5) 中 p 这个未知函数和 $\operatorname{div} u = 0$ 这个方程，使该方程组从数学形式上看有一种不太自然的面貌。求解该方程组最通常的办法，就是根据法国科学院院士勒雷 (J. Leray) 的开创性的工作（见 [13]），选择合适的函数空间，将这些不自然的东西吸收到空间中去，使问题在数学上有一个“干干净净”的面貌。例如，在 L^2 空间考察上述初－边值问题 (3.4)——(3.7)。令 $H = (L^2(\Omega))^3$ ，可将 H 进行正交分解。在第一章引理 6.3 中，我们曾证明：任一向量场均可分解为纵场与横场的叠加。实际上对上述分解得到的横场我们还可以提出更高的要求。

引理 3.1. 设 u 为 Ω 中适当光滑的向量场，那么 u 可唯一地表示为如下形式

$$u = w + \operatorname{grad} p, \quad (3.8)$$

其中 w 满足

$$\begin{cases} \operatorname{div} w = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ w \cdot n = 0, & \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \end{cases} \quad (3.9)$$

而 n 是 Γ 上的单位外法线向量。

证明. 首先注意, 若 (3.9) 式成立, 则 w 必与任何 $\text{grad } p$ 在 H 中正交. 事实上, 利用格林公式, 有

$$\int_{\Omega} w \cdot \text{grad } p dx = \int_{\Gamma} (w \cdot n) p dS - \int_{\Omega} (\text{div } w) p dx = 0.$$

现证明分解式 (3.8) 的唯一性. 若存在 w_1 、 p_1 及 w_2 、 p_2 均使 (3.8) 式成立, 那么

$$w_1 - w_2 + \text{grad}(p_1 - p_2) = 0.$$

将上式两端与 $w_1 - w_2$ 作数量积, 并在 Ω 上积分得

$$\int_{\Omega} |w_1 - w_2|^2 dx + \int_{\Omega} (w_1 - w_2) \cdot \text{grad}(p_1 - p_2) dx = 0,$$

从而利用 $w_1 - w_2$ 与 $\text{grad}(p_1 - p_2)$ 在 H 中的正交性, 有

$$\|w_1 - w_2\|_H = 0,$$

即 $w_1 = w_2$. 至于 p 的确定, 当然允许相差一个常数, 但这不影响分解式 (3.8) 的结果.

考察如下的诺依曼 (Neumann) 问题:

$$\begin{cases} \Delta p = \text{div } u, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \frac{\partial p}{\partial n} = u \cdot n, & \text{在 } \Gamma \text{ 上.} \end{cases}$$

因为

$$\int_{\Omega} \text{div } u dx = \int_{\Gamma} u \cdot n dS,$$

上述问题在相差一个任意常数的意义下, 存在唯一解 (参见 [1]).

对这样求得的 p , 取 $w = u - \text{grad } p$, 易知满足 (3.9) 式. 这就得到了所要求的分解式 (3.8). 引理证毕.

对一般的 $u \in H$, 可以证明 (见 [5]), u 仍可唯一地表为 (3.8) 的形式, 其中 $w \in H_{\sigma}$,

$$H_{\sigma} = \left\{ w \mid w \in H, \int_{\Omega} w \cdot \text{grad } \phi dx = 0, \forall \phi \in H^1(\Omega) \right\},$$

而 $p \in H^1(\Omega)$, 这儿 $H^1(\Omega)$ 为通常意义下的索伯列夫 (Sobolev) 空间. 这说明 H 可分解为如下两空间的直和:

$$H = H_\sigma \oplus H_\sigma^\perp,$$

其中

$$H_\sigma^\perp = \{f \mid f = \text{grad } p, p \in H^1(\Omega)\}.$$

显然, H_σ 及 H_σ^\perp 这两个 H 中的子空间是互相正交的.

记 P 为从 H 到 H_σ 中的投影算子:

$$Pu = w, \quad \forall u \in H,$$

其中 $w \in H_\sigma$ 由 u 的分解式 (3.8) 给出. 将投影算子 P 作用到方程组 (3.4) 的两边 (为简单计, 不妨设 $F = 0$), 注意到 (3.5) 意味着 $u \in H_\sigma$, 于是

$$P \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad P \text{grad } p = 0,$$

这样就有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P \left(\mu \Delta u - \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right). \quad (3.10)$$

对方程组 (3.10) 连同初始条件 (3.6) 及边界条件 (3.7) 可用通常的伽辽金 (Galerkin) 方法或算子半群方法讨论其解的存在性.

如果只限于二维的流动, 即设 $u_3 \equiv 0$, 而 u_1, u_2 及 p 又只与 t, x_1, x_2 有关, 就得到二维纳维-斯托克斯方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + \text{grad } p = F, \\ \text{div } u = 0, \end{cases}$$

其中 $u = (u_1, u_2)^T$ 。对这个二维方程组的上述混合初-边值问题，已证明了其整体解的存在唯一性，其存在性与唯一性的空间是一致的。但是对三维的情形，虽然已分别有存在性与唯一性的结果，但二者的空间还不能合拢，问题还没有得到完满的解决。

关于纳维-斯托克斯方程组已有好几本专著，有兴趣的读者例如可参阅 [5]、[15] 及 [16] 等。

§4. 激 波

本节考察一维理想流体力学方程组 (1.87) — (1.89) 的强间断解，即激波。为叙述简单计，设 $F \equiv 0$ 。

4.1. 间断连接条件

微分形式的方程组 (1.87) — (1.89) 只对光滑区域中的解成立。在解的间断线上，它们不再有效，但导出微分形式方程组的积分形式的守恒定律 (1.9)、(1.11) 与 (1.18) (应化为一维形式!) 仍然成立。我们可以直接由这样的积分形式的守恒定律，导出分块光滑的解在其间断线上应满足的连接条件。

首先作一个一般性的考察。

任何一维的积分形式的守恒定律，均可写为如下形式：

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} f(t_2, x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(t_1, x) dx \\ &= \int_{t_1}^{t_2} q(t, x_1) dt - \int_{t_1}^{t_2} q(t, x_2) dt, \\ & \quad \forall (x_1, x_2), \forall t_1 < t_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

(4.1) 式又可写为

$$\oint_F f dx - q dt = 0, \quad (4.2)$$

其中 Γ 为由图 3 给出的矩形回路。由此不难推出, (4.2) 式对 (t, x) 平面上的任一封闭曲线 Γ 成立。

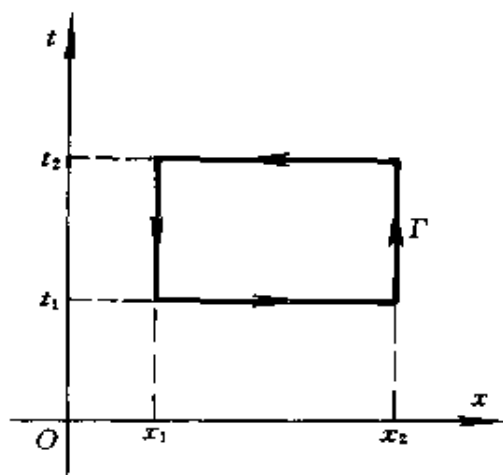


图 3

由格林公式知, 如果 f 与 g 光滑, 那么 (4.2) 式给出

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx dt = 0, \quad (4.3)$$

其中 Ω 为 Γ 所围的区域。由 Ω 的任意性, 就得到

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} = 0. \quad (4.4)$$

这就是相应的微分形式的守恒定律。在 f 及 g 光滑的区域内, 它与 (4.1) 或 (4.2) 等价。

设 $x = x(t)$ 为一条间断线, f 与 g 在此曲线外连续, 在其上有第一类间断。为了得到 f 及 g 在间断线上应满足的连接

条件, 作如图 4 所示回路 Γ , 并在其上运用 (4.2) 式, 有

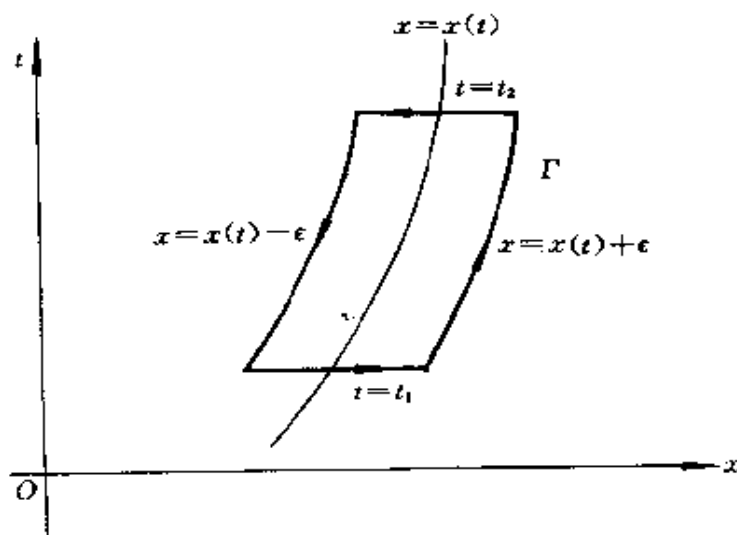


图 4

$$\begin{aligned} & \int_{x(t_1)-\varepsilon}^{x(t_1)+\varepsilon} f(t_1, x) dx - \int_{x(t_2)-\varepsilon}^{x(t_2)+\varepsilon} f(t_2, x) dx \\ & + \int_{t_1}^{t_2} (f(t, x(t) + \varepsilon) \frac{dx}{dt} - q(t, x(t) + \varepsilon)) dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} (f(t, x(t) - \varepsilon) \frac{dx}{dt} - q(t, x(t) - \varepsilon)) dt = 0. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 由上式得出

$$\int_{t_1}^{t_2} ([f] \frac{dx}{dt} - [q]) dt = 0, \quad \forall t_1 < t_2,$$

再注意到 t_1 及 t_2 的任意性, 就得到在 $x = x(t)$ 上成立

$$[f] \frac{dx}{dt} - [q] = 0, \quad (4.5)$$

其中 $[f] = f_+ - f_-$ 为 f 越过间断线 $x = x(t)$ 的跃度, 而 $f_+ = f(t, x(t) + 0)$, $f_- = f(t, x(t) - 0)$, $[q]$ 的意义相同。条件 (4.5) 称为间断连接条件, 它是和形如 (4.4) 的守恒定律微分方程相匹配的。

将 (4.5) 式用于方程组 (1.87)—(1.89), 得

$$[\rho] \frac{dx}{dt} = [\rho u], \quad (4.6)$$

$$[\rho u] \frac{dx}{dt} = [\rho u^2 + p], \quad (4.7)$$

$$[\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2] \frac{dx}{dt} = [(\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + p)u]. \quad (4.8)$$

这些间断连接条件通称为兰金-雨果尼奥 (Rankine-Hugoniot) 条件。

记 $U = \frac{dx}{dt}$ 为间断的传播速度, 另外记

$$v_- = u_- - U, \quad v_+ = u_+ - U,$$

(4.6)—(4.8) 可改写为

$$\rho_- v_- = \rho_+ v_+, \quad (4.9)$$

$$\rho_- v_-^2 + p_- = \rho_+ v_+^2 + p_+, \quad (4.10)$$

$$(\rho_- e_- + \frac{1}{2} \rho_- v_-^2 + p_-) v_- = (\rho_+ e_+ + \frac{1}{2} \rho_+ v_+^2 + p_+) v_+. \quad (4.11)$$

记 $m = \rho_- v_- = \rho_+ v_+$ 。

若 $m = 0$, 我们称间断线 $x = x(t)$ 为接触间断。对接触间断, $v_- = v_+ = 0$, 即 $u_+ = u_- = U$, 所以该间断线随流体以同一速度运动, 无流体越过间断线。此时, 由 (4.10), $p_- = p_+$, 但 $\rho_- \neq \rho_+$ (否则不出现间断)。

若 $m \neq 0$, 我们称间断线 $x = x(t)$ 为激波。对于激波, $v_- \neq 0, v_+ \neq 0$, 因而流体越过间断线。我们用下标 “0” 表示流体越过间断前的状态, 用下标 “1” 表示流体越过激波后的状态。由 (4.9)—(4.11) 有

$$\rho_0 v_0 = \rho_1 v_1 = m, \quad (4.12)$$

$$\rho_0 v_0^2 + p_0 = \rho_1 v_1^2 + p_1, \quad (4.13)$$

$$(\rho_0 e_0 + \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 + p_0) v_0 = (\rho_1 e_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + p_1) v_1. \quad (4.14)$$

下面我们从 (4.12)—(4.14) 式中消去 v_0, v_1 , 从而得到热力学量在越过激波时应满足的方程。由 (4.12) 与 (4.13) 式有

$$m = - \frac{p_0 - p_1}{v_0 - v_1}. \quad (4.15)$$

由 $\tau = \frac{1}{\rho}$, 将 $v_0 = m\tau_0, v_1 = m\tau_1$ 代入上式得

$$m^2 = - \frac{p_0 - p_1}{\tau_0 - \tau_1}. \quad (4.16)$$

注意 $m^2 = \rho_0 v_0 \rho_1 v_1$, 上式又可写为

$$v_0 v_1 = \frac{p_0 - p_1}{\rho_0 - \rho_1}. \quad (4.17)$$

利用 (4.12) 并注意到 $\tau = \frac{1}{\rho}$, 又可将 (4.14) 式改写为

$$(\rho_0 e_0 + \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2) \tau_0 - (\rho_1 e_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2) \tau_1 = p_1 \tau_1 - p_0 \tau_0. \quad (4.18)$$

但

$$\begin{aligned} (4.18) \text{ 式左端} &= \frac{1}{2} (v_0 - v_1) (v_0 + v_1) + e_0 - e_1 \\ &= (e_0 - e_1) - \frac{1}{2} (p_0 - p_1) (\tau_0 + \tau_1), \end{aligned}$$

其中最后一步，利用了 (4.12) 与 (4.15) 式。这样，(4.18) 式就可改写为

$$e_1 - e_0 + \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(\tau_1 - \tau_0) = 0. \quad (4.19)$$

(4.19) 式称为激波上的雨果尼奥方程或热力学激波条件。它只依赖于热力学量 τ 与 p ，而与 v (从而与 u) 无关。

若记

$$H(\tau, p; \tau_0, p_0) = e(\tau, p) - e(\tau_0, p_0) + \frac{1}{2}(p_0 + p)(\tau - \tau_0), \quad (4.20)$$

并称其为雨果尼奥函数，那么雨果尼奥方程 (4.19) 可简单地写为

$$H(\tau_1, p_1; \tau_0, p_0) = 0. \quad (4.21)$$

对多方气体，状态方程具有如下形式

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} p \tau. \quad (4.22)$$

这样，由 (4.20) 式，其雨果尼奥函数满足

$$2\mu^2 H(\tau, p; \tau_0, p_0) = (\tau - \mu^2 \tau_0)p - (\tau_0 - \mu^2 \tau)p_0, \quad (4.23)$$

其中 $\mu^2 = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ 。上式说明，对多方气体，曲线 $H(\tau, p; \tau_0, p_0) = 0$ 为一条过点 (τ_0, p_0) 的双曲线 (见图 5)。

4.2. 熵条件

为了保证所建立的理论足以刻画包含激波的流场，必须考虑解的唯一性问题。间断连接条件 (4.6)——(4.8) 能否保证一维理想流体力学方程组 (1.87)——(1.89) 定解问题 (如初值问题) 间断解 (或更一般地，弱解) 的唯一性呢？回答是否定的。在下面例 4.1 中，我们将以一个简单的方程为例来说明这一点。

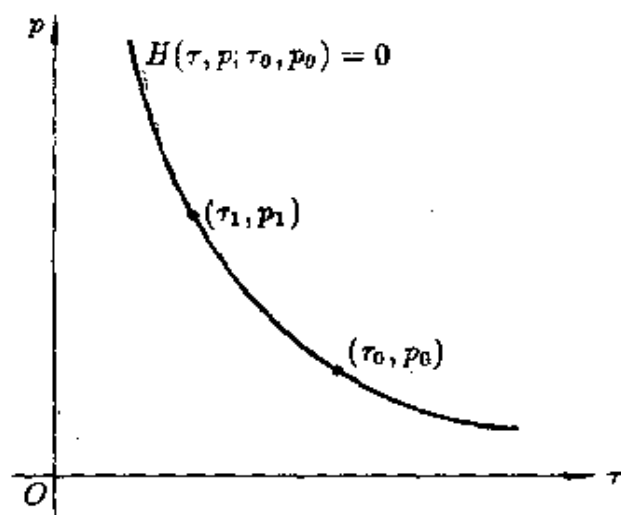


图 5

现在先从物理的角度考察这个问题。方程 (1.87) — (1.89) 以及相应的间断连接条件 (4.6) — (4.8) 分别描述流体在流动过程中所满足的质量、动量及能量守恒定律。能量守恒定律就是热力学第一定律。但作为一个实际发生的流体流动过程，还必须满足判定一个热力学过程能否得以进行的热力学第二定律。由 §1 知道，在光滑的流场中，理想流体的能量守恒定律与熵守恒定律等价。越过激波，流体的熵是否仍守恒呢？让我们来看多方气体的情况。若越过激波熵仍守恒，就应有

$$p_1 \rho_1^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma} \quad \text{或} \quad p_1 \tau_1^\gamma = p_0 \tau_0^\gamma.$$

但一般，曲线 $p \tau^\gamma = p_0 \tau_0^\gamma$ 与由 (4.23) 式给出的 $H(\tau, p; \tau_0, p_0)$ 所形成的雨果尼奥曲线 $H(\tau, p; \tau_0, p_0) = 0$ 不重合，因而流体越过激波不是一个等熵过程。对实际流体而言，所谓激波是指流体的压力、速度及密度等在一个狭小的范围内产生剧烈的变化。由

§2 中对粘性流体的考察可以看出, 此时即使粘性系数很小, 粘性摩擦所产生的效应已不能再忽略, 因而这相当于一个不可逆的过程, 流体越过激波时熵应该增加 (参见附录二)。

下面我们讨论如何在数学上方便地描述越过激波熵增加这一热力学条件。先考察如下最简单的非线性守恒律方程。

例 4.1. 对方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (4.24)$$

其间断连接条件 (4.5) 为

$$[u] \frac{dx}{dt} - \left[\frac{u^2}{2} \right] = 0,$$

即

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_- + u_+}{2}. \quad (4.25)$$

相应于如下的两个初始条件

$$u(0, x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

及

$$u(0, x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases} \quad (4.27)$$

我们可以分别构造出方程 (4.24) 的两个满足间断连接条件 (4.25) 的间断解:

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2}t, \\ 1, & x \geq \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (4.28)$$

及

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2}t, \\ 0, & x \geq \frac{1}{2}t. \end{cases} \quad (4.29)$$

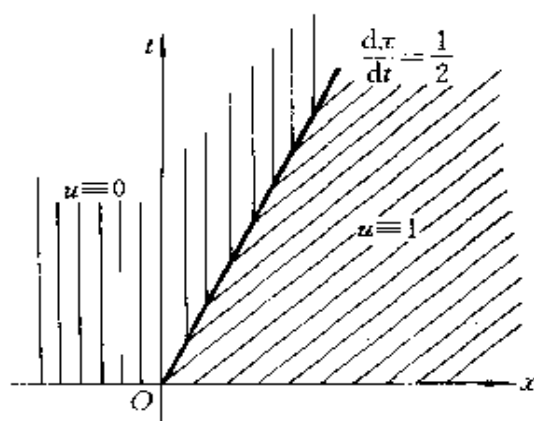


图 6

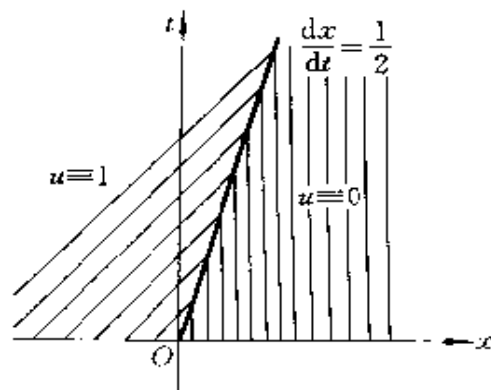


图 7

对于解 (4.28), 其间断线 $x = \frac{1}{2}t$ 两侧的特征线 (由 $\frac{dx}{dt} = u$ 定义) 均向上伸展, 即指向 t 增加的方向 (见图 6); 而对于解 (4.29), 其间断线 $x = \frac{1}{2}t$ 两侧的特征线均向下伸展, 即指向 t 减少的方向, 直至初始轴 $t = 0$ (见图 7). 由于 (4.24) 的解沿特征线 $\frac{dx}{dt} = u$ 取常数值, 因而由 $t = 0$ 时给定的初值 (4.27) 可沿特征线来决定 $t > 0$ 时的解 (4.29), 而解 (4.28) 则不能利用初值 (4.26) 沿特征线来决定. 按因果性原则 (它本质上就是关于时间的不可逆性), 在 $t > 0$ 时的解及激波应由初始数据确定, 而不应由“将来”确定. 这样, 我们有理由认为, 由 (4.29) 给出的解是合理的; 而由 (4.28) 给出的问题 (4.24) 与 (4.26) 的

解，不符合因果性原则，应予摒弃。事实上，对初始条件 (4.26)，我们还可以构造出方程 (4.24) 的另一个解：

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & x \geq t, \\ x/t, & 0 \leq x \leq t, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

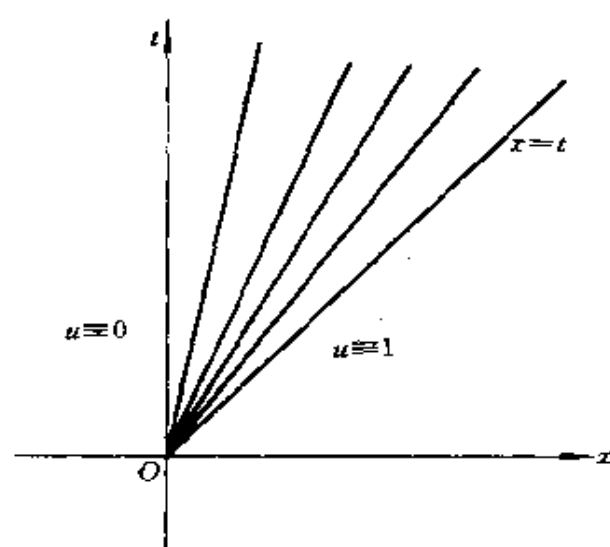


图 8

我们通常称它为 中心疏散波 (参见图 8)。这样，只有放弃由 (4.28) 式给出的解，才有可能保证满足间断连接条件的间断解的唯一性。

基于以上讨论，我们转而来考察一维气体动力学方程组 (1.87)——(1.89)。其特征方程的根为

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c. \quad (4.31)$$

相应于以上特征根的特征曲线，则分别由以下三式确定：

$$\frac{dx}{dt} = u - c, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dx}{dt} = u + c. \quad (4.32)$$

作为越过激波熵增加条件在数学上的一种描述，拉克斯 (P. D. Lax) 提出如下的激波不等式：在激波间断的两侧，对某个 $k \in \{1, 2, 3\}$ ，成立

$$\lambda_k(u_+, c_+) < U < \lambda_k(u_-, c_-), \quad (4.33)$$

$$\lambda_{k-1}(u_-, c_-) < U < \lambda_{k+1}(u_+, c_+), \quad (4.34)$$

其中 U 为激波传播的速度。在 $k = 1$ 时 (4.34) 式左面的不等式以及在 $k = 3$ 时 (4.34) 式右面的不等式均是不需要的。满足这组不等式的激波间断称为 k -激波。(4.33) 与 (4.34) 式有时亦称为熵不等式或熵条件。

对于激波，由 (4.12) 式知 v_0, v_1 同号。若 v_0, v_1 均为负，说明流体由右向左越过激波，也就是说激波相对于流体向右传播。此时我们称激波为右传播激波。类似地，若 v_0, v_1 均为正，则称其为左传播激波。

现在我们说明，对一维气体动力学方程组，不存在 2-激波，即不存在激波间断使 (4.33)——(4.34) 对 $k = 2$ 成立。事实上，若激波为右传播的，那么由 v 的定义，有

$$u_0, u_1 < U;$$

若激波为左传播的，则

$$u_0, u_1 > U.$$

所以无论是哪种情况，(4.33) 均不可能对 $k = 2$ 成立。类似地，容易证明，不存在右传播的 1-激波与左传播的 3-激波。

这样，对一维气体动力学方程组，只可能有左传播的 1-激波及右传播的 3-激波，

一激波称压缩的，若流体越过激波后的压力大于其越过激波前的压力，即

$$p_0 < p_1. \quad (4.35)$$

对于熵条件 (4.33) — (4.34) 与激波压缩性条件 (4.35)，我们有如下结果。

定理 4.1. 对多方气体，一激波为压缩的充分必要条件为该激波满足熵条件 (4.33) — (4.34)。

证明 该定理的证明分以下几步来完成。

1° 气体在激波前后两侧相对于激波的传播速度 v_0 及 v_1 分别为超音速与亚音速的。

事实上，由 (4.12) 与 (4.14) 式有

$$\frac{1}{2}v_0^2 + e_0 + p_0\tau_0 = \frac{1}{2}v_1^2 + e_1 + p_1\tau_1. \quad (4.36)$$

将 $\mu^2 = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, $e = p\tau/(\gamma - 1)$ 以及 $c^2 = \gamma p\tau$ 代入上式得

$$\mu^2 v_0^2 + (1 - \mu^2)c_0^2 = \mu^2 v_1^2 + (1 - \mu^2)c_1^2. \quad (4.37)$$

以 c_*^2 表上式两端的公共值，则

$$(1 - \mu^2)(v_0^2 - c_0^2) = v_0^2 - c_*^2,$$

$$(1 - \mu^2)(v_1^2 - c_1^2) = v_1^2 - c_*^2.$$

以上两式说明

$$|v_0| > c_0 \quad \text{等价于} \quad |v_0| > c_*, \quad (4.38)$$

$$|v_1| > c_1 \quad \text{等价于} \quad |v_1| > c_*. \quad (4.39)$$

由定义 c_*^2 的 (4.37) 式右端, 并注意 $c_1^2 = \gamma p_1 \tau_1$ 及 $(1 - \mu^2)\gamma = 1 + \mu^2$, 我们有

$$\rho_1 c_*^2 = \mu^2(\rho_1 v_1^2 + p_1) + p_1.$$

类似地, 可得

$$\rho_0 c_*^2 = \mu^2(\rho_0 v_0^2 + p_0) + p_0.$$

将以上两式相减并利用 (4.13) 式, 得

$$c_*^2 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0}. \quad (4.40)$$

将 (4.40) 式与 (4.17) 式相比较, 有

$$c_*^2 = v_0 v_1. \quad (4.41)$$

(4.41) 式称为 普朗特 (Prandtl) 关系式。由普朗特关系式以及 (4.38) 与 (4.39) 式即得所需的结论。

2° 一激波为压缩的充要条件为

$$\rho_0 < \rho_1. \quad (4.42)$$

这一结论由压缩激波的定义以及 (4.40) 式立即可得。

3° 非压缩激波不满足熵条件 (4.33) — (4.34)。

由 2° 知, 对非压缩激波 $\rho_1 < \rho_0$ 。设激波为右传播的, 即 $v_0, v_1 < 0$ 。那么由前述讨论知, 熵条件 (4.33) — (4.34) 不可能对 $k = 1, 2$ 成立。下面我们证明, (4.33) 对 $k = 3$ 亦不可能成立。不难直接验证, 对由雨果尼奥方程 $H(\tau, p; \tau_0, p_0) = 0$ 确定

的函数 $p = p(\tau)$ 而言, $c = \sqrt{\gamma p(\tau)\tau}$ 为 τ 的严格减函数, 从而 $c(\rho_1) < c(\rho_0)$. 此外, 由 (4.12) 式必有 $v_1 < v_0 < 0$. 因此

$$v_1 + c(\rho_1) < v_0 + c(\rho_0).$$

但由 1° 知, 此时必有

$$|v_1| > c(\rho_1), \quad |v_0| < c(\rho_0).$$

这意味着

$$v_1 + c(\rho_1) < 0 < v_0 + c(\rho_0),$$

即

$$u_1 + c(\rho_1) < U < u_0 + c(\rho_0). \quad (4.43)$$

对右传播激波, “0” 是右状态 “+”, “1” 是左状态 “-”. 这样 (4.43) 与 $k = 3$ 时的不等式 (4.33) 矛盾. 对左传播激波可类似地讨论.

4° 压缩激波满足熵条件 (4.33)—(4.34).

由 2°, 对压缩激波 $\rho_1 > \rho_0$. 仍设激波为右传播的. 此时应有 $v_0 < v_1 < 0$, 而且 $c(\rho_1) > c(\rho_0)$. 这样

$$v_1 + c(\rho_1) > v_0 + c(\rho_0).$$

由 1° 知, 此时必有

$$|v_0| > c(\rho_0), \quad |v_1| < c(\rho_1).$$

这意味着

$$v_1 + c(\rho_1) > 0 > v_0 + c(\rho_0),$$

即

$$u_1 + c(\rho_1) > U > u_0 + c(\rho_0). \quad (4.44)$$

这正是 $k = 3$ 时的不等式 (4.33)。因为激波是右传播的, 所以 $u_1 < 0$, 即 $u_1 < U$, 这就是 $k = 3$ 时的不等式 (4.34)。所以熵条件 (4.33)—(4.34) 成立。对左传播激波可以类似地讨论。定理 4.1 证毕。

熵条件 (4.33)—(4.34) 和物理熵之间的关系, 由下面的定理给出。

定理 4.2. 对多方气体, 激波满足熵条件 (4.33)—(4.34) 的充要条件为越过激波熵 S 增加, 即

$$S_1 > S_0. \quad (4.45)$$

证明 由定理 4.1 知, 激波满足熵条件 (4.33)—(4.34) 的充要条件为

$$\tau_1 < \tau_0. \quad (4.46)$$

所以, 由多方气体熵的表达式 (1.27) 知, 为证明 (4.45) 式, 只要证明对由雨果尼奥方程 $H(\tau, p; \tau_0, p_0) = 0$ 确定的函数 $p = p(\tau)$, 函数 $p(\tau)\tau^\gamma$ 是 τ 的严格减函数。对此, 类似于定理 4.1 的证明, 不难由 $H(\tau, p; \tau_0, p_0)$ 的表达式 (4.23) 直接验证。定理 4.2 证毕。

对于多方气体, 定理 4.2 说明, 激波上满足的熵不等式 (4.33)—(4.34) 与气体越过激波时熵增加这一物理事实等价。若讨论的范围不局限于多方气体, 可以证明, 这一结果对弱激波亦是成立的 (见 [4])。所谓弱激波, 是指其强度即物理量越过激波时的跃度充分小的激波。

最后, 为了进一步说明激波是一种压缩性的现象, 我们给出以下结果。

定理 4.3. 对多方气体, 激波满足熵条件 (4.33)—(4.34) 的

充要条件为在激波两侧成立

$$u_- > u_+. \quad (4.47)$$

证明 由定理 4.1 知, 激波满足熵条件 (4.33)—(4.34) 等价于越过激波成立

$$\rho_1 > \rho_0. \quad (4.48)$$

设激波为右传播的, 即成立 $v_0, v_1 < 0$. 此时, 由 (4.12) 式可见, 条件 (4.48) 等价于

$$v_0 < v_1, \quad (4.49)$$

即

$$u_0 < u_1. \quad (4.50)$$

但对于右传播激波, 标之以“0”的是右状态“+”, 而标之以“1”的是左状态“-”。所以 (4.50) 就是 (4.47) 式。

对于左传播激波可以类似地证明。定理 4.3 证毕。

§5. 一维流体力学方程组的拉格朗日形式

5.1. 引言

在前面推导理想流体及粘性热传导流体动力学方程组时, 我们将描述流体运动状态的量表示为时间 t 及空间笛卡儿坐标 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 的函数来进行考虑。这样建立的方程组称为欧拉形式的方程组。它的特点是在任意固定的位置 (地点) 来考察流体状态随时间 t 的变化规律。但还有另外一种看问题的方法, 即在任意固定 (但在运动着的!) 流体质点上观察流体状态随时间 t 的变化规律。这样建立的方程组称为拉格朗日形式的方程组。简言之, 前者对固定在空间的坐标系考察问题, 后者对固定

在质点上的坐标系考察问题。在拉格朗日形式下,描述流体状态的量将表示为时间 t 及物质坐标 (拉格朗日坐标) 的函数,而质点在空间中的位置即其欧拉坐标 x 将作为时间及质点坐标的函数来确定。采用拉格朗日坐标下的方程组在一维运动的情形将带来较大的方便,下面就限于考察这一情形。

5.2. 拉格朗日坐标

现在指出引入拉格朗日坐标的方法,阐明其物理意义,并给出拉格朗日坐标与欧拉坐标之间的变换关系式。

由连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0,$$

知道

$$\rho dx - \rho u dt$$

是一个全微分。于是必存在函数 $m = m(t, x)$ 使得

$$dm = \rho dx - \rho u dt. \quad (5.1)$$

用 m 代替 x 为新的自变量 (另一个变量仍取为 t), 就得到拉格朗日坐标 (t', m) , 而

$$t' = t, \quad (5.2)$$

$$m = m(t, x). \quad (5.3)$$

就是欧拉坐标和拉格朗日坐标间的变换式。由于 $\rho > 0$, 而 $\frac{\partial m}{\partial x} = \rho$, 上述变换是整体可逆的。

这样引入的拉格朗日坐标 m 的物理意义可以解释如下。由 (5.1), 我们可取

$$m(t, x) = \int_{(0,0)}^{(t,x)} \rho dx - \rho u dt, \quad (5.4)$$

且积分值与从 $(0, 0)$ 到 (t, x) 的积分路径无关。于是可取如图 9 所示的特殊路径 OAB ，其中 OA 为 $t = 0$ 时在原点的质点的运动规律 $x = x(t)$ 在 (t, x) 平面上的图象，而 AB 为过 $B(t, x)$ 点平行于 x 轴的直线段。这样，

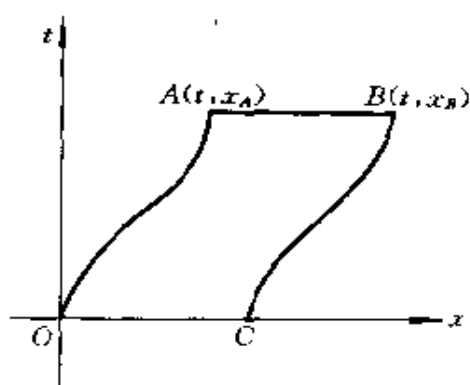


图 9

$$m(t, x) = \int_{OA+AB} \rho dx - \rho u dt. \quad (5.5)$$

由于在 OA 上， $\frac{dx}{dt} = u$ ，因此 $\int_{OA} \rho dx - \rho u dt = 0$ ；而在 AB 上， $dt = 0$ ，于是，(5.5) 式化为

$$m(t, x) = \int_{x_A}^{x_B} \rho dx, \quad (5.6)$$

其中 x_A 及 x_B 分别表示 A 及 B 点的欧拉坐标。(5.6) 式右端表示 AB 间的流体质量（若 B 在 A 之右，其值为正；若 B 在

A 之左, 其值为负)。设 t 时刻在 B 点的质点在 $t = 0$ 时位于 C 点。由于 t 时刻在 A 点的质点在 $t = 0$ 时位于原点, 由质量守恒定律, $m(t, x)$ 应等于 $t = 0$ 时 OC 间流体的质量。于是, 拉格朗日坐标 m 表示质量, 而 $m = \text{常数}$ 则表示同一质点, 故 m 为质点坐标。若过 C 点画出 $t = 0$ 时在 C 点的质点在 (t, x) 平面上的运动规律曲线 CB , 在整个这条曲线上 $m = \text{常数}$ 。因此, 由欧拉坐标 (t, x) 过渡到拉格朗日坐标 $(t', m) = (t, m)$, 本质上就是取流体质点在 (t, x) 平面上的运动规律曲线作为坐标曲线。

下面说明欧拉坐标与拉格朗日坐标间的一些变换法则。由

$$dm = -\rho u dt + \rho dx, \quad (5.7)$$

$$dt' = dt, \quad (5.8)$$

有

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \rho u \frac{\partial}{\partial m}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial m}. \quad (5.10)$$

又由

$$dx = u dt' + \tau dm, \quad (5.11)$$

$$dt = dt', \quad (5.12)$$

有

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial m} = \tau \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5.14)$$

变换式 (5.9)—(5.10) 和 (5.13)—(5.14) 给出了对 (t, x) 的偏导数与对 (t', m) 的偏导数间的变化规律。

此外, 由 (5.11) 式知, 在已知拉格朗日坐标 (t', m) 后, 欧拉坐标 x 可由下式得到:

$$x = \int_{(0,0)}^{(t',m)} u dt' + \tau dm. \quad (5.15)$$

而在已知欧拉坐标 (t, x) 时, 拉格朗日坐标 m 则可由 (5.4) 式求得。

5.3. 一维理想流体力学方程组的拉格朗日形式

在欧拉坐标下的一维理想流体力学方程组可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (5.18)$$

(见 (1.90)—(1.92))。引入拉格朗日坐标 (t', m) , 就可以按照前述的坐标变换式化为拉格朗日坐标下的相应的方程组。这儿特别注意

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dt}$$

恰表示固定质点对 t 的求导。这是和拉格朗日坐标的实质一致的。

对方程 (5.16) 的转换可用上述变换式 (5.9)—(5.10) 进行。更简单的方法是注意到 (5.16) 式已用来定义拉格朗日坐标 m , 即说明 $\rho dx - \rho u dt = dm$ 为一全微分, 它现在要以 $dx =$

$u dt' + \tau dm$ 为一全微分的条件来代替, 从而应有

$$\frac{\partial \tau}{\partial t'} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0. \quad (5.19)$$

而由 (5.9)—(5.10) 式易知, (5.17) 与 (5.18) 两方程分别化为

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\partial p}{\partial m} = F, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t'} = 0. \quad (5.21)$$

于是, 一维理想流体力学方程组在拉格朗日坐标下的形式 (对连续可微流动) 为

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = F, \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (5.24)$$

这里为方便起见, 仍将拉格朗日坐标 (t', m) 记为 (t, x) 。

上述方程组较之原方程组 (5.16)—(5.18) 具有较为简单的形式: (5.22) 与 (5.24) 是线性常系数的方程, 整个方程组的非线性项只体现在 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 中 ($p = p(\tau, S)$)。特别, 方程 (5.24) 十分简单。对于柯西问题, 只要已知 S 的初值

$$t = 0: S = S_0(x), \quad (5.25)$$

由方程 (5.24) 就有 $S = S_0(x)$ 。这样, 方程组 (5.22)—(5.24) 就化为由两个方程所组成的方程组:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} p(\tau, S_0(x)) = F. \quad (5.27)$$

特别对均嫡流动 $S \equiv$ 常数, 其拉格朗日坐标下的方程组具有更为简单的形式:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} p(\tau) = F. \quad (5.29)$$

在 $F \equiv 0$ (外力为零) 时, 这是一个形式简单且具典型意义的拟线性双曲型方程组, 有时称为 p -方程组, 至今仍是很多人研究的对象。

5.4. 一维粘性热传导流体力学方程组的拉格朗日形式

一维粘性热传导流体力学方程组在欧拉坐标下的形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0, \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F, \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u \frac{\partial e}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

(见 (2.50)–(2.52))。由同样的理由, 其在拉格朗日坐标下的方程组可写为

$$\frac{\partial \tau}{\partial t'} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\partial p}{\partial m} - \frac{\partial}{\partial m} \left(\left(\frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \rho \frac{\partial u}{\partial m} \right) = F, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t'} + p \frac{\partial u}{\partial m} - \rho \left(\frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \left(\frac{\partial u}{\partial m} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial m} \left(\kappa \rho \frac{\partial T}{\partial m} \right). \quad (5.35)$$

利用 (5.33), 第三个方程 (5.35) 又可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t'} + \left(p - \frac{\partial e}{\partial \tau} \right) \frac{\partial u}{\partial m} - \rho \left(\frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \left(\frac{\partial u}{\partial m} \right)^2 \\ = \frac{\partial}{\partial m} \left(\kappa \rho \frac{\partial T}{\partial m} \right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

仍将 (t', m) 改写为 (t, x) , 得

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F, \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + p \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \left(\frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \rho \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (5.39)$$

或

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(p - \frac{\partial e}{\partial \tau} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \left(\frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \rho \frac{\partial T}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5.39)'$$

这比原欧拉形式的方程组 (5.30)—(5.32) 具有较为简单的形式。

最后指出, 拉格朗日坐标变换能使原非线性方程组的形式变得比较简单, 因为它是一个和解有关的变换——以运动规律曲线为坐标曲线。在解还没有求得之时, 要具体地写出拉格朗日变换是不可能的。但上面的讨论告诉我们, 只要解存在, 总可以进行拉格朗日坐标变换, 并将方程组化为在拉格朗日坐标下的形式。而只要解出在拉格朗日坐标下的方程组, 就可以通过其逆变换得到在欧拉坐标下的相应的解, 因此整个讨论是有效的。

为了求解在拉格朗日坐标下的方程组, 还要说明原先在欧拉坐标下的定解条件怎样转化为在拉格朗日坐标下的定解条件。例如若在欧拉坐标下给定初始条件

$$t = 0 : u = u_0(x), \rho = \rho_0(x), T = T_0(x) (\text{或 } S = S_0(x)), \quad (5.40)$$

那么由 (5.4) 知

$$m(0, x) = \int_0^x \rho_0(x) dx. \quad (5.41)$$

由上式可得到在初始时刻 $t = t' = 0$ 相应于 x 的 m 值, 从而可解得 x 为 m 的函数: $x = x(m)$ 。于是在拉格朗日坐标下的初始条件为

$$t' = 0 : u = \bar{u}_0(m), \rho = \bar{\rho}_0(m), T = \bar{T}_0(m) (\text{或 } S = \bar{S}_0(m)), \quad (5.42)$$

其中 $\bar{u}_0(m) = u_0(x(m))$ 等。

在欧拉坐标下沿质点运动规律曲线上给定的边界条件, 在拉格朗日坐标下具有十分简单的形式。例如对方程组 (5.33) — (5.35), 若在过原点的曲线 $x = x_0(t)$ ($x_0(0) = 0$) 上给定边界条件 (见图 10)

$$u = u_0(t), \quad T = T_0(t), \quad (5.43)$$

并成立

$$\dot{x}_0(t) = u_0(t). \quad (5.44)$$

在转换到拉格朗日坐标时, $x = x_0(t)$ 化为 $m = 0$, 故边界化为直边界; 而边界条件 (5.43) 则转化为

$$m = 0 : u = u_0(t), T = T_0(t). \quad (5.45)$$

这就大大地简化了问题，亦是引入拉格朗日坐标的好处之一。

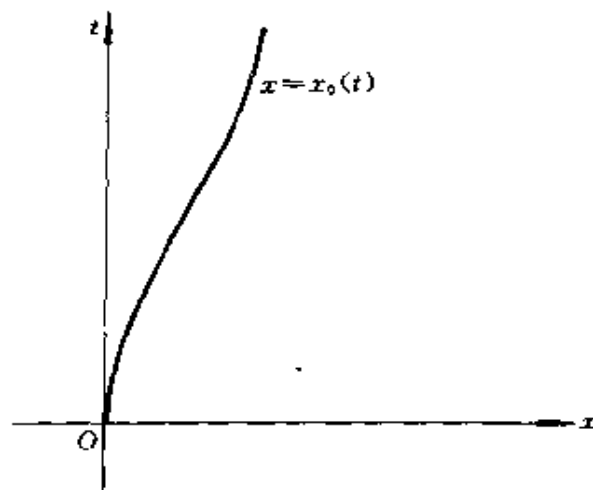


图 10

习 题

1. 试证明：当流场为无旋，即 $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ 时，理想流体的欧拉方程可写为如下形式：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{grad} \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \mathbf{F}.$$

2. 试证明：如果质量力 \mathbf{F} 有势，即存在 ϕ 使 $\mathbf{F} = -\text{grad } \phi$ ，那么理想流体的能量守恒定律的微分形式可写为

$$\frac{d}{dt} \left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

3. 设 Ω 为单连通区域，已知流体在其边界 Γ 上的速度为 \mathbf{u}_B 。试证明：对不可压缩的理想流体，在 Ω 中存在速度势，即

存在 ϕ 使 $\mathbf{u} = \text{grad } \phi$, 的充要条件为

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u}_B \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

其中 \mathbf{n} 为单位外法线向量.

4. 设 \mathbf{u} 为满足第 3 题中条件的解. 证明 \mathbf{u} 为变分问题

$$\min_{\mathbf{w} \in A} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{w}|^2 dx$$

的解, 其中

$$A = \{\mathbf{w} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}); \quad \text{div } \mathbf{w} = 0, \text{ 在 } \Omega \text{ 中}; \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_B \cdot \mathbf{n}, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}\}.$$

5. 设流场中流体的应力张量为 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$. 试证明: 在以某点为中心、 r 为半径的球面 S_r 上的法向应力分量的平均值, 在 $r \rightarrow 0$ 时的极限为该点正应力的平均值, 即成立

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}),$$

其中 \mathbf{p}_n 由 (2.5) 或 (2.6) 式定义.

6. 试证明: 由纳维 - 斯托克斯方程组描述的流体运动一般总是有旋的, 即若 $\text{rot } \mathbf{u} \equiv 0$, 则纳维 - 斯托克斯方程组 (3.4) — (3.5) 即化为欧拉方程组 (1.15).

7. 设有以 x 轴为轴向的等横截面管道, 其中充满着沿 x 方向流动的不可压缩的理想流体, 在每一横截面上流体的状态相同, 且 $p = p(x)$. 若已知 $p(0) = p_1$, $p(L) = p_2$, 且 $p_1 > p_2$, 试确定管内流体的速度 (忽略体积力).

8. 考察固定在 $y = 0$ 与 $y = L$ 处两个平板之间的定常粘性不可压缩流体沿 x 方向的流动. 设 $p = p(x)$, 且已知 $p(0) = p_1$,

$p(L) = p_2, p_1 > p_2$. 试求该流场的速度 $u(x, y)$ 与压力 $p(x)$ (忽略体积力)。

9. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界域, \mathbf{u} 为纳维-斯托克斯方程组 (3.4)–(3.5) 满足边界条件 (3.7) 的解, 其中体积力 $\mathbf{F} \equiv 0$. 证明流体的动能随时间的增加而减少, 即

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 dx \leq 0.$$

10. 试证明: 一维理想流体力学方程组的拉格朗日形式 (5.22) — (5.24) 也可写为如下形式

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = F, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (pu) = Fu. \end{cases}$$

11. 对由第 10 题中给出的拉格朗日形式的一维理想流体力学方程组, 给出其解在强间断线上应满足的间断连接条件 (假设体积力 $F \equiv 0$)。

12. 设函数 $L(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ 关于变量 $\xi_0 > 0, \xi_1, \dots, \xi_n$ 为严格凸的. 证明函数

$$M = \frac{1}{\xi_0} L(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

关于变量

$$\eta_0 = \frac{1}{\xi_0}, \eta_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \eta_n = \frac{\xi_n}{\xi_0}$$

为严格凸的。

13. 试引进新的未知函数, 将 p -方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} p(\tau) &= 0\end{aligned}$$

化为守恒定律形式的一阶拟线性对称双曲组。这里假定 $p'(\tau) < 0$ 。

参 考 文 献

- [1] 柯朗 R, 希尔伯特 D. 数学物理方法: 卷 II. 熊振翔, 杨应辰译. 北京: 科学出版社, 1977
- [2] 吴望一. 流体力学 (上册). 北京: 北京大学出版社, 1982
- [3] Chorin A J, Marsden J E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Second Edition. Springer-Verlag, 1990
- [4] Smoller J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, 1983
- [5] Teman R. *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*. North-Holland, 1984
- [6] Courant R, Friedrichs K O. *Supersonic Flow and Shock Waves*. New York: Interscience Publishers, 1948
- [7] Li Ta-tsien. *Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic Systems*. Research in Applied Mathematics 32. Masson/John Wiley, 1994
- [8] Harten A, Lax P D. *Random choice finite difference schemes*. SIAM J. Num. Anal., 18 (1981). 289~315
- [9] Lax P D. *Symmetrizing hyperbolic differential equations*. Nonlinear Hyperbolic Problems, Eds. C.

- Carasso, P.-A. Raviart and D. Serre, Lecture Notes in Mathematics 1270, Springer-Verlag, 1987. 150~151
- [10] Godounov S K. *Lois de conservation et intégrales d'énergie des équations hyperboliques.* in Nonlinear Hyperbolic Problems, Eds. C. Carasso, P.-A. Raviart and D. Serre, Lecture Notes in Mathematics 1270, Springer-Verlag, 1987. 136~149
- [11] Panel on Mathematical Sciences, Board on Mathematical Sciences, Commission on Physical Sciences, Mathematics, and Resources & National Research Council. *Mathematical Sciences: A Unifying and Dynamic Resource.* Washington, D. C.: National Academy Press, 1986
- [12] Matsumura A, Nishida T. *The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases.* J. Math. Kyoto Univ., 20 (1980), 67~104
- [13] Leray J. *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois.* J. Math. Pures et Appl., 13 (1934). 331~418
- [14] Temam R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Applied Mathematical Sciences 68, Springer-Verlag, 1988
- [15] Ladyzhenskaya O A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Second Edition. New York: Gordon and Breach, 1969
- [16] Constantin P, Foias C. *Navier-Stokes Equations.* Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, 1988

第五章 弹性力学

§1. 引言

弹性力学是研究弹性体在荷载的作用下，其内力（应力）和变形所满足的规律的学科。这主要可通过讨论弹性体的形变及弹性体的运动规律来得到体现。所谓荷载，这儿主要是指作用在弹性体上的机械力，也可以是温度等各种能导致弹性体变形的物理因素。本章仅考虑弹性体受机械力作用的情形，而温度荷载对弹性体的影响则留待以后章节中专门讨论。什么叫弹性体？弹性体是指这样一种物体，它在荷载作用下产生变形，而当撤去荷载时，变形立即消失，物体恢复原来的形状。金属、岩石、玻璃、木材以及石英等在一定的变形范围内均可以视为弹性体。弹性体撤去荷载后变形立即消失这一事实，在理论上反映为物体的变形与应力之间的某种函数关系。这种关系式是由构成该物体的材料特性决定的，通常称为本构关系。

本构关系可以是线性的，也可以是非线性的，这取决于材料的性质以及变形的大小。当应力小于弹性极限时，相当一部分工程材料的本构关系可以近似地看成是线性的，即服从广义的胡克（Hooke）定律。这时称该物体为线性弹性体。有时弹性体的本构关系由非线性函数给出，由此造成的非线性称为材料非线性。

弹性体的变形，可利用位移的一阶偏导数来描述。在小变形（即变形与物体的几何尺寸相比非常小）的情况下，变形（应变）可以由位移的偏导数的线性函数给出。但对于大变形的情况，则

必须将变形表示为位移的偏导数的非线性函数。由此导致的非线性称为几何非线性。

仅讨论线性弹性体小变形的弹性理论称为线性弹性理论。考虑几何非线性或材料非线性，或二者兼而有之的弹性理论称为非线性弹性理论或称为有限弹性理论。本章着重讨论既包括几何非线性又包括材料非线性的一般非线性弹性力学的数学模型。有关线性弹性理论的讨论，见 §5.1 及 §6.1 或参见 [10] 中的第二章。

我们知道，对与连续介质有关的量通常有欧拉及拉格朗日两种描述方法（参见第二章）。在弹性力学中，通常采用拉格朗日描述方法。这里先将这种描述方法作一简单介绍。

设在物体所处的空间已选定直角坐标系 (e_1, e_2, e_3) 。假定弹性体在变形前（设为某时刻，例如 $t = 0$ ）在该空间占据一区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 。通常称该区域为参考构形。在此区域中的物体质点可用其在上述坐标系下的坐标向量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

来表示。设在该时刻后，弹性体发生变形，其运动规律可用

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{x}) \quad (1.1)$$

描述，其中 t 表示时间，而 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ 表示 $t = 0$ 时位于 \boldsymbol{x} 处的质点在 t 时刻的位置向量。显然

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}(0, \boldsymbol{x}). \quad (1.2)$$

将弹性体于 t 时刻在空间占据的区域记为 Ω_t ，则对于任意给定的 $t \geq 0$ ，(1.1) 为一个 $\Omega \rightarrow \Omega_t$ 的一一到上的映射，即双射 (bijection)。下面的讨论在

$$J = \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) > 0 \quad (1.3)$$

的假设下进行。其物理意义是明显的。它意味着弹性体在变形过程中，任一体积不为零的部分不可能被压缩到使体积为零或被膨胀到使体积变为无穷大。

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 通常称为物质坐标或拉格朗日坐标。这是因为其不同的坐标值对应于不同的质点。而 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ 则称为空间坐标或欧拉坐标，其不同的坐标值相应于空间的不同点。相应于这两种不同的坐标，有关连续介质的一切物理量（标量、向量、张量），就有两种不同的描述方法。

一种描述方法是跟踪质点。例如，对于一个标量 θ ，可以表示为时间 t 及物质坐标 \boldsymbol{x} 的函数：

$$\theta = \phi(t, \boldsymbol{x}). \quad (1.4)$$

这种描述方法称为物质描述或拉格朗日描述。另一方面，在考察这个量时，也可以着眼于其随空间点的变化，而将其表为时间 t 及空间坐标 \boldsymbol{y} 的函数：

$$\theta = \psi(t, \boldsymbol{y}). \quad (1.5)$$

这种描述方法称空间描述或欧拉描述。由 (1.1) 式，上述两种描述方法之间的联系可由下式给出

$$\psi(t, \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{x})) = \phi(t, \boldsymbol{x}). \quad (1.6)$$

对于向量与张量也可类似地给出其物质与空间描述方法。

对于一个物理量，在 \boldsymbol{x} 保持不变（即固定质点）时，关于 t 的偏导数称为该量的物质导数，如同在流体力学（见第二章 (1.17) 式）中那样，将物质导数记为 $\frac{d}{dt}$ 。若一个物理量（例如标量 θ ）由空间描述 (1.5) 给出，则显然有

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{y}}) \psi, \quad (1.7)$$

其中 $\mathbf{v} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \frac{\partial y_3}{\partial t} \right)$ 表示速度向量, $\nabla_{\mathbf{y}} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right)$ 表示关于 \mathbf{y} 的梯度算子。

以后为简单计, 对于由不同描述方法给出的同一个物理量, 在不至于引起混淆的情况下, 不再像 (1.4) 与 (1.5) 式中那样, 用 ϕ 与 ψ 予以区分。

§2. 变形的描述, 应变张量

2.1. 变形梯度张量

物体在某一时刻 t 的变形情况, 可由此时刻物体内每一质点 \mathbf{x} 附近的变形情况来刻画。而要描写在质点 \mathbf{x} 处的变形情况, 只要搞清 \mathbf{x} 处每一矢量微元 $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)^T$ 的变化情况即可。

设在 $t = 0$ 时 \mathbf{x} 处的矢量微元 $d\mathbf{x}$, 在时刻 t 变为 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t, \mathbf{x})$ 处的矢量微元 $d\mathbf{y} = (dy_1, dy_2, dy_3)^T$, 则

$$dy_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) dx_j \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.1)$$

或写为

$$d\mathbf{y} = \mathbf{F}d\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

其中

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{y} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.3)$$

为二阶张量, 称为变形梯度张量。知道了这一张量, 就掌握了在 t 时刻弹性体的变形情况。

2.2. 柯西 - 格林应变张量

为了进一步阐述变形梯度张量的物理意义, 我们利用下述线性代数引理将其作极分解。

引理 2.1. 设 $\det F \neq 0$, 则存在正交阵 R 以及对称正定阵 U 和 V 使

$$F = RU = VR. \quad (2.4)$$

(2.4) 式称为 F 的极分解。

这个引理的证明并不困难, 可在线性代数教材中找到。这里作为习题留给读者。

记 $U = (u_{ij})$, $R = (r_{ij})$ 。利用 (2.4) 式, 可将 (2.1) 式改写为

$$dy_i = \sum_{j,k=1}^3 r_{ik} u_{kj} dx_j \quad (i = 1, 2, 3),$$

或

$$dy_i = \sum_{k=1}^3 r_{ik} dz_k \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.5)$$

而

$$dz_k = \sum_{j=1}^3 u_{kj} dx_j \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.6)$$

这说明由矢量微元 $d\mathbf{x}$ 变为 $d\mathbf{y}$ 的变形可分解为如下两个变形的组合: 先由 $d\mathbf{x}$ 变为 $d\mathbf{z}$, 再由 $d\mathbf{z}$ 变为 $d\mathbf{y}$ 。前一变形由张量 U 、而后一变形由张量 R 分别决定。因 U 为对称正定阵, 故存在三个相互正交的主方向与三个正的主值。不失一般性, 可设 U 为对角阵, 即成立

$$u_{ii} > 0; \quad u_{ij} = 0, \quad i \neq j \\ (i, j = 1, 2, 3).$$

这样, (2.6) 式即可写为

$$dz_i = u_{ii} dx_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

因此, 这一部分变形表现为在三个相互正交的方向上的伸长或压缩 (视 $u_{ii} > 1$ 或 < 1 而定)。因为 \mathbf{R} 为正交阵, 由 (2.5) 式所表示的由 $d\mathbf{z}$ 到 $d\mathbf{y}$ 的变化只是一个刚体旋转。

对极分解 (2.4) 中的第二式 $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$, 可作类似的解释。

虽然极分解 (2.4) 允许我们从变形梯度 \mathbf{F} 中剔除刚体旋转, 分离出表示局部变形的部分。但张量 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 的直接计算是很不方便的。注意到对称正定阵由其平方唯一确定, 我们引入

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2, \quad (2.8)$$

其中 \mathbf{F}^T 表示 \mathbf{F} 的转置, 而 \mathbf{C} 称为右柯西 - 格林应变张量, \mathbf{B} 称为左柯西 - 格林应变张量。

注 2.1. 在稳态的情形, 弹性体处于平衡状态, 变形与时间 t 无关, 一切有关的量均只是 \mathbf{x} 的函数。此时, 假设已知柯西 - 格林应变张量, 要求决定弹性体的变形 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), y_3(\mathbf{x}))$, 就化为求解下面的偏微分方程组

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = J^{2/n} \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

或

$$\mathbf{F} \mathbf{F}^T = J^{2/n} \mathbf{G}(\mathbf{x}),$$

其中 $n = 3$, \mathbf{F} 及 J 分别由 (2.3) 及 (1.3) 式决定, 而 $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ 是一个给定的对称正定阵, 其行列式为 1。这组偏微分方程有 3 个未知函数 y_1, y_2 及 y_3 , 但由矩阵的对称性, 所包含的方程有 6 个, 因而是个超定 (即方程个数大于未知函数个数) 的非线

性偏微分方程，称为 三维贝尔特拉米 (Beltrami) 方程。类似地，可以定义 n 维贝尔特拉米方程。

2.3. 位移梯度张量与无穷小应变张量

我们称

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \quad (2.9)$$

为 位移向量。利用位移向量， \mathbf{F} 可以写为

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}, \quad (2.10)$$

其中 \mathbf{I} 为二阶单位张量，而

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.11)$$

则称为 位移梯度张量。以后为书写简单起见，在不致引起混淆的情况下，一律将 $\nabla_{\mathbf{x}}$ 简写为 ∇ 。

现在，我们用 $\nabla \mathbf{u}$ 来表示右柯西 - 格林应变张量 \mathbf{C} 。由 (2.7) 与 (2.10) 式，有

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T (\nabla \mathbf{u}). \quad (2.12)$$

前面说过，张量 \mathbf{C} 可用来描述变形过程中在所论点附近各个方向的压缩与伸长；而 $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ 则意味着在该点相对于参考构形没有真正的变形。因此， $\mathbf{C} - \mathbf{I}$ 可以作为衡量物体相对参考构形而言的形状改变的一个尺度。由 (2.12) 式

$$\mathbf{C} - \mathbf{I} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T (\nabla \mathbf{u}). \quad (2.13)$$

如果变形很小，即

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2.14)$$

在 (2.13) 式中忽略掉高阶项, 即进行线性化后, 就得到

$$\mathbf{C} - \mathbf{I} = 2\mathbf{E}, \quad (2.15)$$

其中二阶对称张量

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (2.16)$$

称为无穷小应变张量或柯西应变张量, 其分量为

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.17)$$

这里需要说明的是, 在无穷小变形理论中, 由于假设 (2.14), 并注意到 (2.9) 式, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial y_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

因而通常也可将无穷小应变张量 \mathbf{E} 的分量取为

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right). \quad (2.18)$$

下面我们说明在无穷小变形下, 张量 $\mathbf{E} = (e_{ij})$ 的几何意义. 设在初始时刻 $t = 0$ 有两个矢量微元 $d\mathbf{x}^1$ 与 $d\mathbf{x}^2$:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^1 &= (dl_1, 0, 0)^T, \\ d\mathbf{x}^2 &= (0, dl_2, 0)^T. \end{aligned}$$

变形后它们分别变为 $d\mathbf{y}^1$ 与 $d\mathbf{y}^2$ ，其长度相应地变为 $d\tilde{l}_1$ 与 $d\tilde{l}_2$ 。利用 (2.2) 与 (2.10) 式，我们有

$$d\mathbf{y}^1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^T dl_1, \quad (2.19)$$

$$d\mathbf{y}^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^T dl_2. \quad (2.20)$$

由 (2.19) 式，并略去高阶小量，得

$$(d\tilde{l}_1)^2 = \left(1 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) (dl_1)^2.$$

因此，再一次利用小变形假设 (2.14)，有

$$d\tilde{l}_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dl_1,$$

即

$$\frac{d\tilde{l}_1 - dl_1}{dl_1} = e_{11}. \quad (2.21)$$

于是， e_{11} 表示在无穷小变形后，原先在 \mathbf{e}_1 方向的矢量微元的相对伸长。对 e_{22} 及 e_{33} 可以给出类似的解释。

现考察在无穷小变形中，两矢量微元之间夹角的变化。设 $d\mathbf{y}^1$ 与 $d\mathbf{y}^2$ 之间的夹角为 θ 。由 (2.19) 与 (2.20) 式，并略去高阶小量，得

$$d\mathbf{y}^1 \cdot d\mathbf{y}^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) dl_1 dl_2.$$

因此

$$d\tilde{l}_1 d\tilde{l}_2 \cos \theta = 2e_{12} dl_1 dl_2.$$

利用 (2.21) 式, 并略去高阶小量, 由上式可得

$$e_{12} = \frac{1}{2} \cos \theta.$$

记 $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$. 它是 $d\mathbf{x}^1$ 与 $d\mathbf{x}^2$ 之间的夹角在变形后的减少量. 对小变形, $\cos \theta = \sin \gamma \approx \gamma$, 上式又可写为

$$e_{12} = \frac{1}{2} \gamma. \quad (2.22)$$

于是, e_{12} 表示在无穷小变形后, 原先在 \mathbf{e}_1 与 \mathbf{e}_2 方向上的两矢量微元之间夹角的减少量的一半. 对 e_{23} 及 e_{31} 可给出类似的解释.

最后, 在无穷小变形下, 还有

$$J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \approx 1 + \operatorname{tr} \mathbf{E}, \quad (2.23)$$

其中 $\operatorname{tr} \mathbf{E} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ 为 \mathbf{E} 的迹. (2.23) 式说明: $\operatorname{tr} \mathbf{E}$ 表示在无穷小变形过程中体积微元的相对增长.

§3. 守恒定律, 应力张量

3.1. 质量守恒定律

在变形后的弹性体所占空间区域 Ω_t 中任取一子区域 G_t . 设它在参考构形中 (即变形前) 对应于 $G_0 \subset \Omega$. 以 ρ_0 与 ρ 分别表示弹性体在变形前与变形后的质量密度, 则质量守恒定律可表示为

$$\int_{G_t} \rho dy = \int_{G_0} \rho_0 dx, \quad (3.1)$$

其中 $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ 等。将上式左侧的积分变量 \mathbf{y} 变为 \mathbf{x} , 注意 $J = \det \mathbf{F}$ 为该变换的雅可比 (Jacobi) 行列式, 有

$$\int_{G_t} \rho d\mathbf{y} = \int_{G_0} \rho J d\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

从而由 (3.1) 式得

$$\int_{G_0} (\rho J - \rho_0) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall G_0 \subset \Omega. \quad (3.3)$$

注意到 G_0 的任意性, 由上式得到

$$\rho J = \rho_0. \quad (3.4)$$

这就是质量守恒定律的局部形式.

因为 ρ_0 只依赖于 \mathbf{x} , 而与 t 无关, (3.4) 式又可写为

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = 0, \quad (3.5)$$

其中 $\frac{d}{dt}$ 为物质导数. 由直接计算不难验证 (见习题 2)

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{v}, \quad (3.6)$$

这里 $\operatorname{div}_{\mathbf{y}}$ 表示关于变量 \mathbf{y} 的散度. 于是 (3.5) 式可以改写为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{v} = 0 \quad (3.7)$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \rho + \rho \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{v} = 0, \quad (3.8)$$

这里我们利用了 (1.7) 式。(3.8) 式又可表为如下的形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_y(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.9)$$

这就是在空间描述下质量守恒定律的局部形式 (微分形式) —— 连续性方程。我们在第二章关于流体力学的讨论中已得到这一方程 (参见第二章 (1.10) 式)。读者还可将它与在第一章中得到的电荷守恒方程的形式相比较 (参见第一章 (2.20) 式)。

3.2. 应力

上节只从运动学的角度讨论了弹性体的变形, 并没有考虑引起这些变形的物理原因, 即作用在弹性体上的荷载。要进一步讨论其它的守恒定律, 例如动量守恒定律, 就必须对这些引起变形的物理因素加以说明, 并深入分析由它们引起的弹性体内部受力情况的变化。

弹性体的荷载可分为两类。一类是外力, 另一类是温度等物理因素。如前所述, 我们这里暂不考虑因温度的变化所造成的影响, 而只讨论以外力形式出现的荷载。弹性体所受的外力有体积力 \mathbf{b} —— 单位质量弹性体所受的外力, 如重力等; 还有表面力 $\boldsymbol{\tau}$ —— 单位表面积所受到的外力。

在荷载的作用下, 弹性体要发生变形, 变形改变了物体内部分子之间的相对位置, 在物体内部形成了一个附加的内力场。当这个内力场足以和外力相平衡时, 变形不再继续, 弹性体达到平衡状态。为了精确地描述并分析这个内力场, 柯西 (Cauchy) 引进了应力的概念。

设 M 为变形后弹性体即 Ω_t 中的一点。过 M 点作一曲面 S 将弹性体分为 I 及 II 两部分 (见图 1)。现考察部分 II 对部分 I 的作用。取曲面 S 在 M 点处的单位法线向量 $\boldsymbol{\nu}$ 指向部分 II 之内。在 S 上 M 点的邻域内取面积元素 ΔS , 并设部分 II 通

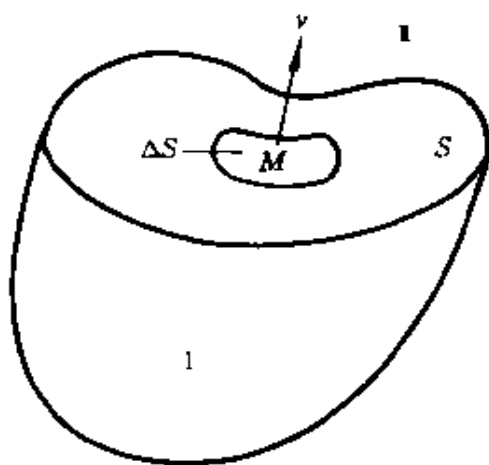


图 1

过 ΔS 作用在部分 I 上的力为 Δf ，定义

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta S} \quad (3.10)$$

为 M 点在 ν 方向的应力向量 (注意: σ 的方向一般不是 ν 的方向)。

为了使上述定义合理, 我们作如下假定。

柯西应力原理: 在弹性体内任一给定点 M (设其坐标为 y), 对具有公共法线 ν 的一切曲面 S , 于给定时刻用上述方式定义的 M 点在 ν 方向的应力向量是相同的, 即与 S 的选取无关。这样, 应力向量可写为

$$\sigma = \sigma(t, y, \nu). \quad (3.11)$$

这个原理说明, 应力向量 σ 与曲面 S 的曲率无关, 而只依

赖于曲面 S 在所论点的法线方向。由牛顿第三定律，立即有

$$\sigma(t, y, -\nu) = -\sigma(t, y, \nu). \quad (3.12)$$

3.3. 动量守恒定律的积分形式

对 Ω_t 中任意选定的子区域 G_t ，我们考察其中的动量变化情况。 G_t 中的动量为

$$\int_{G_t} \rho v dy.$$

设 G_t 的边界为 S_t ，则 G_t 所受的力为作用在其上的体积力 b 以及在 G_t 之外的弹性体作用在 S_t 上的应力 σ ，其总和为

$$\int_{S_t} \sigma(t, y, \nu) dS_t + \int_{G_t} \rho b(t, y) dy.$$

由牛顿第二定律，我们有

$$\frac{d}{dt} \int_{G_t} \rho v dy = \int_{S_t} \sigma dS_t + \int_{G_t} \rho b dy, \quad (3.13)$$

其中 $\frac{d}{dt}$ 为物质导数。因为在 t 变化时， G_t 也随之变化，因而不能简单地将上式左端的导数 $\frac{d}{dt}$ 移入积分号内，而需利用下述引理进行处理。

引理 3.1. 对任何连续可微的函数 ϕ ，成立

$$\frac{d}{dt} \int_{G_t} \rho \phi dy = \int_{G_t} \rho \frac{d\phi}{dt} dy. \quad (3.14)$$

证明 如同得到 (3.2) 式那样，我们有

$$\int_{G_t} \rho \phi dy = \int_{G_0} \rho J \phi dx.$$

由质量守恒方程 (3.4), 上式可写为

$$\int_{G_t} \rho \phi dy = \int_{G_0} \rho_0 \phi dx.$$

因此,

$$\frac{d}{dt} \int_{G_t} \rho \phi dy = \int_{G_0} \rho_0 \frac{d\phi}{dt} dx.$$

再利用 (3.4) 式, 并将上式右端的积分变量再变回到 \mathbf{y} , 即得 (3.14) 式。证毕。

利用引理 3.1, (3.13) 式可写为

$$\int_{G_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dy = \int_{S_t} \boldsymbol{\sigma} dS_t + \int_{G_t} \rho \mathbf{b} dy. \quad (3.15)$$

这就是动量守恒定律的积分形式。

要想利用格林公式将上式右端第一项的曲面积分化为体积分, 从而得到动量守恒定律的局部 (微分) 形式, 还需要对 $\boldsymbol{\sigma}$ 的性质作进一步的探讨。

3.4. 动量矩守恒定律的积分形式

设 G_t 及 S_t 仍如上段中所述。 G_t 关于原点的动量矩为

$$\int_{G_t} (\mathbf{y} \times \rho \mathbf{v}) dy.$$

G_t 所受的总力矩, 应由作用在其上的体积力矩与作用在 S_t 上的应力矩组成, 即为

$$\int_{S_t} \mathbf{y} \times \boldsymbol{\sigma} dS_t + \int_{G_t} (\mathbf{y} \times \rho \mathbf{b}) dy.$$

由动量矩守恒定律, 应有

$$\frac{d}{dt} \int_{G_t} \rho (\mathbf{y} \times \mathbf{v}) dy = \int_{S_t} \mathbf{y} \times \boldsymbol{\sigma} dS_t + \int_{G_t} \rho (\mathbf{y} \times \mathbf{b}) dy,$$

其中 $\frac{d}{dt}$ 仍为物质导数。应用引理 3.1, 并注意到 $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{v}$ 与 $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$, 有

$$\frac{d}{dt} \int_{G_t} \rho(\mathbf{y} \times \mathbf{v}) dy = \int_{G_t} \rho \left(\mathbf{y} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dy. \quad (3.16)$$

从而可得

$$\int_{G_t} \rho \left(\mathbf{y} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dy = \int_{S_t} (\mathbf{y} \times \boldsymbol{\sigma}) dS_t + \int_{G_t} \rho(\mathbf{y} \times \mathbf{b}) dy. \quad (3.17)$$

这就是动量矩守恒定律的积分形式。

3.5. 柯西应力张量

柯西应力原理告诉我们：弹性体内每一点的应力向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 只依赖于所考察的方向 $\boldsymbol{\nu}$ ，而与所取的个别曲面 S 无关。这使得我们得以定义应力向量。但在空间每一点，有无穷多个方向 $\boldsymbol{\nu}$ ，因而仅仅这样表示应力还是很不方便的。我们希望在弹性体内每一点，能只用一个量来描述该点的应力。这个量就是柯西应力张量。

定理 3.1. 存在二阶张量 $\mathbf{T}(\mathbf{y})$ 使

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{T}(\mathbf{y})\boldsymbol{\nu}. \quad (3.18)$$

这儿为简单起见，不再标出有关量对 t 的依赖性。

证明 不失一般性，不妨设 $\mathbf{y} = 0$ 。作以原点为顶点的四面体 ΔG ，使其三个面为过原点的坐标平面，而其第四面 ΔS 的法向量恰为 $\boldsymbol{\nu}$ （见图 2）。将在坐标平面上的三个面分别记为 ΔS_i

($i = 1, 2, 3$), 其单位外法线向量分别为 $-\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$)。在下面我们我们将用同一记号表示这些面及其面积。显然有

$$\Delta S_i = \nu_i \Delta S \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.19)$$

其中 ν_i ($i = 1, 2, 3$) 是 $\boldsymbol{\nu}$ 的分量。

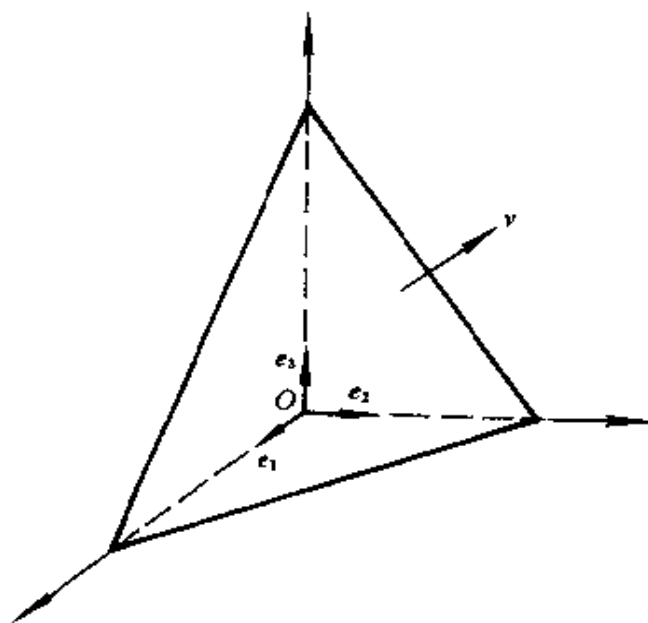


图 2

将动量守恒方程 (3.15) 用于 ΔG , 有

$$\begin{aligned} \int_{\Delta G} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dy &= \int_{\Delta S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\nu}) dS \\ &+ \sum_{i=1}^3 \int_{\Delta S_i} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, -\mathbf{e}_i) dS + \int_{\Delta G} \rho \mathbf{b} dy. \end{aligned}$$

将上式两端除以 ΔS , 得

$$\frac{1}{\Delta S} \int_{\Delta G} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dy = \frac{1}{\Delta S} \int_{\Delta S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\nu}) dS$$

$$+\frac{1}{\Delta S} \sum_{i=1}^3 \int_{\Delta S_i} \sigma(\mathbf{y}, -\mathbf{e}_i) dS + \frac{1}{\Delta S} \int_{\Delta G} \rho b d\mathbf{y}. \quad (3.20)$$

在始终保持 ΔS 的法向量为 $\boldsymbol{\nu}$ 的条件下, 令 ΔS 到原点的距离 h 趋向于零. 因 ΔG 的体积为 h 的三阶小量, 所以在被积函数有界的假定下, 易见当 $h \rightarrow 0$ 时

$$\frac{1}{\Delta S} \int_{\Delta G} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{y}, \quad \frac{1}{\Delta S} \int_{\Delta G} \rho b d\mathbf{y} \rightarrow 0. \quad (3.21)$$

注意 (3.19) 式, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 有

$$\frac{1}{\Delta S} \int_{\Delta S} \sigma(\mathbf{y}, \boldsymbol{\nu}) dS \rightarrow \sigma(0, \boldsymbol{\nu}), \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta S} \int_{\Delta S_i} \sigma(\mathbf{y}, -\mathbf{e}_i) dS &\rightarrow \nu_i \sigma(0, -\mathbf{e}_i) \\ (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.23)$$

这样, 注意到 (3.12) 式, 令 $h \rightarrow 0$, 就可由 (3.20) 式得到

$$\sigma(0, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{i=1}^3 \nu_i \sigma(0, \mathbf{e}_i).$$

一般地, 我们有

$$\sigma(\mathbf{y}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{i=1}^3 \nu_i \sigma(\mathbf{y}, \mathbf{e}_i). \quad (3.24)$$

设

$$\sigma(\mathbf{y}, \mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^3 t_{ji}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_j \quad (i = 1, 2, 3),$$

并将其代入 (3.24) 式, 就得到

$$\sigma(\mathbf{y}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{i,j=1}^3 t_{ij}(\mathbf{y}) \nu_j \mathbf{e}_i.$$

这样, 取 $\mathbf{T}(\mathbf{y}) = (t_{ij}(\mathbf{y}))$, 上式即给出 (3.18) 式. 由张量识别定理 (见附录一) 知, \mathbf{T} 为二阶张量. 证毕.

$\mathbf{T}(\mathbf{y}) = (t_{ij}(\mathbf{y}))$ 称为柯西应力张量. 其分量 t_{11}, t_{22}, t_{33} 称为正应力, t_{12}, \dots, t_{23} 称为剪应力.

3.6. 在空间描述下动量守恒定律的微分形式, 柯西应力张量的对称性

利用定理 3.1, 动量守恒方程 (3.15) 式可写为

$$\int_{G_t} \rho \frac{dv_i}{dt} dy = \sum_{j=1}^3 \int_{S_t} t_{ij} \nu_j dS_t + \int_{G_t} \rho b_i dy \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.25)$$

应用格林公式

$$\int_{S_t} t_{ij} \nu_j dS_t = \int_{G_t} \frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j} dy,$$

(3.25) 式可化为

$$\int_{G_t} \left(\rho \frac{dv_i}{dt} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j} - \rho b_i \right) dy = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

由于上式对一切 $G_t \subset \Omega_t$ 均成立, 所以有

$$\rho \frac{dv_i}{dt} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j} - \rho b_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.26)$$

或写为向量形式

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \operatorname{div}_y \mathbf{T} - \rho \mathbf{b} = 0, \quad (3.27)$$

其中 $\operatorname{div}_y \mathbf{T} = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j} \right)$ 为一阶张量, 即向量。

(3.27) 式就是在空间描述下动量守恒定律的微分形式。它与我们在第二章流体力学中所得到的方程在形式上是一样的。实际上, 到目前为止, 我们还未利用所讨论的对象为弹性体的这一假设。

现考察动量矩守恒定律的微分形式。(3.17) 式的分量形式为

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^3 \int_{G_t} \rho \varepsilon_{ijk} y_j \frac{dv_k}{dt} dy &= \sum_{j,k=1}^3 \int_{S_t} \varepsilon_{ijk} y_j \sigma_k dS_t \\ &+ \sum_{j,k=1}^3 \int_{G_t} \rho \varepsilon_{ijk} y_j b_k dy \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中 σ_k 与 b_k 分别为 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 \mathbf{b} 的分量, 而

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{若 } (i, j, k) \text{ 为 } (1, 2, 3) \text{ 的偶置换,} \\ -1, & \text{若 } (i, j, k) \text{ 为 } (1, 2, 3) \text{ 的奇置换,} \\ 0, & \text{若 } (i, j, k) \text{ 中至少有两个数相等.} \end{cases}$$

应用定理 3.1 和格林公式, 有

$$\begin{aligned} \int_{S_t} \varepsilon_{ijk} y_j \sigma_k dS_t &= \sum_{l=1}^3 \int_{S_t} \varepsilon_{ijk} y_j t_{kl} \nu_l dS_t \\ &= \sum_{l=1}^3 \int_{G_t} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial y_l} (y_j t_{kl}) dy. \end{aligned}$$

将上式代入 (3.28) 式, 并注意到 G_t 的任意性, 即得动量矩守恒定律的微分形式为

$$\begin{aligned} \rho \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} y_j \frac{dv_k}{dt} - \sum_{j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial y_l} (y_j t_{kl}) \\ - \rho \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} y_j b_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.29)$$

下面我们利用动量守恒方程 (3.26) 化简上式。显然

$$\begin{aligned} \sum_{j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial y_l} (y_j t_{kl}) &= \sum_{j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \left(\delta_{jl} t_{kl} + y_j \frac{\partial t_{kl}}{\partial y_l} \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} t_{kj} + \sum_{j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} y_j \frac{\partial t_{kl}}{\partial y_l}, \end{aligned}$$

其中 δ_{jl} 为克罗内克 (Kronecker) 记号:

$$\delta_{jl} = \begin{cases} 1, & \text{若 } j = l, \\ 0, & \text{若 } j \neq l. \end{cases}$$

将上式代入 (3.29) 式, 即得

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} y_j \left(\rho \frac{dv_k}{dt} - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial t_{kl}}{\partial y_l} - \rho b_k \right) - \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} t_{kj} = 0 \\ (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

注意到动量守恒方程 (3.26), 上式就可简化为

$$\sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} t_{kj} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

分别取 $i = 1, 2, 3$, 就由上式得到

$$t_{23} = t_{32}, \quad t_{31} = t_{13}, \quad t_{12} = t_{21}.$$

综合以上所述, 我们有

定理 3.2. 柯西应力张量 $\mathbf{T} = (t_{ij})$ 为二阶对称张量, 即成立

$$t_{ij} = t_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.30)$$

由以上讨论可以看出, 在动量守恒方程 (3.26) 成立的前提下, 动量矩守恒定律与柯西应力张量的对称性是等价的。

3.7. 彼奥拉 (Piola) 应力张量, 物质描述下动量守恒定律的微分形式

在本章一开始就指出, 在弹性力学中, 通常更方便使用的是物质描述方法, 而不是空间描述方法。下面首先考察, 要得到在物质描述下的动量守恒定律的微分形式, 会碰到什么困难。为了得到这个方程, 需要将 (3.25) 式中的积分化为在参考构形 Ω 中的相应区域 G_0 及其边界 S_0 上的积分。对于其中的体积分, 利用变量代换及 (3.4) 式, 即有

$$\int_{G_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dy = \int_{G_0} \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} dx, \quad (3.31)$$

$$\int_{G_t} \rho \mathbf{b} dy = \int_{G_0} \rho_0 \mathbf{b} dx. \quad (3.32)$$

难以处理的是如何将曲面积分

$$\int_{S_t} \mathbf{T}(\mathbf{y}) \boldsymbol{\nu} dS_t$$

化为一个具如下形式的在 G_0 的边界 S_0 上的曲面积分:

$$\int_{S_0} \boxed{?} \mathbf{n} dS_0,$$

其中 \mathbf{n} 为 S_0 上的单位外法线向量。只有这样,才可能应用格林公式,将上述积分化为 G_0 上的体积分,从而得到物质描述下的微分方程。为此,需要一个有关曲面微元的变换公式。

引理 3.2. 设 Ω 中 \mathbf{x} 处的曲面微元 dS_0 (其单位法向量为 \mathbf{n}) 在变形

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(t, \mathbf{x})$$

下对应于 Ω_t 中的曲面微元 dS_t (其单位法向量为 $\boldsymbol{\nu}$), 那么

$$\boldsymbol{\nu} dS_t = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n} dS_0, \quad (3.33)$$

其中 \mathbf{F}^{-T} 表示 \mathbf{F}^{-1} 的转置, 而 J 由 (2.23) 式定义。

证明 设 Ω 中 \mathbf{x} 处的两矢量微元 $d\mathbf{x}^1$ 及 $d\mathbf{x}^2$ 构成法向量为 \mathbf{n} 的平行四边形面积微元 dS_0 ; 相应地, 经过变形, 在 Ω_t 中 \mathbf{y} 处的两矢量微元 $d\mathbf{y}^1$ 及 $d\mathbf{y}^2$ 构成法向量为 $\boldsymbol{\nu}$ 的曲面微元 dS_t 。那么我们有

$$\mathbf{n} dS_0 = d\mathbf{x}^1 \times d\mathbf{x}^2, \quad (3.34)$$

$$\boldsymbol{\nu} dS_t = d\mathbf{y}^1 \times d\mathbf{y}^2. \quad (3.35)$$

将 (3.35) 式写为分量形式, 可得

$$\begin{aligned} \nu_i dS_t &= \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} dy_j^1 dy_k^2 \\ &= \sum_{j,k,q,r=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial y_j}{\partial x_q} \frac{\partial y_k}{\partial x_r} dx_q^1 dx_r^2, \end{aligned}$$

其中 y_j^1 表示 \mathbf{y}^1 的分量等, 而 ε_{ijk} 的定义见 (3.28) 式. 将上式两端乘以 $\frac{\partial y_i}{\partial x_p}$, 并对 i 从 1 到 3 求和, 就得到

$$\sum_{i=1}^3 \nu_i \frac{\partial y_i}{\partial x_p} dS_t = \sum_{i,j,k,q,r=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial y_i}{\partial x_p} \frac{\partial y_j}{\partial x_q} \frac{\partial y_k}{\partial x_r} dx_q^1 dx_r^2. \quad (3.36)$$

利用行列式的定义, 有

$$J = \sum_{p,q,r=1}^3 \varepsilon_{pqr} \frac{\partial y_1}{\partial x_p} \frac{\partial y_2}{\partial x_q} \frac{\partial y_3}{\partial x_r},$$

于是不难验证

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial y_i}{\partial x_p} \frac{\partial y_j}{\partial x_q} \frac{\partial y_k}{\partial x_r} = \varepsilon_{pqr} J. \quad (3.37)$$

这样, 注意到 (3.34) 式, (3.36) 式可写为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \nu_i \frac{\partial y_i}{\partial x_p} dS_t &= \sum_{q,r=1}^3 \varepsilon_{pqr} J dx_q^1 dx_r^2 \\ &= J n_p dS_0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

其中 n_p 为 \mathbf{n} 的分量. 注意变形梯度张量 \mathbf{F} 的定义 (2.3), 又可将 (3.38) 式改写为

$$\sum_{i=1}^3 f_{ip} \nu_i dS_t = J n_p dS_0,$$

其中 f_{ip} 为 \mathbf{F} 的分量. 上式对 $p = 1, 2, 3$ 均成立, 故

$$\mathbf{F}^T \boldsymbol{\nu} dS_t = J \mathbf{n} dS_0.$$

这就证明了 (3.33) 式。引理 3.2 证毕。

记

$$\mathbf{P} = J\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}, \quad (3.39)$$

应用引理 3.2, 我们有

$$\int_{S_t} \mathbf{T}\boldsymbol{\nu} dS_t = \int_{S_0} \mathbf{P}\mathbf{n} dS_0. \quad (3.40)$$

由 (3.39) 式给出的 \mathbf{P} 称为 彼奥拉应力张量; 相应地, $\mathbf{P}\mathbf{n}$ 称为 彼奥拉应力向量。

需要注意的是, 彼奥拉应力张量虽然是在参考构形 Ω 上定义的, 但它所描述的仍是弹性体变形后的应力。对于同一质点 (变形后在 \mathbf{y} 处), 其彼奥拉应力向量 $\mathbf{P}\mathbf{n}$ 与柯西应力向量 $\mathbf{T}\boldsymbol{\nu}$ 方向是一致的, 只是前者是以未变形的单位面积来测量的, 而后者则是以变形后的单位面积来测量的 (见图 3)。

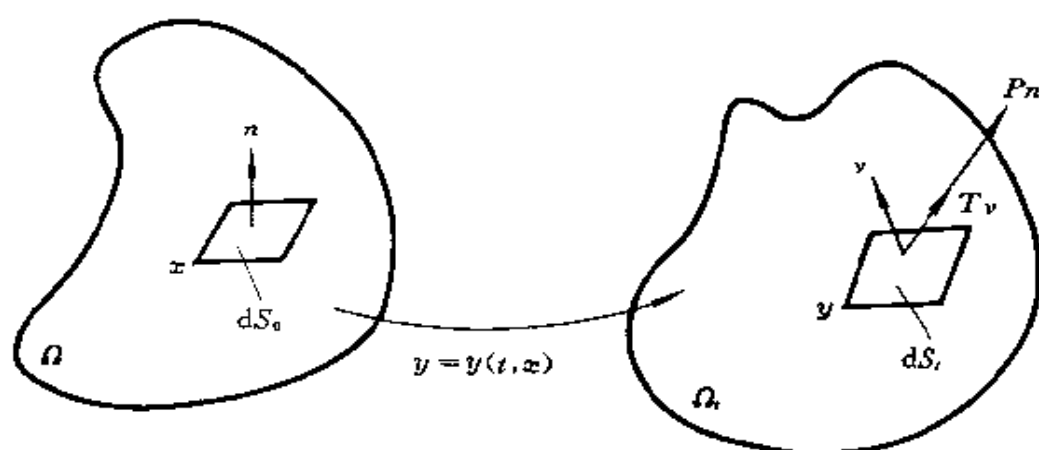


图 3

由 (3.39) 式可以看出, 一般地说, 彼奥拉应力张量不是对称张量。记

$$\Sigma = F^{-1}P. \quad (3.41)$$

显然 Σ 是对称张量, 称其为 第二彼奥拉应力张量。

引进彼奥拉应力张量后, 就不难得到物质描述下动量守恒定律的微分形式。

利用 (3.31) — (3.32) 和 (3.40) 式, 在进行积分变量代换后, (3.25) 式即化为

$$\int_{G_0} \rho_0 \frac{dv}{dt} dx - \int_{S_0} Pn dS_0 - \int_G \rho_0 b dx = 0. \quad (3.42)$$

利用格林公式, 有

$$\int_{S_0} Pn dS_0 = \int_{G_0} \operatorname{div}_x P dx,$$

从而由 (3.42) 式, 并注意到 G_0 的任意性, 立即得到

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div}_x P + \rho_0 b, \quad (3.43)$$

或写为分量形式

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.44)$$

其中 p_{ij} 为 P 的分量, 而对于物质描述下的量, $\frac{d}{dt}$ 与 $\frac{\partial}{\partial t}$ 是一致的。(3.43) 就是物质描述下动量守恒定律的微分形式。

在物质描述下, 动量矩守恒定律等价于第二彼奥拉应力张量的对称性 (见习题 3)。

§4. 本构方程 —— 应力与变形之间的关系

4.1. 本构关系的一般形式

到目前为止所讨论的内容, 并没有涉及到所研究的对象是由何种材料构成的, 没有涉及这种材料对荷载的反应具有什么样的特性, 因而对一切连续介质都是适用的。为了能使动量守恒方程 (3.43) (如果用空间描述, 则为动量方程 (3.27) 与连续性方程 (3.9)) 形成一个封闭的方程组, 必须对所考虑的物体, 给出一个反映其构成材料本身性质的应力与变形之间的关系。这个关系就称为本构关系。

如前所述, 物体的变形可以用变形梯度张量 $\mathbf{F} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$ 描述。一物体是弹性体这一事实, 反映为物体在任一给定质点处在某时刻的应力由此时刻变形梯度在该质点的值所唯一确定; 也就是说, 应力应为变形梯度的函数, 因此, 弹性体的本构方程, 应该有如下形式

$$\mathbf{T}(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})), \quad (4.1)$$

这里我们没有明显标出有关量对 t 的依赖性。

定义 4.1. 柯西应力张量 \mathbf{T} 满足假设 (4.1) 的材料, 称为弹性的或柯西弹性的, 其中 $\hat{\mathbf{T}}$ 称为响应函数。如果响应函数 $\hat{\mathbf{T}}$ 不明显依赖于 \mathbf{x} , 称弹性体为齐次的, 否则称非齐次的。

需要指出的是, 一弹性体是否为齐次的, 并不仅仅由该弹性体本身决定, 还依赖于参考构形的选取。也就是说, 一弹性体在某参考构形下是齐次的, 在另一“变形过”的参考构形下不一定是齐次的。

虽然下面绝大部分的讨论对非齐次的弹性体也是成立的, 但为简单计, 我们将不考虑响应函数关于 \mathbf{x} 的明显依赖性, 即假设

$$\mathbf{T}(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(\mathbf{x})). \quad (4.2)$$

(4.2) 式只指出了柯西应力张量依赖于变形梯度。为了使响应函数 \hat{T} 真正反映弹性体的变形与其应力之间的关系，它还必须满足下述的客观性假设。

我们知道，弹性体在刚体运动下不产生任何变形，从而其应力分布情况不会发生变化。也就是说，弹性体内一点关于某方向的应力向量，在刚体运动下，应该变为对应点关于对应方向的应力向量。设弹性体由参考构形 Ω 变为 Ω_t 后，又作一刚体运动再变为 Ω_t^* ，即 y 变为

$$y^* = a + Qy, \quad (4.3)$$

其中 a 为常向量，而 Q 为正交阵。

现考察 Ω_t 中一点 y 处关于方向 ν 的应力向量 $T(y)\nu$ 。在刚体运动 (4.3) 下， y 点变为 Ω_t^* 中一点 y^* ， y 处的方向 ν 则变为 y^* 处的方向

$$\nu^* = Q\nu, \quad (4.4)$$

而应力向量 $T(y)\nu$ 则应变为 y^* 处关于方向 ν^* 的应力向量 $T^*(y^*)\nu^*$ (见图 4)，这里 T^* 是关于构形 Ω_t^* 的应力张量。于是，

$$T^*(y^*)\nu^* = QT(y)\nu. \quad (4.5)$$

注意到 (4.4) 式，上式又可写为

$$T^*(y^*)Q\nu = QT(y)\nu.$$

因为上式对一切方向 ν 均成立，所以 $T^*(y^*)Q = QT(y)$ ，即成立

$$T^*(y^*) = QT(y)Q^T. \quad (4.6)$$

由 (4.3) 式，易见

$$F^* \triangleq \left(\frac{\partial y_i^*}{\partial x_j} \right) = QF.$$

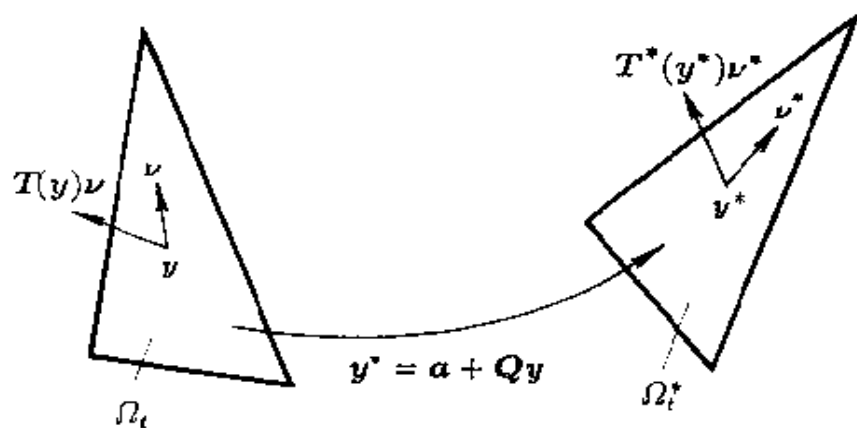


图 4

这样, 利用由 (4.2) 式给出的响应函数 \hat{T} , (4.6) 式可以改写为

$$\hat{T}(QF) = Q\hat{T}(F)Q^T. \quad (4.7)$$

定义 4.2. 本构关系中的响应函数 \hat{T} 若满足 (4.7) 式, 则称其满足客观性假设。

一个形如 (4.2) 的关系式能够成为一种弹性材料的本构方程, 其响应函数 \hat{T} 必须满足 (4.7) 式, 即满足客观性假设。

下面我们讨论在满足客观性假设的情况下, 本构关系中的响应函数应具有怎样的形式。

由引理 2.1, 变形梯度张量 F 可表为 $F = RU$, 其中 R 为正交阵, 而 U 为对称正定阵。在 (4.7) 式中, 取 $Q = R^T$, 就有

$$\hat{T}(F) = R\hat{T}(U)R^T. \quad (4.8)$$

利用右柯西 - 格林应变张量 $C = U^2$, 上式还可改写为

$$\hat{T}(F) = R\tilde{T}(C)R^T, \quad (4.9)$$

$$\hat{T}(F) = F\bar{T}(C)F^T, \quad (4.10)$$

其中

$$\tilde{T}(C) = \hat{T}(C^{1/2}), \quad (4.11)$$

$$\bar{T}(C) = C^{-1/2}\hat{T}(C^{1/2})C^{1/2}. \quad (4.12)$$

所以, 满足客观性假设的本构方程 (4.2) 应具有如下形式:

$$T = R\tilde{T}(C)R^T, \quad (4.13)$$

或

$$T = F\bar{T}(C)F^T. \quad (4.14)$$

现在来考察彼奥拉应力张量 P 。由 P 的定义 (3.39) 式, 并利用 (4.14) 式, 有

$$P = JF\bar{T}(C). \quad (4.15)$$

注意到 $\det C = J^2$, 上式又可写为

$$P = F\bar{P}(C), \quad (4.16)$$

其中

$$\bar{P}(C) = \sqrt{\det C}\bar{T}(C). \quad (4.17)$$

对有些弹性材料, 其本构方程还可以用给出贮能函数的方式确定。

定义 4.3. 如果存在一个 F 的标量函数 $W = \hat{W}(F)$ 使

$$p_{ij} = \frac{\partial \hat{W}(F)}{\partial f_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4.18)$$

其中 p_{ij} 为彼奥拉应力张量的分量, 则称该材料为超弹性的. 函数 $W = \hat{W}(\mathbf{F})$ 称为贮能函数或应变能函数.

显然, 超弹性材料一定是弹性的.

对于超弹性材料, 客观性假设由下式给出:

$$\hat{W}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \hat{W}(\mathbf{F}), \quad (4.19)$$

其中 \mathbf{Q} 为任一给定的正交阵. 不难验证, 若贮能函数 \hat{W} 满足 (4.19) 式, 则由它确定的柯西应力张量 \mathbf{T} 满足 (4.7) 式 (见习题 5).

4.2. 各向同性材料的本构方程

我们所接触到的许多弹性材料都是各向同性的, 例如橡胶、金属等. 但也有例外, 如木材就是典型的各向异性材料. 下面我们首先给出材料为各向同性的精确定义, 然后考察各向同性这一特点如何体现在描述弹性体本构关系的响应函数的性质上.

从物理直观上说, 一弹性材料在其中某一点为各向同性, 是指在該点的同一变形不管施于哪个方向上, 由此引起的应力响应本质上应该是相同的.

考察弹性体内一质点 $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ 处的情况. 首先看弹性体的如下均匀变形

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^0 + \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \quad (4.20)$$

其中 \mathbf{F} 为常张量. 在这一变形下, 质点 \mathbf{x}^0 保持不变, 而在 \mathbf{x}^0 处的柯西应力张量为 $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})$.

其次考虑如下的变形. 先将 Ω 绕 \mathbf{x}^0 点作旋转变换, 设其变换矩阵为 \mathbf{Q} (正交阵); 然后再对其施以一个使 \mathbf{x}^0 保持不变的、变形梯度为 \mathbf{F} 的均匀变形, 即将 \mathbf{x} 点变为 (见图 5)

$$\mathbf{y}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^0 + \mathbf{F}\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0).$$

这个变形的变形梯度张量为 FQ ，在这个变形下，质点 x^0 处的柯西应力张量为 $\hat{T}(FQ)$ 。

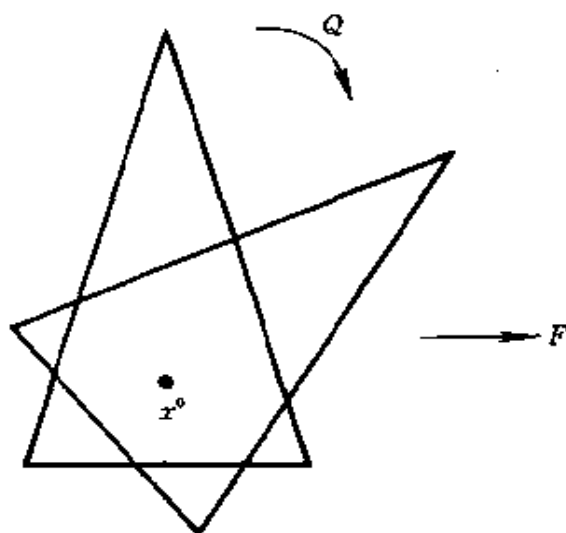


图 5

在上述两种情况下，我们只是将同一变形施于弹性体在 x^0 处的不同方向。如果材料在各个方向上对变形的应力响应都是一样的，那么在这两种情况下， x^0 处的应力张量应该是一样的，即成立

$$\hat{T}(FQ) = \hat{T}(F). \quad (4.21)$$

定义 4.4. 如果弹性材料的本构方程 (4.2) 中的响应函数 \hat{T} 对一切给定的正交阵 Q 满足 (4.21) 式，则称该材料为各向同性的。

下面对各向同性的弹性材料讨论其本构方程的形式。

引理 4.1. 对各向同性弹性材料的响应函数，成立

$$Q\hat{T}(F)Q^T = \hat{T}(QFQ^T), \quad (4.22)$$

其中 Q 为任一给定的正交阵。

证明 在 (4.21) 中取 F 为 QF , Q 为 Q^T , 就有

$$\hat{T}(QF) = \hat{T}(QFQ^T).$$

再利用客观性假设 (4.7), 立即得到 (4.22) 式, 引理证毕。

利用引理 4.1 以及 (4.8) 式, 并注意到引理 2.1, 有

$$\hat{T}(F) = \hat{T}(RUR^T) = \hat{T}(V).$$

注意 \tilde{T} 的定义 (4.11) 及 (2.8) 式, 还有

$$\hat{T}(F) = \hat{T}(V) = \tilde{T}(B).$$

因此, 对各向同性材料, 柯西应力张量可表为 V 或 B 的函数, 即本构关系具有如下形式:

$$T = \hat{T}(V) \quad (4.23)$$

或

$$T = \tilde{T}(B). \quad (4.24)$$

通过更精细的讨论可以证明, (4.24) 式实际上还可以表示为更为明确的形式, 见下述的定理。

定理 4.1. 对各向同性的弹性材料, 其本构方程具有如下形式

$$T = \beta_0(I_B)I + \beta_1(I_B)B + \beta_2(I_B)B^2, \quad (4.25)$$

其中 β_0, β_1 及 β_2 为对称张量 \mathbf{B} 的三个主不变量 I_B 的标量函数。

这个定理的证明, 读者可参阅 [4]。

下面讨论彼奥拉应力张量。因为 \mathbf{P} 不是对称张量, 不可能给出类似于 (4.25) 式的表示。但对第二彼奥拉应力张量 Σ , 我们有下面的结果。

定理 4.2. 对各向同性的弹性材料, 其本构方程可表为如下形式:

$$\Sigma = \gamma_0(I_C)\mathbf{I} + \gamma_1(I_C)\mathbf{C} + \gamma_2(I_C)\mathbf{C}^2, \quad (4.26)$$

其中 γ_0, γ_1 及 γ_2 为对称张量 \mathbf{C} 的三个主不变量 I_C 的标量函数。

证明 由 (3.39) 与 (3.41) 式,

$$\Sigma = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}. \quad (4.27)$$

对 \mathbf{T} 应用定理 4.1, 并注意到 (2.7)–(2.8) 式, 上式给出

$$\Sigma = J(\beta_0(I_B)\mathbf{C}^{-1} + \beta_1(I_B)\mathbf{I} + \beta_2(I_B)\mathbf{C}). \quad (4.28)$$

由 \mathbf{F} 的极分解 (见引理 2.1) 易得 $\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, 其中 \mathbf{R} 为正交阵。因此,

$$I_B = I_C. \quad (4.29)$$

此外, 由凯雷 - 哈密顿 (Cayley-Hamilton) 定理, 成立

$$\mathbf{C}^3 - I_1(\mathbf{C})\mathbf{C}^2 + I_2(\mathbf{C})\mathbf{C} - I_3(\mathbf{C})\mathbf{I} = 0, \quad (4.30)$$

其中 $I_i(\mathbf{C})$ ($i = 1, 2, 3$) 表示 \mathbf{C} 的第 i 个主不变量。所以

$$\mathbf{C}^{-1} = I_3(\mathbf{C})^{-1}(I_2(\mathbf{C})\mathbf{I} - I_1(\mathbf{C})\mathbf{C} + \mathbf{C}^2). \quad (4.31)$$

又显然有

$$J = I_3(\mathbf{C})^{1/2}. \quad (4.32)$$

将 (4.29)、(4.31) — (4.32) 式代入 (4.28) 式, 即得 (4.26) 式. 定理证毕.

定理 4.3. 设参考构形为自然状态, 即成立 $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$, 则对在此参考构形附近的变形, 各向同性弹性材料的本构方程有如下形式:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \lambda(\operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}}) + 2\mu\tilde{\mathbf{E}} + o(|\tilde{\mathbf{E}}|), \quad (4.33)$$

其中常数 λ 及 μ 称为拉梅 (Lamé) 常数, $\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$, 而 $o(|\tilde{\mathbf{E}}|)$ 表示 $|\tilde{\mathbf{E}}|$ 的高阶项.

证明 容易直接验证

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathbf{C} &= 3 + 2\operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{tr} \mathbf{C}^2 &= 3 + 4\operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}} + o(|\tilde{\mathbf{E}}|), \\ \operatorname{tr} \mathbf{C}^3 &= 3 + 6\operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}} + o(|\tilde{\mathbf{E}}|). \end{aligned}$$

现在利用以上诸式来计算 \mathbf{C} 的三个主不变量. 首先易见

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \operatorname{tr} \mathbf{C} = 3 + 2\operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}}, \\ I_2(\mathbf{C}) &= \frac{1}{2}((\operatorname{tr} \mathbf{C})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{C}^2) = 3 + 4\operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}} + o(|\tilde{\mathbf{E}}|). \end{aligned}$$

为计算 $I_3(\mathbf{C})$, 在 (4.30) 两端取迹, 并利用以上两式, 可得

$$\begin{aligned} I_3(\mathbf{C}) &= \frac{1}{6}(\operatorname{tr} \mathbf{C})^3 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} \mathbf{C} \operatorname{tr} \mathbf{C}^2 + \frac{1}{3}\operatorname{tr} \mathbf{C}^3 \\ &= 1 + 2\operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}} + o(|\tilde{\mathbf{E}}|). \end{aligned}$$

对 I_C 的任一标量函数 γ , 利用泰勒展开, 易知有

$$\begin{aligned}\gamma(I_C) = & \gamma(I_C) \Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{I}} + \frac{\partial}{\partial I_1} \gamma(I_C) \Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{I}} \cdot 2\text{tr} \tilde{\mathbf{E}} \\ & + \frac{\partial}{\partial I_2} \gamma(I_C) \Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{I}} \cdot 4\text{tr} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\partial}{\partial I_3} \gamma(I_C) \Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{I}} \cdot 2\text{tr} \tilde{\mathbf{E}} \\ & + o(|\tilde{\mathbf{E}}|). \end{aligned} \quad (4.34)$$

在 (4.26) 式中令 $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, 有

$$\gamma_0(I_C) + \gamma_1(I_C) + \gamma_2(I_C) = 0, \text{ 当 } \mathbf{C} = \mathbf{I} \text{ 时.} \quad (4.35)$$

将 $\gamma_0(I_C)$, $\gamma_1(I_C)$ 及 $\gamma_2(I_C)$ 分别表示成 (4.34) 式的形式, 将其代入 (4.26) 式, 并注意到 (4.35) 式, 即得 (4.33) 式. 定理证毕.

如果在本构关系 (4.33) 式中忽略掉 $\tilde{\mathbf{E}}$ 的高阶项, 就得到

$$\boldsymbol{\Sigma} = \lambda(\text{tr} \tilde{\mathbf{E}}) \mathbf{I} + 2\mu \tilde{\mathbf{E}}. \quad (4.36)$$

不难看出, 这个本构关系仍满足客观性假设, 而且所表示的材料是各向同性的. 具有 (4.36) 式这种本构关系的材料称为 圣维南-基尔霍夫 (St. Venant-Kirchhoff) 材料. 这是一种最简单的非线性弹性材料.

对于超弹性材料而言, 各向同性由下式定义:

$$\hat{W}(\mathbf{FQ}) = \hat{W}(\mathbf{F}), \quad (4.37)$$

其中 \mathbf{Q} 为任一给定的正交阵. 不难证明, 若超弹性材料的贮能函数满足 (4.37) 式, 则由它给出的柯西应力张量满足 (4.21) 式 (见习题 6).

4.3. 贮能函数的例子

对上段给出的圣维南 - 基尔霍夫材料, 可以验证, 其贮能函数由下式给出:

$$W = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}})^2 + \mu \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}}^2. \quad (4.38)$$

为了进一步给出一些有用的贮能函数, 对各向同性材料, 先探讨其贮能函数的形式, 设该函数由

$$W = \hat{W}(\mathbf{F}) \quad (4.39)$$

给出。在 (4.19) 式中取 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$, 并注意到 (2.4) 及 (2.7) 式, 就有

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \hat{W}(\mathbf{R}^T \mathbf{F}) = \hat{W}(\mathbf{U}) = \tilde{W}(\mathbf{C}),$$

即贮能函数仅依赖于 \mathbf{C} 。这儿, 类似于 (4.11), 定义 $\tilde{W}(\mathbf{C}) = \hat{W}(\mathbf{C}^{\frac{1}{2}})$ 。再利用 (4.37) 及上式, 并注意到 (2.7) 式, 可得

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \hat{W}(\mathbf{F}\mathbf{Q}) = \tilde{W}((\mathbf{F}\mathbf{Q})^T(\mathbf{F}\mathbf{Q})) = \tilde{W}(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}),$$

即贮能函数可写为

$$W = \tilde{W}(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}), \quad (4.40)$$

其中 \mathbf{Q} 为任一给定的正交阵。因为 \mathbf{C} 为对称正定阵, 所以总存在正交阵 \mathbf{Q} , 使 $\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 其中 λ_1, λ_2 及 λ_3 是 \mathbf{C} 的主值。于是, 贮能函数又可写为

$$W = \tilde{W}(\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)). \quad (4.41)$$

这说明, W 实际上只依赖于 \mathbf{C} 的主值, 从而 W 只依赖于 \mathbf{U} 的主值 μ_1, μ_2 及 μ_3 。显然, $\mu_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}$ ($i = 1, 2, 3$)。

对不可压缩的情况，即变形满足约束条件

$$J = 1 \quad (4.42)$$

时，奥格登 (Ogden) 给出如下形式 (奥格登材料) 的贮能函数：

$$W = \sum_{i=1}^M a_i (\mu_1^{\alpha_i} + \mu_2^{\alpha_i} + \mu_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^N b_i ((\mu_2 \mu_3)^{\beta_i} + (\mu_3 \mu_1)^{\beta_i} + (\mu_1 \mu_2)^{\beta_i} - 3), \quad (4.43)$$

其中常数 $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ 。上式各项中出现的 -3 是非本质的，只是为了使当 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ 时， $W = 0$ 。实验表明，某种硫化橡胶的贮能函数可由 (4.43) 式给出，其中

$$M = 2, \quad N = 1, \quad \alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 1.3, \quad \beta_1 = 2;$$

$$a_1 = 24, \quad a_2 = 4.8 \times 10^4, \quad b_1 = 5 \times 10^2 (\text{kg/m}^2).$$

作为 (4.43) 的特例，有 新型胡克 (Neo-Hookean) 材料：

$$W = a_1 (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - 3); \quad (4.44)$$

姆内 - 里夫林 (Mooney-Rivlin) 材料：

$$W = a_1 (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - 3) + b_1 ((\mu_2 \mu_3)^2 + (\mu_3 \mu_1)^2 + (\mu_1 \mu_2)^2 - 3). \quad (4.45)$$

对可压缩的情况，变形不受 (4.42) 式的限制，奥格登建议在 (4.43) 式右端添加一项 $\Gamma(\mu_1 \mu_2 \mu_3) = \Gamma(\det \mathbf{F})$ ，其中 Γ 应满足如下条件：

$$\text{当 } \xi \rightarrow +0 \text{ 时, } \Gamma(\xi) \rightarrow +\infty. \quad (4.46)$$

这意味着对所考察的材料, 需要无穷大的能量才能将其体积压缩为零。函数 Γ 的图象, 见图 6。这样, 可压缩的奥格登材料的贮能函数由下式给出:

$$W = \sum_{i=1}^M a_i (\mu_1^{\alpha_i} + \mu_2^{\alpha_i} + \mu_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^N b_i ((\mu_2 \mu_3)^{\beta_i} + (\mu_3 \mu_1)^{\beta_i} + (\mu_1 \mu_2)^{\beta_i} - 3) + \Gamma(\mu_1 \mu_2 \mu_3). \quad (4.47)$$

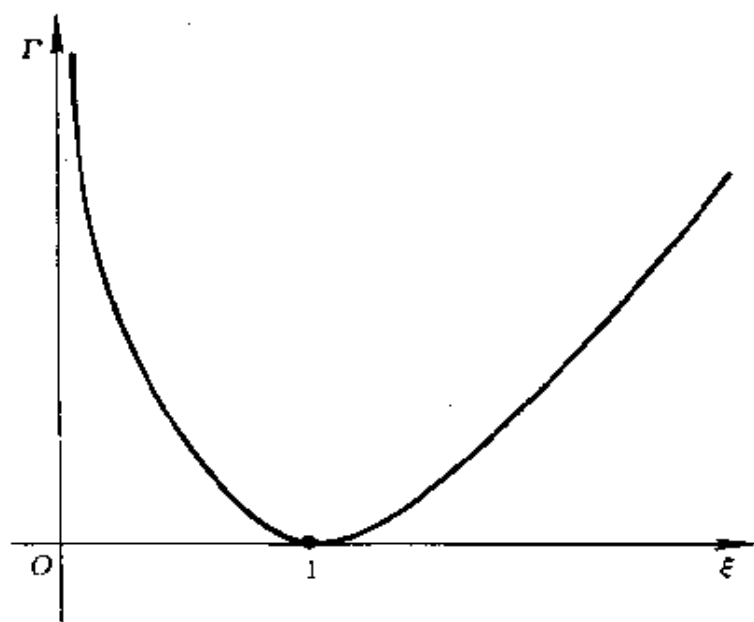


图 6

希阿雷 (Ciarlet) 与盖依蒙纳 (Geymonat) 给出一类材料的贮能函数为

$$W = a(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) + b((\mu_2 \mu_3)^2 + (\mu_3 \mu_1)^2 + (\mu_1 \mu_2)^2) + \Gamma(\mu_1 \mu_2 \mu_3), \quad (4.48)$$

其中 $a > 0$, $b > 0$, $\Gamma(\xi) = c\xi^2 - d \ln \xi + e$, 而 $c > 0$, $d > 0$, $e \in \mathbb{R}$ (见 [4], [5])。

以上的贮能函数均由张量 \mathbf{U} (或 \mathbf{C}) 的主值给出。为了能用变形梯度张量 \mathbf{F} 表示贮能函数, 只要注意

$$\begin{cases} \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}), \\ (\mu_2 \mu_3)^2 + (\mu_3 \mu_1)^2 + (\mu_1 \mu_2)^2 = \text{tr}(\text{cof}(\mathbf{F}^T \mathbf{F})), \\ \mu_1 \mu_2 \mu_3 = \det \mathbf{F}, \end{cases} \quad (4.49)$$

其中 $\text{cof} \mathbf{A}$ 表示 \mathbf{A} 的余子式矩阵, 即由 \mathbf{A} 中元素相应的代数余子式组成的矩阵。(4.49) 中第一及第三两式是显然的, 第二式的证明见习题 9。特别当 $\alpha_i = \beta_i = 2$ 时, 容易利用 (4.49) 中的诸式将 (4.47) 式的右端用 \mathbf{F} 的表达式给出。

4.4. 线性弹性 —— 广义胡克定律

假设参考构形是自然状态, 即成立 $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$, 对在参考构形附近的小变形, 可用它的线性化作为一种近似。

记

$$\varepsilon = |\nabla \mathbf{u}| = \left(\sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{1/2} \quad (4.50)$$

对于小变形, 我们总假定

$$\varepsilon \ll 1. \quad (4.51)$$

将 (4.16) 式中的 $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{C})$ 在 $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ 附近展开, 注意到

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}, \quad (4.52)$$

我们有

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) + O(\varepsilon^2), \quad (4.53)$$

其中 $\mathbf{A} = (a_{ijkl})$ 为一个四阶张量，其分量为

$$a_{ijkl} = 2 \left. \frac{\partial \bar{p}_{ij}}{\partial c_{kl}} \right|_{\mathbf{C}=\mathbf{I}}, \quad (4.54)$$

其中 \bar{p}_{ij} 及 c_{kl} 分别为 $\bar{\mathbf{P}}$ 与 \mathbf{C} 的分量；而 $\mathbf{A}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ 表示对 \mathbf{A} 与 $\mathbf{C} - \mathbf{I}$ 这两个张量作张量积后再进行缩并（见附录一），这是分量为

$$\sum_{k,l=1}^3 a_{ijkl}(c_{kl} - \delta_{kl})$$

的二阶张量。又注意到由 (2.15) 式，有

$$\frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \mathbf{E} + O(\varepsilon^2), \quad (4.55)$$

将 (4.53) 代入 (4.16) 式易得

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) + O(\varepsilon^2) \right) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{E} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (4.56)$$

其中 $\mathbf{A}\mathbf{E}$ 的意义同 $\mathbf{A}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ 。在上式中略去 $O(\varepsilon^2)$ ，即取线性近似，就得到

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{E}, \quad (4.57)$$

或写为分量的形式

$$p_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 a_{ijkl} e_{kl}, \quad (4.58)$$

其中

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

为无穷小应变张量的分量 (参见 (2.17) 式)。

(4.57) 或 (4.58) 式就是在自然状态附近小变形的情况下, 本构关系的线性近似。它是经典线性弹性理论的基础, 称为 广义胡克定律。需要指出的是, 这个广义胡克定律并不是前述一般弹性理论的特例, 而只是对小变形情形的一种近似, 因为它并不满足客观性假设。

因为 \mathbf{C} 是对称张量, 由 \mathbf{A} 的定义 (4.54) 式知

$$a_{ijkl} = a_{ijlk}.$$

如果假定材料是超弹性的, 则不难验证 (见习题 4), 还有

$$a_{ijkl} = a_{klij}.$$

这样, 四阶张量 \mathbf{A} 具有以下对称性:

$$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{ijlk} = a_{jilk}. \quad (4.59)$$

下面讨论各向同性材料的情况。注意 $\mathbf{P} = \mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}$ (见 (3.41) 式), 由定理 4.3, 容易证明

$$p_{ij} = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (4.60)$$

从而得到

$$a_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (4.61)$$

这一结果, 也可利用四阶张量 \mathbf{A} 是各向同性的性质, 由四阶各向同性张量的一般形式 (见附录一) 导出。(4.60) 式是用应变来表示应力, 通常称为 应力 - 应变关系。也可以从 (4.60) 式解出 e_{ij} , 得到如下的 应变 - 应力关系:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}p_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(p_{11} + p_{22} + p_{33})\delta_{ij}. \quad (4.62)$$

为了进一步说明拉梅常数的物理意义,我们先回顾一下最简单的胡克定律。设有一长为 l 、横截面为 S 的均匀圆柱形构件,并设其在轴向拉力 f 的作用下产生拉伸变形,伸长量为 Δl 。胡克定律指出:在相对伸长较小时,其相对伸长 $\varepsilon_a = \Delta l/l$ 与轴向应力 $\sigma = f/S$ 成正比,即成立

$$\sigma = E\varepsilon_a, \quad (4.63)$$

其中 E 只由材料决定,称为杨氏 (Young) 模量。此外,实验还表明:在一定条件下,随着拉伸荷载的增加,构件的横截面直径 d 将随之减少。记 Δd 为 d 的增加量 (负值),并记 $\varepsilon_d = \Delta d/d$,则 $-\varepsilon_d$ 与 ε_a 成正比,即成立

$$-\varepsilon_d = \nu\varepsilon_a, \quad (4.64)$$

其中 ν 称泊松比。

如果我们取上述轴向拉伸的方向为 e_1 方向,那么这个单轴拉伸应力状态的应力张量为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而由 (4.62) 式得

$$e_{11} = \frac{(\lambda + \mu)\sigma}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda\sigma}{2\mu(3\lambda + 2\mu)},$$

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

由杨氏模量与泊松比的意义,我们知道

$$\frac{\sigma}{e_{11}} = E, \quad -\frac{e_{22}}{e_{11}} = -\frac{e_{33}}{e_{11}} = \nu.$$

因此成立

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (4.65)$$

或

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.66)$$

这样, 利用杨氏模量 E 与泊松比 ν , 应变—应力关系 (4.62) 可以写为如下的形式:

$$\begin{cases} e_{11} = \frac{1}{E}(p_{11} - \nu(p_{22} + p_{33})), \\ e_{22} = \frac{1}{E}(p_{22} - \nu(p_{33} + p_{11})), \\ e_{33} = \frac{1}{E}(p_{33} - \nu(p_{11} + p_{22})), \\ e_{ij} = \frac{1}{2\mu}p_{ij}, \quad i \neq j. \end{cases} \quad (4.67)$$

这是工程中最常用的应变—应力关系。其物理意义是明显的。如 (4.67) 的第一式说明: e_1 方向的正应变是由 e_1 方向的正应力 p_{11} 产生的伸长, 减去 e_2 及 e_3 方向的正应力产生的压缩而成的。

现在考察剪应变 e_{ij} 与剪应力 p_{ij} ($i \neq j$)。以 e_{12} 与 p_{12} 为例, 将 (2.22) 代入 (4.67) 式有

$$\mu = p_{12}/\gamma, \quad (4.68)$$

其中 γ 为 e_1 及 e_2 方向的矢量微元在变形后其夹角的减少量。(4.68) 式说明: 拉梅常数 μ 表示剪应力与由它所引起的角度变化之比, 称为 剪切模量。

由 (2.23) 式, 在线性弹性的情形, 有

$$J = 1 + \text{tr} \mathbf{E},$$

从而由变形产生的体积增长率为

$$J - 1 = \text{tr} \mathbf{E}.$$

将平均正应力 $\frac{1}{3}\text{tr} \mathbf{P}$ 与由变形产生的体积增长率之比 κ 称为体积弹性模量。由 (4.62) 式可得

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (4.69)$$

从以上讨论可以看出: 对拉梅常数 λ 及 μ 应施加限制, 使得杨氏模量 E 、剪切模量 μ 、泊松比 ν 及体积弹性模量 κ 均取正值。

§5. 弹性动力学方程组及其数学结构

5.1. 线性弹性动力学方程组

在这一段里, 我们讨论线性弹性动力学方程组及其定解问题。此时, 本构关系由 (4.58) 式给出。将其代入动量守恒方程 (3.44), 并注意到由 (2.9) 式有 $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, 就得到如下的方程组

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \right) + \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.1)$$

由于 $a_{ijkl} = a_{ijlk}$ (见 (4.59) 式), 故

$$\sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}.$$

这样, (5.1) 式可以简写为下述形式:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.2)$$

(5.2) 式是一个未知函数为 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 的二阶线性偏微分方程组。要研究这个方程组的性质及其定解问题, 首先要确定它的类型。为此必须对线性弹性张量 $\mathbf{A} = (a_{ijkl})$ 进一步给出在物理上合理的假定。

在弹性体自由振动, 即外力 $\mathbf{b} = 0$ 的情况, 考察方程组 (5.2) 如下形式的平面波解:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi} e^{\sqrt{-1}(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x} + \lambda t)}, \quad (5.3)$$

其中 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 及 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ 均为实向量。对纯弹性材料的自由振动而言, 由于既没有能量的增加, 也没有能量的损失即耗散效应, 我们应期望平面波 (5.3) 在传播过程中其振幅既不增大也不衰减。这样, 在 (5.3) 右端的 λ 应保持为实值, 于是应有

$$\rho_0 \lambda^2 > 0. \quad (5.4)$$

将平面波 (5.3) 代入 $\mathbf{b} = 0$ 时的方程组 (5.2), 可得

$$\rho_0 \lambda^2 \xi_i = \sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \xi_k \eta_j \eta_l \quad (i = 1, 2, 3).$$

将上式两端乘以 ξ_i , 并对 i 从 1 到 3 求和, 有

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \xi_i \xi_k \eta_j \eta_l = \rho_0 \lambda^2 |\boldsymbol{\xi}|^2. \quad (5.5)$$

这意味着对一切非零向量 ξ 及 $\eta \in \mathbb{R}^3$, (5.5) 式的左端恒取正值。据此, 我们给出如下的定义。

定义 5.1. 若存在常数 $\alpha > 0$, 使

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \xi_i \xi_k \eta_j \eta_l \geq \alpha |\xi|^2 |\eta|^2, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^3, \quad (5.6)$$

则称四阶张量 $A = (a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件。

下面总假定线性弹性张量 $A = (a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件。对于各向同性材料, 可以证明: 强椭圆性条件 (5.6) 等价于拉梅常数 λ 及 μ 满足

$$\mu > 0, \quad \lambda + 2\mu > 0. \quad (5.7)$$

这个结论的证明作为习题留给读者。

如果张量 $A = (a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件 (5.6), 则称方程组 (5.2) 为二阶双曲型方程组 (关于这个方程组双曲性的进一步说明, 见下段对非线性弹性动力学方程组的讨论)。

如同波动方程一样, 对二阶线性双曲型方程组 (5.2) 也可以提两类定解问题: 柯西问题与混合初-边值问题。

所谓柯西问题, 就是在 $t > 0, x \in \mathbb{R}^3$ 中求方程组 (5.2) 的解 $u(t, x)$, 使其在 $t = 0$ 时满足初始条件:

$$u_i(0, x) = u_i^0(x), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(0, x) = u_i^1(x) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.8)$$

其中 $u_i^0(x)$ 与 $u_i^1(x)$ ($i = 1, 2, 3$) 均为适当光滑的已知函数。

混合初-边值问题的提法如下: 设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中的一个区域, 在 $(0, T) \times \Omega$ 中求方程组 (5.2) 的解 $u(t, x)$, 使其在 $t = 0$

时满足形如 (5.8) 的初始条件, 而在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上满足下述边界条件之一:

$$u_i|_{\partial\Omega} = h_i(t, \mathbf{x}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.9)$$

或

$$\sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j \Big|_{\partial\Omega} = \sigma_i(t, \mathbf{x}) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.10)$$

其中 $T > 0$ 为任意给定的正数, h_i 及 σ_i ($i = 1, 2, 3$) 为适当光滑的已知函数, 并在 $\{t = 0\} \times \partial\Omega$ 上满足适当的相容性条件。边界条件 (5.9) 相应于在弹性体的边界 $\partial\Omega$ 上给定位移 \mathbf{u} , 而边界条件 (5.10) 则相应于在边界 $\partial\Omega$ 上给定应力向量 \mathbf{Pn} 。在应用中还会经常碰到两种边界条件混合出现的情形: 在 $\partial\Omega$ 的一部分 Γ_1 上给定形如 (5.9) 的边界条件, 而在其另一部分 Γ_2 上给定形如 (5.10) 的边界条件。

线性弹性动力学方程组 (5.2) 是一个二阶线性双曲型方程组, 其定解问题可用常规的方法处理, 例如, 可用算子半群的方法予以讨论 (见 [9])。

特别对各向同性材料的情况, 方程组 (5.2) 的许多定解问题可简化为波动方程的相应问题予以讨论。此时, 由 (4.61) 式,

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

因此方程组 (5.2) 化为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u}. \quad (5.11)$$

这里, 为讨论简单起见, 我们设 $\rho_0 = 1$, $\mathbf{b} = 0$ 。

下面考察方程组 (5.11) 的柯西问题。由第一章引理 6.3 知, 任一向量场 \mathbf{u} 均可分解为纵场与横场的叠加:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad (5.12)$$

其中 \mathbf{v} 及 \mathbf{w} 分别为纵场与横场, 即满足条件:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \quad (5.13)$$

这一分解现在相当于将弹性波分解为一个无旋膨胀部分和一个等容部分。由第一章引理 6.2, 纵场 \mathbf{v} 一定可以表示为一个标量场 ϕ 的梯度:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi. \quad (5.14)$$

这样, 对于纵场 \mathbf{v} , 方程组 (5.11) 化为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{grad} \phi = \mu \Delta \operatorname{grad} \phi + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \Delta \phi,$$

即

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = a_1^2 \Delta \mathbf{v}, \quad (5.15)$$

其中

$$a_1^2 = \lambda + 2\mu; \quad (5.16)$$

而对于横场 \mathbf{w} , 方程组 (5.11) 则化为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = a_2^2 \Delta \mathbf{w}, \quad (5.17)$$

其中

$$a_2^2 = \mu. \quad (5.18)$$

这样, 各向同性的线性弹性动力学方程组 (5.11) 的柯西问题就可以化为波动方程 (5.15) 及 (5.17) 的相应问题来求解。

设初始条件由 (5.8) 式给出。将初始资料 u^0 及 u^1 分解为纵场与横场之和:

$$u^0 = u_L^0 + u_T^0, \quad (5.19)$$

$$u^1 = u_L^1 + u_T^1, \quad (5.20)$$

其中 u_L^0 与 u_L^1 为纵场, u_T^0 与 u_T^1 为横场。设 v 为波动方程 (5.15) 在初始条件

$$v|_{t=0} = u_L^0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = u_L^1 \quad (5.21)$$

下的解; w 为波动方程 (5.17) 在初始条件

$$w|_{t=0} = u_T^0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = u_T^1 \quad (5.22)$$

下的解, 不难验证, v 及 w 仍分别为纵场与横场。所以它们的叠加, 即 (5.12) 式, 给出柯西问题 (5.11) 及 (5.8) 的解。

在实际求解中, 将初始资料分解为纵场与横场的叠加不一定方便。利用 (5.12) 式, 可以看出, 方程组 (5.11) 还可以化为如下的四阶方程 (作为习题留给读者验证):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2 \Delta \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2^2 \Delta \right) u = 0. \quad (5.23)$$

利用齐次和非齐次波动方程柯西问题的求解公式 (例如, 见 [1], [2]), 可以由上式给出柯西问题 (5.11) 及 (5.8) 的解的表达式。

如所周知, 对波动方程 (5.15), 解于时刻 t 在空间点 x 处的值的依赖区域为以 x 为球心、半径为 $a_1 t$ 的球面 (例如, 见 [1]); 而对波动方程 (5.17), 相应的依赖区域则为以 x 为球心、半径为 $a_2 t$ 的球面。但不能据此得出方程组 (5.11) 的解的相应的依赖

区域为以 \mathbf{x} 为球心、半径分别为 $a_1 t$ 与 $a_2 t$ 的两个球面。这是因为在分解式 (5.19) 及 (5.20) 中, 右端的纵场与横场在某一点处的值, 并不仅仅由其左端向量场在该点附近的局部性态确定, 而依赖于整个空间中被分解的向量场。但是利用方程组 (5.23) 所导出的方程组 (5.11) 柯西问题解的表达式, 可以证明: 方程组 (5.11) 的解于时刻 t 在 \mathbf{x} 处的值的依赖区域为以 \mathbf{x} 为球心、半径分别为 $a_1 t$ 与 $a_2 t$ 的两个球面所围成的球壳区域 (见 [2], [8])。

下面我们说明, 线性弹性张量 $\mathbf{A} = (a_{ijkl})$ 除满足强椭圆性条件 (5.6) 外, 实际上还满足更强的条件。为了导出这一条件, 我们考察弹性体内总机械能的转化情况。任取 $G_0 \subset \Omega$, 在一定时间内作用在 G_0 上的外力及在 G_0 边界 S_0 上的应力所作的功, 一部分体现为 G_0 中动能的增加, 而另一部分则作为变形能 (或称为应变能) 在 G_0 中贮存起来。记单位体积的应变能为 W , 那么 G_0 中的总机械能为

$$\frac{1}{2} \int_{G_0} \rho_0 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{G_0} W dx.$$

在单位时间内, 作用在 G_0 上的力所作的功为 (参见 (3.42) 式)

$$\begin{aligned} & \int_{G_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx + \int_{S_0} (\mathbf{Pn}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dS_0 \\ &= \int_{G_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx + \sum_{i,j=1}^3 \int_{G_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(p_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dx. \end{aligned}$$

在得到上式右端的过程中, 我们利用了格林公式。由以上讨论, 就有

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{G_0} \rho_0 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{G_0} W dx \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^3 \int_{G_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(p_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dx + \int_{G_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx. \quad (5.24)$$

利用动量守恒方程 (3.44), 并注意应力张量 $\mathbf{P} = (p_{ij})$ 的对称性 (这由 (4.58) 与 (4.59) 式可以看出), 由上式易得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{G_0} W dx &= \sum_{i,j=1}^3 \int_{G_0} p_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_j} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \int_{G_0} p_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

再利用广义胡克定律 (4.58), 上式即可改写为

$$\frac{d}{dt} \int_{G_0} W dx = \frac{d}{dt} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \frac{1}{2} \int_{G_0} a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dx. \quad (5.25)$$

取弹性体在自然状态 (设 $t = 0$ 时为这一状态) 下应变能密度函数 $W = 0$, 对上式从 0 到 t 积分, 并注意 $G_0 \subset \Omega$ 的任意性, 即有

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} e_{ij} e_{kl}. \quad (5.26)$$

这就是线性情况下贮能函数 (即应变能密度函数) 的表达式. 从物理上说, 只要应变张量 $\mathbf{E} = (e_{ij})$ 不为零, W 总应该是正的. 所以线性弹性张量 $\mathbf{A} = (a_{ijkl})$ 的另一个合理的假设是下述稳定性条件.

定义 5.2. 若存在常数 $\tilde{\alpha} > 0$ 使

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \geq \tilde{\alpha} |\mathbf{E}|^2 \quad (5.27)$$

对一切对称矩阵 $E = (e_{ij})$ 成立, 其中 $|E|^2 = \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}^2$, 则称 $A = (a_{ijkl})$ 满足稳定性条件.

强椭圆性条件 (5.6) 与稳定性条件 (5.27) 之间有什么关系呢? 下面证明, 由稳定性条件可以推出强椭圆性条件. 事实上, 取

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\xi_i \eta_j + \xi_j \eta_i) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

注意到 A 的对称性 (4.59), 由稳定性条件 (5.27) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \xi_i \xi_k \eta_j \eta_l &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \\ &\geq \frac{\tilde{\alpha}}{4} \sum_{i,j=1}^3 (\xi_i \eta_j + \xi_j \eta_i)^2 \geq \frac{\tilde{\alpha}}{2} |\xi|^2 |\eta|^2. \end{aligned}$$

这就是强椭圆性条件. 但反之不然. 这可由下面对各向同性材料的讨论看出. 对于各向同性材料, 可以证明 (见习题 8): 稳定性条件 (5.27) 等价于要求拉梅常数 λ 及 μ 满足

$$\mu > 0, \quad \kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0. \quad (5.28)$$

(比较 (5.7) 式!)

在下面关于稳态问题的讨论中, 稳定性条件将起着重要的作用.

5.2. 非线性弹性动力学方程组

假定已知弹性材料的本构关系 (4.2), 则由彼奥拉应力张量的定义 (3.39) 有

$$P(x) = \hat{P}(F(x)), \quad (5.29)$$

其中 $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}$ 。将 (5.29) 式代入动量守恒方程 (3.44), 就得到如下非线性弹性动力学的基本方程组:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl}(\nabla \mathbf{y}) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.30)$$

其中

$$a_{ijkl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial p_{ij}}{\partial f_{kl}}. \quad (5.31)$$

四阶张量 $\mathbf{A} = (a_{ijkl}(\mathbf{F}))$ 称为弹性张量。显然, 我们也可以将 (5.30) 式写为关于位移向量 $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ 的方程组。

如果材料是超弹性的, 由 (4.18) 与 (5.31) 式有

$$a_{ijkl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial f_{ij} \partial f_{kl}}, \quad (5.32)$$

其中 \hat{W} 为贮能函数。此时弹性张量 \mathbf{A} 显然具有对称性:

$$a_{ijkl}(\mathbf{F}) = a_{klij}(\mathbf{F}). \quad (5.33)$$

在对弹性动力学方程组及对弹性静力学 (即稳态情况, 见下节) 方程组的讨论中, 基本问题之一是如何对响应函数或弹性张量给出在物理上合理的假设, 使得能对这些方程组在数学上进行有效的分析。

首先我们假定 \mathbf{A} 满足如下强椭圆性条件 (其合理性下面还会论及)。

定义 5.3. 若弹性张量 $\mathbf{A} = (a_{ijkl}(\mathbf{F}))$ 满足以下要求:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl}(\mathbf{F}) \xi_i \xi_k \eta_j \eta_l > 0, \\ \forall \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \det \mathbf{F} > 0, \quad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad (5.34)$$

则称它满足强椭圆性条件, 其中 $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ 表示实的 3×3 阵的全体.

若弹性张量 A 满足强椭圆性条件, 我们称方程组 (5.30) 为双曲型的. 这样, (5.30) 就是一个二阶拟线性双曲型方程组. 其定解问题的提法与前述的线性情况类似, 即可以提柯西 (初值) 问题与混合初一边值问题. 其混合初一边值问题中边界条件的典型提法和线性情形类似, 可以是

$$y|_{\partial\Omega} = h(t, x) \quad (5.35)$$

或

$$Pn|_{\partial\Omega} = \sigma(t, x) \quad (5.36)$$

或如下的混合情况

$$y|_{\Gamma_1} = h(t, x), \quad Pn|_{\Gamma_2} = \sigma(t, x), \quad (5.37)$$

其中 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$. 这里 h 及 σ 为 t, x 的已知的适当光滑的向量函数, 但有时 σ 也会依赖于未知函数 y , 甚至其切向偏导数 (见 §6, 例 6.1).

对非线性弹性动力学方程组定解问题的研究仍很不充分. 目前的主要结果基本上都是关于解的局部存在性的, 即解在初始时刻附近的存在性. 对整体解, 即对时间 t 在大范围内的解 (无论是经典解还是弱解) 的存在性的研究, 除少数特殊情况外, 还基本上没有什么结果.

5.3. 非线性弹性动力学方程组的守恒定律形式

在讨论弹性动力学方程组时, 将其写为守恒定律形式的一阶偏微分方程组有时是很方便的, 特别是在讨论激波等重要问题时更是如此.

作为一种可能的选择,可采取如下办法将 (5.30) 化为守恒定律形式的一阶方程组。注意到 (2.3) 式,可将 (5.30) 式写为如下的等价形式:

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial t} - \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad (5.38)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij}(\mathbf{F}) - \rho_0 b_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.39)$$

令 $U = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{33}, v_1, v_2, v_3)^T$, 并为简单计取 $\rho_0 = 1$, $\mathbf{b} = 0$, 方程组 (5.38) — (5.39) 就可写为如下守恒定律形式的一阶拟线性方程组:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} V_j(U) = 0, \quad (5.40)$$

其中 $V_1 = -(v_1, 0, 0, v_2, 0, 0, v_3, 0, 0, p_{11}, p_{21}, p_{31})^T$, $V_2 = -(0, v_1, 0, 0, v_2, 0, 0, v_3, 0, p_{12}, p_{22}, p_{32})^T$, $V_3 = -(0, 0, v_1, 0, 0, v_2, 0, 0, v_3, p_{13}, p_{23}, p_{33})^T$.

下面我们来讨论方程组 (5.40) 的类型。为此将其写为如下形式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 B_j(U) \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \quad (5.41)$$

其中

$$B_j(U) = \nabla_U V_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad (5.42)$$

这里 ∇_U 表示对 U 求梯度, 故 B_j 为 12×12 阵。

定义 5.4. 如果对所考察区域中的 U 值及对任意给定的 $\eta \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, 矩阵

$$\Lambda(U, \eta) = \sum_{j=1}^3 \eta_j B_j(U) \quad (5.43)$$

有 $n(=12)$ 个实特征值

$$\lambda_1(U, \boldsymbol{\eta}), \dots, \lambda_n(U, \boldsymbol{\eta}),$$

并且相应于这些特征值有 n 个线性无关的特征向量, 则称方程组 (5.41) 为双曲型方程组。

下面我们证明: 如果弹性张量 $\mathbf{A} = (a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件 (5.34), 则一阶方程组 (5.41) 在定义 5.4 的意义下是双曲型的。为此, 首先考察 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的特征值。由 B_j 及 V_j 的定义, 不难看出

$$B_j(U) = \begin{pmatrix} 0 & -E_j \\ -A_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (5.44)$$

其中

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j11} & a_{1j12} & \cdots & a_{1j33} \\ a_{2j11} & a_{2j12} & \cdots & a_{2j33} \\ a_{3j11} & a_{3j12} & \cdots & a_{3j33} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5.45)$$

为 3×9 阵, 而

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

所以

$$\Lambda(U, \boldsymbol{\eta}) = - \begin{pmatrix} 0 & \sum_{j=1}^3 \eta_j E_j \\ \sum_{j=1}^3 \eta_j A_j & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

利用行列式的运算法则, 不难验证

$$\det(\Lambda(U, \boldsymbol{\eta}) - \lambda I) = \lambda^6 \det \left(\lambda^2 \delta_{ik} - \sum_{j,l=1}^3 a_{ijkl} \eta_j \eta_l \right), \quad (5.48)$$

其中 I 为单位阵, 而 δ_{ik} 为克罗内克记号. 这说明 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 有一个 6 重零特征值. 此外, 由 (5.33) 式及强椭圆性条件 (5.34) 可知,

3×3 阵 $\left(\sum_{j,k=1}^3 a_{ijkl} \eta_j \eta_l \right)$ 是对称正定的, 所以它有 3 个正特征值. 因此, $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的另外 6 个特征值分别为 $\left(\sum_{j,l=1}^3 a_{ijkl} \eta_j \eta_l \right)$ 特征值的平方根.

现在考察 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的特征向量.

引理 5.1. 对任何给定的 $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, 矩阵 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 相应于零特征值有 6 个线性无关的特征向量.

证明 设 $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{12})^T$ 为 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 相应于零特征值的特征向量. 由 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的前 9 行, 立即得到

$$\eta_i \omega_{10} = \eta_i \omega_{11} = \eta_i \omega_{12} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

因为 η_1, η_2, η_3 不同时为零, 上式给出

$$\omega_{10} = \omega_{11} = \omega_{12} = 0.$$

这样, $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{12})$ 最多只有 9 个自由度. 由 $\Lambda(U, \eta)$ 的表达式 (5.47) 可见, 为证明引理的结论, 只要说明 $\Lambda(U, \eta)$ 的最后三行是线性无关的. 设存在 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 使分别用 ξ_1, ξ_2, ξ_3 乘 $\Lambda(U, \eta)$ 的第 10, 11, 12 行并相加后得一零向量, 即成立

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij11} \xi_i \eta_j = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij12} \xi_i \eta_j = \dots = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij33} \xi_i \eta_j = 0.$$

将上式左起第 1 式乘以 $\xi_1 \eta_1$, 第 2 式乘以 $\xi_1 \eta_2, \dots$, 第 9 式乘以 $\xi_3 \eta_3$, 然后相加, 即得

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \xi_i \xi_k \eta_j \eta_l = 0.$$

利用强椭圆性条件 (5.34), 由上式立即得到 $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. 引理证毕.

引理 5.2. 设材料是超弹性的, 那么对任何给定的 $\eta \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, 矩阵 $\Lambda(U, \eta)$ 相应于非零特征值有 6 个线性无关的特征向量.

证明 设 $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{12})^T$ 为相应于矩阵 $\Lambda(U, \eta)$ 的非零特征值 λ 的特征向量. 由 $\Lambda(U, \eta)$ 的前 9 行, 可得

$$\begin{cases} \lambda \omega_1 + \eta_1 \omega_{10} = \lambda \omega_2 + \eta_2 \omega_{10} = \lambda \omega_3 + \eta_3 \omega_{10} = 0, \\ \lambda \omega_4 + \eta_1 \omega_{11} = \lambda \omega_5 + \eta_2 \omega_{11} = \lambda \omega_6 + \eta_3 \omega_{11} = 0, \\ \lambda \omega_7 + \eta_1 \omega_{12} = \lambda \omega_8 + \eta_2 \omega_{12} = \lambda \omega_9 + \eta_3 \omega_{12} = 0. \end{cases} \quad (5.49)$$

注意 $\lambda \neq 0$, 记

$$\alpha_i = -\eta_i / \lambda \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.50)$$

$$\xi_1 = \omega_{10}, \quad \xi_2 = \omega_{11}, \quad \xi_3 = \omega_{12}, \quad (5.51)$$

由 (5.49) 式就有

的 $(\mathbf{r}, \mathbf{U}) \in \mathbb{U}$

$$\text{应如即} \quad \begin{cases} \omega_1 = \alpha_1 \xi_1, & \omega_2 = \alpha_2 \xi_1, & \omega_3 = \alpha_3 \xi_1, \\ \omega_4 = \alpha_1 \xi_2, & \omega_5 = \alpha_2 \xi_2, & \omega_6 = \alpha_3 \xi_2, \\ \omega_7 = \alpha_1 \xi_3, & \omega_8 = \alpha_2 \xi_3, & \omega_9 = \alpha_3 \xi_3. \end{cases} \quad (5.52)$$

注意到 (5.50)—(5.52) 诸式, 相应于 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的第 10, 11, 12 行, 特征向量应满足的关系式分别为

$$\sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \eta_j \eta_l \xi_k - \lambda^2 \xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.53)$$

这说明 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ 为矩阵 $\left(\sum_{j,l=1}^3 a_{ijkl} \eta_j \eta_l \right)$ 相应于特征值

λ^2 的特征向量. 反之, 若 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ 为矩阵 $\left(\sum_{j,l=1}^3 a_{ijkl} \eta_j \eta_l \right)$

相应于特征值 $\lambda^2 > 0$ 的特征向量, 那么由 (5.51)—(5.52) 式给出的 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{12})^T$ 就是矩阵 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的相应于特

征值 λ 的特征向量. 于是, 对于矩阵 $\left(\sum_{j,l=1}^3 a_{ijkl} \eta_j \eta_l \right)$ 的每一个

(相应于特征值 $\lambda^2 > 0$ 的) 特征向量, 我们得到矩阵 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 的两个 (分别相应于特征值 λ 与 $-\lambda$ 的) 特征向量. 如前所述,

当材料为超弹性的 (此时 (5.33) 式成立), $\left(\sum_{j,l=1}^3 a_{ijkl} \eta_j \eta_l \right)$ 为对

称正定阵, 故有三个相互正交的特征向量. 这样, 就得到相应于 $\Lambda(U, \boldsymbol{\eta})$ 非零特征值的 6 个特征向量. 不难验证, 它们是线性无关的. 引理证毕.

由以上讨论, 我们有

定理 5.1. 设材料为超弹性的, 且设弹性张量 $\mathbf{A} = (a_{ijkl})$

满足强椭圆性条件, 那么一阶拟线性偏微分方程组 (5.38) — (5.39) 在定义 5.4 的意义下是双曲型的.

在讨论纯弹性变形时, 我们不考虑热效应, 并认为一切变形都是在等温的条件下完成的. 但是如果要研究方程组 (5.38) — (5.39) 的间断解, 由于在解的间断面附近, 应力与应变要发生急剧的变化, 这时就不能忽略热效应的影响. 由于热效应必然伴随着机械能的耗散, 过程不再可逆, 弹性体的物理熵要增加. 所以在研究一阶守恒定律形式的方程组 (5.38) — (5.39) 的间断解时, 还要补充一个反映熵增加的不等式, 称为熵不等式. 熵不等式一般取为如下形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(U) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} q_j(U) \leq 0, \quad (5.54)$$

其中 η 称为熵, 而 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ 则称为熵流向量 (注意: 这里定义的熵及熵流向量与真正的物理熵及熵流向量相差一个负号).

下面讨论如何给出熵及熵流向量. 任取区域 $G_0 \subset \Omega$, G_0 中的总机械能为

$$\int_{G_0} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \hat{W}(\mathbf{F}) \right) dx,$$

其中 $\hat{W}(\mathbf{F})$ 为贮能函数. G_0 的边界 S_0 上的应力在单位时间内对 G_0 所作的功为

$$\int_{S_0} (\mathbf{P}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS_0 = \int_{G_0} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ij} v_i) dx.$$

这里我们利用了格林公式. 考虑到机械能的耗散效应, 应有

$$\frac{d}{dt} \int_{G_0} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \hat{W}(\mathbf{F}) \right) dx - \int_{G_0} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ij} v_i) dx \leq 0.$$

由于上式对任意 $G_0 \subset \Omega$ 成立, 所以有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \hat{W}(\mathbf{F}) \right) - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ij} v_i) \leq 0. \quad (5.55)$$

因此, η 与 \mathbf{q} 的一个自然的取法为

$$\eta = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \hat{W}(\mathbf{F}), \quad (5.56)$$

$$q_j = - \sum_{i=1}^3 p_{ij} v_i \quad (j = 1, 2, 3). \quad (5.57)$$

但由于 $\hat{W}(\mathbf{F})$ 一般不是 \mathbf{F} 的凸函数 (见本章 §6), 所以由 (5.56) 式给出的通常不是凸熵.

5.4. 化弹性动力学方程组为一阶对称双曲组

一个重要而有趣的问题是, 能否将非线性弹性动力学方程组 (5.30) 化为一个一阶拟线性对称双曲组? 下面就一类特殊情况进行讨论.

设一个各向同性的弹性体的变形发生在参考构形附近, 而参考构形为弹性体的自然状态. 由定理 4.3 与 (5.31) 式不难得到 (参见 (4.61) 式)

$$a_{ijkl}(\mathbf{I}) = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (5.58)$$

我们知道, $(a_{ijkl}(\mathbf{I}))$ 满足强椭圆性假设等价于 (5.7) 式, 并进而假定

$$\lambda + 2\mu > \mu > 0. \quad (5.59)$$

由于贮能函数 $\hat{W}(\mathbf{F})$ 一般不是 \mathbf{F} 的凸函数 (见本章 §6), 弹性张量 $\mathbf{A} = (a_{ijkl})$ 一般来说不是正定的. 但在我们下面的化法

中, 却要求某种正定性. 为此, 如 [8] 中所作的那样, 代替 (a_{ijkl}) , 引入张量

$$\tilde{a}_{ijkl}(\mathbf{F}) = a_{ijkl}(\mathbf{F}) + \mu(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (5.60)$$

张量 (\tilde{a}_{ijkl}) 仍具有如下的对称性:

$$\tilde{a}_{ijkl}(\mathbf{F}) = \tilde{a}_{klij}(\mathbf{F}). \quad (5.61)$$

又由于

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k,l=1}^3 (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_k \partial x_i} = 0, \end{aligned} \quad (5.62)$$

易知方程组 (5.39) 可以写为 (注意已设 $\rho_0 = 1, \mathbf{b} = 0$):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \sum_{j,k,l=1}^3 \tilde{a}_{ijkl}(\mathbf{F}) \frac{\partial}{\partial x_j} f_{kl} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.63)$$

此外, 当 $|\nabla u|$ 充分小时, 张量 $(\tilde{a}_{ijkl}(\mathbf{F}))$ 是正定的, 即对任意给定的 $\zeta = (\zeta_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \setminus \{0\}$, 成立

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 \tilde{a}_{ijkl}(\mathbf{F}) \zeta_{ij} \zeta_{kl} > 0. \quad (5.64)$$

事实上, 由 (5.58)—(5.60) 式, 我们有

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 \tilde{a}_{ijkl}(\mathbf{I}) \zeta_{ij} \zeta_{kl} = (\lambda + \mu)(\text{tr} \zeta)^2 + \mu |\zeta|^2 > 0, \quad (5.65)$$

其中 $\text{tr} \zeta = \sum_{i=1}^3 \zeta_{ii}$ 而 $|\zeta|^2 = \sum_{i,j=1}^3 |\zeta_{ij}|^2$. 由此立即得到 (5.64) 式在 $|\nabla \mathbf{u}|$ 充分小时成立.

将张量 $(\tilde{a}_{ijkl}(\mathbf{F}))$ 视为一对称正定的 9×9 阵 \tilde{A} , 以 \tilde{A} 左乘方程组 (5.38), 则得如下方程组:

$$\sum_{p,q=1}^3 \tilde{a}_{klpq}(\mathbf{F}) \frac{\partial f_{pq}}{\partial t} - \sum_{p,q=1}^3 \tilde{a}_{klpq}(\mathbf{F}) \frac{\partial v_p}{\partial x_q} = 0$$

$$(k, l = 1, 2, 3). \quad (5.66)$$

由 \tilde{A} 的正定性知方程组 (5.66) 与 (5.38) 是等价的.

将方程组 (5.66) 与 (5.63) 联立, 并写为如下形式

$$K_0 \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 K_j(U) \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \quad (5.67)$$

其中

$$K_0 = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad K_j = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{A}_j^T \\ -\tilde{A}_j & 0 \end{pmatrix}$$

$$(j = 1, 2, 3), \quad (5.68)$$

而 $I_{3 \times 3}$ 为 3×3 单位阵, \tilde{A}_j 为 3×9 阵, 由将 (5.45) 式给出的 A_j 中的元素换为 \tilde{A} 中的相应元素而得. 显然, K_0 为对称正定阵, K_j ($j = 1, 2, 3$) 为对称阵. 因此, (5.67) 为一个一阶拟线性对称双曲组. 这样, 我们就证明了: 在假设 (5.59) 下, 变形在自然状态附近的各向同性材料的非线性弹性动力学方程组, 一定可以化为一阶对称双曲组. 对线性弹性动力学方程组, 上述结论当然也成立.

我们虽然已将方程组 (5.38)–(5.39) 化为一阶拟线性对称双曲组 (5.66) 及 (5.63). 但遗憾的是这个新的方程组已不具有

守恒定律的形式。而且,即使它可以重新被写为守恒定律形式,由于方程组 (5.66) 是以 9×9 阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ijkl}(\mathbf{F}))$ 左乘方程组 (5.38) 得到的,所以不能指望它在强间断面上与原方程组 (5.38) 满足相同的兰金-雨果尼奥条件(对于高维的一阶拟线性守恒定律形式的双曲组,在解的强间断面上,仍成立类似于第二章 §4 中所论及的兰金-雨果尼奥条件)。也就是说,这样得到的方程组即使可以写为守恒定律的形式,也只在经典解的范围内等价于原方程组。但对于本段所讨论的情况,在本质上不改变原守恒定律的条件下,利用引进新未知函数的方法,仍可将方程组化为在守恒定律形式下的一阶拟线性对称双曲组。

代替 (5.56) 式,取

$$\eta = \hat{W}(\mathbf{F}) + \frac{\mu}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^3 (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk}) f_{ij} f_{kl} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2, \quad (5.69)$$

其中 $\hat{W}(\mathbf{F})$ 为材料的贮能函数。容易看出,对由 (5.56) 式给出的熵函数作上述修改后,由 (5.69) 式给的 η 关于 $U = (f_{11}, \dots, f_{33}, v_1, v_2, v_3)^T$ 分量的二阶偏导数形成的矩阵 $\frac{\partial^2 \eta}{\partial U^2}$ 恰为 (5.68) 式中的正定阵 K_0 :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial U^2} = K_0 > 0. \quad (5.70)$$

这说明由 (5.69) 给出的 η 为凸熵。

下面我们说明,由 (5.69) 式给出的 η 满足如下的附加守恒定律:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = 0, \quad (5.71)$$

其中

$$q_j = - \sum_{i=1}^3 p_{ij} v_i - \mu \sum_{i,k,l=1}^3 (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}) v_i f_{kl} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (5.72)$$

事实上,由上一段的讨论可以看出,在经典解的范围内(这时没有机械能的耗散),若 η 与 q 分别取由 (5.56) 与 (5.57) 给出的形式,则守恒定律 (5.71) 成立。这样,为验证当 η 与 q 由 (5.69) 及 (5.72) 式给出时,守恒定律 (5.71) 仍成立,只需证明

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j,k,l=1}^3 (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}) f_{ij} f_{kl} \\ & - 2 \sum_{i,j,k,l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} ((\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}) v_i f_{kl}) = 0. \end{aligned} \quad (5.73)$$

利用方程组 (5.38) 以及 (5.62) 式容易验证上式的正确性,其具体的推导过程留给读者,此处从略。

这样,由第二章定理 1.1 知,守恒定律形式的方程组 (5.38)——(5.39) 对新未知函数 $Z = \frac{\partial \eta}{\partial U} = (\frac{\partial \eta}{\partial f_{11}}, \dots, \frac{\partial \eta}{\partial v_3})^T$ 而言为拟线性一阶对称双曲组。

5.5. 一维非线性弹性动力学方程

这一段我们讨论两种可以化为一维问题来进行讨论的情况。

1° 各向同性材料的纯轴向变形

假定材料只在 e_1 方向产生变形,而且该变形只依赖于 t 与 x_1 ,而与 x_2 及 x_3 无关。这种纯轴向变形由下式给出

$$y_1 = x_1 + u_1(t, x_1), \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3. \quad (5.74)$$

这时显然有

$$F = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

而左柯西 - 格林应变张量

$$B = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这样, 由定理 4.1 知, 柯西应力张量 T 必有如下形式

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \end{pmatrix}.$$

而彼奥拉应力张量则为

$$P = \begin{pmatrix} t_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) t_{22} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) t_{33} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \end{pmatrix}.$$

由 P 的上述表达式可见, 对这种变形, 弹性张量 $A = (a_{ijkl})$ 的分量除 a_{1111} , a_{2211} 及 a_{3311} 外均为零。而强椭圆性条件 (5.34) 则意味着上述三个分量均为正, 特别有

$$a_{1111} = \frac{\partial t_{11}}{\partial \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)} > 0. \quad (5.75)$$

这样, 动量守恒方程 (3.44) 中的第一个方程化为

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} t_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \rho_0 b_1. \quad (5.76)$$

因此, 这种纯轴向变形就化为由 (5.76) 式描述的一维问题; 而 (5.75) 式说明, 方程 (5.76) 是一个一维拟线性波动方程。

需要说明的是, 由 (5.74) 式给出的这种变形在实际上是很难实现的。对真正的弹性杆而言, 由轴向拉伸与压缩所产生的变形并不能由它来描述。此外, 对不可压缩材料, 这种变形是根本不可能的。

2° 各向同性材料的纯剪切变形

这种变形也只发生在 e_1 方向, 但该变形只依赖于 t 与 x_2 (或 x_3), 即有如下形式:

$$y_1 = x_1 + u_1(t, x_2), \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3. \quad (5.77)$$

此时显然有

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\gamma = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, 其相应的左柯西-格林应变张量为

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

而 B 的三个主不变量则分别为

$$I_1 = 3 + \gamma^2, \quad I_2 = 3 + \gamma^2, \quad I_3 = 1.$$

注意

$$B^2 = \begin{pmatrix} (1 + \gamma^2)^2 + \gamma^2 & \gamma(1 + \gamma^2) + \gamma & 0 \\ \gamma(1 + \gamma^2) + \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由定理 4.1 知,

$$t_{13} = t_{23} = 0, \quad (5.78)$$

$$t_{12} = \gamma\mu(\gamma^2), \quad (5.79)$$

其中 $\mu(\gamma^2)$ 为 γ^2 的函数, 称为 广义剪切模量. 此时易知, 彼奥拉应力张量为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} t_{11} - \gamma t_{12} & t_{12} & 0 \\ t_{21} - \gamma t_{22} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}.$$

因为应力张量 \mathbf{P} 只依赖于 $\gamma = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, 所以弹性张量 $\mathbf{A} = (a_{ijkl})$ 的分量中, 除 a_{1112} , a_{1212} , a_{2112} , a_{2212} 及 a_{3312} 外均为零. 取 $\xi = (1, 0, 0)$, $\eta = (0, 1, 0)$, 由强椭圆性条件 (5.34) 可得

$$a_{1212} = \frac{dt_{12}(\gamma)}{d\gamma} > 0. \quad (5.80)$$

在这种变形下, 动量守恒方程 (3.44) 中的第一个方程化为

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} t_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \rho_0 b_1. \quad (5.81)$$

这样, 纯剪切变形问题就化为一维问题; 而 (5.80) 说明方程 (5.81) 是一个一维拟线性波动方程.

§6. 弹性静力学方程组的定解问题

本节讨论稳态问题, 即讨论弹性体达到平衡状态时的情况. 此时, 弹性体的变形不再依赖于时间 t , 也就是说 \mathbf{y} 与 \mathbf{u} 只与 \mathbf{x} 有关.

6.1. 线性弹性静力学方程组

对于线性情况的平衡状态, 弹性力学的基本方程组 (5.2) 化为

$$-\sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.1)$$

其中 b 自然也只是 x 的函数。假定弹性张量 $A = (a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件 (5.6), 方程组 (6.1) 就是一个二阶线性椭圆型方程组。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界区域, 则方程组 (6.1) 的典型定解问题是: 在 Ω 中求该方程组的解 u , 使其在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上满足形如 (5.9) 或 (5.10) 的边界条件。当然, 此时 h 与 σ 均不依赖于 t 。

对于椭圆型方程组, 即使对具边界条件 (5.9) 的最常见的定解问题, 仅仅使方程组的类型保持椭圆性一般并不足以保证解的唯一性。这只要注意到椭圆型方程 (组) 相应的特征值问题, 就不难看出这一点。但从力学上说, 如果弹性体变形前为自然状态, 那么在无外力、且弹性体边界上的点保持不变 (即位移为零) 的条件下, 自然状态应是唯一的平衡状态。因此, 线性边值问题 (6.1) 及 (5.9) 的解应该是唯一的。这一点恰可由稳定性条件 (5.27) 予以保证。

设 $A = (a_{ijkl})$ 满足稳定性条件 (5.27), 那么不难验证

$$\begin{aligned} B(u, u) &\stackrel{d}{=} \int_{\Omega} \sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j,k,l=1}^3 a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dx \\ &\geq \tilde{\alpha} \int_{\Omega} |E|^2 dx. \end{aligned} \quad (6.2)$$

进而我们有

定理 6.1 (柯恩 (Korn) 不等式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界区域, 则存在常数 $C_0 > 0$ 使得对一切 $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$, 成立

$$\int_{\Omega} |\mathbf{E}|^2 dx \geq C_0 \|\mathbf{u}\|_{(H^1(\Omega))^3}^2, \quad (6.3)$$

其中 $H_0^1(\Omega)$ 及 $H^1(\Omega)$ 均为索伯列夫空间 (见 [4]).

不熟悉索伯列夫空间的读者可将定理 6.1 中的 \mathbf{u} 理解为在边界 $\partial\Omega$ 上取零值的连续可微的向量函数. 在 (6.3) 式中,

$$\|\mathbf{u}\|_{(H^1(\Omega))^3}^2 = \|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

定理 6.1 的证明 只需对在 $\partial\Omega$ 上取零值且充分光滑的向量函数 \mathbf{u} 证明 (6.3) 式. 记

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + r_{ij}, \quad (6.4)$$

其中

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

于是有

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = e_{ij}^2 - r_{ij}^2. \quad (6.5)$$

利用格林公式, 并注意 $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$, 有

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dx. \quad (6.6)$$

这样, 由 (6.5) 及 (6.6) 式, 得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} r_{ij}^2 dx &= \int_{\Omega} |\mathbf{E}|^2 dx - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\mathbf{E}|^2 dx.\end{aligned}\quad (6.7)$$

由 (6.4) 式又有

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 \leq 2(e_{ij}^2 + r_{ij}^2). \quad (6.8)$$

由以上两式立即得到

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx \leq 4 \int_{\Omega} |\mathbf{E}|^2 dx. \quad (6.9)$$

(6.9) 式结合熟知的 弗利德里克斯 (K. O. Friedrichs) 不等式 (见 [1]):

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx \leq C_1 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx,$$

即给出 (6.3) 式. 上式中 C_1 是一个仅依赖于区域 Ω 的正常数. 定理 6.1 证毕.

注 6.1. 在一般情况下, 柯恩不等式有如下形式:

$$\int_{\Omega} |\mathbf{E}|^2 dx + \|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \geq C_0 \|\mathbf{u}\|_{(H^1(\Omega))^3}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3 \quad (6.10)$$

(见 [4]).

由 (6.2) 式与柯恩不等式 (6.3), 我们有

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha_0 \|\mathbf{u}\|_{(H^1(\Omega))^3}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3, \quad (6.11)$$

其中 $\alpha_0 > 0$ 为一正常数。

由不等式 (6.11) 立即可得边值问题 (6.1) 及 (5.9) 的解的唯一性。为此, 只要证明相应的齐次定解问题 (即 $\mathbf{b} \equiv 0$ 及 $\mathbf{h} \equiv 0$ 的情况) 只有平凡解 $\mathbf{u} \equiv 0$ 。以 u_i 乘方程 (6.1) 的两端, 对 i 从 1 到 3 求和, 然后在 Ω 上积分, 可得

$$-\sum_{i,j,k,l=1}^3 \int_{\Omega} a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} u_i dx = 0.$$

对上式左端利用格林公式, 就得到

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

这样, 再利用 (6.11) 式, 就立即得到 $\mathbf{u} \equiv 0$ 。这就证明了定解问题 (6.1) 及 (5.9) 的解的唯一性。

(6.11) 式实际上是关于椭圆定解问题的哥尔丁 (L.Gårding) 不等式的一个较强的形式。借助于这一不等式, 利用泛函分析中的拉克斯 - 米尔格兰 (Lax-Milgram) 表示定理还可以证明上述定解问题的弱解的存在性。然后可以进一步通过证明解的正则性而得到经典解。这些内容读者可以在有关近代偏微分方程的教材中找到, 这里就不详细讨论了。

6.2. 非线性弹性静力学方程组

对于弹性体在有限变形下的平衡状态, 方程组 (5.30) 化为

$$-\sum_{j,k,l=1}^3 a_{ijkl} (\nabla \mathbf{y}) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_l} = \rho_0 b_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.12)$$

其中 \mathbf{b} 不依赖于 t 。在弹性张量 $\mathbf{A} = (a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件 (5.34) 的假定下, 方程组 (6.12) 是一个二阶拟线性椭圆型方程组。其定解问题的提法是: 在一有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中求方程组

(6.12) 的解, 使其在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上满足形如 (5.35)、(5.36) 或 (5.37) 的边界条件。当然, 在稳态情况下, h 和 σ 均与时间 t 无关, 但 σ 可能依赖于未知函数 y , 甚至其切向偏导数。

例 6.1. 设弹性体的边界受压力的作用, 而压力随空间不同点而变 (例如静水压力即如此)。记此压力为 $\pi(y)$ 。在这种情况下, 在弹性体的边界上应满足的边界条件为

$$T\nu = -\pi(y)\nu, \quad \text{在 } \partial\Omega_1 \text{ 上}, \quad (6.13)$$

其中 $\partial\Omega_1$ 表示弹性体变形后在空间所占区域 Ω_1 的边界。由于我们的讨论应在区域 Ω 中进行, 所以必须将边界条件 (6.13) 化到区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上去。由引理 3.2 及 (3.39) 式可以看出, (6.13) 式可以化为

$$Pn = -J\pi(y)F^{-T}n, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \quad (6.14)$$

不难验证, JF^{-T} 在 $\partial\Omega$ 上只依赖于 y 的切向偏导数。实际上, $JF^{-T} = \text{cof } F$ 为 F 的余子式矩阵, 故 $JF^{-T}n$ 的第一个分量为

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

经过计算可以看出, 它只含有对 y_2 及 y_3 的切向偏导数。对第 2 及第 3 个分量可以类似地验证。这样, 边界条件 (6.14) 可写为如下形式:

$$Pn = \sigma(y, \nabla_\tau y), \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (6.15)$$

其中 ∇_τ 表示切向梯度。

下面考察非线性弹性静力学方程组定解问题的解的存在性与唯一性。物理上直观的例子说明 (见例 6.2), 三维弹性静力学问题唯一性不成立, 这就是说, 一个合格的数学模型必须容许有几个、甚至无穷多个解。

例 6.2. 考察如下的纯位移问题: 设参考构形 Ω 为两个同心球所围成的球壳, 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上给定边界条件

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \quad (6.16)$$

在体积力 $\mathbf{b} \equiv 0$ 时, 显然 $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ 是方程组 (6.12) 满足上述边界条件的一个解。但若保持外面的球面不动, 而将内侧球面绕一个通过球心的轴旋转一个 2π 的整数倍角度, 这样形成的变形也是上述问题的解 (见图 7)。这样就得到了定解问题的无穷多个解。

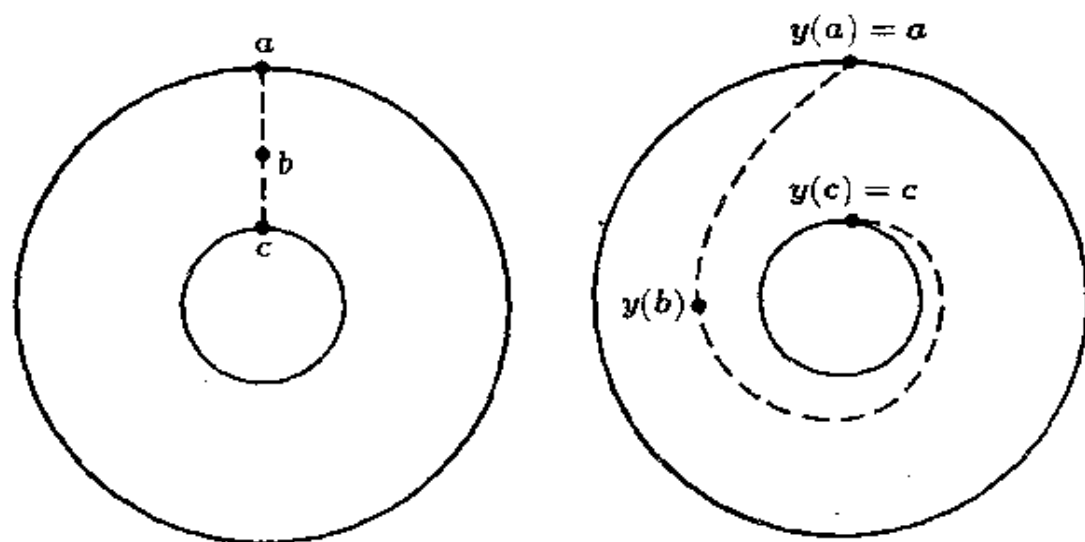


图 7

至于解的存在性的研究,也相当困难。相对来说,对局部问题(即变形在某已知变形的邻近)的讨论比较容易进行。但更有意义的是对大变形这种非局部问题的探讨。研究这类问题的方法一般来说有:凸性与单调算子方法;延拓方法;拓扑方法与拓扑度理论;变分方法等。其中变分方法更为引人注目。下面我们对利用变分方法来求解时所可能遇到的困难,以及由此引出的贮能函数多凸性的概念作一简单介绍。

以方程组(6.12)在混合边界条件(5.37)下的定解问题为例来进行说明。假定 \mathbf{h} 及 $\boldsymbol{\sigma}$ 都只是 \mathbf{x} 的函数,而材料是超弹性的。定义如下的势能泛函:

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} \hat{W}(\nabla \mathbf{y}) dx - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} dx - \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{y} dS_0, \quad (6.17)$$

其中 \hat{W} 为贮能函数。上述右端第一项为弹性体的变形能,第二项为体积力势能,第三项是作用于 Γ_2 上的表面力势能,因此, $\Phi(\mathbf{y})$ 为弹性体的总势能。下面首先说明,求解边值问题(6.12)及(5.37),可以化为求上述泛函 $\Phi(\mathbf{y})$ 的极小问题。

为使问题精确化,引入集合

$$D = \{\mathbf{y} \in (W^{1,p}(\Omega))^3, \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) > 0, \mathbf{y}|_{\Gamma_1} = \mathbf{h}\},$$

其中 $W^{1,p}(\Omega)$ 为索伯列夫空间,而 $1 < p < \infty$ 。

设 $\mathbf{y}^0 \in D$ 使 $\Phi(\mathbf{y})$ 在 D 上达到极小值,即成立

$$\Phi(\mathbf{y}^0) = \inf_{\mathbf{y} \in D} \Phi(\mathbf{y}). \quad (6.18)$$

那么对任何满足条件

$$\boldsymbol{\phi}|_{\Gamma_1} = 0 \quad (6.19)$$

的向量函数 $\boldsymbol{\phi} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$, 实值函数

$$\tau \mapsto \Phi(\mathbf{y}^0 + \tau \boldsymbol{\phi})$$

在 $\tau = 0$ 时达到极小值, 即成立

$$\left. \frac{d}{d\tau} \Phi(\mathbf{y}^0 + \tau \phi) \right|_{\tau=0} = 0. \quad (6.20)$$

但由泛函 $\Phi(\mathbf{y})$ 的表达式 (6.17), 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \Phi(\mathbf{y}^0 + \tau \phi) \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \hat{W}}{\partial f_{ij}} (\mathbf{F}^0 + \tau \nabla \phi) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \rho_0 \mathbf{b} \cdot \phi \right) dx \\ & \quad - \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \phi dS_0, \end{aligned} \quad (6.21)$$

其中 $\mathbf{F}^0 = \left(\frac{\partial y_i^0}{\partial x_j} \right)$. 由以上两式给出

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^3 p_{ij}(\mathbf{F}^0) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \rho_0 \mathbf{b} \cdot \phi \right) dx - \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \phi dS_0 = 0. \quad (6.22)$$

若一向量函数 $\mathbf{y}^0 \in (W^{1,p}(\Omega))^3$, 且满足边界条件 $\mathbf{y}^0|_{\Gamma_1} = \mathbf{h}$, 并使 (6.22) 式对一切上述的 ϕ 成立, 就称 \mathbf{y}^0 为边值问题 (6.12) 及 (5.37) 的弱解. 如果弱解 $\mathbf{y}^0 \in (C^2(\Omega))^3$, 那么容易验证 \mathbf{y}^0 为此边值问题的经典解. 这里要说明的是, 在对泛函 $\Phi(\mathbf{y})$ 求极值的函数类 D 中的函数, 并不要求它们满足在 Γ_2 上的边界条件. 在 Γ_2 上的边界条件是极值函数自然满足的, 称其为自然边界条件.

求解泛函 $\Phi(\mathbf{y})$ 的极小值问题的通常步骤如下:

(a) 证明 $\Phi(\mathbf{y})$ 在 D 中下方有界. 这一点在一定假定下要加以验证通常并不困难;

(b) 在 D 中求 $\Phi(\mathbf{y})$ 的一个极小化序列 $\{\mathbf{y}^n\}$, 即满足下述条件的序列 $\{\mathbf{y}^n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{y}^n) = \inf_{\mathbf{y} \in D} \Phi(\mathbf{y}). \quad (6.23)$$

然后在 $\{\mathbf{y}^n\}$ 中找一个子列 (为简单计, 仍记为 $\{\mathbf{y}^n\}$) 使当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\mathbf{y}^n \rightharpoonup \mathbf{y}^0, \quad \text{在 } (W^{1,p}(\Omega))^3 \text{ 中弱收敛.} \quad (6.24)$$

由 (a) 知 $\Phi(\mathbf{y})$ 在 D 中有下确界, 故必有极小化序列. 要找极小化序列的弱收敛子列, 一般依赖于对该序列的一些有界性估计. 这在一定假设下也是可以作到的;

(c) 对上述弱收敛子列, 证明

$$\Phi(\mathbf{y}^0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{y}^n). \quad (6.25)$$

一旦上式成立, 易知 \mathbf{y}^0 就是使 $\Phi(\mathbf{y})$ 取极小值的函数. (6.25) 式称为泛函 $\Phi(\mathbf{y})$ 的序列弱下半连续性. 这样, 问题就转化为对一般的弹性体, 讨论势能泛函 $\Phi(\mathbf{y})$ 是否具有序列弱下半连续性.

深入的讨论发现, 对 $\Phi(\mathbf{y})$ 序列弱下半连续性的要求将导致对贮能函数 \hat{W} 关于 \mathbf{F} 的凸性要求 (见 [6]). 那么, 对一般的弹性体, 贮能函数 \hat{W} 关于 \mathbf{F} 是否为凸呢? 回答是令人失望的. 由于集合 $\{\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \det \mathbf{F} > 0\}$ 不是凸集, 可以证明: \hat{W} 关于 \mathbf{F} 的凸性与贮能函数的下述性质是违背的:

$$\text{当 } \det \mathbf{F} \rightarrow 0 \text{ 时, } \hat{W} \rightarrow +\infty \quad (6.26)$$

(见 [4]). 这样, 如果要求贮能函数 \hat{W} 为凸, 就会将一大批成功的贮能函数的模型 (见本章 §4.3) 排除在外. 这就说明, \hat{W} 关

于 F 的凸性假定与实际情况不符。这样，问题的解决似乎进入了两难的境地。但在这里，我们忽略了一个关键的信息： F 的分量并不是独立的，它们是一个向量函数的梯度。因此， F 的分量满足如下关系式：

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j}, \quad (6.27)$$

即 (f_{ij}) 满足一组微分关系式的限制。这就是说，如果我们在某一空间中得弱收敛 $F^n \rightharpoonup F^0$ ，那么实际上应该得到的远不止这些。事实上，可以证明：若 $p > 3$ ，且

$$y^n \rightharpoonup y^0, \quad \text{在 } (W^{1,p}(\Omega))^3 \text{ 中弱收敛}, \quad (6.28)$$

那么

$$M^n \rightharpoonup M^0, \quad \text{在 } L^{p/m}(\Omega) \text{ 中弱收敛}, \quad (6.29)$$

其中 M^n 及 M^0 分别表示与 F^n 及 F^0 相应的 $m \times m$ ($1 \leq m \leq 3$) 子行列式 (见 [3], [4])。鉴于此，保尔 (J. Ball) 对贮能函数引进了较凸性为弱的多凸 (polyconvex) 的概念 (见 [3])。

定义 6.1. 若三阶方阵 F 的函数 $\hat{W}(F)$ 能表示成为 F 的子行列式的凸函数，则称其为多凸的。

假定贮能函数 \hat{W} 是多凸的，那么它一定可以表示为如下的形式：

$$\hat{W}(F) = W^*(F, \text{cof } F, \det F), \quad (6.30)$$

其中 $\text{cof } F$ 为 F 的余子式矩阵，而依赖于 19 个变量的函数

$$(F, G, d) \mapsto W^*(F, G, d)$$

是凸的。

这样, 如果我们找到了泛函 $\Phi(\mathbf{y})$ 的一个在空间 $(W^{1,p}(\Omega))^3$ 中弱收敛的极小化序列 $\{\mathbf{y}^n\}$:

$$\mathbf{y}^n \rightharpoonup \mathbf{y}^0, \quad \text{在 } (W^{1,p}(\Omega))^3 \text{ 中弱收敛,} \quad (6.31)$$

那么由 (6.29) 式知, 此时必有

$$\operatorname{cof} \mathbf{F}^m \rightharpoonup \operatorname{cof} \mathbf{F}^0, \quad \text{在 } (L^{p/2}(\Omega))^9 \text{ 中弱收敛,} \quad (6.32)$$

$$\det \mathbf{F}^m \rightharpoonup \det \mathbf{F}^0, \quad \text{在 } L^{p/3}(\Omega) \text{ 中弱收敛.} \quad (6.33)$$

于是就找到了一个序列 $(\mathbf{F}^m, \operatorname{cof} \mathbf{F}^m, \det \mathbf{F}^m)$ 在 $(L^{p/3}(\Omega))^{19}$ 中弱收敛于 $(\mathbf{F}^0, \operatorname{cof} \mathbf{F}^0, \det \mathbf{F}^0)$ 。再由 $\hat{W}(\mathbf{F})$ 的多凸性, 即 $W^*(\mathbf{F}, \mathbf{G}, d)$ 关于 $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, d)$ 的凸性可推得泛函 $\Phi(\mathbf{y})$ 关于 $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, d)$ 在 $(L^{p/3}(\Omega))^{19}$ 中的弱序列下半连续性。这样就可完成解的存在性的证明。

在上述解的存在性的证明中, 并没有用到方程组 (6.12) 的强椭圆性这一假定。但实际上, 由 \hat{W} 的多凸性可以推得 $\mathbf{A} = (a_{ijkl})$ 满足强椭圆性条件 (5.34) (见 [3])。

由上述方法得到的弱解是否具有正则性, 即它是否是一个经典解, 除一维情况外, 仍然是个没有解决的问题。此外, 设 \mathbf{y}^0 是边值问题 (6.12) 及 (5.37) 的解, 那么从物理的角度说, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}^0(\mathbf{x})$ 应该是一个一一在上的映射。我们现在得到的弱解是否满足这一要求, 也是一个有待研究的问题。

为了说明在本章 §4.3 中给出的大部分模型是多凸的, 我们证明下述定理。

定理 6.2. 设 $\Gamma: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数, 那么由 (4.47) 给出的贮能函数

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^M a_i (\mu_1^{\alpha_i} + \mu_2^{\alpha_i} + \mu_3^{\alpha_i} - 3)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N b_i ((\mu_2 \mu_3)^{\beta_i} + (\mu_3 \mu_1)^{\beta_i} + (\mu_1 \mu_2)^{\beta_i} - 3) \\
& + \Gamma(\mu_1 \mu_2 \mu_3)
\end{aligned} \tag{6.34}$$

为多凸的, 其中 μ_1, μ_2, μ_3 为 $U = C^{1/2}$ 的主值, $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$ 均为非负常数.

证明 我们只对 $M = N = 1, \alpha_1 = \beta_1 = 2$ 的情况予以证明 (显然, 这包括由 (4.48) 式给出的材料). 对一般情况的证明可参阅 [4].

首先证明下述引理.

引理 6.1. 函数

$$g(\mathbf{F}) = \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}), \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \tag{6.35}$$

是严格凸的.

证明 易见

$$g(\mathbf{F}) = \sum_{i,j=1}^3 f_{ij}^2,$$

其二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 g(\mathbf{F})}{\partial f_{ij} \partial f_{kl}} = \begin{cases} 2, & \text{若 } (i, j) = (k, l), \\ 0, & \text{若 } (i, j) \neq (k, l). \end{cases}$$

因此, 9×9 阵 $\left(\frac{\partial^2 g(\mathbf{F})}{\partial f_{ij} \partial f_{kl}} \right)$ 是正定的. 这说明 $g(\mathbf{F})$ 为严格凸函数. 引理证毕.

定理 6.2 证明的继续 容易直接验证

$$\text{cof}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = (\text{cof } \mathbf{F})^T \text{cof } \mathbf{F}, \tag{6.36}$$

故由 (4.49) 的第二式, 有

$$(\mu_2\mu_3)^2 + (\mu_3\mu_1)^2 + (\mu_1\mu_2)^2 = \text{tr}((\text{cof } \mathbf{F})^T \text{cof } \mathbf{F}). \quad (6.37)$$

这样, 注意到 (4.49) 式, (6.34) 式可以写为

$$\begin{aligned} \hat{W}(\mathbf{F}) = & a_1 \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) + b_1 \text{tr}((\text{cof } \mathbf{F})^T \text{cof } \mathbf{F}) \\ & + \Gamma(\det \mathbf{F}) - 3(a_1 + b_1). \end{aligned} \quad (6.38)$$

由引理 6.1 知, (6.38) 式右端第一及第二项分别为 \mathbf{F} 与 $\text{cof } \mathbf{F}$ 的凸函数. 又由定理假设, 第三项为 $\det \mathbf{F}$ 的凸函数. 所以 $\hat{W}(\mathbf{F})$ 为多凸的. 证毕.

最后, 我们要指出的是: 圣维南 - 基尔霍夫材料的贮能函数 (见 (4.38) 式) 不是多凸的 (见 [4]).

习 题

1. 证明引理 2.1 .
2. 验证 (3.6) 式, 即证明

$$\frac{dJ}{dt} = J \text{div}_v \mathbf{v}.$$

3. 试证明: 在物质描述下, 动量矩守恒定律等价于第二彼奥拉应力张量的对称性.

4. 设材料为超弹性的, 并设参考构形为自然状态, 证明由线性化得到的张量 $\mathbf{A} = (a_{ijkl}) = \left(2 \frac{\partial \bar{p}_{ij}}{\partial c_{kl}} \right)$ 具有以下对称性:

$$a_{ijkl} = a_{klij}.$$

5. 设超弹性材料的贮能函数 \hat{W} 满足 (4.19) 式, 证明由它决定的柯西应力张量 \mathbf{T} 满足客观性假设 (4.7) 式.

6. 设超弹性材料的贮能函数 \hat{W} 满足 (4.37) 式, 证明由它决定的柯西应力张量 \mathbf{T} 满足各向同性条件 (4.21) 式.

7. 在线性弹性情形, 证明对各向同性材料, 强椭圆性条件 (5.6) 等价于拉梅常数满足

$$\mu > 0, \quad \lambda + 2\mu > 0.$$

8. 在线性弹性情形, 证明对各向同性材料, 稳定性条件 (5.27) 等价于拉梅常数满足

$$\mu > 0, \quad \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0.$$

9. 设 3×3 阵 \mathbf{A} 的特征值为 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 , 证明 $\text{cof} \mathbf{A}$ 的特征值为

$$\lambda_2 \lambda_3, \quad \lambda_3 \lambda_1, \quad \lambda_1 \lambda_2.$$

10. 证明函数

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \begin{cases} \frac{1}{\det \mathbf{F}}, & \text{若 } \det \mathbf{F} > 0, \\ +\infty, & \text{若 } \det \mathbf{F} \leq 0 \end{cases}$$

是多凸的.

参 考 文 献

- [1] 谷超豪, 李大潜等. 数学物理方程. 上海: 上海科学技术出版社, 1987
- [2] 柯朗 R, 希尔伯特 D. 数学物理方法: 卷 II. 熊振翔, 杨应辰译. 北京: 科学出版社, 1977

- [3] Ball J. *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., 63 (1977). 337~403
- [4] 希阿雷 P G. 数学弹性理论, 卷 I: 三维弹性理论. 石钟慈, 王烈衡译. 北京: 科学出版社, 1991
- [5] Ciarlet P G, Geymonat G. *Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire compressible*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II, 295 (1982). 423~426
- [6] Evans L C. *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. CBMS, Regional Conference Series in Mathematics 74, 1990
- [7] Gurtin M E. *Topics in Finite Elasticity*. CBMS-NCF, Regional Conference Series in Applied Mathematics 35, 1981
- [8] John F. *Finite amplitude waves in a homogeneous isotropic elastic solid*. Comm. Pure Appl. Math., 30 (1977). 421~446
- [9] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York Inc., 1983
- [10] 谷超豪, 李大潜, 沈玮熙. 应用偏微分方程. 北京: 高等教育出版社, 1993
- [11] Struwe M. *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1990

附录一 笛卡儿张量

在理论物理及连续介质力学中广泛使用着张量。这不仅是为了书写的简练，更主要是因为物理及力学中出现的一些重要的物理量，在本质上均不应依赖于坐标系的选取方式。在本附录中，我们考虑的坐标系均为笛卡儿直角坐标系，相应的张量称为笛卡尔张量。

1. 张量的定义

在选定的测量单位下，只需利用一个和坐标系选取无关的数来表征其特征的量称为标量。例如数学上的常数 π 及 e ，物理学中的质量、密度、温度以及能量等都是标量。

在选定的测量单位下，由一个和坐标系选取无关的数及一个方向（即大小及方向）来表征其特征的量称为向量。例如数学上的有向线段，力学中的位移、速度、力以及动量等均为向量。

但是我们知道，向量也可以用它的坐标分量来描述并进行计算。这时需要选定适当的坐标系来进行讨论。同一向量在不同坐标系下有不同的坐标分量，但由于它们描述的是同一向量，在不同坐标系之下向量的坐标分量必须满足和坐标变换相匹配的变换规律。而这个变换规律就是这个客观存在的向量独立于坐标系选取方式的反映。因此，向量可由其在给定坐标系下的坐标分量，连同坐标系变换时其坐标分量的变换规律来刻画。在这个概念的基础上进行延伸，就可以得到张量的概念。

在笛卡儿坐标系下，我们仅限于考虑笛卡儿坐标变换，即平移、旋转及反射。如果新旧坐标系都限定为右手系，则只有平移

和旋转.

设 $O'x'_1x'_2x'_3$ 及 $Ox_1x_2x_3$ 分别为新、旧右手直角坐标系, $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ 及 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 分别为新、旧坐标系的单位坐标向量. 设

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \mathbf{e}_j \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

注意到

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (2)$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克记号, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j &= \sum_{k=1}^3 a_{ik} \mathbf{e}_k \cdot \sum_{l=1}^3 a_{jl} \mathbf{e}_l \\ &= \sum_{k,l=1}^3 a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

这说明 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是一个正交阵. 由于只限于由右手系到右手系的坐标变换, 应有 $\det \mathbf{A} = 1$. 由于正交阵 \mathbf{A} 的逆阵为其转置 \mathbf{A}^T , 由 (1) 式有

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} \mathbf{e}'_j \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3)$$

现在具体看在不同笛卡儿坐标系下向量坐标分量的变换规律. 设 \mathbf{a} 为一向量, 其在新、旧坐标系下的分量分别为 (a'_1, a'_2, a'_3) 及 (a_1, a_2, a_3) , 于是

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 a'_j \mathbf{e}'_j. \quad (4)$$

由 (3)—(4) 式得

$$\sum_{i,j=1}^3 a_i a_{ji} e'_j = \sum_{j=1}^3 a'_j e'_j.$$

这意味着

$$a'_j = \sum_{i=1}^3 a_{ji} a_i \quad (j = 1, 2, 3),$$

或写为

$$a'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} a_j \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5)$$

由于 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为正交阵, 由 (5) 式易见

$$a_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} a'_j \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6)$$

(5) 与 (6) 的形式和坐标向量的变换式 (1) 及 (3) 相一致。

由此可得向量的另一种定义: 设一个量在每一个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下由三个分量 (数) a_1, a_2, a_3 表示, 而这些分量在坐标变换 (1) 下按 (5) 式进行转换, 那么称此量为 向量 或 一阶张量。增加分量下标的个数, 可以类似地定义二阶、三阶及更高阶的张量。

二阶张量的定义: 若一个量 \mathbf{P} 在每一直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下由九个分量 (数) p_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 表示, 且在坐标变换 (1) 下, 这些分量按以下规律

$$p'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 a_{ik} a_{jl} p_{kl} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (7)$$

转换为另一个直角坐标系 $O'x'_1x'_2x'_3$ 中的九个分量 p'_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), 则称量 P 为二阶张量。记为

$$P = \{p_{ij}\} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},$$

其中 p_{ij} 称为此二阶张量的分量。

上述定义不难推广到 n 阶张量 $P = \{p_{i_1 i_2 \dots i_n}\}$ 。 n 阶张量 P 在每个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下有 3^n 个分量 $p_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ($i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3$); 在坐标变换 (1) 下, 其分量之间的转换关系则由

$$p'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^3 a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} p_{j_1 j_2 \dots j_n} \quad (i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3) \quad (8)$$

给出。

2. 张量的计算

1° 张量的加减与数乘

以二阶张量为例, 设 $P = \{p_{ij}\}$ 及 $Q = \{q_{ij}\}$ 同为二阶张量, 则 $\{p_{ij} \pm q_{ij}\}$ 仍为二阶张量, 记为 $P \pm Q$, 即

$$P \pm Q = \{p_{ij} \pm q_{ij}\}.$$

设 α 为一标量, 显然 $\{\alpha p_{ij}\}$ 仍为二阶张量, 记为 αP , 即

$$\alpha P = \{\alpha p_{ij}\}.$$

2° 张量的乘积

设 $P = \{p_{i_1 i_2 \dots i_m}\}$ 及 $Q = \{q_{j_1 j_2 \dots j_n}\}$ 分别为 m 阶及 n 阶张量, 记

$$r_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_n} = p_{i_1 \dots i_m} q_{j_1 \dots j_n}.$$

容易验证, $R = \{r_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_n}\}$ 为 $m+n$ 阶张量, 称为 P 与 Q 的张量积, 记为 $R = P \otimes Q$.

例 1. 设 $a = \{a_i\}$ 及 $b = \{b_i\}$ 均为向量, 则

$$C = a \otimes b = \{a_i b_j\} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

为二阶张量. 物理上通常称其为 a 与 b 的并矢.

3° 张量的缩并

设 $P = \{p_{i_1 i_2 \dots i_n}\}$ 为 n 阶张量. 若对其分量 $p_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 的两个下标取相同之值, 并对该下标从 1 到 3 求和, 不难验证, 这样就得到一个 $n-2$ 阶张量的分量. 这个 $n-2$ 阶张量称为张量 P 的缩并.

下面以按 P 的分量的最后两个下标缩并的情况予以说明.

设

$$q_{i_1 i_2 \dots i_{n-2}} = \sum_{k=1}^3 p_{i_1 i_2 \dots i_{n-2} k k},$$

则 $Q = \{q_{i_1 i_2 \dots i_{n-2}}\}$ 为一个 $n-2$ 阶张量. 事实上, 注意到 $A = (a_{ij})$ 为正交阵, 有

$$\begin{aligned} q'_{i_1 i_2 \dots i_{n-2}} &= \sum_{k=1}^3 p'_{i_1 i_2 \dots i_{n-2} k k} \\ &= \sum_{k, j_1, \dots, j_{n-2}, r, s=1}^3 a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_{n-2} j_{n-2}} a_{kr} a_{ks} p_{j_1 \dots j_{n-2} r s} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_{n-2}, r, s=1}^3 a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_{n-2} j_{n-2}} \delta_{rs} p_{j_1 \dots j_{n-2} r s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_1, \dots, j_{n-2}, r=1}^3 a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_{n-2} j_{n-2}} p_{j_1 \cdots j_{n-2} r r} \\
&= \sum_{j_1, \dots, j_{n-2}=1}^3 a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_{n-2} j_{n-2}} q_{j_1 \cdots j_{n-2}}.
\end{aligned}$$

故 Q 为 $n-2$ 阶张量。

例 2. 并矢 $a \otimes b$ 的缩并 $\sum_{i=1}^3 a_i b_i$ 即为向量 a 与 b 的内积。

例 3. 设 $\{b_{ijkl}\}$ 为四阶张量， $\{\varepsilon_{ij}\}$ 为二阶张量，则

$$\{t_{ij}\} = \left\{ \sum_{k,l=1}^3 b_{ijkl} \varepsilon_{kl} \right\}$$

为二阶张量。利用张量乘积与缩并的结果，很容易说明这一点。

例 4. 设对任意给定的二阶张量 $\{\varepsilon_{ij}\}$,

$$\{t_{ij}\} = \left\{ \sum_{k,l=1}^3 b_{ijkl} \varepsilon_{kl} \right\}$$

均为二阶张量，则 $\{b_{ijkl}\}$ 必为四阶张量。

下面我们证明上述结论。在新坐标系 $O'x'_1x'_2x'_3$ 下

$$t'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 b'_{ijkl} \varepsilon'_{kl}. \quad (9)$$

但由张量的定义

$$t'_{ij} = \sum_{p,q=1}^3 a_{ip} a_{jq} t_{pq}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p,q,r,s=1}^3 a_{ip} a_{jq} b_{pqrs} \varepsilon_{rs} \\
&= \sum_{p,q,r,s,k,l=1}^3 a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{ls} b_{pqrs} \varepsilon'_{kl}. \quad (10)
\end{aligned}$$

由于 (9) 及 (10) 对一切二阶张量 $\{\varepsilon'_{kl}\}$ 均成立, 故

$$b'_{ijkl} = \sum_{p,q,r,s=1}^3 a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{ls} b_{pqrs},$$

即 $\{b_{ijkl}\}$ 为四阶张量。

例 4 的结论通常称为张量识别定理。不难证明, 这个定理对任意阶的张量均成立。

3. 二阶对称张量的不变量

二阶张量 P 的不变量是指由该张量决定的、与坐标系选取无关的标量。

对于二阶张量 $P = \{p_{ij}\}$, 若存在非零向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, 使

$$P\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}, \quad (11)$$

其中 λ 为一标量, 而 $P\mathbf{a} = \left\{ \sum_{j=1}^3 p_{ij} a_j \right\}$, 则称 \mathbf{a} 的方向为张量 P 的主轴方向 (主方向), 称 λ 为 P 的主值。

张量 P 的主值 λ 为其不变量, 即在坐标变换下, 成立

$$P'\mathbf{a}' = \lambda\mathbf{a}'. \quad (12)$$

事实上,

$$(P'\mathbf{a}')_i = \sum_{j=1}^3 p'_{ij} a'_j$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,k,l,m=1}^3 a_{ik} a_{jl} p_{kl} a_{jm} a_m \\
&= \sum_{k,l,m=1}^3 a_{ik} \delta_{lm} p_{kl} a_m \\
&= \sum_{k,l=1}^3 a_{ik} p_{kl} a_l \\
&= \sum_{k=1}^3 a_{ik} \lambda a_k = \lambda a'_i.
\end{aligned}$$

这就是 (12) 式。

λ 为 \mathbf{P} 的主值等价于 λ 满足

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\begin{aligned}
&\lambda^3 - \lambda^2(p_{11} + p_{22} + p_{33}) \\
&+ \lambda \left(\begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \right) \\
&- \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

这是关于 λ 的三次代数方程。由根与系数的关系，得

$$\begin{aligned}
I_1 &\stackrel{d}{=} p_{11} + p_{22} + p_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\
I_2 &\stackrel{d}{=} \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1,$$

$$I_3 \stackrel{\text{d}}{=} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为方程 (13) 的三个根。由于 λ_1, λ_2 及 λ_3 均为不变量，由以上三式给出的张量 \mathbf{P} 分量的组合 I_1, I_2 及 I_3 均为不变量，称为张量 \mathbf{P} 的第一、第二及第三主不变量。

特别，若

$$p_{ij} = p_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (14)$$

则称 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$ 为二阶对称张量。容易验证，这一定义不依赖于坐标系的选取。对二阶对称张量 \mathbf{P} ，必存在三个实主值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 及三个相互垂直的主轴。取主轴为新的坐标轴，则对称张量 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$ 可写为如下形式：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

这说明二阶对称张量完全可以由其三个主值 λ_1, λ_2 及 λ_3 来表征，因此其一切不变量均可由 λ_1, λ_2 及 λ_3 表出。换言之， λ_1, λ_2 及 λ_3 本质上给出了 \mathbf{P} 的一切可能的不变量。但 \mathbf{P} 的主值又可由其第一、第二及第三主不变量唯一确定，所以：二阶对称张量的一切不变量均可由其第一、第二及第三主不变量 I_1, I_2 及 I_3 给出。

4. 各向同性张量

绝大多数张量的分量经过坐标旋转变换后将改变其值。这种张量称为各向异性张量。但也有一些张量，在坐标旋转变换下，

每一分量均保持不变, 这种张量称为各向同性张量。严格地说, 若 n 阶张量 $\mathbf{H} = \{h_{i_1 i_2 \dots i_n}\}$ 的每一分量均为坐标旋转变换下的不变量, 即在坐标旋转变换下成立

$$h'_{i_1 i_2 \dots i_n} = h_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3), \quad (15)$$

则称 \mathbf{H} 为各向同性的 n 阶张量。例如标量 (零阶张量) 及 $\{\delta_{ij}\}$ 均为各向同性的。各向同性这一名称来源于物理。例如若四阶张量 $\{p_{ijkl}\}$ 中分量 p_{1111} 表示某种材料在 x_1 轴方向的拉伸弹性系数。当旋转到新的坐标系 $Ox'_1 x'_2 x'_3$ 时, 张量为 $\{p'_{ijkl}\}$ 。此时分量 p'_{1111} 表示该材料在 x'_1 轴方向的拉伸弹性系数。如果材料是各向同性的, 各方向的拉伸弹性系数应相同, 这就应有 $p_{1111} = p'_{1111}$ 。

下面给出各向同性张量的一些具体形式。

定理. 1) 二阶各向同性张量 $\mathbf{H} = \{h_{ij}\}$ 的一般形式为

$$h_{ij} = \lambda \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (16)$$

其中 λ 为标量, 而 δ_{ij} 为克罗内克记号。

2) 四阶各向同性张量 $\mathbf{H} = \{h_{ijkl}\}$ 的一般形式为

$$h_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (17)$$

其中 λ, α 及 β 均为标量。

证明 我们只证 2)。首先, 容易验证, 由 (17) 式给出的四阶张量是各向同性的。其次证明, 若 \mathbf{H} 为各向同性的, 则有

$$h_{ijkl} = \begin{cases} \lambda + \alpha + \beta, & \text{若 } i = j = k = l, & (18_1) \\ \lambda, & \text{若 } i = j \neq k = l, & (18_2) \\ \alpha, & \text{若 } i = k \neq j = l, & (18_3) \\ \beta, & \text{若 } i = l \neq j = k, & (18_4) \\ 0, & \text{其它情形.} & (18_5) \end{cases}$$

一旦以上诸式得以证明, (17) 式自然成立.

因为 \mathbf{H} 是各向同性的, 由定义知

$$h_{ijkl} = h'_{ijkl} = \sum_{p,q,r,s=1}^3 a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ls}h_{pqrs}. \quad (19)$$

下面的证明分四步完成.

1°) 作坐标变换

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1.$$

对此坐标变换,

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

将这个矩阵用于 (19) 式可见: 对于 h_{ijkl} , 将其下标中 $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$, 分量值保持不变.

2°) 将坐标系绕 x_3 轴旋转角度 π , 得一新的坐标系. 此时

$$\mathbf{e}'_1 = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3,$$

相应地

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将这个矩阵用于 (19) 式可见: 该式右端的和式中, 只有 $p = i$, $q = j$, $r = k$ 及 $s = l$ 的项不为零, 且

$$h_{ijkl} = \pm h_{ijkil}. \quad (20)$$

(20) 式中的“ \pm ”号按以下规则选取: 当且仅当 i, j, k 及 l 中有奇数个 3 时, 上式右端取“-”号, 其余情况取“+”号. 在 (20) 式右端取“-”号时, 就有

$$h_{ijkil} = 0. \quad (21)$$

由 1°) 知, 在 i, j, k 及 l 中有奇数个 1 或奇数个 2 时, (21) 式亦成立. 这就证明了 (18₅) 式.

3°) 将坐标系绕 x_3 轴旋转角度 $\pi/2$, 得一新坐标系. 此时

$$e'_1 = e_2, \quad e'_2 = -e_1, \quad e'_3 = e_3,$$

相应地

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将此矩阵用于 (19) 式, 得

$$h_{1122} = a_{12}a_{12}a_{21}a_{21}h_{2211} = h_{2211}. \quad (22)$$

由 1°) 得

$$h_{1122} = h_{2233} = h_{3311}, \quad (23)$$

$$h_{2211} = h_{3322} = h_{1133}. \quad (24)$$

由 (22)—(24) 诸式易证 (18₂) 式成立. 类似地可证 (18₃) 及 (18₄) 式成立.

4°) 将坐标系绕 x_3 轴旋转角度 $\pi/4$, 得一新坐标系. 此时有

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \\ e'_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \\ e'_3 &= e_3, \end{aligned}$$

相应地

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

由 (19) 式, 有

$$h_{1111} = \sum_{p,q,r,s=1}^3 a_{1p}a_{1q}a_{1r}a_{1s}h_{pqrs}.$$

将矩阵 (25) 代入上式, 容易看出: 上式右端和式中, 只有 p, q, r 及 s 均取 1 或 2 的这种项可能不为零. 进而, 由 (18₅) 式知, 仅当 p, q, r 及 s 中有偶数个 1 或偶数个 2 的这种项可能不为零. 所以

$$\begin{aligned} h_{1111} &= a_{11}^4 h_{1111} + a_{12}^4 h_{2222} + a_{11}^2 a_{12}^2 (h_{1122} \\ &\quad + h_{2211} + h_{1212} + h_{2121} + h_{1221} + h_{2112}) \\ &= \frac{1}{4} (h_{1111} + h_{2222} + h_{1122} + h_{2211} + h_{1212} \\ &\quad + h_{2121} + h_{1221} + h_{2112}). \end{aligned} \quad (26)$$

由 (18₂)—(18₄) 有

$$h_{1122} = h_{2211} = \lambda,$$

$$h_{1212} = h_{2121} = \alpha,$$

$$h_{1221} = h_{2112} = \beta.$$

又由 1°) 得

$$h_{1111} = h_{2222} = h_{3333}.$$

这样, 由 (26) 式就得到

$$h_{1111} = \lambda + \alpha + \beta.$$

(18₁) 式得证. 定理证毕.

5. 张量的微分运算

前面讨论的张量可以是常张量, 即每一分量在给定坐标系下都是常数; 也可以是张量函数, 即其分量为函数 (依赖某些参数或空间点的坐标). 若张量的分量仅为某些参变量的函数, 那么一切微分运算均可按分量进行, 情况比较简单. 这里重点讨论张量的分量为点坐标的函数的情形. 设在坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下,

$$P = \{p_{i_1 i_2 \dots i_n}(\mathbf{x})\}$$

为 n 阶张量, 即在新坐标系 $O'x'_1x'_2x'_3$ 下

$$p'_{i_1 i_2 \dots i_n}(\mathbf{x}') = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^3 a_{i_1 j_1} \dots a_{i_n j_n} p_{j_1 \dots j_n}(\mathbf{x}), \quad (27)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$. 下面定义该张量的几种微分运算.

1) 梯度

P 的梯度 ∇P (或 $\text{grad } P$) 定义为

$$\nabla P = \{q_{i_1 \dots i_n k}\}, \quad (28)$$

其中

$$q_{i_1 \dots i_n k} = \frac{\partial p_{i_1 \dots i_n}}{\partial x_k}. \quad (29)$$

下面说明以上定义的 $\{q_{i_1 \dots i_n k}\}$ 为一个 $n+1$ 阶张量。事实上

$$\begin{aligned} q'_{i_1 \dots i_n k} &= \frac{\partial p'_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x}')}{\partial x'_k} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x'_k} (a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} p_{j_1 \dots j_n}(\mathbf{x})) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n, l=1}^3 a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} \frac{\partial p_{j_1 \dots j_n}(\mathbf{x})}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n, l=1}^3 a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} a_{kl} q_{j_1 \dots j_n l}. \end{aligned}$$

例 5. 设 $P = \{p\}$ 为零阶张量 (标量), 则标量场的梯度

$$\nabla P = \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_k} \right\}$$

是一个向量, 即一阶张量。

例 6. 设 $P = \{p_i\}$ 为一阶张量 (向量), 则其梯度

$$\nabla P = \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \right\}$$

为一个二阶张量。

2) 散度

P 的散度 $\nabla \cdot P$ (或 $\operatorname{div} P$) 定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{i_1 \dots i_{n-1} k}}{\partial x_k} \right\}. \quad (30)$$

因为 \mathbf{P} 的散度 $\nabla \cdot \mathbf{P}$ 为由其梯度 $\nabla \mathbf{P}$ 缩并而得, 故为 $n-1$ 阶张量.

例 7. 设 $\mathbf{P} = \{p_i\}$ 为一阶张量 (向量), 则其散度

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_k}{\partial x_k} \right\}$$

为通常向量场的散度。这是一个标量, 即零阶张量。

例 8. 设 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$ 为一个二阶张量, 那么其散度

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right\}$$

为一阶张量, 即向量。

附录二 热力学概述

1. 热力学的研究对象

热力学的研究对象是由巨大数量的物质粒子（分子、原子、电子等）所组成的物质系统。这是一个自由度非常大的动力学系统。

如果一个物质粒子系统（下面简称系统）与外界没有任何相互作用，称该系统为孤立系统。如果它与外界没有物质交换，但可以有能量交换，则称其为封闭系统。

经典热力学主要研究处于平衡态的系统。所谓平衡态，是指一个系统尽管组成它的物质粒子在作复杂的运动，但从宏观上看，系统各点附近的状态是相同的，从而对整个系统可用相应的状态量（如绝对温度等）来描述所考察的状态。除平衡态外，经典热力学还讨论系统的热力学态。一个系统如果作为一个整体并不处于平衡态，但它可以分成有限个部分，而每一部分均处于平衡态，则称该系统处于热力学态。例如，若一系统由 A 及 B 两部分组成，而 A 及 B 均处于平衡态，则该系统即处于热力学态。

在讨论系统状态的变化时，在热力学中仅讨论初态与终态均为热力学态的这种变化。而系统在变化过程中的每一瞬间，则可以是热力学态，也可以不是。一般来说，这些中间状态是非常复杂的。只有当过程进行的速度相对于系统内部趋于平衡的速度而言非常缓慢时，系统的中间状态才可视为热力学态。一类重要的理想化的变化过程是准静态过程。如果一个系统在变化过程的每一瞬间都处于平衡态，这种过程就称为准静态过程。这是一种实际上并不存在的理想化过程。但是当一初态与终态都是平衡

态的变化过程进行得极缓慢时，就可以近似地将它视为一个准静态过程。

2. 热力学第一定律，内能

热力学第一定律的基本思想是能量守恒。确切地说，守恒的是能量而不是热量。

热力学第一定律。当一封闭系统由初态 α_1 变到终态 α_2 时，系统得自外界的功 ΔW 与热量 ΔQ 的总和，只取决于系统的初态与终态，而与中间过程无关。因此，存在一个仅依赖于系统的状态量 U ，使得

$$\Delta U \stackrel{\text{d}}{=} U(\alpha_2) - U(\alpha_1) = \Delta W + \Delta Q. \quad (1)$$

此状态量 U 称为系统的内能。

系统的内能是该系统内物质粒子（通常指分子）无规则运动的动能与它们之间相互作用形成的势能之和。

3. 热力学第二定律，熵

热力学第一定律阐明了热力学过程必须满足的能量关系，但没有指出过程变化的趋向。例如，若一热力学系统由 A 及 B 两个平衡态组成。设子系统 A 及 B 的温度分别为 θ_1 及 θ_2 。热力学第一定律告诉我们，如果 A 及 B 之间有热交换，则一个子系统得到的热量必须等于另一个子系统失去的热量，但并未指出热量传递的方向。然而经验告诉我们，热量一定是由高温的子系统传到低温的子系统。揭示自然界存在的这种不对称性，即自然现象的单向性，则有赖于热力学第二定律。

热力学第二定律有许多种叙述方式。这里采用克劳修斯 (Clausius) 不等式的形式。这种叙述方式虽然不太直观，但容易导出重要的状态量——熵。

一个系统的终态与初态相同的变化过程称为循环。

热力学第二定律。设初态为平衡态的系统在与热源保持接触的情况下完成一个循环。在循环过程中，系统从绝对温度为 θ^e 的热源吸取热量 dQ ，则

$$\oint \frac{dQ}{\theta^e} \leq 0. \quad (2)$$

(2) 式称克劳修斯不等式。上述闭路积分是沿循环过程取的。

下面讨论变化过程的可逆性。设所考察的系统从状态 α_1 变到状态 α_2 ，而外界环境从状态 β_1 变到状态 β_2 。若有某种方法能使系统从状态 α_2 变回到 α_1 ，而相应地环境从状态 β_2 变回到 β_1 ，则称这个过程是可逆过程。实际上发生的热力学过程都是不可逆的。

准静态过程，作为一种理想化的过程，是可逆的。这是因为准静态过程在每一瞬间都是平衡态。这样一种过程可以用相空间的一条曲线描绘。如流体，状态量只有两个是独立的。设独立的状态变量取为 (V, θ) ，这里 V 为气体的体积， θ 为绝对温度。那么初态为 α_1 、终态为 α_2 的准静态过程可由相平面 (V, θ) 上的一条曲线 C (见图 1) 描绘。这种过程自然是可逆的。为此只要将状态 α_2 沿原曲线 C 按相反方向变到 α_1 即可。今后所说的可逆过程均指准静态过程。

现考察由准静态过程形成的循环。由于准静态过程是可逆的，由 (2) 式有

$$\oint \frac{dQ}{\theta} = 0, \quad (3)$$

其中 θ 为系统的绝对温度。由于 (3) 式对相空间中的任一闭曲线均成立，所以 $\frac{dQ}{\theta}$ 为一全微分。即存在一个状态量 S ，使

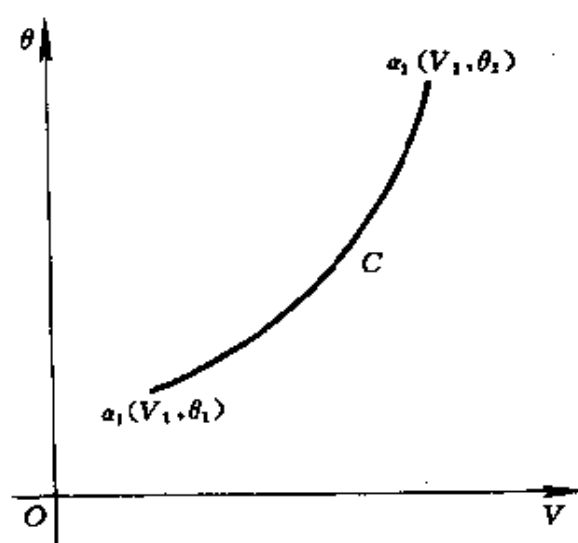


图 1

$$dS = \frac{dQ}{\theta}. \quad (4)$$

S 称为系统的熵。对于上面所说的流体情况，有

$$dQ = dU + pdV, \quad (5)$$

其中 U 为内能， p 为压强；即有

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial V} + p \right) dV + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta. \quad (6)$$

(4) 式说明，(6) 式右端一般来说不是全微分，但它有积分因子 $\frac{1}{\theta}$ 。

上面只对系统的平衡态定义了熵，但熵具有可加性，对处于热力学态的系统，其熵定义为处于平衡态下的各子系统熵的和。

设一热力学系统由平衡态 α_1 经过某个过程 L 变到平衡态 α_2 , 则必有

$$\int_{\alpha_1 L \alpha_2} \frac{dQ}{\theta^e} \leq S(\alpha_2) - S(\alpha_1). \quad (7)$$

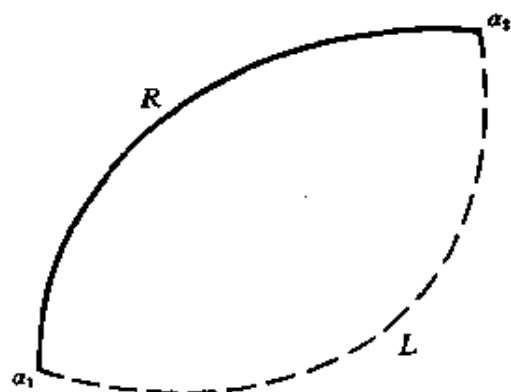


图 2

事实上, 设 R 为由 α_1 变到 α_2 的准静态过程 (见图 2)。由克劳修斯不等式 (2) 有

$$\int_{\alpha_1 L \alpha_2} \frac{dQ}{\theta^e} + \int_{\alpha_2 R \alpha_1} \frac{dQ}{\theta} \leq 0.$$

但 (4) 式给出

$$\int_{\alpha_2 R \alpha_1} \frac{dQ}{\theta} = S(\alpha_1) - S(\alpha_2),$$

所以 (7) 式成立。(7) 式也可写为

$$\frac{dQ}{\theta^e} \leq dS. \quad (8)$$

由此, 若系统是孤立的或是绝热的, 则有

$$dS \geq 0. \quad (9)$$

可以说明, 这一结论对孤立或绝热, 且初、终态均为热力学态的系统也是成立的。对一个孤立或绝热的热力学系统, (9) 式是一个过程得以进行的条件。

由 (9) 式不难得到

热力学第二定律的另一种叙述: 把热量从低温系统传到高温系统而不引起其它变化是不可能的。

4. 勒让德 (Legendre) 变换

前面已经谈到过, 可采用不同的两个热力学状态量作为自变量, 并得到相应的状态方程, 以此来建立热力学的基本关系式。为说明在一般情况下, 如何进行这种自变量间的转化, 先介绍一下勒让德变换。

我们知道, 在 (x, y, u) 空间的曲面可以视为点的轨迹, 但也可以视为其切平面的包络。如果已知曲面的方程为

$$u = u(x, y), \quad (10)$$

则过其上一点 $(x, y, u(x, y))$ 的法线向量为 $(u_x, u_y, -1)$, 从而过此点的切平面为

$$\bar{u} - u - (\bar{x} - x)u_x - (\bar{y} - y)u_y = 0,$$

即

$$u_x \bar{x} + u_y \bar{y} - \bar{u} = xu_x + yu_y - u, \quad (11)$$

其中 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ 为此切平面上的变动坐标, 而 $u = u(x, y)$ 。这样就得到一个依赖于两个参数 (x, y) 的切平面族。记

$$\xi = u_x, \quad \eta = u_y, \quad \omega = xu_x + yu_y - u, \quad (12)$$

此切平面方程可简写为

$$\xi \bar{x} + \eta \bar{y} - \bar{u} = \omega. \quad (13)$$

(ξ, η, ω) 称为此切平面的平面坐标. 确定了它, 就可按上式决定此切平面. 这样, 曲面 (10) 的切平面族 (11) 的平面坐标就由 (12) 式给出. 原则上, 从 $\xi = u_x(x, y)$, $\eta = u_y(x, y)$ 可反解出 x 及 y 为 (ξ, η) 的函数, 代入 (12) 式的最后一式, 就得到

$$\omega = \omega(\xi, \eta). \quad (14)$$

这个式子称为曲面的切平面坐标方程.

曲面的这两种表示方法可以互换. 由上面的讨论知, 若已知曲面的点坐标方程 (10), 原则上可得到其切平面坐标方程 (14). 此外, 由 (12) 式有

$$\omega_\xi = x + \xi \frac{\partial x}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial y}{\partial \xi} - u_x \frac{\partial x}{\partial \xi} - u_y \frac{\partial y}{\partial \xi} = x. \quad (15)$$

同理

$$\omega_\eta = y. \quad (16)$$

综合 (12)、(15) 与 (16) 式得: 曲面的点坐标方程 $u = u(x, y)$ 与切平面坐标方程 $\omega = \omega(\xi, \eta)$ 之间满足如下关系:

$$\begin{cases} \omega = x\xi + y\eta - u, \\ \xi = u_x, & \eta = u_y, \\ x = \omega_\xi, & y = \omega_\eta. \end{cases} \quad (17)$$

反之, 若已知曲面的切平面坐标方程 (14), 也就是给定了一个依赖于两个参数的平面族

$$\xi x + \eta y - u = \omega(\xi, \eta), \quad (18)$$

其中 (x, y, u) 为此平面上的变动点坐标。这个平面族的包络就决定了一个曲面。根据求包络曲面的方法，将 (18) 式对参数 ξ 及 η 分别求导一次，得到

$$x = \omega_{\xi}, \quad y = \omega_{\eta}. \quad (19)$$

从中解出 ξ 及 η 为 (x, y) 的函数，再代入

$$u = \xi x + \eta y - \omega, \quad (20)$$

就得到所求的曲面 $u = u(x, y)$ 。这就是所求包络面的点坐标方程。由 (19)–(20) 式知，此时有

$$u_x = \xi + x \frac{\partial \xi}{\partial x} + y \frac{\partial \eta}{\partial x} - \omega_{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \omega_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \xi. \quad (21)$$

同理

$$u_y = \eta. \quad (22)$$

于是我们得到与 (17) 式完全相同的方程，

从关系式 (17) 可以看到：对于由 $u = u(x, y)$ 所决定的 $\omega = \omega(\xi, \eta)$ ，由它确定的曲面点坐标方程必仍为原先的 $u = u(x, y)$ 。因此，曲面的点坐标方程和切平面坐标方程是等价的，且它们通过 (17) 中的一组对称的式子相联系，二者之间具有对偶性。

将曲面的点坐标方程变换到切平面坐标方程的变换，称为勒让德变换。这一变换和普通的变量变换不同，因为变换的本身依赖于所讨论的函数 $u = u(x, y)$ 。在不少非线性问题中，正是由于这一点，可使问题得到很大的简化，甚至使一个非线性问题化为线性问题。

下面讨论能够进行勒让德变换的条件。容易看到，只要能从

$$\xi = u_x, \quad \eta = u_y \quad (23)$$

中单值反解出 x 及 y 为 (ξ, η) 的函数, 勒让德变换即可进行. 由隐函数存在定理, 若在所考察点, 雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (24)$$

则至少在该点的一个邻域中, 可由 (23) 式单值解出 x 及 y . 对于满足

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0 \quad (25)$$

的曲面 $u = u(x, y)$, 勒让德变换失效. 满足这种关系式的曲面是可展曲面, 即单参数切平面族的包络. 这时, 每一切平面沿着一直线与曲面相切, 自然不可能建立起曲面上的点与切平面之间的一一对应关系.

现在证明, 若

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix} = a \neq 0, \quad (26)$$

则相应的逆变换的雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} u_{\xi\xi} & u_{\xi\eta} \\ u_{\xi\eta} & u_{\eta\eta} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}. \quad (27)$$

这说明, 反过来的勒让德变换也是可行的. 事实上, 将 (23) 式对 ξ 及 η 分别求导一次, 得到

$$u_{xx}\omega_{\xi\xi} + u_{xy}\omega_{\xi\eta} = 1,$$

$$u_{xx}\omega_{\xi\eta} + u_{xy}\omega_{\eta\eta} = 0,$$

$$u_{xy}\omega_{\xi\xi} + u_{yy}\omega_{\xi\eta} = 0,$$

$$u_{xy}\omega_{\xi\eta} + u_{yy}\omega_{\eta\eta} = 1,$$

即

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi\xi} & \omega_{\xi\eta} \\ \omega_{\xi\eta} & \omega_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此即可得 (27) 式。

上面对二元函数引入勒让德变换的方法, 对一般的 $n (\geq 1)$ 元函数 $u = u(x_1, \dots, x_n)$ 也可以类似地进行, 其勒让德变换规则为

$$\begin{cases} u + \omega = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n, \\ u_{x_1} = \xi_1, \dots, u_{x_n} = \xi_n, \\ \omega_{\xi_1} = x_1, \dots, \omega_{\xi_n} = x_n. \end{cases} \quad (28)$$

这个勒让德变换得以进行的条件也与二元情况类似, 这里不再详述。

5. 热力学函数

前面说过, 处于平衡态的流体系统, 其状态量中只有两个是独立的。取不同的独立状态量, 通过勒让德变换, 可以得各种热力学函数。

由 (4)—(5) 式有

$$dU = \theta dS - p dV. \quad (29)$$

若以 e 及 τ 分别表示单位质量流体的内能与体积 (即比容), 而单位质量的熵仍以 S 表示, 则 (29) 式可写为

$$de = \theta dS - p d\tau. \quad (30)$$

于是, 可取 $\tau (= \frac{1}{\rho}, \rho$ 为密度) 及 S 为独立变量, 而 $e = e(\tau, S)$ 为相应的状态方程。于是有

$$\theta = \frac{\partial e}{\partial S}, \quad p = -\frac{\partial e}{\partial \tau}. \quad (31)$$

我们假设 (这些假设通常是可以满足的)

$$\frac{\partial e}{\partial S} > 0, \quad \frac{\partial e}{\partial \tau} < 0, \quad (32)$$

且矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 e}{\partial S^2} & \frac{\partial^2 e}{\partial S \partial \tau} \\ \frac{\partial^2 e}{\partial S \partial \tau} & \frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2} \end{pmatrix} \quad (33)$$

为正定的.

现在我们要利用勒让德变换变到其它的独立变量, 并得到新的热力学函数.

将 S 视为参变量, 对 τ 及 $e(\tau, S)$ 作勒让德变换. 由矩阵 (33) 的正定性, 这是可能的. 由 $n=1$ 时的变换关系 (28), 有

$$\begin{cases} e + \omega = \tau \xi, \\ \frac{\partial e}{\partial \tau} = \xi, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \tau. \end{cases} \quad (34)$$

由 (31) 及 (34) 式知 $p = -\xi$. 记 $i = -\omega$, (34) 的第一式可写为

$$i = e + p\tau. \quad (35)$$

i 是 p 与 S 的函数: $i = i(p, S)$, 称为 (单位质量的) 热焓.

由 (34) 的最后一式, 有

$$\frac{\partial i}{\partial p} = \tau. \quad (36)$$

利用 (35) 式并注意到 (31) 式, 不难验证

$$\frac{\partial i}{\partial S} = \frac{\partial e(\tau, S)}{\partial S} = \theta. \quad (37)$$

这样, 当取 p 及 S 作为独立变量时, τ 及 θ 作为 p 及 S 的函数由 (36) 与 (37) 式给出, 而且还有

$$di = \tau dp + \theta dS. \quad (38)$$

对于等压过程, 有 $di = \theta dS = dQ$, 即在等压过程中, 热焓的增量等于热量的增量, 故热焓有时也称为热函数。我们指出, 热焓是状态量, 而热量却不是状态量。

类似地, 将 τ 视为参数, 对 S 及 $e(\tau, S)$ 作勒让德变换。变换关系式 (28) 给出

$$\begin{cases} e + \omega = S\xi, \\ \frac{\partial e}{\partial S} = \xi, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = S. \end{cases} \quad (39)$$

由 (31) 式知 $\theta = \xi$ 。记 $F = -\omega$, (39) 的第一式可写为

$$F = e - \theta S. \quad (40)$$

F 是 τ 及 θ 的函数: $F = F(\tau, \theta)$, 称为 (单位质量的) 亥姆霍兹 (Helmholtz) 自由能。由 (39) 的最后一式有

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -S. \quad (41)$$

类似于 (37) 式, 容易验证

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial e(\tau, S)}{\partial \tau} = -p. \quad (42)$$

这样, 当取 τ 及 θ 作为独立变量时, S 及 p 作为 τ 及 θ 的函数可由 (41) 及 (42) 式给出, 而且有

$$dF = -pd\tau - Sd\theta. \quad (43)$$

下面说明一下亥姆霍兹自由能的物理意义。我们知道，一个热力学系统释放出的能量不可能全部用来做功，其中一部分必然以热的形式传递出去。我们感兴趣的是能用来做功的这一部分。对于等温过程，由 (40) 式，有

$$dF = de - \theta dS = de - dq, \quad (44)$$

这里 dq 表示由外界传入此（单位质量）系统的热量，而 $dw = de - dq$ 则是外界对此（单位质量）系统所作的功。所以， $-dF$ 就是在等温过程中系统能够对外界做的功。

现在对 τ, S 及 $e(\tau, S)$ 作勒让德变换。变换关系式 (28) 给出

$$\begin{cases} e + \omega = \tau\xi + S\eta, \\ \frac{\partial e}{\partial \tau} = \xi, \quad \frac{\partial e}{\partial S} = \eta, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \tau, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = S. \end{cases} \quad (45)$$

由 (31) 式知

$$\xi = -p, \quad \eta = \theta. \quad (46)$$

记 $G = -\omega$ ，则

$$G = e + p\tau - \theta S = i - \theta S. \quad (47)$$

G 是 p 及 θ 的函数： $G = G(p, \theta)$ ，称为（单位质量的）吉布斯 (Gibbs) 自由能，也称为热力学势。由 (45) 的最后两式得

$$\frac{\partial G}{\partial p} = \tau, \quad \frac{\partial G}{\partial \theta} = -S. \quad (48)$$

这样，当取 p 及 θ 作为独立变量时， τ 及 S 作为 p 及 θ 的函数可由 (48) 式给出，而且有

$$dG = \tau dp - S d\theta. \quad (49)$$

6. 内能与熵的表达式

现在讨论当以 τ 及 θ 作为独立变量时，如何利用状态方程 $p = p(\tau, \theta)$ 以及定容比热 c_v 来表示流体的内能与熵。所谓定容比热是指单位质量的流体在体积不变时，温度升高一度所吸收的热量。显然

$$c_v = \frac{\partial e(\tau, \theta)}{\partial \theta}. \quad (50)$$

由 (30) 式，

$$\theta dS = de + p d\tau, \quad (51)$$

从而

$$\theta \frac{\partial S}{\partial \theta} = c_v \quad (52)$$

及

$$\theta \frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial e}{\partial \tau} + p. \quad (53)$$

但由 (43) 式有

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (54)$$

这样，(53) 式给出

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} - p. \quad (55)$$

由 (50) 及 (55) 式，我们有

$$de = \frac{\partial e}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial e}{\partial \theta} d\theta$$

$$= \left(\theta \frac{\partial p}{\partial \theta} - p \right) d\tau + c_v d\theta. \quad (56)$$

而由 (52) 及 (54) 式, 则有

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\partial S}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial S}{\partial \theta} d\theta \\ &= \frac{\partial p}{\partial \theta} d\tau + \frac{c_v}{\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (57)$$

状态方程 $p = p(\tau, \theta)$ 以及 c_v 一般可通过实验得到. 这样, 由 (56) 及 (57) 即可得到 e 及 S 的表达式.

• 对于理想气体, 状态方程为

$$p = R \frac{\theta}{\tau}, \quad (58)$$

其中 R 为一个正常数. 由 (55) 式, 此时有

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = 0. \quad (59)$$

这说明, 理想气体的内能 e 只是 θ 的函数: $e = e(\theta)$, 因此定容比热 c_v 也如此: $c_v = c_v(\theta)$. 这样, 由 (50) 式就得到

$$e = \int c_v(\theta) d\theta. \quad (60)$$

而由 (57) 式, 则给出熵的表达式

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{R}{\tau} d\tau + c_v(\theta) \frac{1}{\theta} d\theta \\ &= \int R d \ln \tau + c_v(\theta) d \ln \theta. \end{aligned} \quad (61)$$

当 c_v 为常数时 (在温度不太高时, 理想气体即可认为满足这一条件), 气体称为多方气体。此时, 由 (60) 及 (61) 式, 并注意到绝对温度为 0 时内能应为 0, 我们有

$$e = c_v \theta, \quad (62)$$

$$\begin{aligned} S &= c_v \int d \ln \left(\theta \tau^{\frac{R}{c_v}} \right) \\ &= c_v \ln(\theta \tau^{\gamma-1}) + \text{常数}, \end{aligned} \quad (63)$$

其中 $\gamma = \frac{R}{c_v} + 1$ 称为绝热指数。利用状态方程 (58), 上式又可写为

$$\begin{aligned} S &= c_v \ln \left(\frac{p \tau^\gamma}{R} \right) + \text{常数} \\ &= c_v \ln(p \tau^\gamma) + \text{常数}. \end{aligned} \quad (64)$$

由 (64) 式又可得

$$p = (\gamma - 1) \tau^{-\gamma} \exp \left(\frac{S - S_0}{c_v} \right),$$

其中 S_0 为常数。这样, 由 (62)、(58) 及 γ 的定义, 又可得内能的如下表达式

$$e = \tau^{-(\gamma-1)} \exp \left(\frac{S - S_0}{c_v} \right). \quad (65)$$

利用这个表达式, 容易对多方气体验证假设 (32) 以及矩阵 (33) 的正定性。

索 引

(按汉语拼音次序排列; 名词后的数字是该名词出现的页码)

A

- 阿尔芬定理 202
- 阿尔芬特征速度 214
- 安培 - 毕奥 - 萨伐尔定律 11
- 安培定理 12
- 奥格登材料 274

B

- 爆燃 220
- 爆炸 220
- 贝尔特拉米方程 243
- 本构方程 136
- 本构关系 237, 263
- 彼奥拉应力向量 261
- 彼奥拉应力张量 261
- 彼得罗夫斯基意义下的对称抛物型方程组 144
- 比容 105
- 变形梯度张量 240
- 标量 321
- 标势 (标量势) 43, 46
- 标势法 75

表面力 248
并矢 26, 325
泊松比 279
泊松方程 15
波动场区 54
波动方程 38, 285
波向量 40
不可压缩流体 147

C

材料非线性 237
参考构形 238
超弹性 267
初 - 边值问题 32, 35, 147, 148, 283, 291
传导电流 58
磁场 11
磁场强度 58
磁场守恒定律 202
磁导率 11, 58
磁感强度 12
磁化 57
磁化率 58
磁力线“冻结”原理 202
磁流体力学 184
磁流体力学方程组 185, 195
磁偶极矩 92

D

- 达尔文模型 80, 83
- 导热系数 129
- 等离子体 181
- 等值面边界条件 68, 72
- 等值面边值问题 73
- 笛卡儿张量 321
- 狄利克雷边界条件 69
- 狄利克雷积分 69
- 第二彼奥拉应力张量 262
- 第二粘性系数 136
- 第一粘性系数 135
- 电场 3
- 电场强度 1, 3
- 电磁波 20, 37
- 电磁场 1
- 电磁动量 25
- 电磁动量流密度张量 30, 65
- 电磁动量密度向量 30, 65
- (电磁) 动量守恒与转化定律 25
- 电磁感应定律 16
- 电磁能量 25
- 电磁能量流密度向量 29, 65
- 电磁能量密度 29, 65
- 电磁能量守恒与转化定律 25
- 电导率 71, 92
- 电荷守恒定律 9
- 电极化率 57

电场线 4
 电流的连续性方程 10
 电流密度 9
 电偶极矩 50
 电通量 4, 5
 电通密度 57
 电位移向量 57
 电中性 183
 电阻率 71
 定容比热 98
 动力学粘性系数 135
 动量流张量 97
 动量密度向量 97
 对称抛物型方程组 144
 多方气体 98, 352
 多凸 315

E

二阶对称张量 329
 二阶拟线性双曲型方程组 291
 二阶拟线性椭圆型方程组 309
 二阶双曲型方程组 283
 二阶线性椭圆型方程组 306
 二阶张量 324
 二维纳维-斯托克斯方程组 151

F

- 反应流体力学方程组 224
- 非牛顿流体 126
- 非线性弹性理论 238
- 封闭系统 337
- 傅里叶实验定律 129
- 弗利德里克斯不等式 308
- 辐射区 54

G

- 高斯定理 5
- 各向同性 268
- 各向同性张量 330
- 各向异性张量 329
- 孤立系统 337
- 广义胡克定律 278
- 广义剪切模量 305
- 广义牛顿法则 136
- 规范变换 47
- 规范不变性 47

H

- 亥姆霍兹自由能 348
- 合格边界条件 37
- 横波 41
- 横波条件 41

横场 41, 43, 73

J

激波 156

吉布斯自由能 349

极分解 241

极化 56

极小化序列 314

几何非线性 238

剪切模量 280

剪应力 255

间断连接条件 155

焦耳-楞次定律 194

焦耳热 194

交界面条件 60

接触间断 155

介电常数 2, 57

静场区 53

静磁场 12, 73

静磁场的标势 (标量势) 76

静磁场的矢势 (向量势) 73

静电场 3, 65

静电场的势 8

局部音速 107

绝对温度 97

绝热指数 106, 352

均熵流 125

K

- k - 激波 162
- 柯恩不等式 307, 308
- 柯西弹性 263
- 柯西问题 32, 108, 145, 147, 148, 283
- 柯西应变张量 244
- 柯西应力张量 255
- 可逆过程 339
- 响压缩的奥格登材料 275
- 客观性假设 264, 265
- 克劳修斯不等式 339
- 空间描述 239
- 空间坐标 239
- 库仑定律 2
- 库仑规范 50
- 快特征速度 214
- 扩散方程 196

L

- 拉格朗日描述 239
- 拉格朗日形式的方程组 167, 217, 233
- 拉格朗日坐标 168, 239
- 拉梅常数 271
- 拉普拉斯算子 14
- 兰金 - 雨果尼奥条件 155
- 勒让德变换 114, 119, 344
- 楞次定律 16

理想磁流体 205
 理想磁流体力学方程组 205
 理想流体 96
 理想气体 98, 351
 连续性方程 99, 188, 248
 洛伦兹公式 1, 22
 洛伦兹规范 48
 洛伦兹力 22
 洛伦兹条件 48

M

麦克斯韦方程组 1, 18
 慢特征速度 214
 摩擦切应力 126
 姆内 - 里夫林材料 274

N

n 阶张量 324
 纳维 - 斯托克斯方程组 148
 内能 98, 338
 能量积分方法 32
 能量流向量 98
 能量密度 98
 拟静电模型 79
 拟静电状态 79
 拟调和方程 66, 71, 76
 拟线性对称双曲 - 抛物耦合方程组 144, 205, 230

粘性系数 126
牛顿流体 126
诺依曼边界条件 69

O

欧拉方程 102, 137, 191
欧拉描述 239
欧拉形式的方程组 167
欧拉坐标 168, 239
偶极子 50

P

p -方程组 173
膨胀粘性系数 136
平衡态 337
平面波 39
平面电磁波解 39
平面坐标 343
坡印亭矢量 24, 65
普朗特关系式 164

Q

齐次材料 263
强椭圆性条件 283, 291
切平面坐标方程 343

R

- 热焓 347
- 热函数 348
- 热力学第二定律 339, 342
- 热力学第一定律 338
- 热力学激波条件 157
- 热力学势 349
- 热力学态 337
- 热量流密度向量 129
- 弱解 313
- 弱类空向 32

S

- 三维纳维 - 斯托克斯方程组 148
- 熵 105, 110, 297, 340
- 熵不等式 162, 297
- 熵函数 117
- 熵流向量 110, 117, 297
- 熵条件 162
- 圣维南 - 基尔霍夫材料 272
- 矢势法 73
- 矢势 (向量势) 43, 46
- 守恒律方程组 109
- 束缚电荷 56
- 双曲型方程组 123, 293
- 似稳场方程 79

速度向量 96

索伯列夫空间 151, 307, 312

T

弹性材料 263

弹性体 237

弹性张量 290

特征曲线 123

体积力 248

体积力密度 100

体积弹性模量 281

调和方程 77

W

完全能 222

微分形式的欧姆定律 70

位移电流 59

位移梯度张量 243

位移向量 243

稳定性条件 289

无穷小应变张量 244

无旋场 8

无源场 15

物质导数 239

物质描述 239

物质坐标 168, 239

X

- 希阿雷 - 盖依蒙纳材料 275
- 线性弹性理论 238
- 线性弹性体 237
- 相对介电常数 57
- 相对磁导率 58
- 响应函数 263
- 向量 321, 323
- 新型胡克材料 274
- 序列弱下半连续性 314
- 循环 339

Y

- 压强 97
- 压缩激波 163
- 严格双曲型方程组 123, 216
- 杨氏模量 279
- 一阶对称双曲型方程组 31, 32
- 一阶拟线性对称双曲组 106, 108, 208, 230, 298, 300
- 一阶拟线性偏微分方程组 104
- 一阶拟线性双曲组 122, 216, 235
- 一阶偏微分方程组 30
- 一阶张量 323
- 一维拟线性波动方程 304, 305
- 应变能函数 267
- 应变 - 应力关系 278
- 应力 126, 248

应力向量 130, 249
 应力 - 应变关系 278
 应力张量 130
 雨果尼奥方程 157
 雨果尼奥函数 157
 有限弹性理论 238
 有旋场 13
 有源场 7
 右传播激波 162
 右柯西 - 格林应变张量 242

Z

张量的缩并 325
 张量的主不变量 329
 张量的主值 327
 张量的主轴方向 (主方向) 327
 张量积 26, 325
 张量识别定理 130, 327
 真空中的麦克斯韦方程组 20
 正应力 255
 质量流向量 97
 质量密度 97
 中心疏散波 161
 贮能函数 267
 状态方程 98
 准静态过程 337
 自然边界条件 313
 自由电磁波 39

总流量边界条件 68, 72
 总流量边值问题 73
 纵波 42
 纵波条件 42
 纵场 42, 44
 最大非负子空间 37
 左传播激波 162
 左柯西 - 格林应变张量 242