数 学 年 刊
2009,30A(5):659–668

KdV 方程纯孤立子解的整体渐近性质

何忆捷*

提要 研究 KdV 方程纯孤立子解的整体渐近性质，证明了 N-孤立子解一致收敛到 N 个单孤立子解的叠加. 进而得到了 N-孤立子解在 L^1-范数意义下的渐近结果，并借此阐述了纯孤立子解与一般速降解的差异.

关键词 KdV 方程，反散射方法，N-孤立子解，整体渐近性
MR (2000) 主题分类 35Q53
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2009)05-0659-10

1 引言及主要结果

Korteweg-de Vries (KdV) 方程是描述弱非线性长水波的经典方程. KdV 方程的各种性质被广泛地研究，而诸如孤立子解 (见 [1, 2]), positon-解 (见 [3, 4]), complexiton-解 (见 [5, 6]) 等多种具有物理意义的精确解则能显式地表示出来. 本文研究 KdV 方程的孤立子解及其整体渐近性态.

考察具有如下形式的 KdV 方程:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.1}$$

其初值为 $u(0,x) = u_0(x)$. 本文对解空间进行限制，只考虑 u (关于 x) 速降的情况. 对每个固定的时间 t, 可将 $u = u(\cdot, t)$ 视为一维定态 Schrödinger 方程

$$-\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi \quad (x \in \mathbf{R}) \tag{1.2}$$

的势函数.

使方程 (1.2) 存在有界解 ψ 的 λ 称作谱点，其中特征值为有限多个: $\lambda = \lambda_p = -\kappa_p^2$, $p = 1, 2, \cdots, N$, 使对应的特征函数 $\psi_p(x)$ 具有有界的 L^2-范数 (不失一般性，不妨设

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \cdots > \kappa_N > 0 \tag{1.3}$$

以及 $\|\psi_p(x)\|_{L^2} = 1$), 而 $c_p = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\kappa_p x}\psi_p(x)$ 存在，称为归一化系数. 另外，对每个 $\lambda = k^2 > 0$ $(k > 0)$, 存在如下有界解 $\psi_k(x)$:

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + b(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, & x \to +\infty, \\ a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, & x \to -\infty, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $a(k)$ 称为透射系数，$b(k)$ 称为反射系数 (满足守恒关系 $|a|^2 + |b|^2 = 1$). 以上所提到的 c_p, $a(k)$, $b(k)$ 连同方程 (1.2) 的谱，称作位势 u 的散射数据.

本文 2009 年 1 月 24 日收到.
*复旦大学数学科学学院，上海 200433. E-mail: 072018034@fudan.edu.cn

当 u 按 KdV 方程进行演化时，散射数据对 t 的依赖如下：

$$\begin{cases}\kappa_p(t)=\kappa_p(0)=\kappa_p,\\ c_p(t)=c_p(0)\mathrm{e}^{4\kappa_p^3t},\\ b(k,t)=b(k,0)\mathrm{e}^{8\mathrm{i}k^3t},\\ a(k,t)=a(k,0)=a(k),\end{cases}\tag{1.5}$$

其中 $\kappa_p(0), c_p(0), a(k,0), b(k,0)$ 为初始时刻的散射数据. 文 [7] 利用散射数据给出了一般速降解 u 所满足的一个守恒律

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{d}s=-4\sum_{p=1}^{N}\kappa_p+\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\log|T(k)|\mathrm{d}k,\tag{1.6}$$

其中 $T(k)=\frac{1}{a(k)}$ 关于 k 是上半平面的解析函数.

当 $b(k,t)\equiv 0$ 时，上述位势 u 称为 N-孤立子解. GGKM (见 [2]) 得到了表示 N-孤立子解的一个优美的公式

$$u=-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(\det(I+C)),\tag{1.7}$$

其中 $C=\big(c_m(t)c_n(t)\frac{\mathrm{e}^{-(\kappa_m+\kappa_n)x}}{\kappa_m+\kappa_n}\big)_{N\times N}$, I 为 N 阶单位阵. 文 [2] 还证明了对任意给定的紧区间 $I_X=[-X,X]$, u 满足

$$\lim_{t\to+\infty}\Big(\sup_{x-4\kappa_p^2t\in I_X}\{|u(x,t)-u_p(x,t)|\}\Big)=0\tag{1.8}$$

对任意 $p=1,2,\cdots,N$ 成立，其中

$$u_p=u_p(x,t)=-2\kappa_p^2\mathrm{sech}^2[\kappa_p(x-4\kappa_p^2t-\xi_p)]\tag{1.9}$$

是 (1.1) 的单孤立子，而

$$\xi_p=\frac{1}{2\kappa_p}\Big(\log\frac{c_p^2(0)}{2\kappa_p}+2\sum_{m=1}^{p-1}\log\frac{\kappa_m-\kappa_p}{\kappa_m+\kappa_p}\Big).\tag{1.10}$$

本文研究 N-孤立子解 u 的整体渐近性质，为此记

$$u^*=u^*(x,t)=\sum_{p=1}^{N}u_p(x,t).\tag{1.11}$$

尽管由于 KdV 方程的非线性，以上单孤立子的叠加表达式 u^* 一般不再是 (1.1) 的解，但仍可借之研究 u 的性质. 本文主要结果为下述定理：

定理 1.1 对方程 (1.1), 由 (1.7) 给出的 N-孤立子解满足

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)-u^*(\cdot,t)\|_{C^0}=0.\tag{1.12}$$

定理 1.2 对方程 (1.1), 由 (1.7) 给出的 N-孤立子解满足

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)-u^*(\cdot,t)\|_{L^1}=0.\tag{1.13}$$

注 1.1 本文只对 $t\to+\infty$ 的情形作讨论， $t\to-\infty$ 的情形是类似的.

相比于已有结果，定理 1.1 对 N-孤立子解的渐近性态给出了更精确更直观的描述. 从 (1.12) 可知，当时间趋于无穷时， u 仅存在 N 个峰 u_p $(p=1,2,\cdots,N)$, 而 (1.8) 只说

明了有这 N 个以固定速度移动的峰，而未排除存在变速峰的可能. 定理 1.2 给出了 N-孤立子解在 L^1-收敛方面的特殊性质，而方程 (1.1) 的一般速降解并不满足该性质.

本文第 2 节做若干准备工作，第 3 节与第 4 节中分别证明定理 1.1 与定理 1.2, 而纯孤立子解与一般速降解在 L^1-收敛意义下所显示的差异也将在第 4 节中进行讨论.

2 准备工作

首先我们列出与矩阵有关的下述性质.

引理 2.1　设 (1.3) 成立，则 $\left(\frac{1}{\kappa_m+\kappa_n}\right)_{N\times N}$ 为正定阵.

引理 2.2　对给定 N 阶正定阵 A, 存在一个正数 M, 使得对任意 N 阶正定对角阵 B, $(A+B)^{-1}$ 中每个元素的绝对值都不超过 M.

注 2.1　通过一定的行列式运算表明，引理 2.2 中 M 的选取只需依赖于 A 的所有主子式中的最大值和最小值 (细节从略).

对于 N- 孤立子解 (1.7), 我们先回到反散射问题. 当 $K(x,y;t)$ 满足如下 (退化的) GLM 积分方程

$$K(x,y;t)+\sum_{p=1}^{N}c_p^2(t)\mathrm{e}^{-\kappa_p(x+y)}+\sum_{p=1}^{N}c_p^2(t)\mathrm{e}^{-\kappa_p y}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\kappa_p z}K(x,z;t)\mathrm{d}z=0\quad(y\geqslant x)\quad(2.1)$$

时 (其中 t 为参数), 反散射问题的解可由 $u(x,t)=-2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x;t)$ 表示. 值得注意的是

$$K(x,y;t)=-\sum_{p=1}^{N}c_p(t)\psi_p(x,t)\mathrm{e}^{-\kappa_p y},\tag{2.2}$$

其中 $\psi_p(\cdot,t)$ 恰是第 1 节中提到的 (已归一化的) 特征函数.

为满足 (2.1), 令每个 $\mathrm{e}^{-\kappa_p y}$ 系数等于零，得到

$$\begin{aligned}&\psi_m(x,t)+\sum_{n=1}^{N}c_m(t)c_n(t)\frac{\mathrm{e}^{-(\kappa_m+\kappa_n)x}}{\kappa_m+\kappa_n}\psi_n(x,t)\\&=c_m(t)\mathrm{e}^{-\kappa_m x},\quad m=1,2,\cdots,N.\end{aligned}\tag{2.3}$$

令

$$f_m(x,t)=c_m(t)\psi_m(x,t)\mathrm{e}^{-\kappa_m x},\quad m=1,2,\cdots,N.$$

注意到 (2.2), 有

$$\begin{aligned}u(x,t)&=-2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x;t)\\&=2\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{n=1}^{N}c_m(t)\psi_m(x,t)\mathrm{e}^{-\kappa_m x}\Big)\\&=2\sum_{n=1}^{N}f_m'(x,t),\end{aligned}\tag{2.4}$$

其中 f' 表示 $\frac{\partial f}{\partial x}$, 下同.

根据 f_m 的定义，(2.3) 可改写成

$$\frac{1}{c_m^2(t)}e^{2\kappa_m x}f_m(x,t)+\sum_{n=1}^{N}\frac{f_n(x,t)}{\kappa_m+\kappa_n}=1,\quad m=1,2,\cdots,N. \tag{2.5}$$

对 (2.5) 两边关于 x 求偏导，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c_m^2(t)}e^{2\kappa_m x}f'_m(x,t)+\sum_{n=1}^{N}\frac{f'_n(x,t)}{\kappa_m+\kappa_n}\\ &=-2\kappa_m\frac{1}{c_m^2(t)}e^{2\kappa_m x}f_m(x,t),\quad m=1,2,\cdots,N.\end{aligned} \tag{2.6}$$

引理 2.3 设 (2.5) 与 (2.6) 成立，则 f_m 与 f'_m $(m=1,2,\cdots,N)$ 均为 $\mathbf{R}^2$ 上的有界函数.

证 设

$$K=\Big(\frac{1}{\kappa_i+\kappa_j}\Big)_{N\times N}, \tag{2.7}$$

$$D=D(x,t)=\mathrm{diag}\Big\{\frac{1}{c_1^2(t)}e^{2\kappa_1 x},\ \frac{1}{c_2^2(t)}e^{2\kappa_2 x},\ \cdots,\ \frac{1}{c_N^2(t)}e^{2\kappa_N x}\Big\}, \tag{2.8}$$

$$P=\mathrm{diag}\{-2\kappa_1,\ -2\kappa_2,\ \cdots,\ -2\kappa_N\}, \tag{2.9}$$

则 (2.5) 和 (2.6) 可进一步改写为

$$(K+D)(f_1\quad f_2\quad \cdots\quad f_N)^{\mathrm{T}}=(1\quad 1\quad \cdots\quad 1)^{\mathrm{T}} \tag{2.10}$$

和

$$\begin{aligned}&(K+D)(f'_1\quad f'_2\quad \cdots\quad f'_N)^{\mathrm{T}}\\ &=PD(f_1\quad f_2\quad \cdots\quad f_N)^{\mathrm{T}}\\ &=P((1\quad 1\quad \cdots\quad 1)^{\mathrm{T}}-K(f_1\quad f_2\quad \cdots\quad f_N)^{\mathrm{T}}).\end{aligned} \tag{2.11}$$

注意 (1.3) 的假定，由引理 2.1 和引理 2.2 知，可以找到只依赖于矩阵 K 的某个常数 M 来控制 $(K+D)^{-1}$ 中每个元素的绝对值. 这样，观察 (2.10), 对每个 m, 有

$$|f_m|\leqslant NM. \tag{2.12}$$

进一步地，结合 (2.11) 和 (2.12) 来看，我们可选取只依赖于 N, M 及矩阵 K 的常数 L, 使得对每个 m 成立 $|f'_m|\leqslant L$.

3 C^0-模渐近性态

本节中我们分两步证明定理 1.1.

第 1 步 GGKM 的局部渐近结果 (1.8) 描述了 u 在移动紧区间 $I_X+4\kappa_p^2t=[-X+4\kappa_p^2t, X+4\kappa_p^2t]$ 上的渐近性态. 以下我们略作推广以阐明：当 t 变得充分大以后，对每个 $p\in\{1,2,\cdots,N\}$, 在以 $4\kappa_p^2t$ 为中心且长度趋于无穷大的区间内，$|u-u_p|$ 亦能受控于任意小的给定正数 ε.

任意取定一个正数 ε.

对每个 $p\in\{1,2,\cdots,N\}$, 由 GGKM 的局部渐近结果知，存在一个递增至无穷的序列 $\{T_n^p\}$, 使得对每个正整数 n, $|u-u_p|<\varepsilon$ 在 $\{(x,t)\mid t\geqslant T_n^p,\ x-4\kappa_p^2t\in[-n,n]\}$ 中成

立. 于是我们分段地定义 $\alpha_p(t)$ 如下:

$$\alpha_p(t)=n,\quad t\in[T_n^p,T_{n+1}^p),\ n=1,2,\cdots,\tag{3.1}$$

可见 $\alpha_p(t)$ 为定义在 $[T_1^p,+\infty)$ 上递增至无穷的正值函数. 设 $T=\max\{T_1^1,T_1^2,\cdots,T_1^N\}$, 并在 $t\geqslant T$ 时定义

$$X_p^t=[4\kappa_p^2t-\alpha_p(t),\ 4\kappa_p^2t+\alpha_p(t)].\tag{3.2}$$

根据上述定义直接得到如下引理:

引理 3.1 对每个 $p\in\{1,2,\cdots,N\}$, 不等式 $|u-u_p|<\varepsilon$ 在 $\{(x,t)\mid t\geqslant T,\ x\in X_p^t\}$ 中成立.

不失一般性, 设所取的序列 $\{T_n^p\}$ 都增长充分快, 从而 $\alpha_p(t)$ 的增长速率远慢于 βt ($\beta=\min\limits_{1\leqslant p\leqslant N-1}\{2\kappa_p^2-2\kappa_{p+1}^2\}$) (参考 (1.3)), 故约定

$$\alpha_p(t)+\alpha_{p+1}(t)<4(\kappa_p^2-\kappa_{p+1}^2)t,\quad p=1,2,\cdots,N-1,\ t\geqslant T,\tag{3.3}$$

从而由 (3.2) 所定义的 X_p^t 这些区间在任何时间 t 总是两两不重叠的.

当 $t\geqslant T, x\in X_p^t$ 时, 为对 $|u-u^*|$ 作估计, 再考虑 $u_q(x,t)$ $(q\neq p)$. 由 (3.2), (3.3) 以及 $\alpha_p(t)$ 的定义知, 此时成立

$$\lim_{t\to+\infty}(x-4\kappa_q^2t-\xi_q)=\begin{cases}-\infty, & q<p,\\ +\infty, & q>p.\end{cases}\tag{3.4}$$

从而当 $q\neq p$ 时,

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}\Big(\sup_{x\in X_p^t}\{|u_q(x,t)|\}\Big)\\ &=2\kappa_q^2\lim_{t\to+\infty}\Big(\sup_{x\in X_p^t}\{\operatorname{sech}^2[\,\kappa_q(x-4\kappa_q^2t-\xi_q)]\}\Big)=0.\end{aligned}\tag{3.5}$$

由于 $|u-u^*|\leqslant|u-u_p|+\sum\limits_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{N}|u_q|$, 故结合引理 3.1 和 (3.5), 知

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\Big(\sup_{x\in X_p^t}\{|u(x,t)-u^*(x,t)|\}\Big)<2\varepsilon,\quad p=1,2,\cdots,N.\tag{3.6}$$

借此, 我们已在随 N 个孤立子移动并缓慢伸长的 N 个紧区间上作出了有效的估计.

第 2 步 记 Y_j^t $(t\in[T,+\infty),\ j=0,1,\cdots,N)$ 为剩下的 $N+1$ 个区间 (其中以 t 为参数作移动):

$$\begin{cases}Y_0^t=[4\kappa_1^2t+\alpha_1(t),+\infty),\\ Y_N^t=(-\infty,4\kappa_N^2t-\alpha_N(t)],\\ Y_p^t=[4\kappa_{p+1}^2t+\alpha_{p+1}(t),4\kappa_p^2t-\alpha_p(t)],\quad p=1,2,\cdots,N-1.\end{cases}\tag{3.7}$$

显然, 对任何 $t\geqslant T$, 有

$$\Big(\bigcup_{p=1}^N X_p^t\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=0}^N Y_j^t\Big)=\mathbf{R}.\tag{3.8}$$

现在提出如下引理:

引理 3.2 设 $T < T_1 < T_2 < \cdots$ 且 $\lim\limits_{s\to\infty} T_s = +\infty$. 若对某个 $j \in \{0,1,\cdots,N\}$, 有 $x_s \in Y_j^{T_s}$ 对所有正整数 s 成立, 则

$$\lim_{s\to\infty} |u(x_s,T_s)| = 0. \tag{3.9}$$

证 在 (2.5), (2.6) 中用 (x_s,T_s) 代替 (x,t), 结合 (1.5) 中的第 2 式, 可知

$$c_m^{-2}(0)\mathrm{e}^{2\kappa_m(x_s-4\kappa_m^2T_s)}f_m + \sum_{n=1}^{N}\frac{f_n}{\kappa_m+\kappa_n} = 1 \tag{3.10}$$

及

$$c_m^{-2}(0)\mathrm{e}^{2\kappa_m(x_s-4\kappa_m^2T_s)}f_m' + \sum_{n=1}^{N}\frac{f_n'}{\kappa_m+\kappa_n} = -2\kappa_m c_m^{-2}(0)\mathrm{e}^{2\kappa_m(x_s-4\kappa_m^2T_s)}f_m, \tag{3.11}$$

其中 $m = 1,2,\cdots,N$ (此处省略了 f_m 与 f_m' 的自变量 (x_s,T_s)).

接下来的证明过程中, 引理 2.3 起了重要的作用.

回顾诸 $\alpha_p(t)$ 所满足的性质 (3.3), 以下分 3 类情形讨论:

情形 1 $j = 0$, 即

$$x_s \geqslant 4\kappa_1^2T_s + \alpha_1(T_s), \quad s = 1,2,\cdots.$$

令 $s\to\infty$. 由引理 2.3 结合 (3.10) 可得

$$f_m \to 0, \quad m = 1,2,\cdots,N.$$

类似地, 再次运用引理 2.3, 结合 (3.11) 可得 $f_m' = -2\kappa_m f_m$, 从而

$$f_m' \to 0, \quad m = 1,2,\cdots,N.$$

情形 2 $j = N$, 即

$$x_s \leqslant 4\kappa_N^2T_s - \alpha_N(T_s), \quad s = 1,2,\cdots.$$

在 (3.11) 中令 $s\to\infty$. 由诸 f_m 与 f_m' 的有界性, 得

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{f_n'}{\kappa_m+\kappa_n} \to 0, \quad m = 1,2,\cdots,N, \tag{3.12}$$

再由矩阵 $\left(\frac{1}{\kappa_m+\kappa_n}\right)_{N\times N}$ 的可逆性 (见引理 2.1) 可知, 对任何 $n \in \{1,2,\cdots,N\}$, 当 $s\to\infty$ 时, 成立 $f_n' \to 0$.

情形 3 $j \in \{1,2,\cdots,N-1\}$, 即

$$4\kappa_{j+1}^2T_s + \alpha_{j+1}(T_s) \leqslant x_s \leqslant 4\kappa_j^2T_s - \alpha_j(T_s), \quad s = 1,2,\cdots.$$

当 $s\to\infty$ 时, 与情形 1 类似, 可推得

$$f_m' \to 0, \quad m = j+1,\cdots,N. \tag{3.13}$$

此时 (3.12) 对 $m = 1,2,\cdots,j$ 仍是成立的, 注意到 (3.13), 这等价于 $\sum\limits_{n=1}^{j}\frac{f_n'}{\kappa_m+\kappa_n} \to 0$. 再由 $\left(\frac{1}{\kappa_m+\kappa_n}\right)_{p\times p}$ 的可逆性推得, 对任何 $n \in \{1,2,\cdots,j\}$, 当 $s\to\infty$ 时, 成立 $f_n' \to 0$.

综上所述, 当 $s\to\infty$ 时, 有 $f_1', f_2', \cdots, f_N' \to 0$, 从而由 (2.4) 知, (3.9) 成立. 引理 3.2 证毕.

进一步可知，对任意 $j\in\{0,1,\cdots,N\}$, 有

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sup_{x\in Y_j^t}\{|u(x,t)|\}\right)=0. \tag{3.14}$$

如若不然，假设存在一列递增至无穷的序列 $\{T_s\}$ (不妨设 $T_1>T$), 使

$$\sup_{x\in Y_j^{T_s}}\{|u(x,T_s)|\}\geqslant\varepsilon_0>0,\quad s=1,2,\cdots,$$

则对每个 s, 在 $Y_j^{T_s}$ 中取一点 x_s, 使 $|u(x_s,T_s)|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$, 令 $s\to\infty$, 即与 (3.9) 矛盾.

再考虑 $u_q(x,t)$ $(q=1,2,\cdots,N)$. 按照 (3.7) 以及诸 $\alpha_p(t)$ 的定义知，当 $x\in Y_j^t$ 时，

$$\lim_{t\to+\infty}(x-4\kappa_q^2t-\xi_q)=\begin{cases}-\infty, & q\leqslant j,\\ +\infty, & q\geqslant j+1,\end{cases} \tag{3.15}$$

从而

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}\left(\sup_{x\in Y_j^t}\{|u_q(x,t)|\}\right)\\ &=2\kappa_q^2\lim_{t\to+\infty}\left(\sup_{x\in Y_j^t}\{\operatorname{sech}^2[\,\kappa_q(x-4\kappa_q^2t-\xi_q)]\}\right)=0.\end{aligned} \tag{3.16}$$

结合 (3.14), (3.16) 和 (1.11), 得到了另一个重要的估计式

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sup_{x\in Y_j^t}\{|u(x,t)-u^*(x,t)|\}\right)=0,\quad j=0,1,\cdots,N, \tag{3.17}$$

这样就完成了第 2 步.

最后由 (3.6), (3.17) 和 (3.8) 得到如下结论：

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left(\sup_{x\in\mathbf{R}}\{|u(x,t)-u^*(x,t)|\}\right)<2\varepsilon. \tag{3.18}$$

由 ε 的任意性，定理 1.1 证毕.

4 L^1-模渐近性态

文 [2] 中 GGKM 还证明了：若 u 是方程 (1.1) 的 N-孤立子解 (1.7), 则可用 κ_p 和 ψ_p $(p=1,2,\cdots,N)$ 将 u 表示为

$$u=-4\sum_{p=1}^N\kappa_p\psi_p^2. \tag{4.1}$$

对任意固定的 t (下文在没有歧义的前提下将 t 略去不写), 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}u^*\mathrm{d}x=-4\sum_{p=1}^N\kappa_p. \tag{4.2}$$

事实上，这只需对 (4.1) 和 (1.11) (参考 (1.9)) 分别直接积分即可.

对任意 t 和 F $(F>0)$, 设

$$\Gamma^t(F)=\bigcup_{p=1}^N[4\kappa_p^2t+\xi_p-F,4\kappa_p^2t+\xi_p+F]. \tag{4.3}$$

记 $U_p(x,t) = 2\kappa_p \tanh[\kappa_p(x-4\kappa_p^2 t-\xi_p)]$, 则 U_p 关于 x 为增函数且 $U_p(\pm\infty,t) = \pm 2\kappa_p$. 此外，由 (1.9) 和 (4.3) 可知，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}\setminus\Gamma^t(F)} |u_p|\mathrm{d}x &\leqslant U_p(+\infty,t) - U_p(4\kappa_p^2 t+\xi_p+F,t)\\ &\quad + U_p(4\kappa_p^2 t+\xi_p-F,t) - U_p(-\infty,t)\\ &= 4\kappa_p(1-\tanh(\kappa_p F)).\end{aligned} \tag{4.4}$$

从而对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在充分大的 F, 使得对任何 t, 有

$$\int_{\mathbf{R}\setminus\Gamma^t(F)} |u^*|\mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{4.5}$$

另一方面，由定理 1.1, 可以取正数 T, 使得对任意 $t>T$, 有 $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|u-u^*| < \frac{\varepsilon}{2NF}$, 于是

$$\int_{\Gamma^t(F)} |u-u^*|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2NF}\cdot N\cdot 2F = \varepsilon. \tag{4.6}$$

鉴于 (4.1), u 显然是非负的．定义

$$\begin{cases}\Gamma_1^t(F) = \{x \mid u(x,t) < u^*(x,t)\}\cap\Gamma^t(F),\\ \Gamma_2^t(F) = \{x \mid u(x,t) < u^*(x,t)\}\setminus\Gamma^t(F),\\ \Gamma_3^t(F) = \{x \mid 0 \geqslant u(x,t) \geqslant u^*(x,t)\}\cap\Gamma^t(F),\\ \Gamma_4^t(F) = \{x \mid 0 \geqslant u(x,t) \geqslant u^*(x,t)\}\setminus\Gamma^t(F),\end{cases} \tag{4.7}$$

其中对任何固定的 t, $\Gamma_i^t(F)$ $(i=1,2,3,4)$ 为 $\mathbf{R}$ 的一个划分．由此

$$\int_{\Gamma_4^t(F)} |u-u^*|\mathrm{d}x \leqslant \int_{\Gamma_4^t(F)} |u^*|\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbf{R}\setminus\Gamma^t(F)} |u^*|\mathrm{d}x < \varepsilon, \tag{4.8}$$

$$\int_{\Gamma_3^t(F)} |u-u^*|\mathrm{d}x \leqslant \int_{\Gamma^t(F)} |u-u^*|\mathrm{d}x < \varepsilon \quad (t>T) \tag{4.9}$$

且

$$\begin{aligned}&-\int_{\Gamma_1^t(F)\bigcup\Gamma_2^t(F)} |u-u^*|\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3^t(F)\bigcup\Gamma_4^t(F)} |u-u^*|\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u-u^*)\mathrm{d}x = 0,\end{aligned} \tag{4.10}$$

最后一个等号源于 (4.2).

结合 (4.8)–(4.10) 可知，当 $t>T$ 时，有

$$\|u-u^*\|_{L^1} = 2\int_{\Gamma_3^t(F)\cup\Gamma_4^t(F)} |u-u^*|\mathrm{d}x < 4\varepsilon. \tag{4.11}$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即证明了定理 1.2 的结论.

最后利用定理 1.2 和 (1.6) 的结果，我们对 KdV 方程 (1.1) 纯孤立子解与一般速降解在 L^1-收敛性质上的差异略作讨论.

对一般速降解 v, (1.6) 给出如下守恒律：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v\mathrm{d}x = -4\sum_{p=1}^{N}\kappa_p + \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\log|T(k)|\mathrm{d}k, \tag{4.12}$$

其中 $T(k)=\frac{1}{a(k)}$. 当 v 不是纯孤立子解时, $b(k,t)$ 不恒为零, 由于 $|a|^2+|b|^2=1$, 必存在某个 $k'>0$, 使得 $\log|T(k')|=-\log|a(k')|>0$. 又显然 $\log|T(k)|$ 是非负的. 从而由 $T(k)$ 在 k 的上半平面内的解析性可得 $\int_0^{+\infty}\log|T(k)|\mathrm{d}k>0$.

我们再引入与 v 具有相同散射数据 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_N$ 的 N-孤立子解 u. 注意到 (4.2) 和 (4.12), 令 $t\to+\infty$, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|v-u^*|\mathrm{d}x&\geqslant\left|\int_{-\infty}^{+\infty}v\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{d}x\right|-\int_{-\infty}^{+\infty}|u-u^*|\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\log|T(k)|\mathrm{d}k-\varepsilon,\end{aligned}\tag{4.13}$$

其中最后一个不等号源于定理 1.2. 这说明当考察 L^1-模渐近性态时, (1.1) 的一般速降解并不收敛到 N 个单孤立子解的叠加式, 除非它是纯孤立子解.

致谢 感谢周子翔教授的悉心指导及对本文的帮助和建议.

参 考 文 献

[1] Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D. and Miura R. M., Method for solving the Korteweg-de Vries equation [J], *Phys. Rev. Lett.*, 1967, 19:1095–1097.

[2] Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D. and Miura R. M., Korteweg-de Vries equation and generalizations, VI, methods for exact solution [J], *Comm. Pure Appl. Math.*, 1974, 27:97–133.

[3] Matveev V. B., Generalized Wronskian formula for solutions of the KdV equations: first applications [J], *Phys. Lett. A*, 1992, 166:205–208.

[4] Matveev V. B., Positon-positon and soliton-positon collisions: KdV case [J], *Phys. Lett. A*, 1992, 166:209–212.

[5] Ma W. X., Complexiton solutions to the Korteweg-de Vries equation [J], *Phys. Lett. A*, 2002, 301:35–44.

[6] Ma W. X. and You Y. C., Solving the Korteweg-de Vries equation by its bilinear form: Wronskian solutions [J], *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2005, 357:1753–1778.

[7] Novikov S., Manakov S. V., Pitaevskii L. P. and Zakharov V. E., Theory of Solitons [M], New York: Consultants Bureau, 1984.

[8] Eckhaus W. and van Harten A., The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons [M], Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1981.

[9] Drazin P. G. and Johnson R. S., Solitons: An Introduction [M], Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[10] Gu C. H., Soliton Theory and Its Applications [M], Hangzhou: Springer-Verlag and Zhejiang Science and Technology Publishing House, 1991.

[11] Gel'fand I. M. and Levitan B. M., On the determination of a differential equation from its spectral function [J], *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.* 2, 1955, 1:253–304.

Global Asymptotic Behavior of Pure Soliton Solutions of the KdV Equation

HE Yijie*

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China.
E-mail: 072018034@fudan.edu.cn

Abstract This paper studies the global asymptotic behavior of pure soliton solutions of the KdV equation and obtains the global uniform convergence of N-soliton solution to the linear superposition of N single solitons. Moreover, the asymptotic behavior of N-soliton solutions in L^1-norm is also obtained, which demonstrates the difference between pure soliton solutions and general Schwartz solutions.

Keywords KdV equation, Inverse scattering method, N-soliton solution, Global asymptotic behavior

2000 MR Subject Classification 35Q53

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 30 No. 4, 2009
by ALLERTON PRESS, INC. NEW YORK, USA