我们在光速不变的假设下来导出当一个时间和坐标为 (t',x',y',z') 的参考系 K' 相对另一个时间和坐标为 (t,x,y,z) 的参考系 K 作匀速运动时两个参考系中时间和坐标之间的线性变换, 这就是 Lorentz 变换.

下面来看一个特殊的 Lorentz 变换: K' 系的坐标轴与 K 系的坐标轴平行且同向, 而 K' 系相对于 K 系沿 x 方向作匀速运动, 速度为 v. 进一步设在 $t=0$ 时这两个坐标系的原点重合, 并在原点 $t=0$ 时 $t'=0$ (这只要调整 t' 的零点即可). 于是, 可设 Lorentz 变换为

$$x' = \lambda(x-vt), \quad y' = \eta y, \quad z' = \eta z, \quad ct' = \mu x + \nu ct, \tag{134}$$

并且满足 $\lambda > 0$, $\nu > 0$, $\eta > 0$. (由于 y,z 的地位相同, 故设其放缩系数相同.)

现在在 $t=0$ 时两个坐标系的公共原点有一个光源发光. 从 K 系来看, 在时刻 t 时光的波前位于球面 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ 上, 而从 K' 系来看, 在时刻 t' 时光的波前位于球面 $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$ 上. 所以, 时空变换 $(t,x,y,z)\to(t,x',y',z')$ 必须将所有满足 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ 的点变到 $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$ 上. 由于时空变换是线性变换, $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$ 是关于 (t,x,y,z) 的二次型. 设它的 t^2 的系数为 $-\rho c^2$, 那么

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2-\rho\big(x^2+y^2+z^2-c^2t^2\big)$$

关于 t 是线性的. 由于它要对所有满足 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ 的 (t,x,y,z) 都为零, 只有成立

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=\rho\big(x^2+y^2+z^2-c^2t^2\big). \tag{135}$$

将 (134) 式代入 (135) 式即可得 $\rho=\eta^2$,

$$\lambda^2-\mu^2=\eta^2, \quad \nu^2-\lambda^2v^2/c^2=\eta^2, \quad \mu\nu+\lambda^2 v/c=0. \tag{136}$$

它的解为

$$\lambda=\frac{\eta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \mu=-\frac{\eta v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \nu=\frac{\eta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{137}$$