

坐标变换、参数方程和极坐标方程 (Coordinate Transformation , Parametric Equation and Polar Coordinate Equation)

曲线的参数方程和极坐标方程是解析几何中两类特定形式的曲线方程,而坐标变换则是简化曲线方程的一个工具.在本章中,我们将介绍坐标系的平移和旋转,让学生能应用坐标变换化简曲线方程并研究其性质,能掌握参数方程和极坐标方程的相关概念与结论.

* 14.1 坐标轴的平移

(Parallel Displacement of Coordinate)

点的坐标和曲线的方程是相对一定的坐标系来说的.

例如,如图 14-1,圆 O' 的圆心 O' 在坐标系 xOy 中的坐标是 $(2, 1)$, 圆 O' 的方程是 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3^2$; 如果取坐标系 $x'O'y'$ ($O'x' \parallel Ox, O'y' \parallel Oy$), 那么在这个坐标系中, O' 的坐标就为 $(0, 0)$, 并且圆 O' 的方程是 $x'^2 + y'^2 = 3^2$.

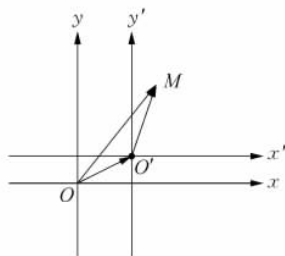
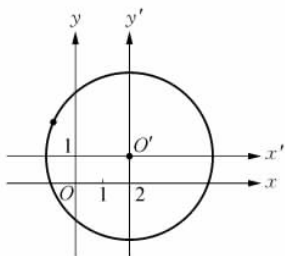


图 14-1

定义 坐标轴的方向和长度单位都不改变,只改变原点的位置,这种坐标系的变换叫做坐标轴的平移(parallel displacement of coordinate),简称移轴(displacement axis).

从上面的例子我们看到,通过坐标系的平移可以使曲线方程简化,有利于研究曲线的性质.

下面研究在平移情况下,同一个点在两个不同的坐标系中坐标之间的关系.

设 O' 在原坐标系 xOy 中的坐标为 (h, k) , 即 $\overrightarrow{OO'} = (h, k)$, 以 O' 为原点平移坐标轴, 建立新坐标系 $x'O'y'$. 平面内任意一点 M 在原坐标系中的坐标为 (x, y) , 在新坐标系中的坐标为 (x', y') , 即 $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, $\overrightarrow{O'M} = (x', y')$, 由 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, 得 $(x, y) = (h, k) + (x', y') = (x' + h, y' + k)$, 因此, 点 M 的原坐标、新坐标之间, 有下面的关系:

$$x = x' + h, \quad y = y' + k. \quad ①$$

或者写成
$$x' = x - h, \quad y' = y - k. \quad ②$$

公式①、②叫做平移公式(formula of the parallel displacement).

例1 平移坐标轴, 把原点平移到 $O'(2, -3)$, 求:

- (1) 点 $P(-2, 3)$ 的新坐标;
- (2) 点 Q 的新坐标是 $(0, 2)$, 求 Q 的原坐标;
- (3) 曲线 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 在新坐标系下的方程;
- (4) 曲线 $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{5} = 1$ 在原坐标系中的方程.

解 (1) 把点 P 的原坐标分别代入 $x' = x - 2$, $y' = y + 3$, 便得到它的新坐标为: $x' = -4$, $y' = 6$, 即点 P 的新坐标为 $(-4, 6)$.

(2) 把点 Q 的新坐标分别代入 $x = x' + 2$, $y = y' - 3$, 便得到点 Q 的原坐标为 $(2, -1)$.

(3) 因为坐标系的改变, 曲线上每一点的坐标都相应的改变, 所以曲线的方程也要改变. 设曲线上任意一点的新坐标为 (x', y') , 那么 $x = x' + 2$, $y = y' - 3$.

代入原方程,就得到新方程: $x'^2 + y'^2 = 16$.

(4)将移轴公式 $x' = x - 2$ $y' = y + 3$ 代入新方程,得曲线在原坐标系中的方程:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{5} = 1.$$

例2 平移坐标轴,化简下列方程:

$$(1) x^2 + y^2 - 4x = 0; \quad (2) 4x^2 - 9y^2 + 16x - 54y - 29 = 0.$$

解 (1)配方得 $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$, 设 $x' = x - 2$ $y' = y$, 得曲线的新方程为 $x'^2 + y'^2 = 2^2$.

(2)把 $x = x' + h$ $y = y' + k$ 代入方程,得

$$4(x' + h)^2 - 9(y' + k)^2 + 16(x' + h) - 54(y' + k) - 29 = 0,$$

即

$$4x'^2 - 9y'^2 + (8h + 16)x' - (18k + 54)y' + 4h^2 - 9k^2 + 16h - 54k - 29 = 0. \quad (1)$$

令 $8h + 16 = 0$ $18k + 54 = 0$, 解得 $h = -2$ $k = -3$.

代入①,得新曲线方程 $\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{9} = 1$.

例3 求下列各曲线的顶点和焦点的坐标、准线方程及双曲线的渐近线方程.

$$(1) 16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 164 = 0; \quad (2) y = x^2 - 4x + 2.$$

解 (1)把原方程左边配方,得 $16(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 144$.

令 $x' = x + 1$ $y' = y - 2$, 则 $16x'^2 - 9y'^2 = 144$. 即

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{16} = 1.$$

方程的曲线是双曲线. $a = 3$ $b = 4$ $c = \sqrt{9+16} = 5$.

在新坐标系 $x'O'y'$ 中,顶点坐标是 $(-3, 0)$ $(3, 0)$, 焦点坐标是 $(-5, 0)$ $(5, 0)$, 准线方程是 $x' = \pm \frac{9}{5}$, 渐近线方程是 $y' = \pm \frac{4}{3}x'$;

在原坐标系 xOy 中, 顶点坐标是 $(-4, 2)$ $(2, 2)$, 焦点坐标是 $(-6, 2)$ $(4, 2)$, 准线方程是 $x = -\frac{14}{5}$ 和 $x = \frac{4}{5}$, 渐近线方程是 $4x - 3y + 10 = 0$ 和 $4x + 3y - 2 = 0$.

(2) 把原方程配方得 $y + 2 = (x - 2)^2$.

令 $x' = x - 2$, $y' = y + 2$, 则 $x'^2 = y'$. 方程的曲线是抛物线且 $p = \frac{1}{2}$.

在新坐标系 $x'O'y'$ 中, 顶点坐标是 $(0, 0)$, 焦点坐标是 $(0, \frac{1}{4})$, 准线方程是 $y' = -\frac{1}{4}$;

在原坐标系 xOy 中, 顶点坐标是 $(2, -2)$, 焦点坐标是 $(2, -\frac{7}{4})$, 准线方程是 $y = -\frac{9}{4}$.

课堂活动



· 自己想

1. 利用移轴公式化简曲线方程通常有配方法和待定系数法两种, 它们各有什么优势与不足?

2. 利用移轴公式将二次曲线 $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 化简后, 其二次项系数, 一次项系数和常数项有何变化? 最简表达式可化为怎样的形式?

习题练习



· 自己练

1. 平移坐标轴, 把原点移到 O' , 求下列各曲线的新方程, 并画出新坐标轴和图形.

(1) $x = 4, O'(2, 3)$;

(2) $2x - 3y = 5, O'(1, 2)$;

(3) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0, O'(-2, 1)$;

(4) $x^2 + 2x - y + 3 = 0, O'(-1, 2)$

2. 平移坐标轴化简方程：

(1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;

(2) $2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$;

(3) $4x^2 - 9y^2 + 16x - 36y + 16 = 0$;

(4) $y^2 - 6y + 6x + 24 = 0$.

3. 求下列曲线的焦点坐标和对称轴方程.

(1) $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y - 7 = 0$;

(2) $4x^2 - y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$;

(3) $x^2 - 8x + 4y = 0$.

4. 已知双曲线两顶点的坐标是 $(2, 1)$ 和 $(2, -5)$, 虚轴长为 8, 求双曲线的方程.

5. 椭圆 $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的中心在直线 $3x - y + 6 = 0$ 上滑动, 且保持对称轴平行移动, 求中心滑到什么位置时, 椭圆与直线 $x + y - 6 = 0$ 相交所得的弦长为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

6. 已知双曲线 $4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y = m$ 的焦距为 10, 求 m 的值.

7. 已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A, B 是椭圆 $\frac{(x-2)^2}{13^2} + \frac{(y+1)^2}{5^2} = 1$ 的两个焦点, 顶点 C 在抛物线 $y = x^2 + 1$ 移动. 求 $\triangle ABC$ 的重心轨迹方程.

* 14.2 坐标轴的旋转变换 (Rotation Mapping of the Coordinate System)

我们已经学过坐标轴的平移, 现在来讨论坐标轴旋转时, 同一点的坐标间的关系.

如果坐标轴的原点和长度单位都不变, 只是坐标轴按同一方向绕原

点旋转同一角度,这种坐标系的变换叫做坐标轴的旋转(rotation of the coordinate axes),简称转轴(rotation of axes).

下面来求转轴时的坐标变换公式.

设坐标轴旋转角为 θ . 如图 14-2,

设 e_1, e_2 分别是 x 轴、 y 轴的单位正向量, e'_1, e'_2 分别是 x' 轴、 y' 轴的单位正向量, 则有

$$e'_1 = (\cos \theta, \sin \theta) = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta,$$

$$e'_2 = \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$= -e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta.$$

①

在平面内任取一点 M , 它在坐标系 xOy 和 $x'O'y'$ 中的坐标分别为 (x, y) 和 (x', y') , 即

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2, \quad \overrightarrow{OM} = x'e'_1 + y'e'_2. \quad ②$$

将①式代入②式得

$$xe_1 + ye_2 = (x' \cos \theta - y' \sin \theta)e_1 + (x' \sin \theta + y' \cos \theta)e_2,$$

从而可以得到
$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{cases} \quad ③$$

由③解出 x', y' 得
$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases} \quad ④$$

公式③是用新坐标表示原坐标的旋转变换公式, 公式④是用原坐标表示新坐标的旋转变换公式, 统称旋转(转轴)公式(rotation formula of axes).

公式④也可在③中以 $-\theta$ 代替 θ 来得到. 公式③、④还可用矩阵形式写成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad ⑤$$

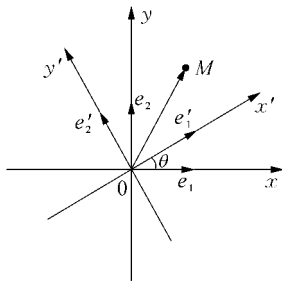


图 14-2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

④'

例 1 把坐标轴旋转 $\frac{\pi}{3}$, 求点 $P(-\sqrt{3}, 1)$ 在新坐标系中的坐标.

解 把 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 代入公式④ 得
$$\begin{cases} x' = -\sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 0, \\ y' = -(-\sqrt{3}) \cdot \sin \frac{\pi}{3} + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2. \end{cases}$$

点 P 在新坐标系中的坐标是 $(0, 2)$.

例 2 将坐标轴旋转 $\frac{\pi}{4}$, 求曲线 $2xy = a^2$ 在新坐标系中的方程, 并

画图.

解 把 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 代入公式③ 得

$$x = x' \cos \frac{\pi}{4} - y' \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y',$$

$$y = x' \sin \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'.$$

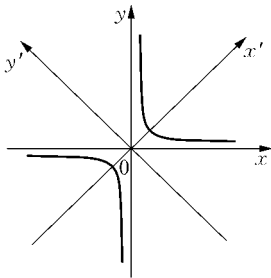


图 14-3

代入方程, 得新坐标系中的方程为

$$x'^2 - y'^2 = a^2.$$

它是一条等轴双曲线, 其图形如图 14-3 所示.

从上例可以看出, 把坐标轴旋转一个适当的角度, 可以简化二元二次方程

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (B \neq 0), \quad (5)$$

使新方程没有 $x'y'$ 项. 如何选择旋转角呢? 下面我们利用旋转公式③来研究这个问题.

将公式③代入方程⑤, 可得

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \quad (5')$$

其中 $A' = A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta$,

$$B' = -2A \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \sin \theta \cos \theta,$$

$$C' = A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta,$$

$$D' = D \cos \theta + E \sin \theta,$$

$$E' = -D \sin \theta + E \cos \theta.$$

为了使 $B' = 0$, 则得 $B \cos 2\theta = (A - C) \sin 2\theta$, 只要取 θ 满足下式就可以了,

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}. \quad (6)$$

即取满足公式⑥的角 θ , 作旋转变换, 就可以使方程⑤中没有 $x'y'$ 项.

由于旋转公式里只用到 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 的值, 所以可以由三角恒等式来计算 $\sin \theta, \cos \theta$.

例3 利用坐标轴的旋转化简方程 $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 = 10$, 并画出它的图形.

解 $\cot 2\theta = \frac{2-1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以

$$\cos 2\theta = \frac{-\sqrt{3}/3}{\sqrt{1+1/3}} = -\frac{1}{2},$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1+1/2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1-1/2}{2}} = \frac{1}{2}.$$

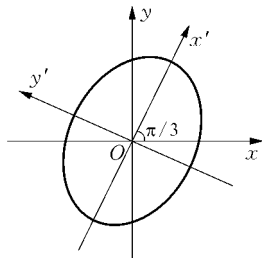


图 14-4

因此旋转公式是 $x = \frac{x' - \sqrt{3}y'}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2}$.

代入原方程, 化简得标准方程是 $\frac{x'^2}{20} + \frac{y'^2}{4} = 1$. 它是一个椭圆, 图形

如图 14-4 所示.

课堂活动



· 自己想

1. 化简二元二次方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, 通常有哪些步骤?

2. 通过坐标轴的旋转化简二元二次方程⑤为方程⑤, 其二次项系数与常数项变化有何特征?

习题练习



· 自己练

1. 设旋转角 $\theta = -\frac{\pi}{4}$, 求新坐标系中的两点

$A(-3, 2), B(2, 0)$ 在原坐标系中的坐标.

2. 设旋转角 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 求原坐标系中的两点 $C(2, -1), D(0, 2)$ 在新

坐标系中的坐标.

3. 按所给的角 θ 旋转坐标轴, 变换下列各方程:

(1) $x + y = 0, \left(\theta = \frac{\pi}{4}\right);$

(2) $x - 2y = 0, \left(\theta = -\frac{\pi}{2}\right);$

(3) $x^2 + y^2 = 4, \left(\theta = \frac{\pi}{6}\right);$

(4) $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 8, \left(\theta = -\frac{\pi}{3}\right).$

4. 利用坐标轴的旋转, 化简下列方程, 使其不含 $x'y'$ 项.

(1) $x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 0;$

(2) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 22 = 0;$

(3) $x^2 + 4xy + y^2 = 16;$

(4) $21x^2 - 10\sqrt{3}xy + 31y^2 = 144.$

5. 设 $f(x, y) = 3x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2$.

(1) 求旋转角 θ , 使 $f(x, y)$ 化简后不含 $x'y'$ 项;

(2) 作出 $f(x, y) = 24$ 在 xOy 平面上的图象;

(3) 对 $(x, y) \neq (0, 0)$ 求 $g(x, y) = \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 的最大值和最小值.

14.3 曲线的参数方程 (Parametric Equation of a Curve)

前面我们所研究过的曲线方程 $F(x, y) = 0$, 都是表示曲线上任意一点 x, y 之间的直接关系的. 但是在解决某些问题时, 对于曲线上任意点 $M(x, y)$, 它们的坐标 x 与 y 的直接关系往往不容易发现, 而通过第三个变数间接地表示 x, y 之间的关系却比较方便. 下面我们看一个例子:

设炮弹的发射角为 α , 发射初速度为 v_0 , 求弹道曲线的方程(不计空气阻力).

取炮口为原点, 水平方向为 x 轴, 建立直角坐标系(如图 14-5), 设炮弹发射后的位置在点 $M(x, y)$.

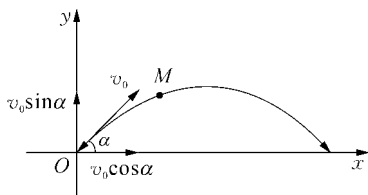


图 14-5

可以看出, 点 M 运动的特征难以用 x, y 之间的直接关系表达出来, 但是点 $M(x, y)$ 的位置明显地被炮弹飞行的时间 t 所确定. 事实上, 由物理学知识可知, 此时炮弹在 \vec{Ox} 方向上是以 $v_0 \cos \alpha$ 为初速度作匀速直线运动, 在 \vec{Oy} 方向上是以 $v_0 \sin \alpha$ 为初速度作竖直向上抛物运动. 于是

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases} \quad (1)$$

其中 g 是重力加速度(取 9.8 米/秒²). 当 t 取定某个允许值时, 由方程组 ① 就可以唯一地确定此刻炮弹的确切位置. 如上, 这种通过引入一个辅

助变量 t ,间接地建立 x 、 y 之间的关系的做法 ,不仅十分自然 ,而且具有实际意义. 如方程组①中的两个方程就分别反映了炮弹的水平距离、高度和时间的关系. 由此可见 ,方程组①实际上表示出了炮弹运行的弹道曲线.

一般地 ,在平面直角坐标系中 ,如果曲线 C 上任意一点的坐标 x 、 y 都是第三个变量 t 的函数 ,即

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \quad (t \in D) \quad ②$$

并且对于 t 的每一个允许值 ,由方程组②所确定的点 $M(x, y)$ 都在曲线 C 上 ,那么方程组②就叫做曲线 C 的参数方程(parametric equation) , t 叫做参数(parametric) ,简称参数.

相对于参数方程来说 ,前面学过的直接给出曲线上点的坐标 x 、 y 间关系的方程 $F(x, y) = 0$ 叫做曲线的普通方程.

求曲线的参数方程时 ,关键是选择恰当的参数.

例 1 写出经过定点 $P(2, 3)$,且倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的直线 l 的参数方程.

解 因为直线 l 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$,而 $(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

所以 $\vec{d} = (-1, \sqrt{3})$ 是 l 的一个方向向量.

又因为直线 l 经过点 $P(2, 3)$,所以直线 l 的点方向式方程为

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{\sqrt{3}}.$$

设比值为 t ,得直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3 + \sqrt{3}t. \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

参数方程和普通方程是直角坐标系下曲线方程的不同表示形式 ,它们都是表示曲线上点的坐标之间关系的. 一般情况下 ,我们可以通过消去参数方程中的参数 ,得出曲线的普通方程 ;也可以选择一个参数将普

通方程变成参数方程的形式.

例2 把弹道曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, & \textcircled{3} \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2, & \textcircled{4} \end{cases}$$

化为普通方程.

解 由③、④消去参数 t 得普通方程

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x. \quad \left(0 \leq x \leq \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \right)$$

这里的 v_0 、 α 、 g 都是确定值. 可见炮弹运动的轨迹是抛物线的一部分.

曲线的参数方程与普通方程互化时, 要注意两种方程中的变量 x 、 y 的取值范围, 使化成的普通方程与参数方程等价.

例3 将下列曲线的参数方程化为普通方程:

$$(1) \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 1 - 2t; \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \quad (2) \begin{cases} x = \sin \theta, \\ y = \cos 2\theta; \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

$$(3) \begin{cases} x = 1 - 3\left(t - \frac{1}{t}\right), \\ y = -1 + 2\left(t + \frac{1}{t}\right); \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

$$(4) \begin{cases} x = 1 + \cos \theta, \\ y = \sin \theta + \tan \theta. \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数 } \rho < \theta < \frac{\pi}{2})$$

解 (1) 由参数方程第一式乘 2 与第二式乘 3 相加, 得

$$2x + 3y = 2(2 + 3t) + 3(1 - 2t) = 7,$$

因此所求的普通方程为 $2x + 3y - 7 = 0$.

(2) 将参数方程中的第一个式子代入第二个式子, 得 $y = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2x^2$,

由 $x = \sin \theta \in [-1, 1]$, 得 $x^2 \in [0, 1]$, 从而 $y = 1 - 2x^2 \in [-1, 1]$

因此,所求的普通方程为 $y = -2x^2 + 1$. ($-1 \leq x \leq 1$)

(3) 由题设得

$$\frac{(x-1)^2}{9} = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2, \quad \frac{(y+1)^2}{4} = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2.$$

两式相减得 $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = -4$, 所以这条曲线的普通方程为

$$\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{36} = 1.$$

(4) 因 $y = (1 + \cos \theta) \tan \theta = x \tan \theta$, 即 $\tan \theta = \frac{y}{x}$. 所以

$$y - \frac{y}{x} = \sin \theta.$$

又 $x - 1 = \cos \theta$, 消去参数得 $\left(y - \frac{y}{x}\right)^2 + (x - 1)^2 = 1$, 即

$$(x^2 + y^2)(x - 1)^2 = x^2.$$

由 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 得 $0 < \cos \theta < 1$, 从而 $1 < x < 2$. 同理 $y > 0$. 故所

求普通方程为

$$(x^2 + y^2)(x - 1)^2 = x^2. \quad (1 < x < 2, y > 0)$$

例 4 将曲线的普通方程 $x^2 + 9y^2 = 4$ 分别按以下参数化为参数方程.

(1) 设 $x = 2\cos \theta$; (2) 设 $x = ty + 2$.

解 (1) 将 $x = 2\cos \theta$ 代入 $x^2 + 9y^2 = 4$ 得 $9y^2 = 4\sin^2 \theta$.

取 $y = \frac{2}{3}\sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) 故 $x^2 + 9y^2 = 4$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2\cos \theta, \\ y = \frac{2}{3}\sin \theta. \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

(2) 将 $x = ty + 2$ 代入 $x^2 + 9y^2 = 4$ 得 $(t^2 + 9)y^2 + 4ty = 0$,

解得

$$y = 0 \text{ 或 } y = -\frac{4t}{9+t^2}.$$

对 $t \in \mathbf{R}$ 将 $y = -\frac{4t}{9+t^2}$ 代入 $x = ty + 2$, 得 $x = \frac{18-2t^2}{9+t^2}$. 又

$$x = -2 + \frac{36}{9+t^2} \neq -2.$$

故参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{18-2t^2}{9+t^2}, \\ y = -\frac{4t}{9+t^2} \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \text{ 和 } \begin{cases} x = -2, \\ y = 0. \end{cases}$$

上例表明 , 同一条曲线的普通方程 , 因参数选择的不同 , 其参数方程也不同.

习
题
练
习



• 自己练

1. 写出经过定点 $P(1, 2)$, 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线 l

的参数方程.

2. 参数方程 $\begin{cases} x = 3\cos\theta, \\ y = 3\sin\theta, \end{cases} \theta \in [0, 2\pi]$ 与 $\begin{cases} x = 3\cos\theta, \\ y = 3\sin\theta, \end{cases} \theta \in$

$[0, \pi]$ 是否表示同一曲线? 为什么?

3. 一木棒 AB 的两端 A, B 各在相互垂直的两杆上滑动 , 且 $AB = 10 \text{ cm}$, 求 AB 的中点 P 的轨迹的参数方程.

4. 边长为 2 的正三角形 ABC 的顶点 A, B 分别在 y 轴的正半轴 (包括坐标原点) x 轴的正半轴 (包括坐标原点) 上移动 , 求顶点 C 的轨迹的参数方程 (A, B, C 按逆时针方向排列)

5. 化下列参数方程为普通方程 , 并画出图形.

$$(1) \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 4 - \sqrt{3}t; \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \quad (2) \begin{cases} x = t^2 - t, \\ y = t^2 + 2; \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

$$(3) \begin{cases} x = 5\cos\theta + 2, \\ y = 3\sin\theta - 3; \end{cases} \quad (\theta \in [0, 2\pi))$$

$$(4) \begin{cases} x = 2t + \frac{1}{t}, \\ y = t - \frac{1}{2t}. \end{cases} \quad (t \neq 0)$$

6. 根据所给的条件, 化下列方程为参数方程(t 和 ϕ 是参数)

(1) $4x^2 + y^2 - 16x + 12 = 0$, $y = 2\sin\phi$;

(2) $4x^2 + y^2 = 16$, $y = tx + 4$;

(3) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$, $x = 2\sqrt{2}\cos^3\phi$;

(4) $x^2 - y^2 = 4$, $x = t + \frac{1}{t}$.

14.4 直线与圆锥曲线的参数方程 (Parametric Equations of Lines and Conic Sections)

下面我们进一步来研究直线、圆锥曲线的参数方程及其应用.

1. 直线的参数方程

如图 14-6, 直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$, l 的一个方向向量为 $\vec{d} = (u, v)$. 设 $P(x, y)$ 是 l 上的任意一点, 那么由 $\frac{x-x_0}{u} =$

$\frac{y-y_0}{v} = t$, 得直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt. \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

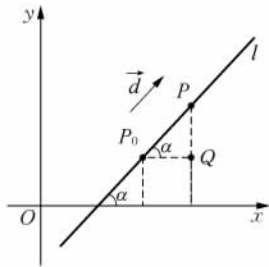


图 14-6

如果 l 的倾斜角为 α , 那么 l 的一个方向向量为 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ($0 \leq \alpha < \pi$). 此时, 直线 l 的参数方程可写成

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\sin\alpha. \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

由于 $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0) = (t \cos \alpha, t \sin \alpha)$, 所以 $|t| = |\overrightarrow{P_0P}|$, 这是参数 t 的几何意义.

例 1 写出过点 $A(1, 2)$, 倾斜角为 135° 的直线 l_1 的参数方程. 若 l_1 与 $l_2: y = 2x - 4$ 相交于点 B .

(1) 求 $|AB|$; (2) 求点 B 的坐标.

解 (1) l_1 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + t \cos 135^\circ, \\ y = 2 + t \sin 135^\circ, \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \quad \text{即} \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t. \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \quad \text{①}$$

欲求 $|AB|$, 由参数 t 的几何意义, 只要求出 t 则 $|AB| = |t|$. 把①代入 l_2 的方程, 得

$$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t = 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - 4,$$

解得 $t = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 故 $|AB| = |t| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

(2) 欲求点 B 的坐标, 只要将 $t = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 代入①, 得

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{7}{3}, \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

所以点 B 的坐标为 $\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

例 2 如图 14-7, 圆 $x^2 + y^2 = 8$ 内有一个点 $P_0(1, 2)$, AB 为过 P_0 且倾斜角为 α 的弦.

(1) 当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, 求 $|AB|$;

(2) 当弦 AB 被 P_0 平时, 写出直线 AB 的方程.

解 由已知, 直线 AB 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha, \\ y = 2 + t \sin \alpha. \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

把上式代入 $x^2 + y^2 = 8$, 整理得 $t^2 + 2(\cos \alpha + 2 \sin \alpha)t - 3 = 0$.

它显然有两个实根, 记为 t_1, t_2 , 由韦达定理得

$$t_1 + t_2 = -2(\cos \alpha + 2 \sin \alpha), \quad t_1 \cdot t_2 = -3.$$

(1) 当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, $|AB|^2 = |t_1 - t_2|^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = [2(\cos \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{4})]^2 - 4(-3) = 30$, 所以 $|AB| = \sqrt{30}$.

(2) 弦 AB 被点 P_0 平分, 当且仅当 $t_1 + t_2 = 0$ 且 $\Delta > 0$, 即

$2(\cos \alpha + 2 \sin \alpha) = 0, \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 即 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 从而直线 AB 的方程为

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1), \quad \text{即} \quad x + 2y - 5 = 0.$$

2. 圆锥曲线的参数方程

(1) 圆的参数方程.

设圆的标准方程为 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. ($r > 0$)

由于 $\left(\frac{x-a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1$, 所以令

$$\frac{x-a}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{y-b}{r} = \sin \varphi,$$

故圆的参数方程为

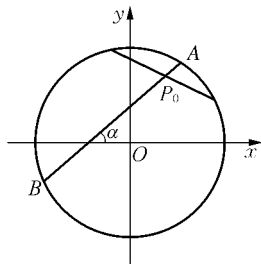


图 14-7

$$\begin{cases} x = a + r \cos \varphi, \\ y = b + r \sin \varphi. \end{cases} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi \text{ 为参数})$$

(2) 椭圆的参数方程.

设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ($a > b > 0$)

令 $x = a \cos \varphi$, 代入上式解得 $y = \pm b \sin \varphi$. 由于 $y = b \sin \varphi$ 与 $y = -b \sin \varphi$ 对 $0 \leq \varphi < 2\pi$ 均表示相同的取值集合, 故椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi. \end{cases} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi, a > b > 0)$$

例 3 设 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上任意一点, AB 为椭圆过中心 O 的一条弦. 如果 PA 、 PB 与对称轴都不平行, 求证: PA 与 PB 的斜率的乘积为定值.

证明 由于 AB 过中心 O , 所以 A 与 B 关于 O 对称, 故可设 $A(a \cos \theta, b \sin \theta)$, $B(-a \cos \theta, -b \sin \theta)$, $P(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$, 则

$$k_{PA} = \frac{b(\sin \varphi - \sin \theta)}{a(\cos \varphi - \cos \theta)}, \quad k_{PB} = \frac{b(\sin \varphi + \sin \theta)}{a(\cos \varphi + \cos \theta)}.$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } k_{PA} \cdot k_{PB} &= \frac{b^2(\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta)}{a^2(\cos^2 \varphi - \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{b^2(1 - \cos^2 \varphi - 1 + \cos^2 \theta)}{a^2(\cos^2 \varphi - \cos^2 \theta)} = -\frac{b^2}{a^2}, \end{aligned}$$

即斜率的乘积为定值.

(3) 双曲线的参数方程.

设双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. ($a > 0, b > 0$)

由于 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, 因此令 $\frac{x}{a} = \sec \varphi$, $\frac{y}{b} = \tan \varphi$, 从而双曲线

的参数方程为 $\begin{cases} x = a \sec \varphi, \\ y = b \tan \varphi. \end{cases} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi, \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \varphi \neq \frac{3\pi}{2})$

(4) 抛物线的参数方程.

设抛物线的方程为 $y^2 = 2px$. ($p > 0$)

令 $x = 2pt^2$ ($t \in \mathbf{R}$), 代入上方程, 解得 $y = \pm 2pt$. 因为 $t \in \mathbf{R}$, 所以取 $y = 2pt$. 得抛物线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2pt^2, \\ y = 2pt. \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R} \text{ } t \text{ 为参数})$$

例 4 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$ $b > 0$) 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 与 y 轴平行的弦 P_1P_2 的上、下端点分别为 P_1, P_2 , 求直线 A_1P_2 与 A_2P_1 交点 M 的轨迹方程.

解 设直线 A_1P_2 与 A_2P_1 交点坐标为 $M(x, y)$, 又 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$. 因为 $P_1P_2 \parallel y$ 轴, 所以设 $P_1(a \sec \theta, b \tan \theta)$, $P_2(a \sec \theta, -b \tan \theta)$, 从而

$$A_1P_2 \text{ 的方程为 } y = \frac{-b \tan \theta}{a \sec \theta + a}(x + a), \quad (1)$$

$$A_2P_1 \text{ 的方程为 } y = \frac{b \tan \theta}{a \sec \theta - a}(x - a). \quad (2)$$

$$\text{由 } (1) \times (2) \text{ 得 } y^2 = -\frac{b^2 \tan^2 \theta}{a^2 (\sec^2 \theta - 1)}(x^2 - a^2) = -\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \text{ 即 } M$$

的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

例 5 动直线 $x = a$ ($a > 0$) 平行移动交抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 于 A, B 两点. 另一动点 P 在抛物线上移动, 直线 PA, PB 分别交 x 轴于 M, N 两点. 求证: 线段 MN 的中点为定点.

证明 设 $A(2pt^2, 2pt)$, $B(2pt_1^2, -2pt_1)$, $P(2pt_1^2, 2pt_1)$, 则直线 PA 的方程是

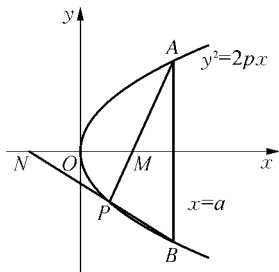


图 14-8

$$y - 2pt_1 = \frac{2pt - 2pt_1}{2pt^2 - 2pt_1^2} (x - 2pt_1^2) \quad (\text{这里 } t_1^2 \neq t^2) \text{ 即}$$

$$y - 2pt_1 = \frac{1}{t + t_1} (x - 2pt_1^2)$$

令 $y = 0$, 得点 M 的横坐标 $x_M = -2ptt_1$.

在上式中, 以 $-2pt$ 代替 $2pt$, 则得 $x_N = -(-2pt)t_1 = 2ptt_1$.

设 MN 的中点为 $(x_0, 0)$ 则

$$x_0 = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{(-2ptt_1) + 2ptt_1}{2} = 0,$$

所以 MN 的中点为 $(0, 0)$ 是个定点.



摆 线

一个圆沿着一条定直线滚动时, 圆周上的一个定点 M 的轨迹叫做摆线, 又叫旋轮线 (cycloid).

下面我们求摆线的参数方程.

如图 14-9, 设圆的半径为 a , 取圆滚动所沿的直线为 x 轴, 圆上定点 M 落在直线上的一个位置为原点, 建立直角坐标系 (如图 14-9). 圆滚动 ϕ 角后圆心在点 B , 并与 x 轴相切于点 A .

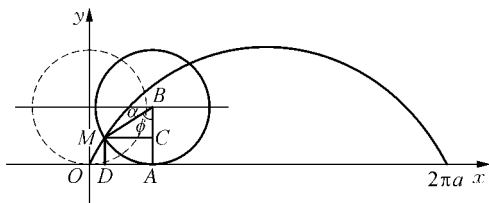


图 14-9

作 $MD \perp Ox$, $MC \perp BA$, 垂足分别为 D 、 C . 用 (x, y) 表示点 M 的坐标, 取 ϕ 作参数, 那么, OA 的长等于弧 MA 的长, 得

$$x = OD = OA - DA = a\phi - a \sin \phi,$$

$$y = DM = AC = AB - CB = a - a \cos \phi.$$

因此,所求摆线的参数方程是

$$\begin{cases} x = a(\phi - \sin \phi), \\ y = a(1 - \cos \phi). \end{cases} \quad (\phi \in \mathbf{R} \text{ 为参数})$$

摆线有一些重要的性质,例如,物体在重力作用下从点 A 滑落到点 B (无摩擦),物体滑落所需时间最短的路线,不是沿点 A 到点 B 的直线,而是沿从 A 到 B 的一段摆线,如图 14-10,因此摆线又叫最速降线.

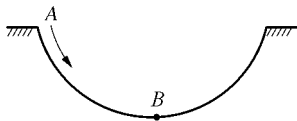


图 14-10

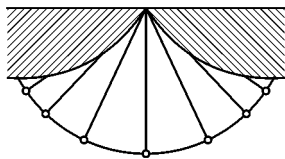


图 14-11

又如普通单摆的周期与振幅的大小有关.如果在摆的摆动平面内做两个如图 14-11 那样的摆线形挡板,在挡板的限制下,单摆的周期就与振幅的大小无关了,这时摆的运动轨迹也是一段摆线.摆线的名称就是由这个性质得到的.

习题
练习



· 自己练

1. 写出下列直线的参数方程:

(1) 过点 $P(2, 4)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$;

(2) 过点 $P(-3, -2)$, 倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$.

2. (1) 写出过点 $M(1, 5)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线 l 的参数方程;

(2) 若直线 l 与 $l': x - y - 2\sqrt{3} = 0$ 相交于 N , 求 $|MN|$ 和点 N 的坐标;

(3) 若 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 16$ 相交于 A, B , 试求 $|MA| + |MB|$, $|MA| \cdot |MB|$ 和 $|AB|$.

3. 据气象预报 现在气象台 A 处向东 400 千米的 B 处的海面上有

一个台风中心形成,测得台风以 40 千米/小时的速度向西北方向移动,距中心不超过 300 千米的地方都受到台风的影响,从现在起,多少时间后气象台受到台风影响?气象台受台风影响的时间大约是多少?(结果精确到 0.1 小时)

4. 写出下列圆的参数方程:

(1) 圆心为原点,半径 $r = 2$;

(2) 圆心为 $(3, -2)$, 半径 $r = 5$.

5. 已知圆 $x^2 + y^2 = 1$, $A(1, 0)$, B, C 是圆上两个动点,若 $\triangle ABC$ 的顶点逆时针排列且 $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 重心的轨迹方程.

6. 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上有动点 P 和定点 $B(0, \sqrt{3})$, 以 PB 为边作正 $\triangle BPQ$, 求 $\triangle BPQ$ 面积的最大值及此时 P 点的坐标.

7. 在椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上有两点 P, Q , O 是原点, 若 OP, OQ 斜率之积为 $-\frac{1}{4}$. 求证: $|OP|^2 + |OQ|^2$ 为定值.

8. 已知椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 是椭圆上任意三个不同点.

(1) 求 $u = x_1 + 2y_1$ 的最大值;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

9. 设 MN 是过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中心的弦, P 是双曲线上任意一点, 求证: 直线 PM, PN 的斜率之积为定值.

10. 已知点 (x, y) 在双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 上, 求 $\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x}$ 的取值范围.

11. 过抛物线 $y^2 = 2px$ 的顶点作互相垂直的两条弦 OA, OB . 求证 AB 过定点.

12. 过点 $A(-2, 4)$ 作倾斜角为 135° 的直线 l , 交抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 于 P_1, P_2 , 如果 $|AP_1|, |P_1P_2|, |AP_2|$ 成等比数列, 求抛物线的方程.

14.5 极坐标系 (Polar Coordinate System)

1. 极坐标系

平面上一个点的位置可用直角坐标系中的有序实数对来确定,也可以用方向角和距离来确定.例如,炮兵射击时是以大炮为基点,利用目标的方位角及目标与大炮的距离来确定目标位置的.下面研究如何利用角和距离来建立一个新的坐标系——极坐标系.

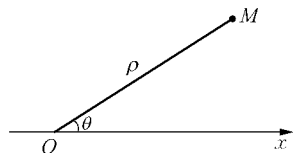


图 14-12

如图 14-12,在平面内取一定点 O ,叫做极点(pole),以 O 为端点引一条射线 Ox ,叫做极轴(polar axis),再选定一个单位长度和角度的正方向(一般规定逆时针方向为正方向).这时对于平面上任意一点 M ,设 $\rho = |OM|$, $\theta = \angle MOx$,则点 M 的位置可以用有序数对 (ρ, θ) 表示 (ρ, θ) 叫做点 M 的极坐标(polar coordinate),其中 ρ 叫做点 M 的极径(radius vector), θ 叫做点 M 的极角(polar angle).这样建立的坐标系叫做极坐标系(polar coordinate system).

当点 M 为极点时,它的极坐标为 $(0, \theta)$, θ 可以为任意值.

当 $\rho < 0$ 时,规定 (ρ, θ) 对应的点为 $(-\rho, \theta + \pi)$.

如图 14-13,在极坐标系中, A, B, C, D, E, F, G 各点的极坐标分别是 $(4, 0)$, $(2, \frac{\pi}{4})$, $(3, \frac{\pi}{2})$, $(1, \frac{5\pi}{6})$, $(3.5, \pi)$, $(6, \frac{4\pi}{3})$, $(5, \frac{5\pi}{3})$. 角也可

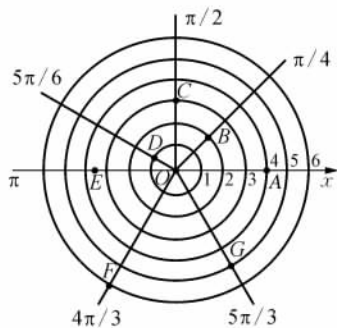


图 14-13

以取大于 2π 的值或负值,例如点 B 、 D 、 F 的坐标也可以写作 $(2, \frac{9\pi}{4})$ 、

$(1, \frac{17\pi}{6})$ 、 $(6, \frac{10\pi}{3})$ 或 $(2, -\frac{7\pi}{4})$ 、 $(1, -\frac{7\pi}{6})$ 、 $(6, -\frac{2\pi}{3})$ 。

当极径取作负值时,如点 A 、 C 、 E 的极坐标也可以写作 $(-4, \pi)$ 、 $(-3, \frac{3\pi}{2})$ 、 $(-3.5, 2\pi)$ 。

在极坐标系中,任一实数对 (ρ, θ) 在平面上有唯一点 M 与它对应;反过来,对于平面内任意一点,也可以找到它的极坐标 (ρ, θ) 。但和直角坐标系不同的是:平面内一个点的极坐标可以有无穷多种表示法。例如 $(2, \frac{\pi}{4})$ 、 $(2, \frac{9\pi}{4})$ 、 $(-2, \frac{5\pi}{4})$ 、 $(2, -\frac{7\pi}{4})$ 都表示点 B 的极坐标。一般地,如果 (ρ, θ) 是一点的极坐标,那么 $(\rho, \theta + 2n\pi)$ 、 $(-\rho, \theta + (2n+1)\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$) 都可以作为它的极坐标。但如果限定 $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ 或 $-\pi < \theta \leq \pi$, 那么在极坐标系中,除了极点外平面上的所有点所成的集合和实数对 (ρ, θ) 的集合 $\{(\rho, \theta) | \rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 或 $\{(\rho, \theta) | \rho > 0, -\pi < \theta \leq \pi\}$ 构成一一对应关系。以下不作特殊说明时,认为 $\rho \geq 0$ 。

2. 曲线的极坐标方程

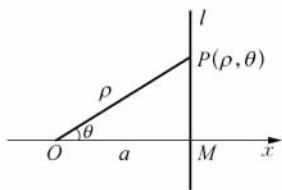
在极坐标系中,曲线可以用含有 ρ, θ 这两个变数的方程 $F(\rho, \theta) = 0$ 来表示,方程 $F(\rho, \theta) = 0$ 叫做这条曲线的极坐标方程。

由于平面内一个点的极坐标不唯一,因此曲线上点的极坐标不一定都适合方程,但其中应至少有一个坐标能够满足这个方程。曲线和极坐标方程之间有如下关系:

(1) 以方程 $F(\rho, \theta) = 0$ 的解 (ρ, θ) 为极坐标的点都在曲线上;

(2) 曲线上每一点的所有极坐标中,至少有一个极坐标 (ρ, θ) 是方程的解。

求曲线的极坐标方程,其实就是建立曲线上所有点的极径 ρ 与极角 θ 应满足的关系式。



例 1 如图 14-14, 求经过点 $M(a, 0)$

图 14-14

($a > 0$) ,且与极轴垂直的直线 l 的极坐标方程.

解 如图 14-14 ,设 $P(\rho, \theta)$ 为直线 l 上任意一点 ,则 $|OP| = \rho$,
 $\angle POx = \theta$ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) ,在 $\text{Rt}\triangle OPM$ 中 ,有

$$\rho \cos \theta = a.$$

这就是直线 l 的极坐标方程.

例 2 求圆心是 $C(a, 0)$,半径是 a 的圆的极坐标方程.

解 如图 14-15 ,由题设 ,圆心 C 在极轴上 ,圆经过极点 O .设圆 C 和极轴的另一个交点是 M ,则 $OM = 2a$.设 $P(\rho, \theta)$ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) 是圆 C 上任意一点 ,则 $OP \perp PM$,可得 $OP = OM \cos \theta$,即

$$\rho = 2a \cos \theta \quad (-\pi/2 < \theta < \pi/2).$$

这就是圆 C 的方程.

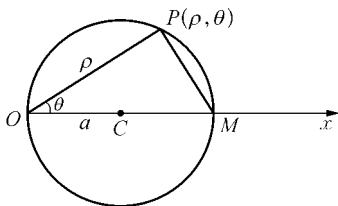


图 14-15

习题
练习



· 自己练

1. 在极坐标系中 ,作出下列各点 :

(1) $A\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $B(2, -135^\circ)$, $C\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $D(4,$

$\pi)$, $E\left(3.5, -\frac{2\pi}{3}\right)$;

(2) $A\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, $D(2, \pi)$, $E\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$,并说明

这五个点有什么关系 ;

(3) $A\left(-1, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $D\left(3.6, \frac{\pi}{3}\right)$,

$E\left(7, \frac{\pi}{3}\right)$,并说明这五个点有什么关系.

2. 写出点 $P(\rho, \theta)$ ($\rho > 0$, $\rho \leq \theta < 2\pi$) 关于极点 O ,极轴和过极点且与极轴垂直的直线对称的点的极坐标.

3. 求经过点 $M(a, 0)$ ($a > 0$) ,且与极轴夹角为 φ 的直线 l 的极坐标

方程.

4. 求圆心为 $C\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$, 半径为 a 的圆的极坐标方程.

5. 已知直线 l 上三点的极坐标分别为 $A(\rho_1, \theta_1)$ 、 $B(\rho_2, \theta_2)$ 、 $C(\rho_3, \theta_3)$ 且 ρ_1, ρ_2, ρ_3 均为正数. 求证:

$$\frac{\sin(\theta_2 - \theta_3)}{\rho_1} + \frac{\sin(\theta_3 - \theta_1)}{\rho_2} + \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\rho_3} = 0.$$

14.6 圆锥曲线的极坐标方程 (Polar Coordinate Equation of Conic Section)

1. 圆锥曲线的统一的极坐标方程

椭圆、双曲线、抛物线可以统一定义为: 到一个定点(焦点)的距离和一条定直线(准线)的距离的比等于常数 e 的点的轨迹. 当 $0 < e < 1$ 时, 是椭圆; 当 $e > 1$ 时, 是双曲线; 当 $e = 1$ 时, 是抛物线. 现在我们根据这个定义来求这三种圆锥曲线统一的极坐标方程.

如图 14-16, 过焦点 F 作准线 l 的垂线, 垂足为 K , 以 F 为极点, FK 的反向延长线 Fx 为极轴, 建立极坐标系.

设 $M(\rho, \theta)$ 是曲线上任意一点, 连结 MF , 作 $MA \perp l$, $MB \perp Fx$, 垂足分别为 A 、 B . 记焦点 F 到准线 l 的距离 $|KF| = p$, 则 $\frac{|MF|}{|MA|} = e$. 由于 $|MF| = \rho$, $|MA| = |BK| = p + \rho \cos \theta$, 所以上式即为

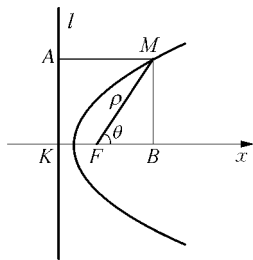


图 14-16

$$\frac{\rho}{p + \rho \cos \theta} = e, \text{ 即 } \rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}.$$

这就是椭圆、双曲线、抛物线的统一的极坐标方程. 如图 14-17, 当

$0 < e < 1$ 时, 方程表示椭圆. 定点 F 是它的左焦点, 定直线 l 是它的左准线; $e = 1$ 时, 方程表示开口向右的抛物线; $e > 1$ 时, 方程只表示双曲线的右支, 定点 F 是它的右焦点, 定直线 l 是它的右准线. 如果允许 $\rho < 0$, 方程就表示整个双曲线.

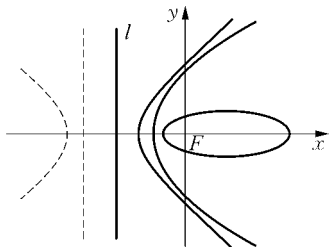


图 14-17

例 1 已知椭圆的极坐标方程为

$$\rho = \frac{3}{2 - \cos \theta},$$

(1) 求顶点的极坐标; (2) 求准线的极坐标方程.

解 (1) 如图 14-18, 令 $\theta = 0$, 得 $|F_1 A_2| = a + c = 3$; 令 $\theta = \pi$, 得 $|F_1 A_1| = a - c = 1$.

解之, 得 $a = 2$, $c = 1$, 从而 $b = \sqrt{3}$. 于是四个顶点的极坐标为 $A_1(1, \pi)$, $A_2(3, 0)$, $B_1(2, -\frac{\pi}{3})$, $B_2(2, \frac{\pi}{3})$.

(2) 因 $\rho = \frac{a^2}{c} - c = \frac{b^2}{c} = 3$, 故准线的方程为 $l_1: \rho \cos \theta = -3$; $l_2: \rho \cos \theta = 5$.

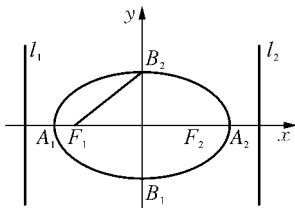


图 14-18

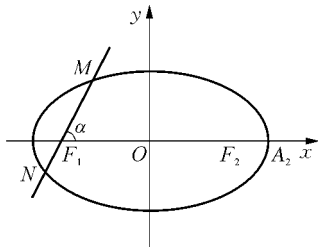


图 14-19

例 2 过长轴为 6, 焦距为 $4\sqrt{2}$ 的椭圆的左焦点 F_1 作直线交椭圆于 M 、 N 两点, 设 MN 与长轴所成的角为 α ($0 \leq \alpha < \pi$), 求当 α 为何值时, $|MN|$ 等于椭圆的短轴长.

解 如图 14-19, 以 F_1 为极点, 射线 F_1F_2 为极轴 (F_2 为右焦点), 建立极坐标系.

由于 $a = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, 所以 $b = 1$, 于是焦距 $p = \frac{b^2}{c} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, 离心

率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 故椭圆的极坐标方程为 $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2} \cos \theta}$.

由 $M(\rho_1, \alpha)$ 则 $N(\rho_2, \pi + \alpha)$, 即

$$\rho_1 = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2} \cos \alpha}, \quad \rho_2 = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha}.$$

由题设, 有 $\rho_1 + \rho_2 = |MN| = 2b = 2$, 所以

$$\frac{1}{3 - 2\sqrt{2} \cos \alpha} + \frac{1}{3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha} = 2, \quad \frac{6}{9 - 8 \cos^2 \alpha} = 2, \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

解得 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$. 故当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ 时, $|MN|$ 等于椭圆的短轴长.

2. 极坐标与直角坐标的互化

极坐标和直角坐标是两种不同的坐标系. 同一个点可以有极坐标, 也可以有直角坐标; 同一条曲线可以有极坐标方程, 也可以有直角坐标方程. 为便于计算或研究曲线的性质, 需要在两种坐标系之间进行相互转化.

如图 14-20, 把直角坐标系的原点作为极点, x 轴的正半轴作为极轴, 并取相同的长度单位. 设 M 为平面上任意一点, 它的直角坐标为 (x, y) , 极坐标为 (ρ, θ) .

当 $\rho \geq 0$ 时, 由三角函数定义, 可以得出 x, y 与 ρ, θ 之间的关系式

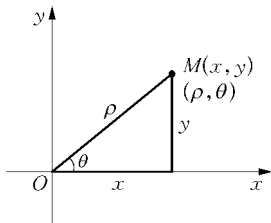


图 14-20

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad ①$$

当 $\rho < 0$ 时, 点 M 的极坐标也可用 $(-\rho, \pi + \theta)$ 表示, 利用①可得

$$x = -\rho \cdot \cos(\pi + \theta) = \rho \cos \theta,$$

$$y = -\rho \cdot \sin(\pi + \theta) = \rho \sin \theta.$$

这表明 $\rho < 0$ 时①式也成立.

综上所述,关系式①对点 M 的任意一种极坐标表示都成立.

从关系式①中解出 ρ, θ , 有

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} (x \neq 0). \quad (2)$$

由①式,可将点的极坐标化为直角坐标;由②式,可利用已知点的直角坐标求出它的极坐标.

由②式求 ρ, θ 时,应注意,尽管一个点的极坐标表示法有无数多种,但只要求出一种极坐标表示,其余的都有可由它写出.因此,如果不作特殊说明,那么我们只取满足 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ 的一对值.

例 3 化圆的直角坐标方程 $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ 为极坐标方程.

解 将①式代入方程,得

$$\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 2a\rho \sin \theta = 0,$$

即 $\rho = 2a \sin \theta$ 或 $\rho = 0$.

由于 $\rho = 0$ 也包含在前一个方程中,故所求极坐标方程为

$$\rho = 2a \sin \theta.$$

例 4 化圆锥曲线的极坐标方程 $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$ 为直角坐标方程.

解 原方程化为 $\rho = e\rho \cos \theta + ep$, 将 $\rho \cos \theta = x, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 代入得

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(x + p),$$

两边平方后,整理得 $(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2e^2px - e^2p^2 = 0$.

这就是所求的直角坐标方程.但是,在将 $\sqrt{x^2 + y^2} = e(x + p)$ 两边平方时,对于 $e > 1$ 的情形,方程产生增根,这时方程表示整个双曲线,它

相当于原极坐标方程中允许 $\rho < 0$ 的情形.

例 5 已知 F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左焦点, O 为原点. 求证: 若 AB

和 CD 都经过 F , 且 $AB \perp CD$ 则 $\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|}$ 为定值.

解 以 F 为极点, Fx 轴为极轴, 建立极坐标系, 则椭圆的极坐标方程为 $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$. 其中 $e = \frac{c}{a}$, $p = \frac{b^2}{c}$. 由于 AB, CD 过点 F 且 $AB \perp CD$, 不妨设 $A(\rho_1, \theta), B(\rho_2, \pi + \theta), C(\rho_3, \frac{\pi}{2} + \theta), D(\rho_4, \frac{3\pi}{2} + \theta)$, 所以

$$|AB| = \rho_1 + \rho_2 = \frac{ep}{1 - e \cos \theta} + \frac{ep}{1 + e \cos \theta} = \frac{2ep}{1 - e^2 \cos^2 \theta}.$$

$$\text{同理 } |CD| = \frac{2ep}{1 - e^2 \cos^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{2ep}{1 - e^2 \sin^2 \theta}.$$

$$\text{所以 } \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{(1 - e^2 \cos^2 \theta) + (1 - e^2 \sin^2 \theta)}{2ep} = \frac{2 - e^2}{2ep} =$$

$$\frac{2 - \frac{c^2}{a^2}}{2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b^2}{c}} = \frac{2a^2 - c^2}{2ab^2} = \frac{a^2 + b^2}{2ab^2} \text{ 为定值.}$$



1. 判定下列圆锥曲线的极坐标方程表示什么曲线, 再画出图形.

$$(1) \rho = \frac{6}{1 - 2 \cos \theta}; \quad (2) \rho = \frac{6}{2 - \cos \theta};$$

$$(3) \rho = \frac{3}{1 - \cos \theta}.$$

2. 已知椭圆的极坐标方程是 $\rho = \frac{5}{3 - 2 \cos \theta}$.

(1) 求顶点和焦点的极坐标 ; (2) 求准线的极坐标方程.

3. 求曲线 $\rho^2 - 4\sqrt{6}\rho\cos\theta - 4\sqrt{2}\rho\sin\theta + 16 = 0$ 被极轴所截得的弦 AB 的长.

4. 已知点 $A\left(-3, \frac{\pi}{6}\right), B\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ 求 $|AB|$ 和 $\triangle AOB$ 的面积.

5. 将下列直角坐标方程化成极坐标方程.

(1) $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$;

(2) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

6. 将下列极坐标方程化为直角坐标方程.

(1) $\rho = \cos\left(\theta - \arcsin \frac{4}{5}\right)$; (2) $\rho^2 \sin 2\theta = a^2$.

7. 已知双曲线 $\rho^2 \cos 2\theta = 1$ 与圆 $\rho^2 - 2\rho a \sin\theta + a^2 - r^2 = 0$ 交于四个不同的点 A, B, C, D , O 为极点. 求 $|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + |OD|^2$ 的值.

8. 设 OP, OQ, OR 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的三条中心半径, 且每相邻两条的夹角是 $\frac{2\pi}{3}$. 求证: $|OP|^{-2} + |OQ|^{-2} + |OR|^{-2}$ 为定值.

9. 求极点 O 到直线 $\rho \sin(\theta + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的距离.

的方程为 $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$ 抛物线 C 的方程为 $y^2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}x$ 6. (1) $k_1 \in$

$(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1) \cup (1, \sqrt{3})$ (2) 当 $k_1 = \sqrt{2}$ 时,

$l_1: y = \sqrt{2}(x + \sqrt{2}), l_2: y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x + \sqrt{2})$ 当 $k_1 = -\sqrt{2}$ 时 $l_1: y =$

$-\sqrt{2}(x + \sqrt{2}), l_2: y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + \sqrt{2})$ (3) $|A_2B_2| = 2\sqrt{15}$

* 14.1 坐标轴的平移

1. (1) $x' = 2$ (2) $2x' - 3y' = 9$ (3) $x'^2 + y'^2 = 5$ (4) $x'^2 = y'$ (图

略) 2. (1) $x'^2 + y'^2 = 16$ (2) $\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{16} = 1$ (3) $\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{9} =$

1 (4) $y'^2 = -6x'$ 3. (1) 焦点 $(\pm\sqrt{5} - 1, 1)$ 对称轴为 $x = -1$ 与 $y = 1$ (2) 焦点 $(1 \pm \sqrt{10}, 2)$ 对称轴为 $x = 1$ 与 $y = 2$ (3) 焦点

$(4, 3)$ 对称轴为 $x = 4$ 4. $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$

5. $(\frac{1}{2}, \frac{15}{2})$ $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ 6. $m = \frac{965}{13}$ 或 $-\frac{835}{13}$ 7. $(3x - 4)^2 =$

$3y + 1$

* 14.2 坐标轴的旋转变换

1. $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$ $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 2. $C(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+2}{2})$ $D(1,$

$\sqrt{3})$ 3. (1) $x' = 0$ (2) $2x' + y' = 0$ (3) $x'^2 + y'^2 = 4$

(4) $x'^2 = 2$ 4. (1) $x'^2 + 2y' = 0$ ($\theta = \frac{\pi}{4}$) (2) $6x'^2 + y'^2 = 22$

$(\cot 2\theta = -\frac{3}{4} \quad \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}})$ (3) $3x'^2 - y'^2 =$

16 ($\theta = \frac{\pi}{4}$) (4) $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$ ($\theta = \frac{\pi}{6}$) 5. (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{x'^2}{12} +$

$\frac{y'^2}{4} = 1$ 是椭圆 图象略 (3) $g_{\max} = 6$ $g_{\min} = 2$

14.3 曲线的参数方程

1. $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + \sqrt{3}t \end{cases} (t \in \mathbf{R})$ 2. 不是 前者是以原点为圆心、半径为 3 的

圆 后者是以原点为圆心、半径为 3 的上半个圆 ($y \geq 0$)

3. $\begin{cases} x = 5\cos\theta, \\ y = 5\sin\theta \end{cases} (\theta \in [0, 2\pi))$ 4. $\begin{cases} x = 2[\cos(120^\circ - \alpha) + \cos\alpha], \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$

$(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$ 5. (1) $y - 4 = -\sqrt{3}(x - 3)$ (2) $x^2 - 2xy + y^2 +$

$4x - 5y + 6 = 0$ (3) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ (4) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$ 图

略 6. (1) $\begin{cases} x = 2 + \cos\phi, \\ y = 2\sin\phi \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = -\frac{8t}{4+t^2}, \\ y = \frac{16-4t^2}{4+t^2} \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x = 0, \\ y = -4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3\phi, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3\phi \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t}; \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$

14.4 直线与圆锥曲线的参数方程

1. (1) $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = 4 + \frac{t}{2} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = -3 - \frac{t}{2}, \\ y = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ 2. (1) $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t, \\ y = 5 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$

(t 为参数) (2) $|MN| = 10 + 6\sqrt{3}$ $N(-4 - 3\sqrt{3}, -4 - 5\sqrt{3})$

(3) $|MA| + |MB| = 1 + 5\sqrt{3}$ $|MA| \cdot |MB| = 10$ $|AB| = \sqrt{36 + 10\sqrt{3}}$ 3. 大约 4.6 小时后气象台受到影响,持续时间约 5 小时

4. (1) $\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y = 2\sin\theta \end{cases} (0 \leq \theta < 2\pi)$ (2) $\begin{cases} x = 3 + 5\cos\theta, \\ y = -2 + 5\sin\theta \end{cases} (0 \leq \theta < 2\pi)$

5. $\triangle ABC$ 的重心轨迹方程为 $(x - \frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ 6. $P(0, -\sqrt{3})$, 最

大值为 $3\sqrt{3}$ 7. $|OP|^2 + |OQ|^2 = 20$ 8. (1) $u_{\max} = 2\sqrt{2}$ (2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

9. $k_{PM} \cdot k_{PN} = \frac{b^2}{a^2}$ 10. $(-1, 1)$ 11. AB 过定点 $(2p, 0)$ 12. $y^2 =$

$2x$

14.5 极坐标系

1. (1) 略 (2) 五个点在以极点为圆心、半径为 2 的圆上 (3) 五个点在倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 且过极点的直线上 2. $P_1(-\rho, \theta)$ $P_2(\rho, -\theta)$

$P_3(-\rho, -\theta)$ 3. $\rho \sin(\varphi - \theta) = a \sin \varphi$ ($0 < \theta < \varphi$) 4. $\rho = 2a \sin \theta$ ($0 \leq \theta < \pi$) 5. 略

14.6 圆锥曲线的极坐标方程

1. (1) 双曲线 (2) 椭圆 (3) 抛物线 图略. 2. (1) 顶点 $(5, 0)$

$(1, \pi)$ $\left(3, \arctan \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ $\left(3, -\arctan \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 焦点 $(0, 0)$ $(4, 0)$

(2) 准线为 $\rho \cos \theta = \frac{13}{2}$ 与 $\rho \cos \theta = -\frac{5}{2}$ 3. $|AB| = 4\sqrt{2}$

4. $|AB| = 3\sqrt{3}$ $S_{\triangle AOB} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$ 5. (1) $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ (2) $\rho =$

$2a \cos \theta$ 6. (1) $x^2 + y^2 - \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = 0$ (2) $2xy = a^2$ 7. $4r^2$

8. $|OP|^{-2} + |OQ|^{-2} + |OR|^{-2} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$ 9. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$

15.1 平面及其基本性质

1. 略 2. 1 个或 3 个 3. 略 4. 略 5. (1) 3 (2) 略

15.2 空间直线与直线之间的位置关系

1. (7) 2. — 5. 略 6. $\frac{\pi}{2}$

15.3 空间直线与平面

1. (1) (2) 2. 7 3. — 7. 略 8. (1) 5 (2) 30° 9. (1) $PB = PD =$