第9卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 5
1985年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1985

非相对论束缚势下的能级间隔及原点波函数

苏汝铿 周子翔
(复旦大学物理系)

摘 要

(1)本文推广了 Martin 关于原点波函数的定理至 $l \neq 0$ 的态,给出了相应的充分条件. (2)在微扰意义下,本文推广了 Martin、Grosse、苏汝铿、梁俊等人关于 $2s$, $2p$, $3d$ 态的能级间隔的定理,给出了关于 $3s$, $3p$ 等态的相应的定理.

近年来,在研究 Υ 族和 ψ 族的能谱和衰变性质方面,非相对论势模型是比较成功的[1]. 但是,由于尚未能从 Q. C. D. 成功地直接导出夸克束缚势,因此,出现了一系列从现有的实验结果,如衰变宽度、能谱等决定夸克禁闭势的工作. 在本文中,我们将推广 Martin, Groose 等人的一系列关于原点波函数和能级间隔的工作,并给出相应的充分条件.

一. 关于原点波函数

根据 Weisskopf-Van Royen 公式, s 态的衰变宽度正比于 $|\psi_s(0)|^2$. 在此基础上, Martin[2] 证明了,在势场 $V(r)$ 中,若 $V'' \gtrless 0$ 则 $|\psi_{2s}(0)| \gtrless |\psi_{1s}(0)|$. 以后, Gupta 和 Rajaraman[3] 则在 WKB 近似下,把 Martin 的结果推广到了主量子数很大的情况. 最近,赵光达[4]证明了,若考虑双胶子交换,则 p 态的衰变宽度正比于 $|\psi'_p(0)|^2$. 于是自然提示,能否将 Martin 的结果推广到 p 态? 下面我们给出关于 $l \neq 0$ 的态的一个结果.

对于处于势场 $V(r)$ 中的粒子,状态记为 $|n_r, l\rangle$. 由于 $r \to 0$ 时 $\psi(r) \sim r^l$,故对于 l 态,当 $k < l$ 时, $\psi^{(k)}(0) = 0$. 因此,下面给出比较 $|\psi_{0,l}^{(l)}(0)|$ 与 $|\psi_{1,l}^{(l)}(0)|$ 的一个充分条件.

记 $|0, l\rangle$, $|1, l\rangle$ 态的能级为 E_0、E_1 ($E_0 < E_1$). Schrödinger 方程为

$$-u'' + V(r)u + l(l+1)u/r^2 = E_0 u, \tag{1}$$

$$-v'' + V(r)v + l(l+1)v/r^2 = E_1 v. \tag{2}$$

由于 u 无零点, v 有一个零点,不妨设 $r < r_0$ 时 $v(r) > 0$, $r > r_0$ 时 $v(r) < 0$,而对一切 r, $u(r) > 0$.

本文 1984 年 10 月 5 日收到.

引理 1：$\varphi(r)=u^2(r)-v^2(r)$ 在 $(0, r_0)$，(r_0, ∞) 最多各有一个零点.

证：由(1)、(2)式得 $(uv'-u'v)'=(E_0-E_1)uv$.

$r<r_0$ 时，上式从 0 到 r 积分得 $uv'-u'v=\int_0^r(E_0-E_1)uvdr<0$，即$(v/u)'<0$，从而 $u-v$ 在 $(0, r_0)$ 最多有一个零点. 由于 $(0, r_0)$ 中 $u+v>0$，故 $\varphi(r)$ 在 $(0, r_0)$ 中最多有一个零点.

$r>r_0$ 时，从 r 到 $+\infty$ 积分，证明方法与前面类似. 证毕.

引理 2：如果 $|u^{(l+1)}(0)|>|v^{(l+1)}(0)|$，则 φ 在 $(0,\infty)$ 有且仅有一个零点，且在原点附近为正.

证：$r\to 0$ 时，$u\sim u^{(l+1)}(0)r^{l+1}/(l+1)!$ $v\sim v^{(l+1)}(0)r^{l+1}/(l+1)!$，故 r 充分小时 $\varphi(r)>0$. 由 $\varphi(r_0)>0$ 及引理 1，$r<r_0$ 时 $\varphi(r)\neq 0$. 由$\int_0^\infty\varphi dr=0$，$\varphi$ 至少有一个零点，从而 φ 恰好有一个零点. 证毕.

定理 1：如果 $(V+l(l+1)/r^2)''>0$，则 $|\phi_{0,l}^{(l)}(0)|\leqslant|\phi_{1,l}^{(l)}(0)|$.

证：记 $U(r)=V(r)+l(l+1)/r^2$，由方程(1)、(2)得

$$(u'^2-v'^2)'=U(u^2-v^2)'+E_1(v^2)'-E_0(u^2)'$$

两边积分得 $\int_0^\infty U'(r)\varphi(r)dr=0$.

如果定理的结论不成立，则由引理 2，存在 $a>0$，使得 $r<a$ 时 $\varphi(r)>0$，$r>a$ 时 $\varphi(r)<0$. 利用 $\int_0^\infty\varphi(r)dr=0$ 得

$$\int_0^\infty U'(r)\varphi(r)dr=\int_0^\infty(U'(r)-U'(a))\varphi(r)dr$$

由于 $U''(r)>0$，故上式<0，与前面证得的 $\int_0^\infty U'(r)\varphi(r)dr=0$ 矛盾. 所以必须 $|\phi_{0,l}^{(l)}(0)|\leqslant|\phi_{1,l}^{(l)}(0)|$. 证毕.

二、关于能级间隔

关于禁闭势下 Schrödinger 方程 $2s-2p$、$2s-3d$、$2p-3d$ 态的能级，已分别由 Martin[5]、Grosse[6]、苏汝铿、梁俊[7]作了讨论. 最近，Grosse 和 Martin[8] 又分别就势为 $-1/r+\lambda V(r)$，$r^2+\lambda V(r)$ 时在微扰意义下更普遍地研究了能级间隔和 V 的关系. 在本文中，我们将对更一般的势场 $V_0+\lambda W$，在 V_0 的波函数已知的条件下，给出能级间隔与 W 的关系.

设 $V_0+\lambda W$ 的两个态的能量为 E_1，E_2，径向波函数为 u，v. 记 $\varepsilon=E_1-E_2$. 当 $\lambda=0$ 时，记 $\varepsilon=\varepsilon_0$，$u=u_0$，$v=v_0$. 不妨设 $\varepsilon_0>0$. 记 $I_0(r)=\int_r^\infty(u_0^2(\rho)-v_0^2(\rho))/\rho d\rho$，则有

定理 2：设 $I_0(0)<0$，$I_0(r)$ 在$(0,\infty)$中仅有一个零点，且在 $I_0(r)$ 的零点处$|u_0|\neq|v_0|$. V_0 满足 $\lim\limits_{r\to\infty}V_0(r)=0$ 或 r 充分大时 $V_0'(r)>0$. 如果 $W(r)$ 满足下列条件：

(1) $\lim_{r\to 0} rW = 0$, $\lim_{r\to 0} r^2W' = 0$, (2) r 充分大时 $W' > 0$,(3) 存在 $\mu > 0$,使 $\lim_{r\to\infty} W(r) e^{-\mu r} = 0$, (4)对一切 r, $(rW)'' \leqslant 0$, 则当 λ 充分小时, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

在证明定理 2 之前,先证明一个引理.

引理 3: 记 $I(r) = \int_0^\infty (u^2(\rho) - v^2(\rho))/\rho d\rho$, $J(r) = \int_r^\infty I(\rho) d\rho$, 则在定理 2 的条件下,有 $\lim_{r\to\infty} I(r) rW(r) = 0$, $\lim_{r\to\infty} J(r)(rW(r))' = 0$.

证: 由定理 2 的条件, $\lim_{r\to\infty}(V_0 + \lambda W)$存在(有限或$\infty$). 下面只考虑 $\lim_{r\to\infty}(V_0+\lambda W) = +\infty$ 的情形,其余情形证明类似.

设 r 充分大时 $u > 0$. 令 $Q = V_0 + \lambda W + l(l+1)/r^2 - E$,由已知条件,存在 R_0, $r > R_0$ 时 $Q(r)$单调上升. 取 $R > R_0$,使 $Q(R) > \mu^2/4$, 由 Schrödinger 方程,当 $r > R$ 时 $u''(r) \geqslant Q(R)u(r)$. 记 $u(r) = w_R(r) e^{-\sqrt{Q(R)}r}$,易证 $r \to \infty$ w_R 单调下降, 故存在 b_R, 使 r 充分大时 $w_R(r) < b_R$, 即 $u(r) < b_R e^{-\sqrt{Q(R)}r}$. 类似地,存在 b'_R 使 $v(r) < b'_R e^{-\sqrt{Q(R)}r}$.

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} |I(r)rW(r)| &\leqslant \lim_{r\to\infty} rW(r) \int_r^\infty (b_R^2 + b_R'^2) e^{-2\sqrt{Q(R)}\rho}/\rho d\rho \\ &\leqslant \lim_{r\to\infty} [(b_R^2 + b_R'^2)/2\sqrt{Q(R)}] e^{-(2\sqrt{Q(R)}-\mu)r} W(r) e^{-\mu r} = 0\end{aligned}$$

类似可证, $\lim_{r\to\infty} J(r)(rW(r))' = 0$. 证毕.

定理 2 的证明: 由 I_0 的条件,当 λ 充分小时, $I(r)$ 仅有一个零点,且 $I(0) < 0$. 由 $J' = -I$ 得 J' 仅有一个零点,又

$$J(0) = \int_0^\infty dr \int_r^\infty (u^2(\rho) - v^2(\rho))/\rho d\rho = 0$$

所以 J 在 $(0, \infty)$ 无零点. 由 $I(0) < 0$ 得, r 充分小时 $J'(r) = -I(r) > 0$, 又因为 $J(0) = J(\infty) = 0$, 故 $J(r)$ 恒大于零.

由 Feynman-Hellmann 定理[9]

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \int_0^\infty (\mu^2(r) - v^2(r)) W(r) dr = -\int_0^\infty I'(r) rW(r) dr$$

分部积分,由定理条件及引理 3 易得边界项全为零,故

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \int_0^\infty J(r)(rW(r))'' dr$$

由于 $J > 0$, 故当 $(rW)'' \leqslant 0$ 时, $\frac{d\varepsilon}{d\lambda} \leqslant 0$, 即 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. 证毕.

对于库仑场 $V_0 = -1/r$, 波函数均已知, 经验证, $3s$—$2s$, $3p$—$2s$、$3d$—$2s$ 所对应的 I_0 均满足定理 2 的要求. 因此有

推论: 如果 $V_0 = -1/r$, W满足定理 2 的条件(1)、(2)、(3),且 $(rW)'' < 0$ ($(rW)'' > 0$), 则当 λ 充分小时, $3s$—$2s$、$3p$—$2s$、$3d$—$2s$ 的能级间隔相对无微扰时均变窄(变宽).

至此，我们给出了通过势场的性质判断原点波函数大小的一个充分条件（定理 1）与在微扰意义下判断能级间隔大小的一个充分条件（定理 2 及其推论）.

最后，我们对高崇寿、赵光达的有益讨论表示感谢.

参 考 文 献

[1] H. Grosse, A. Martin, *Phys. Rep.*, **60C**(1980), 342.
[2] A. Martin, *Phys. Lett.*, **70B**(1977), 192
[3] V. Gupta, R. Rajaraman, *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 697.
[4] Chao Kuang-Ta, *Commun. in Theor. Phys.*, **2**(1983), 1129.
[5] A. Martin, *Phys. Lett.*, **67B**(1977), 330
[6] H. Grosse, *Phys. Lett.*, **68B**(1977), 343.
[7] 苏汝铿、梁俊，高能物理与核物理，**5**(1981)，694.
[8] H. Grosse, *A. Martin*, *Phys. Lett.*, **134B**(1984), 368.
[9] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **56**(1939), 340.

THE ENERGY LEVELS AND THE WAVE FUNCTION AT THE ORIGIN IN A NONRELATIVISTIC BINDING POTENTIAL

SU RU-KENG ZHOU ZI-XIANG
(Fudan University)

ABSTRACT

(1) Martin's theorem about the wave function at the origin is extended to the states with $l\neq 0$. (2) The theorems about energy levels between $2s$, $2p$, $3d$ states are extended to $3s$, $3p$ states to the first order of perturbation.