

ディジタル PID コントローラの改良

Copyright © 2010 YASUI Tsukasa

PID コントローラというのは昔から広く使われていた制御手法だと思いますが、当然、これに対して A/D、D/A を使ってディジタル化しようということも考えられます。私もある案件でディジタル的な PID コントローラを使う必要が出てきたのですが、アナログ PID コントローラをそのままディジタル化すると、ある欠点が表面化することがわかりました。今回はその欠点を改良したディジタル PID コントローラの考察ですが、一部、完全に理解できていない部分もあり、実際のシステムでの実証もこれからなので、一部、考えに誤りがあるかもしれないという点をご了承ください。

■アナログ PID コントローラ

まずアナログ PID コントローラです。詳しい説明は省きますが、単純な比例制御に対して、積分特性を付加して直流的な定常偏差をゼロとし、さらに微分特性を付加することにより過渡的な応答性を改善するコントローラで、非常に広範囲な分野に使われているようです。アナログ PID コントローラの性質について調べるため、伝達関数を求めてみます。

まずアナログ PID コントローラの動作を時間領域で表すと

$$y(t) = K_p x(t) + K_i \int x(t) dt + K_d \frac{dx(t)}{dt} \quad \dots (1)$$

K_p は比例ゲイン、 K_i は積分ゲイン、 K_d は微分ゲインです。式(1)両辺をラプラス変換して

$$Y(s) = \left\{ K_p + \frac{K_i}{s} + s K_d \right\} X(s) \quad \dots (2)$$

伝達関数は

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + s K_d = \frac{s^2 K_d + s K_p + K_i}{s} \quad \dots (3)$$

式(3)の分母は、0Hz (DC) に極があり、DC に対して無限大のゲインを持つことを示しています。故に PID コントローラはステップ応答に対する定常偏差が理論的にゼロになります。また、分子は、 s の 2 次式ですから、零が二つ存在することを示しています。その周波数は、

$$s^2 K_d + s K_p + K_i = 0 \quad \dots (4)$$

より

$$s = \frac{-K_p \pm \sqrt{K_p^2 - 4 K_d K_i}}{2 K_d} \quad \dots (5)$$

$K_p \gg K_d K_i$ ならば、近似として

$$\omega_{z1} = -\frac{K_i}{K_p}, \quad \omega_{z2} = -\frac{K_p}{K_d} \quad \dots (6)$$

式(6)より、比例ゲイン K_p が定まれば、零を置きたい周波数から K_i , K_d が決められます。例として、比例ゲイン $K_p=10$, $\omega_{z1}=-3\text{Hz}$, $\omega_{z2}=-300\text{Hz}$ としたときのアナログ PID コントローラの周波数特性を図 1 に示します。

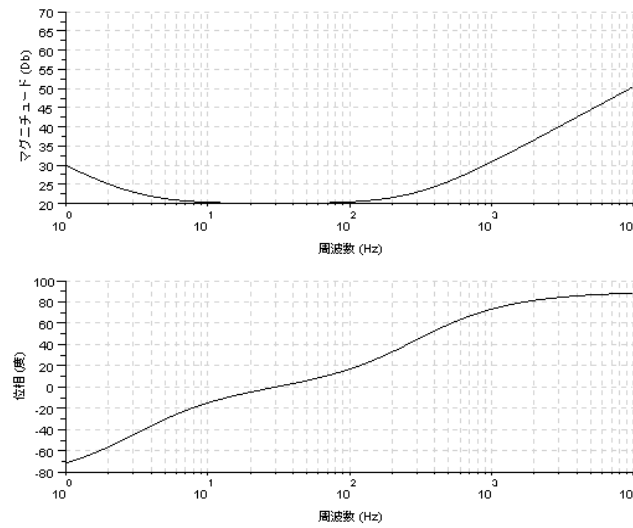


図1: アナログPID コントローラの周波数特性

■ アナログ PID コントローラのデジタル化

アナログシステムをデジタルの領域に変換する方法としては、双一次変換が知られています。デジタルシステムのサンプリング周期を T とし、双一次変換の式(7)を用いて式(2)をデジタルシステムに変換します。

$$s \simeq \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad \dots (7)$$

(7)を式(2)代入すると

$$Y(z) = \left\{ K_p + \frac{K_i}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} + \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} K_d \right\} X(z) \quad \dots (8)$$

両辺に $(1-z^{-1})(1+z^{-1})$ を掛けて

$$(1-z^{-2})Y(z) = \left\{ (1-z^{-2})K_p + \frac{T}{2}(1+z^{-1})^2 K_i + \frac{2}{T}(1-z^{-1})^2 K_d \right\} X(z) \quad \dots (9)$$

左辺を $Y(z)$ とし、整理すると

$$\begin{aligned} Y(z) &= z^{-2}Y(z) + \left\{ (1-z^{-2})K_p + \frac{T}{2}(1+2z^{-1}+z^{-2})K_i + \frac{2}{T}(1-2z^{-1}+z^{-2})K_d \right\} X(z) \\ Y(z) &= z^{-2}Y(z) + \\ &\quad \left\{ \left(\frac{T}{2}K_i + \frac{2}{T}K_d + K_p \right) + \left(T \cdot K_i - \frac{4}{T}K_d \right) z^{-1} + \left(\frac{T}{2}K_i + \frac{2}{T}K_d - K_p \right) z^{-2} \right\} X(z) \end{aligned} \quad \dots (10)$$

式(10)を実際のコンピュータでの演算形式で表現すると

$$y[n] = y[n-2] + a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] \quad \dots (11)$$

ただし、

$$a_0 = \frac{T}{2}K_i + \frac{2}{T}K_d + K_p, \quad a_1 = T \cdot K_i - \frac{4}{T}K_d, \quad a_2 = \frac{T}{2}K_i + \frac{2}{T}K_d - K_p$$

$y[n]$ は今回のPIDコントローラの出力値、 $y[n-2]$ は2サンプル前のPIDコントローラの出力値、 $x[n]$ は今回のPIDコントローラへの入力値、 $x[n-1]$, $x[n-2]$ はそれぞれ1サンプル前、2サンプル前のPIDコントローラへの入力値です。式(11)は3回の乗算と3回の加算処理でデジタルPIDコントローラを実現できることを示しています。

例として、先ほどと同じように比例ゲイン $K_p=10$, $\omega_{z1}=-3\text{Hz}$, $\omega_{z2}=-300\text{Hz}$ とし、サンプリング周波数を 10kHz ($T=1/10 \times 10^3$) とした場合のデジタルPIDコントローラの周波数特性を図2に示します。

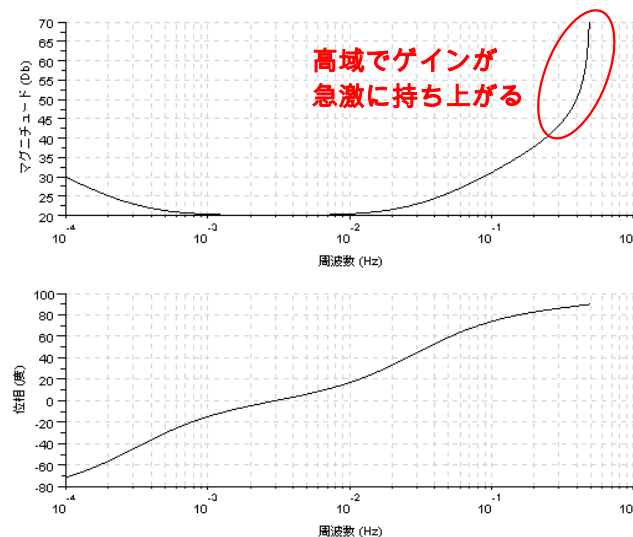


図2: デジタルPIDコントローラの周波数特性

グラフの横軸はサンプリング周波数で正規化された周波数ですので左端が 1Hz 、右端が 10kHz です。 5kHz がナイキスト周波数となるので、 5kHz までの表示となっています。この周波数特性ですが、低い周波数では、ほぼアナログPIDコントローラと同じ周波数特性ですが、ナイキスト周波数付近で急激にゲインが持ち上がっています。原因は、私もよく理解していない部分があるのではっきりとは言えないのですが、双一次変換の式(7)は本来、対数関数であり、無限に続く級数の1次近似です。この近似による歪みによってナイキスト周波数付近でゲインの持ち上がりが現れるのでしょう。

さて、このゲインの持ち上がりが、冒頭に説明したデジタルPIDコントローラの欠点だと思っています。これを実際のシステムに組み込むと、A/Dコンバータの量子化雑音を増幅したり、場合によっては制御ループを不安定にしまいます。実際に、この雑音の増幅が、今考えている案件では問題になります。

この欠点を解決するには、双一次変換で使用した式の代わりにもっと高次の近似まで含めた式を使えば良さそうですが、そうするとデジタル演算の処理がかなり増えてしまいます。そこで、PIDコントローラに極をひとつ追加すれば、高域のゲインの持ち上がりを抑えられるのでは？と考えました。

■ デジタル PID コントローラの改良

オリジナルのデジタル PID コントローラに極を追加してみます。まず、アナログ PID コントローラに極 p を追加した場合の伝達関数を考えます。これは式(12)のようになります。

$$G(s) = \frac{s^2 K_d + s K_p + K_i}{s} \cdot \frac{p}{p-s} \quad \dots (12)$$

これに双一次変換の式(7)を適用すると

$$Y(z) = \frac{\left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 K_d + \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) K_p + K_i}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \cdot \frac{p}{p - \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} X(z) \quad \dots (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \left(p - \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) Y(z) &= \left\{ \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 K_d + \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) K_p + K_i \right\} p X(z) \\ \left\{ \frac{2p}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - \frac{4}{T^2} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 \right\} Y(z) &= \left\{ \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 K_d + \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) K_p + K_i \right\} p X(z) \\ &\dots (14) \end{aligned}$$

両辺に $(1+z^{-1})^2$ をかけて整理すると

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{2p}{T} (1+z^{-1})(1-z^{-1}) - \frac{4}{T^2} (1-z^{-1})^2 \right\} Y(z) &= \\ \left\{ \frac{4}{T^2} (1-z^{-1})^2 K_d + \frac{2}{T} (1+z^{-1})(1-z^{-1}) K_p + (1+z^{-1})^2 K_i \right\} p X(z) \\ \left(-\frac{4-2pT}{T^2} + \frac{8}{T^2} z^{-1} - \frac{4+2pT}{T^2} z^{-2} \right) Y(z) &= \\ \left\{ \frac{4}{T^2} (1-2z^{-1}+z^{-2}) K_d + \frac{2}{T} (1-z^{-2}) K_p + (1+2z^{-1}+z^{-2}) K_i \right\} p X(z) \\ -\frac{4-2pT}{T^2} Y(z) &= \left(-\frac{8}{T^2} z^{-1} + \frac{4+2pT}{T^2} z^{-2} \right) Y(z) + \\ \left\{ \left(\frac{4K_d}{T^2} + \frac{2K_p}{T} + K_i \right) + \left(2K_i - \frac{8K_d}{T^2} \right) z^{-1} + \left(\frac{4K_d}{T^2} - \frac{2K_p}{T} + K_i \right) z^{-2} \right\} p X(z) \\ Y(z) &= \frac{4}{2-pT} z^{-1} Y(z) - \frac{2+pT}{2-pT} z^{-2} Y(z) - p \frac{4K_d+2TK_p+T^2K_i}{4-2pT} X(z) + \\ p \frac{4K_d-T^2K_i}{2-pT} z^{-1} X(z) - p \frac{4K_d-2TK_p+T^2K_i}{4-2pT} z^{-2} X(z) &\dots (15) \end{aligned}$$

これを実際のコンピュータでの演算形式で表現すると

$$y[n] = b_1 y[n-1] + b_2 y[n-2] + a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2]$$

ただし、

$$a_0 = -p \frac{4K_d + 2TK_p + T^2K_i}{4 - 2pT}, \quad a_1 = p \frac{4K_d - T^2K_i}{2 - pT}, \quad a_2 = -p \frac{4K_d - 2TK_p + T^2K_i}{4 - 2pT}$$

$$b_1 = \frac{4}{2 - pT}, \quad b_2 = -\frac{2 + pT}{2 - pT}$$

式(15)は、乗算5回と加算が4回となり、オリジナルのデジタルPIDコントローラより乗算が2回、加算が1回増えていますが、それほど大きなペナルティではないでしょう。例として、追加の極 $p = -10\text{kHz}$ とした改良型デジタルPIDコントローラの周波数特性を図3に示します。追加の極以外のパラメータは先ほどと同じです。

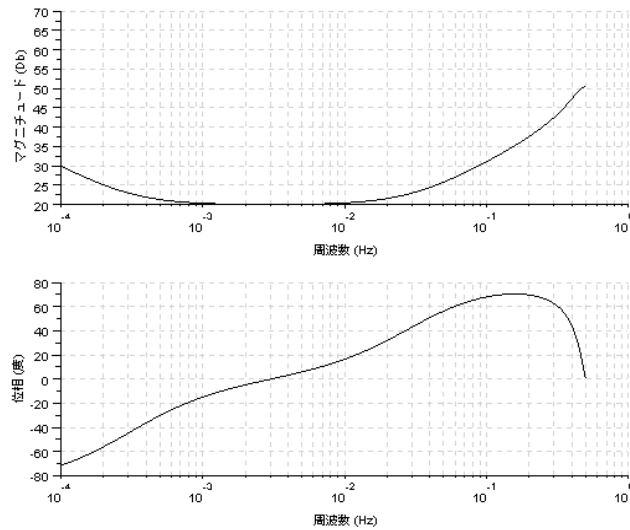


図3: 改良型PIDコントローラの周波数特性

高い周波数領域でのゲインの持ち上がりは抑えられましたが、極の影響によって位相は遅れてしまっています。もし、制御ループの安定性の面でこの位相の遅れが問題になるのであれば、追加の極 p をより高い方へ移動させれば緩和できますが、ゲインの持ち上がりは増加します。なお、極 p の周波数はナイキスト周波数やサンプリング周波数を超えるような位置に設定しても機能するようです。さらに面白いことに、極 p を正の周波数(Right Half Plane Pole)にすると、ゲインの持ち上がり抑制効果はそのままに、位相が進む方向になりますが、このあたりはあまりよく理解できていないので、何か罣があるのではないかと気もします。