Rekursja 2

DR MAGDALENA KACPRZAK

Rozwiązywanie równań rekurencyjnych na potrzeby analizy algorytmów rekurencyjnych

Analiza algorytmów rekurencyjnych

Złożoność czasową algorytmu rekurencyjnego można (zazwyczaj) przedstawić w postaci równania rekurencyjnego. Aby określić złożoność czasową należy rozwiązać takie równanie.

Rozwiązywanie rekursji
z zastosowaniem
równań charakterystycznych

Definicja

Równania rekurencyjne w postaci:

$$a_0t(n)+a_1t(n-1)+\ldots+a_kt(n-k)=0$$

gdzie składniki k oraz a_i są stałe, nazywamy **homogenicznymi (jednorodnymi) liniowymi równaniami rekurencyjnymi ze stałymi współczynnikami**.

Tego typu równanie jest nazywane liniowym, ponieważ każdy składnik t(i) występuje tylko raz w pierwszej potędze. Nie występują składniki takie jak **t^2(n-i), t(n-i)t(n-j)**. Nie mogą też występować składniki takie jak **t(n/2), t(3(n-4))** itp. Rekurencja ta jest nazywana homogeniczną (jednorodną), ponieważ liniowa kombinacja składników jest równa 0.

Definicja

Równaniem charakterystycznym dla homogenicznego liniowego równania rekurencyjnego ze stałymi współczynnikami

$$a_0 t(n)+a_1 t(n-1)+\ldots+a_k t(n-k)=0$$

inaczej

$$a_0 t(n+k)+a_1 t(n+k-1)+\ldots+a_k t(n+0)=0$$

nazywamy równanie w postaci

$$\mathbf{a_0 r^k+a_1 r^{k-1}+\ldots+a_k r^0=0}$$

Przykład 1

Rozważmy równanie rekurencyjne

$$t(n) = 5t(n-1)-6t(n-2) \quad \text{dla } n>1$$

Możemy je przekształcić do postaci

$$t(n+2) = 5t(n+1) - 6t(n) \quad \text{dla dowolnego n naturalnego}$$

i po przeniesieniu wszystkich wyrazów na jedną stronę otrzymujemy równanie:

$$t(n+2) - 5t(n+1) + 6t(n) = 0$$

Równanie charakterystyczne tego równania to

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Przykład 2

Rozważmy równanie rekurencyjne

$$t(n) = 3t(n-1) + 7t(n-2) - t(n-4) \quad \text{dla } n>3$$

Możemy je przekształcić do postaci

$$t(n+4) = 3t(n+3) + 7t(n+2) - t(n) \quad \text{dla dowolnego } n$$

i po przeniesieniu wszystkich wyrazów na jedną stronę

$$t(n+4) - 3t(n+3) - 7t(n+2) + t(n) = 0$$

Równanie charakterystyczne tego równania to

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 1 = 0$$

Twierdzenie

Rozważmy homogeniczne liniowe równanie rekurencyjne ze stałymi współczynnikami

$$a_0t(n)+a_1t(n-1)+\ldots+a_kt(n-k)=0$$

Jeżeli jego równanie charakterystyczne

$$a_0r^k+a_1r^{k-1}+\ldots+a_kr^0=0$$

posiada k różnych rozwiązań $r_1, r_2, \ldots , r_k$, to jedynym rozwiązaniem rekurencji jest

$$t(n)=c_1(r_1)^n+c_2(r_2)^n+ \ldots +c_k(r_k)^n$$

gdzie składniki c_i są dowolnymi stałymi. Wartości tych stałych są ustalone przez warunki początkowe.

Przykład

Rozważmy następujące homogeniczne liniowe równanie rekurencyjne

$$t(0)=0, \quad t(1)=1$$

$$t(n)=5t(n-1)-6t(n-2) \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

$$t(n+2)=5t(n+1)-6t(n) \quad \text{dla} \quad n \geq 0$$

Wtedy równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$x^2-5x+6=0$$

Przykład

Ponieważ

$$(x-3)(x-2)=0$$

to pierwiastkami są

$$x_1= 3, \ \ x_2= 2$$

Zatem

$$t(n)=C_1 3^n + C_2 2^n$$

Przykład

Brakujące współczynniki wyznaczamy z układu dwóch równań liniowych

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = t(0) \\ 3C_1 + 2C_2 = t(1) \\ \text{dla } t(0)=0,\ t(1)=1 \end{cases}$$

Ostatecznie

$$C_1 = 1,\ C_2 = -1$$

a z tego rozwiązaniem rozważanego równania jest

$$t(n) = 3^n - 2^n$$

Twierdzenie

Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną dodatnią i niech (*) oznacza zależność rekurencyjną między wyrazami ciągu {t(n)}:

$$(*) \quad t(n+k)=a_{k-1}t(n+k-1)+\mathbf{a_{k-1}}t(n+k-2)+...+\mathbf{a_1}t(n+1)+\mathbf{a_0}t(n)$$

gdzie $a_0,...,a_{k-1}$ są ustalonymi liczbami zespolonymi oraz niech t(0), t(1), ...,t(k-1) będą warunkami początkowymi.

Twierdzenie

Każdy ciąg $\{t(n)\}$ spełniający dla $n \geq 0$ zależność (*) jest postaci

$$t(n) = \sum_{i=1}^{m} W_i$$

gdzie m oznacza liczbę różnych pierwiastków równania charakterystycznego:

$$x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \ldots - a_1 x - a_0 = 0$$

Twierdzenie

Oznaczmy te pierwiastki przez $z_1, \dots z_m$ zaś ich krotności przez $k_1, \dots k_m$ odpowiednio. Wtedy W_i ma postać:

$$W_i = (z_i)^n (C_0 + C_1 n + \dots + C_{p-1} n^{p-1} + C_p n^p)$$

gdzie $p=k_i-1$, zaś $C_0, \dots, C_{p-1}, C_p$ są ustalonymi liczbami zespolonymi.

Przykład

Rozważmy następujące homogeniczne liniowe równanie rekurencyjne

$$t(0)=0,\quad t(1)=1,\quad t(2)=2$$

$$t(n+3)=t(n+2)+\frac{7}{4}t(n+1)+\frac{1}{2}t(n)$$

Wtedy równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$0=x^3-x^2-\frac{7}{4}x-\frac{1}{2}$$

Przykład

Ponieważ

$$0 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (x - 2)$$

to pierwiastkami są:

$$x_1 = -1/2, \quad x_2 = -1/2, \quad x_3 = 2$$

Zatem

$$t(n) = (C_1 n + C_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_3 2^n$$

Przykład

Brakujące współczynniki wyznaczamy z układu trzech równań liniowych

$$\begin{cases} \text{dla } t(0)=0,\ t(1)=1,\ t(2)=2 \\ C_2 + C_3 = t(0) \\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)(C_1 + C_2) + 2C_3 = t(1) \\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 (2C_1 + C_2) + 4C_3 = t(2) \end{cases}$$

Przykład

Ostatecznie

$$C_1 = 4/5,\ C_2 = -\,9/25,\ C_3 = 9/25$$

a z tego rozwiązaniem rozważanego równania jest

$$t(n) = \left(\frac{4}{5}n - \frac{9}{25}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{9}{25}\right) \cdot 2^n$$

Niejednorodne liniowe równania rekurencyjne

Redukcja do równań jednorodnych

Rozważmy następującą zależność rekurencyjną

$$t(n+k) = a_{k-1}t(n+k-1) + \ldots + a_1 t(n+1) + a_0 t(n) + b$$

Zauważmy, że

$$t(n+k+1) = a_{k-1}t(n+k) + \ldots + a_1 t(n+2) + a_0 t(n+1) + b$$

Odejmując stronami oba równania dostajemy

$$t(n+k+1) - t(n+k) = a_{k-1}t(n+k) + (a_{k-2} - a_{k-1})t(n+k-1) + \ldots$$
$$+ (a_1 - a_2)t(n+2) + (a_0 - a_1)t(n+1) - a_0 t(n)$$

Redukcja do równań jednorodnych

Stąd

$$t(n+k+1) = (a_{k-1}+1)t(n+k) + (a_{k-2} - a_{k-1})t(n+k-1) + \dots$$
$$+ (a_1 - a_2)t(n+2) + (a_0 - a_1)t(n+1) - a_0 t(n)$$

Zatem niejednorodne liniowe równanie rekurencyjne sprowadziliśmy do jednorodnego równania rekurencyjnego, którego rozwiązanie opisuje równanie charakterystyczne

$$x^{k+1} - (a_{k-1}+1)x^k - (a_{k-2} - a_{k-1})x^{k-1} + \dots - (a_1 - a_2)x^2 + (a_0 - a_1)x - a_0 = 0$$

Przykład

Rozważmy następujące niejednorodne liniowe równanie rekurencyjne

$$t(0)=1, \quad t(1)=1, \quad t(2)=\frac{13}{4}$$

$$t(n+2)=\frac{7}{4}t(n+1)+\frac{1}{2}t(n)+1$$

Przykład

Wówczas

$$t(n+2) = \frac{7}{4}t(n+1) + \frac{1}{2}t(n) + 1$$

$$t(n+3) = \frac{7}{4}t(n+2) + \frac{1}{2}t(n+1) + 1$$

Po odjęciu stronami dostajemy równanie jednorodne:

$$t(n+3) = \left(\frac{7}{4} + 1\right)t(n+2) + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{4}\right)t(n+1) - \frac{1}{2}t(n)$$

Przykład

Równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$x^3 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = 0$$

Ponieważ

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)(x-1)(x-2) = 0$$

to pierwiastkami są x=-1/4, x=1, x=2.

Przykład

Zatem

$$t(n) = C_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n + C_2 1^n + C_3 2^n$$

Brakujące współczynniki wyznaczamy z układu równań liniowych

$$\begin{cases} t(0)=1,\ t(1)=1,\ t(2)=13/4 \\ C_1 + C_2 + C_3 = t(0) \\ \left(-\frac{1}{4}\right)C_1 + C_2 + 2C_3 = t(1) \\ \left(-\frac{1}{4}\right)^2 C_1 + C_2 + 4C_3 = t(2) \end{cases}$$

Przykład

Ostatecznie

$C_1=4/5,\ C_2=-4/5,\ C_3=1$

a z tego rozwiązaniem rozważanego równania jest

$$a(n)=\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n-\frac{4}{5}+2^n$$

Twierdzenie o rekursji uniwersalnej, czyli szacowanie rzędu rozwiązania równania rekurencyjnego.

Twierdzenie o rekursji uniwersalnej

Niech $a \geq 1$, $b > 1$ będą stałymi, $f: N \rightarrow R^{+} \cup \{0\}$ pewną

funkcją i niech $T(n)$ będzie równaniem rekurencyjnym postaci

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

gdzie n/b tratujemy jako $\lfloor n/b \rfloor$ albo $\lceil n/b \rceil$ wtedy

Twierdzenie o rekursji uniwersalnej

(1) jeżeli $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon>0$, to

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$$

(2) jeżeli $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$, to

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\cdot \lg n)$$

(3) jeżeli $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon>0$, to

$$T(n)=\Theta(f(n))$$

pod warunkiem, że $af(n/b)\leq cf(n)$ dla pewnej stałej $c<1$ i wszystkich dostatecznie dużych n.

Algorytm postępowania

1. wyznacz $x = \log_b a$

2. wyznacz $n^x = n^{\log_b a}$ oraz $\Theta(n^x)$

3. wyznacz $\Theta(f(n))$

4. jeśli $f(n) = \Theta(n^x)$, to $T(n) = \Theta(n^x \cdot \lg n)$ – przypadek (2)

5. jeśli $f(n) = O(n^{x-\varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon > 0$, to $T(n) = \Theta(n^x)$ – przypadek (1)

6. jeśli $f(n) = \Omega(n^{x+\varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon > 0$, to $T(n) = \Theta(f(n))$ – przypadek (3) – o ile $af(n/b) \leq cf(n)$ dla pewnej stałej $c < 1$ i wszystkich dostatecznie dużych n

Przykład 1

Rozważmy równanie $T(n)=3T(n/3)+n^3+n$.

Stąd $a=3$, $b=3$, $f(n)=n^3+n$.

1. wyznaczamy $x = \log_b a=\log_3 3=1$
2. wyznaczamy $n^x = n^1=n$
3. wyznaczamy $\Theta(f(n))=\Theta(n^3+n)=\Theta(n^3)$
4. zauważmy, że $f(n)=\Omega(n^{x+\varepsilon})=\Omega(n^{1+\varepsilon})$ dla $\varepsilon=1$ oraz

$3f(n/3) = n^3/9+n \leq c(n^3+n)$ dla $c=2/3$ – przypadek (3)

Zatem $T(n)=\Theta(f(n))= \Theta(n^3)$

Przykład 2

Rozważmy równanie $T(1)=1$, $T(n)=T(n/2)+1$ dla $n>1$.

Stąd $a=1$, $b=2$, $f(n)=1$.

1. wyznaczamy $x = \log_b a=\log_2 1=0$
2. wyznaczamy $n^x= n^0=1$
3. wyznaczamy $\Theta(f(n))=\Theta(1)$
4. zauważmy, że $f(n) = \Theta(1)= \Theta(n^x)$ – przypadek (2)

Zatem $T(n)=\Theta(n^x \cdot \lg n)=\Theta(1\cdot \lg n)=\Theta(\lg n)$.

Rozwiązanie dokładne $T(n)=1+ \lg n$.

Rozwiązanie dokładnie można obliczyć używając programu do obliczeń matematycznych np. Maple.

Przykład 3

Rozważmy równanie $T(1)=0$, $T(n)=7T(n/2)+18(n/2)^2$ dla $n>1$.

Stąd $a=7$, $b=2$, $f(n)=18(n/2)^2$.

1. wyznaczamy $x = \log_b a=\log_2 7=\lg 7 \cong 2{,}8 >2$
2. wyznaczamy $n^x= n^{\lg 7}$
3. wyznaczamy $\Theta(f(n))=\Theta(18(n/2)^2)=\Theta(n^2)$
4. zauważmy, że $f(n)=O(n^{x-\varepsilon})=O(n^{\lg 7-\varepsilon})$ dla $\varepsilon=0{,}1$–przypadek (1)

Zatem $T(n)=\Theta(n^x)=\Theta(n^{\lg 7})$.

Rozwiązanie dokładne $T(n)=6n^{\lg 7}-6n^2$.

Przykład 4

Rozważmy równanie $T(n)=2T(n/2)+n\lg n$ dla $n>1$.

Stąd $a=2$, $b=2$, $f(n)= n\lg n$.

1. wyznaczamy $x = \log_b a=\log_2 2=1$
2. wyznaczamy $n^x= n$
3. wyznaczamy $\Theta(f(n))=\Theta(n\lg n)$
4. zauważmy, że $n\lg n\in\Omega(n)$,

ale dla dowolnego $\varepsilon>0$, $n\lg n\notin\Omega(n^{1+\varepsilon})$

i nie można zastosować Twierdzenia o rekursji uniwersalnej.

Rozwiązywanie rekursji za pomocą indukcji

Przykład 1

Przy użyciu indukcji nie da się znaleźć rozwiązania. Indukcja pozwala jedynie sprawdzić, czy potencjalne rozwiązanie jest prawidłowe.

Rozważmy rekurencję:

$t(1)=1,$

$t(n)=t(n/2)+1$

dla $n>1$ i n będącego potęgą liczby 2.

Przykład 1

Obliczmy kilka pierwszych wartości tego ciągu.

$t(2)=t(1)+1=1+1=2$

$t(4)=t(2)+1=2+1=3$

$t(8)=t(4)+1=3+1=4$

$t(16)=t(8)+1=4+1=5$

Zgadnijmy wzór na wyraz ogólny.

Przykład 1

Obliczmy kilka pierwszych wartości tego ciągu.

$t(2)=t(1)+1=1+1=2$

$t(4)=t(2)+1=2+1=3$

$t(8)=t(4)+1=3+1=4$

$t(16)=t(8)+1=4+1=5$

Zgadnijmy wzór na wyraz ogólny.

$t(n)=\lg(n)+1$

Przykład 1

Obliczmy kilka pierwszych wartości tego ciągu.

$t(2)=t(1)+1=1+1=2$

$t(4)=t(2)+1=2+1=3$

$t(8)=t(4)+1=3+1=4$

$t(16)=t(8)+1=4+1=5$

Zgadnijmy wzór na wyraz ogólny.

$t(n)=\lg(n)+1$

Udowodnimy, że jest to prawda.

Przykład 1

Baza indukcji

dla n=1, t(1)=lg(1)+1=0+1=1, faktycznie t(1)=1

Krok indukcyjny

Założenie indukcyjne: zakładamy, że dla dowolnego k>0, gdzie k jest potęgą liczby 2, **t(k)=lg(k)+1**

Teza indukcyjna: **t(2k)=lg(2k)+1**

Dowód tezy indukcyjnej:

t(2k) =(z zależności rekurencyjnej)= t(2k/2)+1 = t(k)+1 =(z założenia indukcyjnego)= lg(k)+1+1 = lg(k)+lg(2)+1 = lg(2k)+1

Przykład 2

Rozważmy inną rekurencję:

$t(1)=1$,

$t(n)=7t(n/2)$

dla $n>1$ i n będącego potęgą liczby 2.

Przykład 2

Obliczmy kilka pierwszych wartości tego ciągu.

$t(2)=7t(1)=7$

$t(4)=7t(2)=7^2$

$t(8)=7t(4)= 7^3$

$t(16)=7t(8)= 7^4$

Zgadnijmy wzór na wyraz ogólny.

Przykład 2

Obliczmy kilka pierwszych wartości tego ciągu.

$t(2)=7t(1)=7$

$t(4)=7t(2)=7^2$

$t(8)=7t(4)= 7^3$

$t(16)=7t(8)= 7^4$

Zgadnijmy wzór na wyraz ogólny.

$t(n)=7^{\lg(n)}$

Przykład 2

Obliczmy kilka pierwszych wartości tego ciągu.

$t(2)=7t(1)=7$

$t(4)=7t(2)=7^2$

$t(8)=7t(4)= 7^3$

$t(16)=7t(8)= 7^4$

Zgadnijmy wzór na wyraz ogólny.

$t(n)=7^{\lg(n)}$

Udowodnimy, że jest to prawda.

Przykład 2

Baza indukcji

dla n=1, $t(1)=7^0=1$, faktycznie $t(1)=1$

Krok indukcyjny

Założenie indukcyjne: zakładamy, że dla dowolnego $k>0$, gdzie k jest potęgą liczby 2, $\mathbf{t(k)= 7^{lg(k)}}$

Teza indukcyjna: $\mathbf{t(2k)= 7^{lg(2k)}}$

Dowód tezy indukcyjnej:

$t(2k)$ =(z zależności rekurencyjnej)= $7t(2k/2) = 7t(k)$ =(z założenia indukcyjnego)= $7 \cdot 7^{lg(k)} = 7^{1+lg(k)} = 7^{lg(2)+lg(k)} = 7^{lg(2k)}$

Przykład 3

Rozważmy rekurencję

$$t(0)=0,\ t(1)=1$$

$$t(n)=5t(n-1)-6t(n-2) \text{ dla } n>1$$

Udowodnimy, że jej rozwiązaniem jest

$$t(n)=3^n-2^n$$

Przykład 3

Rozważmy rekurencję

$$t(0)=0,\ t(1)=1$$

$$t(n)=5t(n-1)-6t(n-2) \text{ dla } n>1$$

Udowodnimy, że jej rozwiązaniem jest

$$t(n)=3^n-2^n$$

Baza indukcji

dla $n=0$, $t(0)=3^0-2^0=1-1=0$, faktycznie $t(0)=0$

Przykład 3

Krok indukcyjny

Założenie indukcyjne: zakładamy, że dla dowolnego k oraz dla każdego i takiego, że $0 \le i < k$, $\mathbf{t(i) = 3^i - 2^i}$

Teza indukcyjna: $\mathbf{t(k) = 3^k - 2^k}$

Dowód tezy indukcyjnej:

$t(k)$ =(z zależności rekurencyjnej)= $5t(k-1)-6t(k-2)=$
(z założenia indukcyjnego)= $5(3^{k-1} - 2^{k-1})-6(3^{k-2} - 2^{k-2})=$
$5\cdot3^{k-1} - 5\cdot2^{k-1} - 6\cdot3^{k-2} + 6\cdot2^{k-2} = 5\cdot3\cdot3^{k-2} - 5\cdot2\cdot2^{k-2} - 6\cdot3^{k-2} + 6\cdot2^{k-2}=$
$9\cdot3^{k-2} - 4\cdot2^{k-2} = 3^2\cdot3^{k-2} - 2^2\cdot2^{k-2} = 3^k - 2^k$

Rozwiązywanie rekursji przez podstawienie

Rozwiązywanie rekursji przez podstawianie

Rozważmy równanie $t(1)=1$, $t(n)=t(n-1)+n$ dla $n>1$.

Podstawianie jest metodą odwrotną do indukcji.

$t(n)=t(n-1)+n$

$t(n-1)=t(n-2)+(n-1)$

$t(n-2)=t(n-3)+(n-2)$

……………………

$t(2)=t(1)+1$

$t(1)=1$

Rozwiązywanie rekursji przez podstawianie

Teraz podstawiamy każdą równość do poprzedniej.

$t(n)=$

$t(n-1)+n =$

$t(n-2)+(n-1)+n$

$t(n-3)+(n-2)+(n-1)+n=$

…………………….

$t(1)+2+\ldots+(n-2)+(n-1)+n=$

$1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)+n = (1+n)n/2$

Funkcje tworzące

Szereg liczbowy

Rozważmy ciąg liczbowy (a_n)

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.$$

Dla ustalonego n, niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n)

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ S_3=a_1+a_2+a_3,\ S_4=a_1+a_2+a_3+a_4 \ldots..$$

Ciąg (S_n) sum częściowych $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ nazywamy szeregiem liczbowym.

Szereg oznaczamy symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lub $a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots.$

Zbieżność szeregu geometrycznego

Szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$$

jest zbieżny dla $|x|<1$. Dla zbieżnego szeregu geometrycznego mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Ogólnie, suma zbieżnego nieskończonego szeregu geometrycznego $a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\ldots$, gdzie $|q|<1$ wynosi

$$\frac{a_1}{1-q}.$$

Szereg potęgowy

Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $x_0 \in R$ i współczynnikach $c_n \in R$, gdzie n=0,1,2,.., nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

gdzie $x \in R$.

Szereg Taylora i Maclaurina

Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodne dowolnego rzędu. Szereg potęgowy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

nazywamy szeregiem Taylora funkcji f o środku w punkcie x_0. Jeżeli $x_0=0$, to szereg ten nazywamy szeregiem Maclaurina funkcji f.

O rozwijaniu funkcji w szereg Taylora

Jeżeli

1. funkcja f ma na otoczeniu O punktu x_0 pochodne dowolnego rzędu

2. dla każdego $x \in O$ spełniony jest warunek $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

gdzie

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

oznacza n-tą resztę we wzorze Taylora dla funkcji f, to

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

dla każdego $x \in O$.

Twierdzenie o jednoznaczności rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy

Jeżeli

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

dla każdego x z pewnego otoczenia punktu x_0, to

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Funkcja tworząca ciągu

Rozważmy ciąg liczbowy (a(n)). Wówczas

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$$

nazywamy zwykłą funkcją tworzącą lub krótko funkcją tworzącą.

Uwagi

Funkcje tworzące mają zatem postać szeregów potęgowych.

Dla każdego takiego szeregu istnieje liczba rzeczywista $R \geq 0$, zwana promieniem zbieżności, taka że jeśli $|x|<R$, to jest on absolutnie zbieżny, a ponadto można go różniczkować i całkować wyraz po wyrazie dowolną liczbę razy.

Zachodzi też wtedy wzór Taylora

$$a(n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0,1,\dots.$$

Przykład 1

Rozważmy ciąg: 1,2,4,8,16,...

$$a(n)=2^n,\ \ n=0,1,2,....$$

Wówczas funkcja tworząca ciągu (2^n) dana jest wzorem:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = 1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\ldots=\frac{1}{1-2x}$$

Przykład 2

Rozważmy ciąg: 1,2,3,4,5,...

$$a(n)=n+1, \quad n=0,1,2, \ldots.$$

Wówczas funkcja tworząca ciągu (n+1) dana jest wzorem:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^{2}}$$

Podsumowanie

Ciąg: $a(n)=n+1$ dla $n\geq 0$

1, 2, 3, 4,...

Funkcja tworząca: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

Postać zwarta funkcji tworzącej: $\frac{1}{(1-x)^2}$

Zatem: $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

Podsumowanie

Ciąg: $a(n)=2^n$ dla $n\geq 0$

1, 2, 4, 8,...

Funkcja tworząca: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

Postać zwarta funkcji tworzącej: $\frac{1}{1-2x}$

Zatem: $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots$

Podsumowanie

Ciąg: $a(n)=1/n$ dla $n>0$

1, 1/2, 1/3, 1/4, ...

Funkcja tworząca: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

Postać zwarta funkcji tworzącej: $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$

Zatem: $\ln \frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots$

Podsumowanie

Ciąg: a(n)=1/n! dla n≥0

1, 1, 1/2, 1/6, 1/24, ...

Funkcja tworząca: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

Postać zwarta funkcji tworzącej: $f(x) = e^x$

Zatem: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$

Podsumowanie

Rozwiniemy funkcję $f(x)=e^x$ w szereg Taylora: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Ze wzoru Taylora wynika, że

$$a(n)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\quad n=0,1,\dots.$$

Ponieważ $f(x)=f'(x)=f''(x)=\dots=e^x$ oraz $f'(0)=f''(0)=\dots=e^0=1$, to

$a(0)=1/0!=1$, $a(1)=1/1!=1$, $a(2)=1/2!=1/2$, $a(3)=1/3!=1/6$, ...

Stąd

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\dots$$

Rozwiązywanie równań rekurencyjnych metodą funkcji tworzących

Algorytm rozwiązywania równań rekurencyjnych metodą funkcji tworzących

1. Dany jest ciąg w postaci rekurencyjnej
2. Wyznaczamy funkcję tworzącą tego ciągu
3. Wyznaczamy postać zwartą funkcji tworzącej
4. Rozwijamy funkcję tworzącą w szereg Taylora
5. Wyznaczamy postać jawną ciągu (współczynniki rozwinięcia funkcji tworzącej w szereg to kolejne wyrazy ciągu)

Przykład - wieża Hanoi

Wieża Hanoi

Niech a(n) będzie minimalną liczbą ruchów niezbędną do przeniesienia wieży składającej się z n krążków.

1. Układamy zależność rekurencyjną

$$a(n)=2a(n-1)+1 \text{ oraz } a(1)=1$$

Wieża Hanoi

2. Określamy funkcję tworzącą

ciąg w postaci rekurencyjnej

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n = a(1)x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (2a(n-1)+1)x^n =$$

$$1 \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a(n-1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 1 \cdot x^n$$

Wieża Hanoi

3. Znajdujemy postać zwartą

$$f(x) = x + 2x\sum_{n=2}^{\infty} a(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} x^{n} =$$

$$2x\sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n} = 2xf(x) + \frac{x}{1-x}$$

Wieża Hanoi

3. Znajdujemy postać zwartą

$$f(x) = x + 2x\sum_{n=2}^{\infty} a(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} x^{n} =$$

$$2x\sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n} = 2xf(x) + \frac{x}{1-x}$$

Wieża Hanoi

Stąd

$$f(x) = 2xf(x) + \frac{x}{1-x}$$

$$f(x)(1-2x) = \frac{x}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

Wieża Hanoi

4. Rozwijamy funkcję tworzącą w szereg

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} =$$

$$\frac{2x}{(1-2x)} - \frac{x}{(1-x)} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n - 1\right) x^n$$

ciąg w postaci jawnej

Wieża Hanoi

5. Wyznaczamy postać jawną ciągu

$$a(n)=2^n-1$$

Przykład - podzbiory bez sąsiadów

Podzbiory bez sąsiadów

Ile podzbiorów zbioru

$$[n]=\{1,2,\ldots,n\},$$

wliczając zbiór pusty, nie zawiera sąsiednich liczb?

Podzbiory bez sąsiadów

1. Układamy zależność rekurencyjną

Oznaczmy szukaną liczbę przez a(n) i podzielmy wszystkie podzbiory tego typu na dwie klasy: te do których nie należy liczba 1, i te do których 1 należy.

Tych pierwszych jest tyle, ile podzbiorów bez sąsiadów zbioru {2,...,n}, a więc a(n-1).

Tych drugich jest tyle, ile podzbiorów bez sąsiadów zbioru {3,...,n}, a więc a(n-2).

Podzbiory bez sąsiadów

Zatem

$$a(n)=a(n-1)+a(n-2) \text{ dla } n>1$$

przy warunkach początkowych

$$a(0)=1 \text{ i } a(1)=1$$

Podzbiory bez sąsiadów

2. Określamy funkcję tworzącą

Dla a(0)=a(1)=1 funkcja tworząca ciągu Fibonacciego przyjmuje postać

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n =$$

$$a(0) + a(1)x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a(n-1) + a(n-2))x^n =$$

$$1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a(n-1) + a(n-2))x^n$$

Podzbiory bez sąsiadów

3. Znajdujemy postać zwartą

$$f(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(a(n-1) + a(n-2))x^n =$$

$$1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a(n-1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a(n-2)x^n =$$

$$1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^{n+2} =$$

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^{n+2} = 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n =$$

$$1 + xf(x) + x^2 f(x)$$

Podzbiory bez sąsiadów

Stąd

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}}{1-a_1 x} - \frac{a_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}}{1-a_2 x}$$

gdzie

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Podzbiory bez sąsiadów

4. Rozwijamy funkcję tworzącą w szereg

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)x^{n}$$

5. Wyznaczamy postać jawną ciągu

$$a(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Trudności w rozwiązywaniu rekursji

CZY DLA KAŻDEJ ZALEŻNOŚCI REKURENCYJNEJ MOŻNA ZNALEŹĆ ROZWIĄZANIE?

Zależności rekurencyjne trudne i niemożliwe do rozwikłania

Liczby Stirlinga II rodzaju – ciąg liczbowy analizowany przez Jamesa Stirlinga wyznaczający liczbę podziałów n-elementowego zbioru na k części ($n,k \in N$).

- $S(n,0) = 0$ dla $n>0$
- $S(n,1) = 1$
- $S(n,n) = 1$
- $S(n,k) = 0$, gdy $k>n$

$$S(n,k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1,k)$$

$$S(n,k) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \cdot \frac{r^n}{r! \cdot (k-r)!}$$

Zależności rekurencyjne trudne i niemożliwe do rozwikłania

Funkcja Ackermanna - funkcja matematyczna odkryta przez Wilhelma Ackermanna w 1928 roku.

Cechą charakterystyczną tej dwuargumentowej funkcji jest jej nadzwyczaj szybki wzrost. Jest używana do testowania jakości optymalizacji kompilatorów.

- $A(m,n) = n+1$ dla $m=0$
- $A(m,n) = A(m-1,1)$ dla $m>0$ i $n=0$
- $A(m,n) = A(m-1,A(m,n-1))$ dla $m>0$ i $n>0$

Nie jest znany jawny wzór funkcji Ackermanna.

Zadania

Zadanie 1

Wyznaczyć liczbę a(n) ciągów binarnych długości n, w których żadne dwa zera nie występują obok siebie.

a(1)=2 – ciągi 1; 0

a(2)=3 – ciągi 01; 10; 11

a(3)= ?

Zadanie 1

Wyznaczyć liczbę a(n) ciągów binarnych długości n, w których żadne dwa zera nie występują obok siebie.

a(1)=2 – ciągi 1; 0

a(2)=3 – ciągi 01; 10; 11

a(3)=5 – ciągi 011; 101; 111; 010; 110

Zadanie 1

Wyznaczyć liczbę a(n) ciągów binarnych długości n, w których żadne dwa zera nie występują obok siebie.

a(1)=2 – ciągi 1; 0

a(2)=3 – ciągi 01; 10; 11

a(3)=5 – ciągi 011; 101; 111; 010; 110

a(n)=a(n-1)+a(n-2) dla n>2

Zadanie 1

Równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Pierwiastkami tego równania są

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{oraz} \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Zatem

$$a(n) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Zadanie 1

Brakujące współczynniki wyznaczamy z układu dwóch równań liniowych

$$\begin{cases} C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = a(1) \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = a(2) \end{cases}$$

dla a(1)=2, a(2)=3

Zadanie 1

Ostatecznie

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} \qquad \text{oraz} \qquad C_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$$

a z tego rozwiązaniem rozważanego równania jest

$$a(n) = \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Zadanie 2

Wyznaczyć liczbę a(n) ciągów ternarnych (złożonych z cyfr 0,1,2) długości n, w których żadne dwie jedynki nie występują obok siebie.

a(1)=3 – ciągi 2; 1; 0

a(2)=8 – ciągi 00; 01; 02; 10; 12; 20; 21; 22

a(3)= ?

Zadanie 2

Wyznaczyć liczbę a(n) ciągów ternarnych (złożonych z cyfr 0,1,2) długości n, w których żadne dwie jedynki nie występują obok siebie.

a(1)=3 – ciągi 2; 1; 0

a(2)=8 – ciągi 00; 01; 02; 10; 12; 20; 21; 22

a(3)=22 – ciągi

000; 010; 020; 100; 120; 200; 210; 220;

002; 012; 022; 102; 122; 202; 212; 222;

201; 101; 001; 221; 121; 021

Zadanie 2

a(n)=2a(n-1)+2a(n-2) dla n>2

Równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$P(x) = x^2 - 2x - 2$$

Pierwiastkami tego równania są

$$x_1 = 1 + \sqrt{3} \qquad \text{oraz} \qquad x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

Zatem

$$a(n) = C_1\left(1 + \sqrt{3}\right)^n + C_2\left(1 - \sqrt{3}\right)^n$$

Zadanie 2

Brakujące współczynniki wyznaczamy z układu dwóch równań liniowych

$$\begin{cases} C_1\left(1+\sqrt{3}\right)^1 + C_2\left(1-\sqrt{3}\right)^1 = a(1) \\ C_1\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + C_2\left(1-\sqrt{3}\right)^2 = a(2) \end{cases}$$

dla a(1)=3, a(2)=8

Zadanie 2

Ostatecznie

$$C_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6} \qquad \text{oraz} \qquad C_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$$

a z tego rozwiązaniem rozważanego

równania jest

$$a(n) = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

Zadanie 3

Znaleźć postać jawną ciągu (rozwiązanie zagadnienia wieży Hanoi)

$$a(n)=2a(n-1)+1 \text{ oraz } a(1)=1,\ a(2)=3$$

Zadanie 3

Wyznaczamy

$$a(n+1)=2a(n)+1$$

$$a(n+2)=2a(n+1)+1$$

i odejmujemy stronami otrzymując

$$a(n+2)-a(n+1)=2a(n+1)-2a(n)+1-1$$

czyli

$$a(n+2) =3a(n+1)-2a(n)$$

Zadanie 3

Równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$

Pierwiastkami tego wielomianu są

$$x_1 = 2 \qquad \text{oraz} \qquad x_2 = 1$$

Zatem

$$a(n) = C_1 2^n + C_2 1^n = C_1 2^n + C_2$$

Zadanie 3

Brakujące współczynniki wyznaczamy z układu dwóch równań liniowych

$$\begin{cases} C_1 2^1 + C_2 = a(1) \\ C_1 2^2 + C_2 = a(2) \end{cases}$$

dla a(1)=1, a(2)=3

Zadanie 3

Ostatecznie

$$C_1 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad C_2 = -1$$

a z tego rozwiązaniem rozważanego równania jest

$$a(n) = 2^n - 1$$