Rekursja

1. Podaj definicję rekurencyjną ciągu $(2, 2^2, 2^4, 2^8, \dots)$.
2. Niech $\Sigma = \{a, b, c\}$ i niech $S(n)$ oznacza liczbę słów długości n, które nie mają kolejnych liter a. Znajdź wzór rekurencyjny na $S(n)$.
3. Znajdź równanie rekurencyjne dla liczby n-elementowych ciągów ternarnych, w których:
   (a) liczba zer jest parzysta,
   (b) liczba zer i liczba jedynek są parzyste.
4. Dana jest rekurencyjna definicja ciągu (a_n). Znajdź wzór na n-ty wyraz tego ciągu, a następnie stosując zasadę indukcji udowodnij, że podałeś poprawną odpowiedź.
   (a) $a_0 = p$, $a_n = a_{n-1} + (p + n)$ dla $n > 0$ (parametr p jest pewną liczbą naturalną),
   (b) $a_0 = 3$, $a_n = a_{n-1}(2a_{n-1} + 1)^{-1}$ dla $n > 0$,
   (c) $a_0 = 5$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$ dla $n > 0$,
   (d) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$ dla $n \geqslant 0$.
5. Niech $\Sigma = \{a, b\}$ i niech $t(n)$ oznacza liczbę słów długości n, w których jest parzysta liczba liter a. Znajdź wzór na $t(n)$ i udowodnij, że jest on poprawny.
6. Stosując równanie charakterystyczne wyznacz postać jawną ciągu:
   (a) $a(0) = 2$, $a(1) = -1$, $a(n + 2) = -a(n + 1) + 6a(n)$ dla $n \geqslant 0$,
   (b) $a(0) = 2$, $a(n + 1) = 5a(n)$ dla $n \geqslant 0$,
   (c) $a(0) = 1$, $a(1) = 8$, $a(n + 2) = 4a(n + 1) - 4a(n)$ dla $n \geqslant 0$,
   (d) $a(0) = 1$, $a(1) = 5$, $a(2) = 17$, $a(n + 3) = 7a(n + 2) - 16a(n + 1) + 12a(n)$ dla $n \geqslant 0$,
   (e) $a(0) = 2$, $a(1) = 6$, $a(n + 2) = -10a(n + 1) - 24a(n)$ dla $n \geqslant 0$.
7. Wyznacz funkcję tworząca ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie i na jej podstawie określ kilka początkowych elementów ciągu oraz jego postać jawną.
   (a) $a(0) = 1$, $a(n + 1) = a(n)$ dla $n \geqslant 0$,
   (b) $a(0) = 0$, $a(n) = a(n - 1) + 1$ dla $n > 0$,
   (c) $a(0) = 2$, $a(1) = 5$, $a(n + 2) = 5a(n + 1) - 6a(n)$ dla $n \geqslant 0$,
   (d) $a(0) = 2$, $a(1) = 5$, $a(n + 2) = 4a(n + 1) - 3a(n)$ dla $n \geqslant 0$.
8. Stosując Twierdzenie o Rekursji Uniwersalnej wyznacz rząd rozwiązania równania rekurencyjnego.
   (a) $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n \lg n$,
   (b) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 5n - 15$,
   (c) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n \lg n$,
   (d) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$,
   (e) $T(n) = T(\frac{n}{3}) + 1$,
   (f) $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n^3$,
   (g) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \lg n$.

ODPOWIEDZI

1. $a_0 = 2, a_{n+1} = (a_n)^2$;
2. $S(1) = 3$, $S(2) = 8$, $S(n+1) = 2S(n) + 2S(n-1)$;
4. **(a)** $a_n = (n+1)(p + \frac{n}{2})$, **(b)** $a_n = \frac{3}{6n+1}$, **(c)** $a_n = 6 \cdot 2^n - 1$, **(d)** $a_n = \frac{1}{2n+1}$;
5. $t(1) = 1$, $t(2) = 2$, $t(n+1) = 2t(n)$;
6. **(a)** $a(n) = (-1)^n \cdot 3^n + 2^n$, **(b)** $a(n) = 2 \cdot 5^n$, **(c)** $a(n) = 2^n + 3n \cdot 2^n$, **(d)** $a(n) = n \cdot 2^n + 3^n$, **(e)** $a(n) = (-1)^n(9 \cdot 4^n - 7 \cdot 6^n)$;
7. **(a)** $G(x) = \frac{1}{1-x}$, $a(n) = 1$, **(b)** $G(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, $a(n) = n$, **(c)** $G(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}$, $a(n) = 2^n + 3^n$, **(d)** $G(x) = \frac{1}{2-2x} + \frac{3}{2-6x}$, $a(n) = \frac{1}{2}(1 + 3^{n+1})$;
8. **(a)** $T(n) = \Theta(n^2)$, **(b)** $T(n) = \Theta(n \lg n)$, **(c)** $T(n) = \Theta(n \lg n)$, **(d)** $T(n) = \Theta(n^2)$, **(e)** $T(n) = \Theta(\lg n)$, **(f)** $T(n) = \Theta(n^3)$, **(g)** nie można zastosować twierdzenia.