Rekursja

Układanie zależności rekurencyjnych

Zad Niech Σ = {a, b, c} i niech S(n) oznacza liczbę słów długości n, które nie mają kolejnych liter a. Znajdź wzór rekurencyjny na S(n).

Niech (*) oznacza następujący warunek mówiący o tym, że w ciągu nie ma kolejnych liter a.

Wyznaczamy kolejno ciągi długości 1 i 2 spełniające warunek (*)

Wszystkie ciągi długości 1 spełniają (*), są to: a; b; c.
Jest ich S(1)=3.

Wszystkie ciągi długości 2 to: aa; ab; ac; ba; bb; bc; ca; cb; cc . Spełniające warunek (*) to: ab; ac; ba; bb; bc; ca; cb; cc.
Jest ich S(2)=8.

Rozważmy ciąg długości n. Na ostatniej pozycji takiego ciągu może stać a lub b lub c. Rozważmy kolejno te przypadki.

Jeśli na końcu ciągu stoi litera a
----------------a
to przed nią musi być litera b lub c by spełniony był warunek (*), a wcześniej musi być dowolny ciąg długości n-2 spełniający (*).
---------------ba
---------------ca
Ciągów długości n-2 spełniających (*) jest S(n-2). Zatem ciągów długości n kończących się literami ba jest również S(n-2). Podobnie ciągów długości n kończących się literami ca jest S(n-2) Zatem wszystkich ciągów kończących się literą a jest S(n-2)+S(n-2).

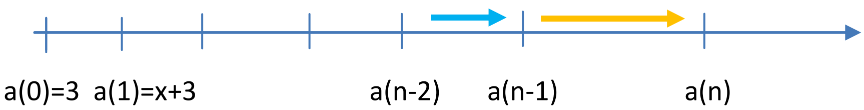
Jeśli na końcu ciągu stoi litera b
----------------b
to przed nią musi być dowolny ciąg długości n-1 spełniający (*). Takich ciągów jest S(n-1) i tym samym ciągów kończących się literą b jest dokładnie S(n-1).

Podobna sytuacja jest, gdy ciąg kończy się literą c
----------------c
Takich ciągów jest również S(n-1).

Stąd wszystkich ciągów długości n jest S(n)= S(n-2) * 2 + S(n-1) + S(n-1), czyli S(n)= 2S(n-2)+2S(n-1).

Odpowiedź. Poszukiwana zależność rekurencyjna to S(n)= 2S(n-2)+2S(n-1) z warunkami początkowymi S(1)=3 oraz S(2)=8.

Zad. Pewna cząsteczka porusza się w kierunku poziomym i w każdej sekundzie pokonuje odległość równą podwojonej odległości pokonanej w sekundzie poprzedzającej. Niech $a(n)$ oznacza pozycję cząsteczki po n sekundach. Określić $a(n)$, wiedząc, że $a(0)=3$ oraz $a(3)=10$.



Na początku (po 0 sekundach) cząsteczka jest na pozycji 3, $a(0)=3$.

W pierwszej sekundzie pokonuje pewną drogę, oznaczmy ją x. Stąd po jednej sekundzie cząsteczka jest na pozycji $3+x$, $a(1)=3+x$.

W drugiej sekundzie pokonuje drogę równą podwojonej odległości pokonanej w sekundzie poprzedzającej, czyli $2x$. Stąd po drugiej sekundzie cząsteczka jest na pozycji $3+x+2x$, $a(2)=3+3x$.

W trzeciej sekundzie pokonuje drogę równą podwojonej odległości pokonanej w sekundzie poprzedzającej, czyli $2*2x$. Stąd po drugiej sekundzie cząsteczka jest na pozycji $3+x+2x+4x$, $a(2)=3+7x$. Wiemy, że po 3 sekundach cząsteczka jest na pozycji 10. Stąd $3+7x=10$, czyli $x=1$.

W konsekwencji policzyliśmy, że $a(1)=3+x=4$, $a(2)=3+3x=6$ i to są warunki początkowe szukanej zależności rekurencyjnej.

Wyznaczymy teraz tę zależność. Wiemy, że w n-tej sekundzie cząsteczka pokonuje drogę równą podwojonej odległości pokonanej w sekundzie poprzedzającej, czyli sekundzie n-1. Z drugiej strony droga pokonana w n-1 sekundzie, to $a(n-1)-a(n-2)$. Pozycja cząsteczki po n sekundach jest równa sumie pozycji po n-1 sekundach i pokonanej drodze, czyli

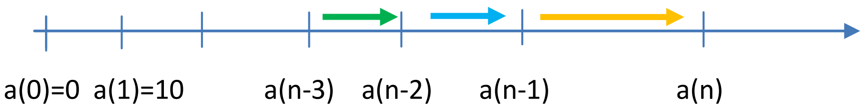
$$a(n)=a(n-1)+2*(a(n-1)-a(n-2)).$$

Zatem szukana zależność to

$$a(n)=3a(n-1)-2a(n-2)$$

z warunkami początkowymi $a(1)=4$, $a(2)=6$.

Zad. Punkt przemieszcza się po osi liczbowej. W n-tej sekundzie (n>=2) pokonuje odległość równą n-tej potędze odległości, jaką przebył w sekundzie poprzedzającej, pomniejszonej o n sekund. Niech a(n) oznacza położenie punktu po n sekundach. Wskaż wzór rekurencyjny ciągu a(n), wiedząc że a(0)=0, a(1)=10 oraz oblicz wartość liczbową a(2).



Na początku (po 0 sekundach) cząsteczka jest na pozycji 0, a(0)=0.

W pierwszej sekundzie cząsteczka jest na pozycji 10, a(1)=10.

W drugiej sekundzie pokonuje drogę równą odległości równej 2-giej potędze odległości, jaką przebył w sekundzie poprzedzającej, pomniejszonej o 2 sekundy, czyli $(a(1)-a(0))^2 = 10^2-2$.

Stąd, $a(2) = a(1)+ (a(1)-a(0))^2 – 2 = 10 + 10^2 – 2 =108$.

W n-tej sekundzie pokonuje drogę równą odległości równej n-tej potędze odległości, jaką przebył w sekundzie poprzedzającej, pomniejszonej o n sekund, czyli $(a(n-1)-a(n-2))^n-n$.

Stąd pozycja cząsteczki po n sekundach jest równa sumie pozycji po n-1 sekundach i przebytej drogi

$$a(n) = a(n-1) + (a(n-1) – a(n-2))^n – n$$

z warunkami początkowymi a(0)=0, a(1)=10.

Twierdzenie o rekursji uniwersalnej

Zad. Stosując Twierdzenie o Rekursji Uniwersalnej wyznacz rząd rozwiązania równania rekurencyjnego.

Niech $a \geq 1$, $b > 1$ *będą stałymi,* $f : N \to R^{+} \cup \{0\}$ *pewną funkcją i niech* $T(n)$ *będzie równaniem rekurencyjnym postaci*

$$T(n)=aT(n/b)+f(n)$$

gdzie n/b *tratujemy jako* $\lfloor n/b \rfloor$ *albo* $\lceil n/b \rceil$ *wtedy*

(1) jeżeli $f(n)= O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ *dla pewnej stałej* $\varepsilon>0$, *to* $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

(2) jeżeli $f(n)= \Theta(n^{\log_b a})$, *to* $T(n)=\Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n)$

(3) jeżeli $f(n)= \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ *dla pewnej stałej* $\varepsilon>0$, *to* $T(n)=\Theta(f(n))$, *pod warunkiem, że* $af(n/b) \leq cf(n)$ *dla pewnej stałej* $c<1$ *i wszystkich dostatecznie dużych* n.

Algorytm postępowania

1. wyznacz $x=\log_b a$
2. wyznacz $n^x = n^{\log_b a}$
3. wyznacz rząd funkcji $f(n)$, czyli $\Theta(f(n))$
4. sprawdź, który przypadek twierdzenia zachodzi i sformułuj wniosek:
   a) jeśli $f(n)=O(n^{x-\varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon>0$, to $T(n)=\Theta(n^x)$ – przypadek (1)
   b) jeśli $f(n) = \Theta(n^x)$, to $T(n)=\Theta(n^x \cdot \lg n)$ – przypadek (2)
   c) jeśli $f(n)=\Omega(n^{x+\varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon>0$, to $T(n)=\Theta(f(n))$ – przypadek (3) – o ile $af(n/b)\leq cf(n)$ dla pewnej stałej $c<1$ i wszystkich dostatecznie dużych n

Zad. Wyznacz rząd rozwiązania następującego równania rekurencyjnego

$$\mathbf{T(n)=16T(n/4)+nlg(n)}$$

Z równania odczytujemy a=16, b=4, f(n)= nlg(n).

Następnie wyznaczamy kolejno

1. $x=\log_b a=\log_4 16=2$
2. $n^x=n^2$
3. $\Theta(f(n))=\Theta(nlg(n))= nlg(n)$
4. Porównujemy rzędy funkcji n^2 i f(n)=nlg(n). Zauważmy, że $f(n)=O(n^{2-\varepsilon})$ dla $\varepsilon=1/2$, czyli zachodzi **przypadek 1**. Zatem $T(n)= \Theta(n^2)$.

Odpowiedź: Rozwiązanie zależności rekurencyjnej jest funkcją rzędu n^2. Dokładnej postaci rozwiązania nie da się wyznaczyć bazując tylko na tym twierdzeniu.

Zad. Wyznacz rząd rozwiązania następującego równania rekurencyjnego

$$\mathbf{T(n)=2T(n/2)+nlg(n)}$$

Z równania odczytujemy a=b=2, f(n)=nlg(n).

Następnie wyznaczamy kolejno

1. $x=\log_b a=\log_2 2=1$
2. $n^x=n^1=n$
3. $\Theta(f(n))=\Theta(nlg(n))= nlg(n)$
4. Porównujemy funkcje n oarz f(n)=nlg(n). Czy istnieje $\varepsilon > 0$, taki że $f(n)= \Omega(n^{1+\varepsilon})$? Nie, ponieważ f(n)=nlg(n) zbiega wolniej do $+\infty$ niż $n^{1+\varepsilon}$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Zatem warunek $f(n)= \Omega(n^{1+\varepsilon})$ nie jest spełniony dla żadnego $\varepsilon > 0$. Wynika z tego, że przypadek 3 nie zachodzi (nie są spełnione wymagane założenia). Nie jest to również przypadek ani 1 ani 2. Zatem twierdzenie nie może być zastosowane do tej zależności.

Rozwiązywanie liniowych homogenicznych równań rekurencyjnych o stałych współczynnikach

Twierdzenie Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną dodatnią i niech (*) oznacza zależność rekurencyjną między wyrazami ciągu {t(n)}

$$(*) \qquad t(n+k)=a_{k-1}t(n+k-1)+a_{k-1}t(n+k-2)+\ldots+a_1t(n+1)+a_0t(n)$$

gdzie $a_0,\ldots,a_{k-1}$ są ustalonymi liczbami zespolonymi oraz niech t(0), t(1), ...,t(k-1) będą warunkami początkowymi. Każdy ciąg {t(n)} spełniający dla $n \geq 0$ zależność (*) jest postaci

$$t(n)=\sum_{i=1}^{m} W_i$$

gdzie m oznacza liczbę różnych pierwiastków równania charakterystycznego

$$x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \ldots - a_1x - a_0 = 0$$

Oznaczmy te pierwiastki przez $z_1, \ldots z_m$ zaś ich krotności przez $k_1, \ldots k_m$ odpowiednio. Wtedy W_i ma postać

$$W_i = (z_i)^n (C_0 + C_1 n + \ldots + C_{p-1}n^{p-1} + C_p n^p)$$

gdzie $p=k_i-1$, zaś $C_0, \ldots, C_{p-1}, C_p$ są ustalonymi liczbami zespolonymi.

Zad. Rozważmy następujące homogeniczne liniowe równanie rekurencyjne o stałych współczynnikach

$$\mathbf{a(0)=1,\ a(1)=8,\ a(n)=4a(n-1)-4a(n-2)\ dla\ n\geq 2.}$$

Znajdź jego rozwiązanie, czyli wyznacz postać jawną podanego ciągu rekurencyjnego.

Najpierw przekształcimy zależność rekurencyjną do postaci

$$a(n+2)=4a(n+1)-4a(n+0) \text{ dla } n\geq 0.$$

Równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$x^2=4x^1-4x^0$$

$$x^2=4x-4$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0.$$

Wyznaczamy pierwiastki tego równania

$$x = 2 \text{ lub } x = 2 \quad (2 \text{ jest pierwiastkiem podwójnym})$$

Wyznaczamy postać ogólną postaci jawnej ciągu a(n) pamiętając, że 2 jest pierwiastkiem ogólnym, czyli 2^n przemnażamy przez postać ogólną wielomianu stopnia 1

$$(**) \qquad a(n) = (An + B)2^n$$

Z warunków początkowych **a(0)=1, a(1)=8** obliczamy stałe A i B:

$$a(0) = (A*0 + B)*2^0 = 1$$

$$a(1) = (A*1 + B)*2^1 = 8$$

Stąd otrzymujemy układ równań:

$$B=1 \text{ oraz } 2(A+B)=8$$

którego rozwiązaniem jest para

$$A=3,\ B=1.$$

Podstawiamy te wartości do (**). Ostatecznie ciąg a(n) ma postać:

$$a(n) = (3n + 1)2^n$$

Zad. Rozważmy następujące homogeniczne liniowe równanie rekurencyjne

$$\mathbf{a(0)=7,\ a(1)=1,\ a(n)=2a(n-1)+3a(n-2) \text{ dla } n \geq 2.}$$

Znajdź jego rozwiązanie, czyli wyznacz postać jawną podanego ciągu rekurencyjnego.

Najpierw przekształcimy tę zależność rekurencyjną do postaci

$$a(n+2)=2a(n+1)+3a(n) \text{ dla } n \geq 0.$$

Równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$x^2=2x+3,$$

$$\text{czyli } x^2-2x-3=0.$$

Wyznaczamy pierwiastki tego równania

$$x = -1 \text{ lub } x = 3$$

Wyznaczamy postać ogólną postaci jawnej ciągu a(n) pamiętając, że tym razem mamy dwa pojedyncze pierwiastki, czyli $(-1)^n$ oraz 3^n przemnażamy przez stałe

$$a(n) = A*(-1)^n+B*3^n$$

Z warunków początkowych **a(0)=7, a(1)=1** obliczamy stałe A i B:

$$a(0) = A*(-1)^0+B*3^0=7$$

$$a(1) = A*(-1)^1+B*3^1=1$$

Stąd otrzymujemy układ równań:

$$A+B=7 \text{ oraz } -A+3B=1$$

którego rozwiązaniem jest para

$$A=5, B=2.$$

Ostatecznie ciąg a(n) ma postać:

$$a(n) = 5*(-1)^n+2*3^n.$$

Zad. Rozważmy następujące homogeniczne liniowe równanie rekurencyjne

a(0)=1, a(1)=3, a(2)=9, a(n+3)=5a(n+2)-8a(n+1)+4a(n) dla n≥0.

Równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$x^3 = 5x^2 - 8x + 4,$$

$$\text{czyli } x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0.$$

Wyznaczamy pierwiastki tego równania. Pierwszy pierwiastek należy zgadnąć.

Nietrudno sprawdzić, że jednym z pierwiastków jest x=1. Pozostałe można wyznaczyć np. ze schematu Hornera (metody dzielenia wielomianu przez dwumian stopnia pierwszego).

Schemat Hornera

	x^3	x^2	x^1	x^0
współczynniki	1	-5	8	-4
pierwiastek = 1	1	-4	4	0

Wynika z niego, że $x^3-5x^2+8x-4=(x-1)(1x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2$.

Stąd x=1 lub x=2 lub x=2.

Zatem pierwiastkiem równania charakterystycznego jest liczba 1 (jest to pierwiastek pojedynczy) oraz liczba 2 (jest to pierwiastek podwójny.)

Wyznaczamy postać ogólną postaci jawnej ciągu a(n)

$$a(n) = A*(1)^n+(Bn+C)*2^n$$

Z warunków początkowych **a(0)=1, a(1)=3, a(2)=9** obliczamy stałe A, B i C:

$$a(0) = A*(1)^0+(B*0+C)*2^0=1$$

$$a(1) = A*(1)^1+(B*1+C)*2^1=3$$

$$a(2) = A*(1)^2+(B*2+C)*2^2=9$$

Stąd otrzymujemy układ równań:

$$A+C=1,\ A+2B+2C=3,\ A+8B+4C=9$$

którego rozwiązaniem jest trójka A=1, B=1, C=0.

Ostatecznie ciąg a(n) ma postać:

$$a(n) = 1*(1)^n+(1*n+0)*2^n$$

$$a(n) = 1 +n*2^n.$$

Zad. Znajdź rozwiązania następujących równań rekurencyjnych.

1. a(0)=1, a(1)=2, a(n)= 8a(n-1)-15a(n-2)
2. a(0)=1, a(1)=2, a(n)= -1a(n-1)+2a(n-2)
3. a(0)=1, a(1)=2, a(n)= -10a(n-1)-25a(n-2)
4. a(0)=1, a(1)=2, a(n)= 8a(n-1)-16a(n-2)