



Sugar\_

发布于 10-08 22:05 浙江

+ 关注

## 2022牛客OI赛前集训营-提高组（第三场）题解 精

A:一个显然的事实是，匹配只会考虑匹配排序后相邻的两个元素。

考虑先排序，令  $f_{i,j}$  表示前  $i$  个元素中，选取  $j$  对的最小值。

则不选当前元素  $f_{i,j} = f_{i-1,j}$

选取当前元素:  $f_{i,j} = f_{i-2,j} + a_i - a_{i-1}$

两者取  $Min$  即可。总复杂度  $O(nm)$

B: 显然删除完毕之后，将剩余的数字从小到大填入空位中。考虑从前往后扫描，对于每一位，考虑能否将这一位变得更小。若  $a_i > a_{i+1}$ ，则不该删除位置  $i$ ；若  $a_i < a_{i+1}$ ，则应该删除位置  $i$ 。

若  $a_{i+1} = 0$ ，则假设删去第  $i$  个位置之后， $i+1$  应该填入的数字是  $x$ 。若  $x < a_i$ ，则应该删去位置  $i$ ；若  $x > a_i$ ，则不应该删去位置  $i$ ；若  $x = a_i$ ，则删去位置  $i$  本质上和删去位置  $i+1$  是相同的，可以忽略位置  $i$ 。

若  $a_i = 0$ ，则假设这一位本该填入的数字是  $x$ ，若存在  $j$  满足  $a_j < x$  且  $j > i$ ，则删去位置  $j$  能使得位置  $i$  的数字变小，故删去位置  $j$ 。（第一次碰到这种位置时， $j$  是唯一的）此时不考虑删去位置  $i$  的情况，因为哪怕  $a_{i+1} \neq 0$ ，其本质上也是等价的。

可以通过 `set` 维护“当前本该填入的数字”。

题解2: 可以通过二分答案+哈希的做法比较删去位置  $i$  和位置  $j$  的优劣，故可以扫描一遍然后找到最小值。这个哈希值并不好维护，由于出题人没有实现过这个做法，细节方面留给读者思考。

C: 先考虑所有边权都不为 0 的情况应该怎么做。

首先不难看出，点集在树上的斯坦纳树即为其虚树。虚树上的边权和即为正确答案。

下面我们证明：该算法是正确的，当且仅当给定点集  $V_1$  在  $G$  上的虚树点集  $V_1'$  和  $V_1$  相同。（另一个说法是，任意  $V_1$  中的两个点  $u, v$  的 LCA 也在  $V_1$  中）

其充分性不难证明，下面证其必要性：

若存在属于虚树点集  $V_1'$ ，且不属于  $V_1$  的点（下面简称虚点），则在虚树上，虚点  $u$  至少存在三条相关联的边。在斯坦纳树中，这三条边对答案的贡献是这三条边的权值和；而在我们建立的最小生成树中，至少有一条边的权值被计算了两次（由于虚点并不在原先的点集中，所以要让这三条边的另一个端点联通，就不得不经过其中一条边两次），因而答案就是错误的。

对于边权存在 0 的情况，只需要将所有由 0 边连结的连通块视为一个点，一个连通块被选中当且仅当其中至少有一个点被选中，然后应用上述做法即可。

关于如何维护虚点：可以考虑倒着做，每次删去一个点。如果删去的这个点有三条及以上的边相连，它就转型成为虚点。如果某次删除后，某个虚点只有两条边相连，则该虚点消失。答案为 1 当且仅当不存在虚点时。

D: 是一道巨大的 DP 题

$n \leq 6$  的时候，可以打表。如果你打表了，可以注意到答案只有 0 和 1，所以输出 0 或者输出 1 都能拿到 10 分的好成绩！（忘记检查后面的数据点... 导致输出 1 有 15 分，我谢罪 TAT）

现在说说正解：

首先意识到，所有直径的中点都是同一个点（当长度为偶数时），或者中边是同一条边（长度为奇数时）。不妨令这个点为根（长度为奇数时，额外在边的中间添加一个点，令为根）。此时有根树无根树一一对应（因为对于每棵树，指定的点是唯一的）

下面以长度为偶数为例，如何计算直径条数？假设直径长度为  $k$ ，则叶子节点的深度至多为  $\frac{k}{2}$ （令根节点深度为 0），我们将深度为  $\frac{k}{2}$  的叶子称为有效叶子。不难看出，任意一对不属于根节点的同一棵子树的有

效叶子会产生一条直径。

此时，可以令  $F_{i,j,k}$  表示根节点的前若干个子树已经拥有了  $i$  个节点， $j$  个有效叶子，和  $k$  条直径时的答案。考虑一棵子树有效的信息只有两个，节点个数&有效叶子个数，令这两个的值为  $(x,y)$ （下文中称为子树形态）。转移时按顺序枚举  $(x,y)$ ，并更新答案（注，上述写法有滚动数组的思想在，真正意义上，应该令  $F_{p,i,j,k}$ ，表示已经考虑前  $p$  种子树形态（不同的  $(x,y)$ ）时的答案，然后让  $F_p$  从  $F_{p-1}$  处转移）。

为此，我们还需要用同样的技巧预处理一个数组，令  $f_{i,j,k}$  表示一棵子树，拥有  $i$  个节点，深度最深的点为  $j$ ，深度最深的点恰有  $k$  个时的方案数。同样枚举每一种子树形态对答案的贡献并更新。

直径长度为奇数时，需要额外处理一件事：子树必须恰好为两棵（因为我们加入的额外节点只连结中心边的两个端点）。一个简单的做法是增加一维表示选取了几棵子树。

其实复杂度跑  $n = 40$  绰绰有余，不过为了放大常数过就还是设置了  $n = 40$

👍 (6)

★ (0)

➦ 分享

举报

浏览374