



0.写在前面

在开始讲解AOE网结构和关键路径之前，先让我们看一篇关于一个名叫“拉哥”的人的故事

拉哥大学毕业之后，用3个月时间学习编程，最终习得Java技能，并且在学习Java的时候，也在找工作，并在学会Java之后的1个月时间后（也就是毕业之后的4个月后）找到了一份程序员的工作

拉哥学会编程之后并没有仅仅用来工作，而是一边工作，一边撩白富美小姐姐，并在学会Java的6个月中，持续通过技术手段，向白富美小姐姐暗送秋波

白富美小姐姐的事情暂且不表，咱们说说拉哥找到工作之后。拉哥找到工作之后，一面潜心修炼技术，一面在办公室中笼络人心

终于，在拉哥学会Java编程5个月，找到工作后8个月的时间里，拉哥成功升职，成为开发部的项目经理

成为项目经理后，拉哥对自己用Java技术撩了6个月的白富美小姐姐展开金钱攻势（白富美小姐姐貌似不差钱吧……）

在撩妹6个月，展开金钱攻势3个月之后，拉哥成功赢得了白富美小姐姐的芳心，两人建立了超越友情的关系（嘿嘿嘿…… 😏😏😏）

两人坠入爱河之后，拉哥和白富美小姐姐的感情迅速升温，并且计划着创建自己的公司

此时岳母一看，生米已成熟饭，不如资助拉哥一番，也让自己的女儿日后生活有所着落，于是准岳母经过4个月的资金周转，向拉哥的公司进行注资

拉哥开办公司，人手从何而来？此事咱们还得花开两朵，各表一枝，从拉哥找到工作说起

拉哥找到工作之后，不仅认真工作，成为了项目经理，暗中也在笼络人心，创建自己的团队

终于，经过7个月的明争暗斗，尔虞我诈的办公室斗争之后，拉哥终于有了自己的团队

并且经过6个月的团队磨合，PY交易之后，拉哥用准岳母的注资，带着这班兄弟，创建了自己的公司，拉哥也成功升任了CEO

(拉哥之所以不是董事长是因为公司的董事会由拉哥的岳父岳母以及白富美小姐姐组成你们懂得嘿嘿嘿.....😏😏😏)

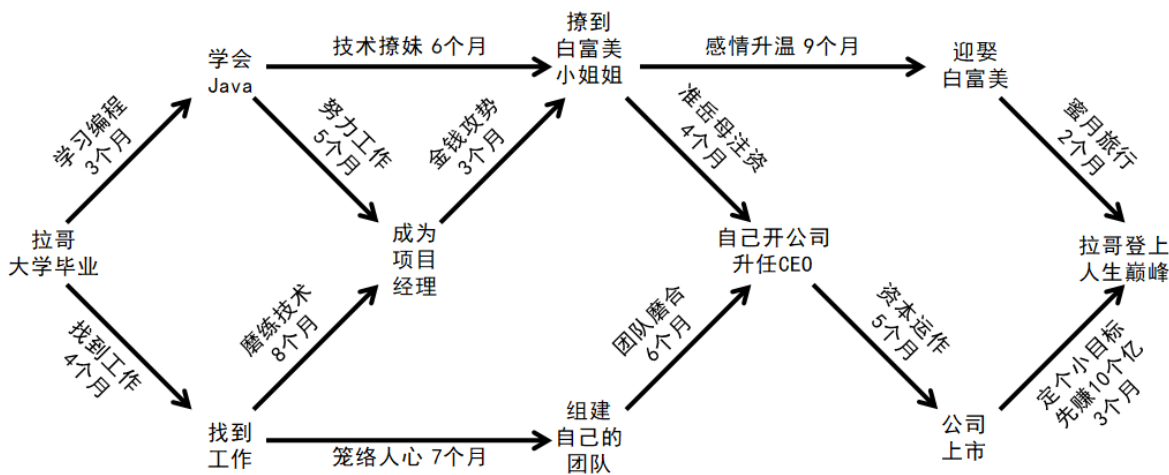
而公司也在拉哥霸道总裁式的团队管理和不可告人型的资本运作中，于成立5个月之后成功上市，自此拉哥的事业线我们先告一段落

故事回到二人的感情生活，在拉哥和白富美小姐姐注入爱河之后，一方面等待准岳母的注资，一方面经过9个月的爱情长跑，二人终于修成正果，领证结婚！

拉哥结婚之后，决定与白富美小姐姐蜜月旅行2个月，去看看拉哥为小姐姐打下的江山，而与此同时，公司的上市，也在短短3个月内让拉哥实现了之前定下的小目标：先赚他10个亿！

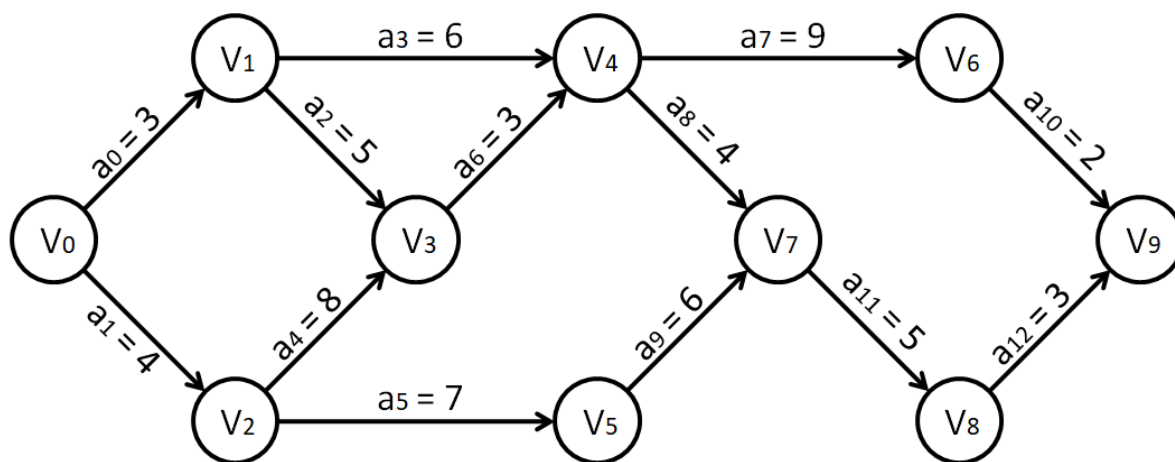
自此，拉哥不仅富可敌天下，而且抱得美人归，最终登上人生巅峰！！

下面，就是拉哥的人生轨迹图：



注意：上述故事内容及拉哥的人生轨迹图纯属作者胡编乱造，如有雷同，纯属拉哥白日做梦！😏😏😏

在看完上面大气磅礴、跌宕起伏的拉哥的故事之后，我们可以将拉哥的人生轨迹，抽象成为如下的一张图



在上面的图中，每一个节点 V ，都表示着拉哥人生中一个重大事件的发生，而每一条边 P ，都表示着从上一个事件开始，到下一个事件发生过程中经历的时间

并且通过我们的观察发现，从事件 V_0 （拉哥大学毕业）开始发出的边和后续的边，大致走向都是从左向右的，直到指向事件 V_9 （拉哥登上人生巅峰）为止

所以我们将上图中的节点 V_0 称之为**始点**，节点 V_9 称之为**汇点**

那么上面的这张图，我们就可以称之为一张**AOE网图**

官方给出的AOE的概念认为，**AOE网是一种有向无环图**，也就是说，从图中的源点出发，不管经过图中多少个节点，都最终只能通往汇点，不能回到源点

就像拉哥的人生一样，霸气的男人，从不看身后爆炸的火焰（实际上也可能是背后的衣服被烧光，回头就走光了……）

所以我们可以将整个AOE网结构看做是将一整个事件拆分开，成为多个互相之间具有相关性的小事件构成的图

在这张图中，路径上标记的边权，可以认为是从一个事件到另一个事件所花费的时间或者所消耗的代价，取值越大，花费的时间或代价也就越大

而在AOE网图中，总是存在着这样一条路径：当路径上的某条边的边权增加了，那么全体事件整体消耗的代价也就增加了；当路径上某条边的边权减少了，那么全体事件所需的代价也会减少

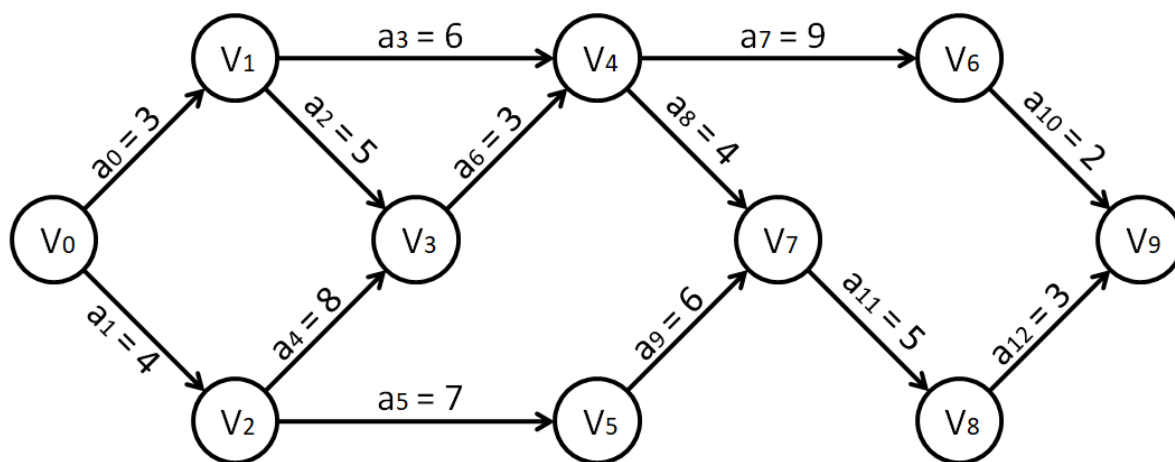
比如：如果拉哥能够早点儿娶到白富美小姐姐，那么拉哥可能提前迎来人生的巅峰

我们称这种牵一发而动全身的路径，为**AOE网的关键路径**

下面就让我们一起来详细研究一下拉哥的人生……不对，是AOE网和关键路径问题

1. 升任CEO，迎娶白富美，登上人生巅峰：关键路径问题

在研究关键路径问题之前，我们还是给出先前的图片：



并以此图为蓝本，研究AOE网结构和关键路径问题

①人生路线图：AOE网

1.事件 (Event) 的概念:

在AOE网中，节点就是事件

事件是没有时间长短的概念的，我们也可以认为事件的发生是在一瞬间完成的

但是事件与事件之间具有先后发生的顺序关系，这种关系通过两个事件之间的路径方向来决定

路径起点上的事件总是先于路径终点上的事件先发生，并且后序事件必须等待之前的事件执行完毕之后才能够发生

事件同时具有最早开始时间和最晚开始时间的概念，这个概念我们在后序进行介绍

2.活动 (Activity) 的概念:

在AOE网中，边就是活动，边权就是活动的持续时间

活动具有持续时间长短的概念，我们也可以认为从一个事件发生，到导致另一个事件的发生之间经过的过程就是活动

而这段持续的过程所用的时间，就是活动的持续时间

在AOE网中的表现，就是一条有向边连接两个节点，边上的边权就是活动的持续时间

活动同样具有最早开始时间和最晚开始时间的概念，这个概念我们同样在后序进行介绍

3.起点 (始点) 和终点 (汇点):

之前我们说过，AOE网是一种有向无环图

从图上直观的感受就是：从图中的一个端点开始出发的所有路径，不管经过多少个中间节点，最终只能指向同一个节点，不能回头

根据上面的说法，我们定义了AOE网的起点（始点）和终点（汇点）的概念

AOE网的起点（始点）：一个只有指出边，没有指入边的节点，也是AOE网中最早发生的事件，例如上图中的V0节点

AOE网的终点（汇点）：一个只有指入边，没有指出边的节点，也是AOE网中最后发生的事件，例如上图中的V9节点

4.AOE网与AOV网的比较：

在上一章节中，我们学习过使用AOV网实现拓扑排序的内容，从名字上来看：AOV网和AOE网之间必然存在亲缘关系

下面就让我们比较一下AOV网和AOE网之间的相同点和不同点：

相同点：

AOV网和AOE网都是有向无环图，图中有向边的走向都是从起点向终点进发的，不能存在回路和环路

不同点：

1.节点和边表示的内容不同：

在AOV网中，节点表示的是活动，边仅仅用来表示活动之间发生的先后顺序，且边没有边权；

在AOE网中，节点表示事件，边表示活动，边权表示活动持续时间

2.携带的信息不同：

AOV网中的边是没有边权的，而节点也是不记录活动的持续时间的；

AOE网中的边带有边权，表示边（活动）的持续时间

3.解决的问题不同：

AOV网因为只能够通过边的指向，来表示活动的发生先后顺序，所以AOV网只适用于拓扑排序操作

AOE网不仅携带了活动，并且携带了活动的持续时长，所以可以用来解决关键路径问题

在学习了上述AOE网的相关概念之后，我们来了解一下什么是AOE网的关键路径

②牵一发而动全身：关键路径的概念

官方给出AOE网的关键路径的概念，就是AOE网中，**从起点到终点具有最大路径长度的路径**

实际上我们还可以这样去理解关键路径：

因为关键路径在AOE网中具有从起点到终点的最长路径，所以只要缩短关键路径中边的一些边（边权减小），那么整个AOE网中整体所有事件的最终结束时间就会提前

同理，如果关键路径中的某些边变长了（边权增加了），那么整个AOE网中整体所有事件的最终结束时间就会延后

所以，从这个角度理解的话，关键路径就是AOE网中“牵一发而动全身”的路径

下面，我们来学习一下，计算一个AOE网中关键路径的具体步骤

③查找AOE网中的关键活动

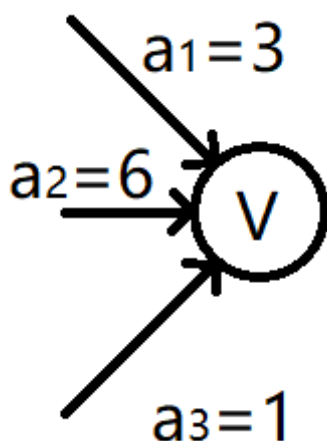
1. 计算事件的最早开始时间

事件的最早开始时间指的是：在不提前整个工期的前提下，事件V所允许的最早开始时间

计算事件最早开始时间的计算方式是：

(1). 起点事件的最早开始时间是一定的，取值为0

(2). 如果一个事件（节点）有多条边指向它，那么这个事件的最早开始时间为这条边起点的最早开始时间 + 边的权值中，取值最大的



如上图所示，假设边（活动） a_1 、 a_2 、 a_3 起点的最早开始时间分别为5、1、3，则：事件V的最早开始时间为 $5+3=8$ 、 $1+6=7$ 、 $3+1=4$ 中的最大者

根据上述规律，我们可以计算出上图中各个节点的最早开始时间表：

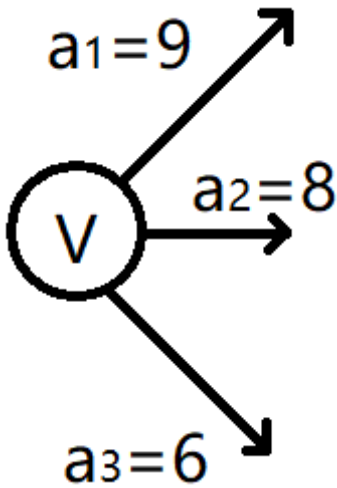
事件	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9
最早开始时间	0	3	4	12	15	11	24	19	24	27

计算方向

2. 计算事件的最晚开始时间

事件的最晚开始时间指的是：在不延后整个工期的前提下，事件V所允许的最晚开始时间
计算事件最早开始时间的计算方式是：

- (1).终点事件的最晚开始时间是一定的，取值等于其最早开始时间
- (2).如果一个事件（节点）有多条边从它指出，那么这个事件的最晚开始时间为这条边终点的最晚开始时间 - 边的权值中，取值最小的



如上图所示，假设边（活动） a_1 、 a_2 、 a_3 终点的最晚开始时间分别为17、16、12，则：
事件V的最晚开始时间为 $17-9=8$ 、 $16-8=8$ 、 $12-6=6$ 中的最小者

根据上述规律，我们可以计算出上图中各个节点的最晚开始时间表：

事件	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9
最晚 开始 时间	0	7	4	12	15	13	25	19	24	27

←—————
计算方向

3.计算活动的最早开始时间

活动（边）的最早开始时间等于边的起点的最早开始时间

活动	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
最早 开始	0	0	3	3	4	4	12	15	15	11	24	19	24

时 间													
--------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

4.计算活动的最晚开始时间

活动（边）的最晚开始时间等于边的终点的最晚开始时间 - 边权

活 动	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈	a ₉	a ₁₀	a ₁₁	a ₁₂
最 晚 开 始 时 间	4	0	7	9	4	6	12	16	15	13	25	19	24

5.哪些是关键活动： 关键活动的判断标准

关键活动（边）就是活动（边）的最早开始时间和活动（边）的最晚开始时间相等的那些活动（边）

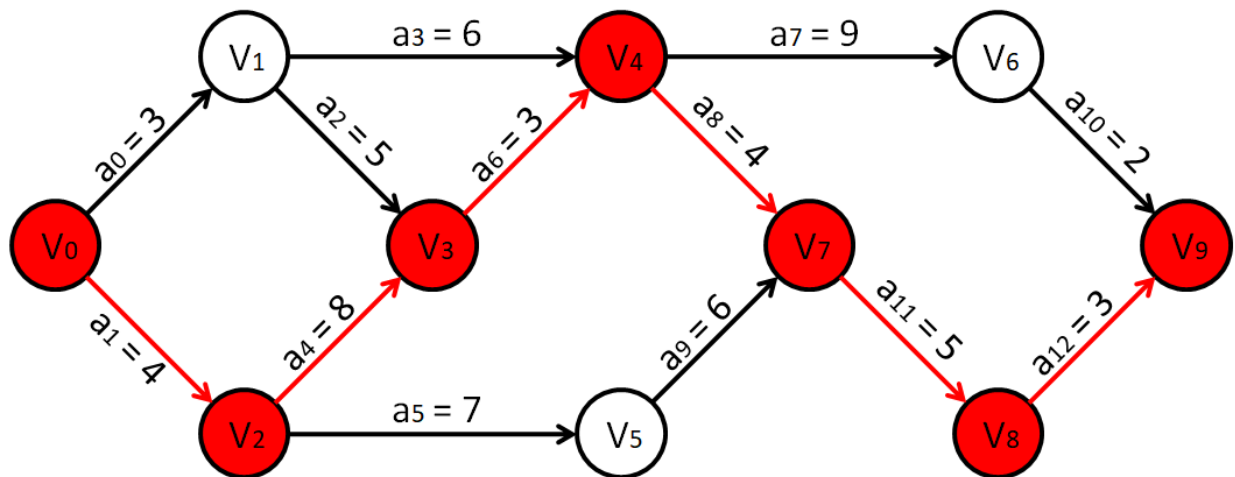
下面我们将上面两张表中的数据进行汇总并标出最早开始时间和最晚开始时间相等的活动（边）：

活 动	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈	a ₉	a ₁₀	a ₁₁	a ₁₂
最 早 开 始 时 间	0	0	3	3	4	4	12	15	15	11	24	19	24
最 晚 开 始 时 间	4	0	7	9	4	6	12	16	15	13	25	19	24

所以，上图中的关键活动为： a_1 、 a_4 、 a_6 、 a_8 、 a_{11} 和 a_{12}

④关键活动构成的路径：关键路径

在上面我们已经最终求得了AOE网的关键活动，那么将这些关活动和活动对应的起点事件与终点事件串联起来，就能够得到整个AOE网中的关键路径：



从上图不难看出：存在于这条路径上从始点到汇点的边的边权加和是最大的，大于其他任何情况下，从始点到汇点的路径边权加和

那么对应到拉哥的人生轨迹中我们不难得到一个结论：男人，就是要事业爱情两手抓，两手硬！