

IYPT-2 水滴透镜 题目报告

1 题目

透过放置在玻璃表面上的单个水滴，我们可以观察到水滴就像一个成像系统。研究这种透镜的放大倍率和分辨率。

2 思路

2.1 理论思路

2.1.1 放大率

对液滴镜头 (镜头 1) 和有效的手机相机镜头 (镜头 2) 形成双镜头系统进行分析，得到整体放大倍率 M :

$$M = \left(\frac{f_1}{u_1 - f_1} \right) \left(\frac{v_2 - f_2}{f_2} \right) \quad (1)$$

随后根据透镜制造者公式 (Lens Maker's Formula) 进行化简。最后得到:

$$M \propto \left| \frac{1}{\frac{u_1(n-1)}{R_1} - 1} \right| \quad (2)$$

表征液滴底面半径 r 与放大率 M 之间的关系，可以发现在液滴体积极小处出现了一异常值，这会使得图形的正确成像变得困难。实验中在直径 1.416mm 左右的液滴中同样观察到较为明显的枕形畸变。

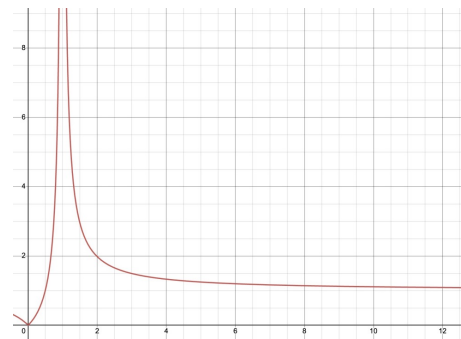


Figure. 1. 物距 $u_1 = 3 \text{ mm}$ 时液滴底面半径 r 与放大率 M 之间的关系

2.1.2 分辨率

利用横向分辨率中的瑞利判据得到:

$$r \approx \frac{0.61\lambda}{n \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{r_{droplet}}{u_1}\right)\right)} \quad (3)$$

式中 r 是光学分辨率, λ 是光的波长, n 是透镜材料的折射率, $r_{droplet}$ 为水滴底面半径, u_1 为物距。随后引入误差项, 得到:

$$r_{corrected} \approx \frac{0.61\lambda}{n \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{r_{droplet}}{u_1}\right)\right)} \cdot \frac{\int r(\lambda) \cdot S(\lambda) d\lambda}{\int r(\lambda) d\lambda} \cdot C_{wf} \quad (4)$$

式中 $r(\lambda)$ 是对应波长的分辨率, 而 $S(\lambda)$ 是光源的光谱分布。 C_{wf} 即为波前畸变修正因子。

2.2 实验思路

2.2.1 放大率

在 Image J 中量化拍摄照片的像素大小。在提取一个单一的颜色通道 (例如采用 red 通道) 后, 然后沿着尺子上的标记画出一条线, 并确定强度剖面, 从中观察到明显的周期性模式。接下来从 Image J 中读取周期数 (以像素为单位), 结合 5 张

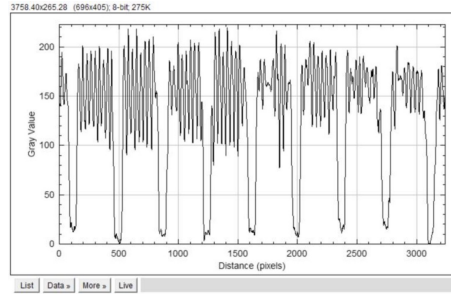


Figure. 2. 强度剖面的周期性模式

在同样高度以同样倍率拍摄的照片统计后呈现出一个左偏的单峰分布, 峰值位于 296-300mm 处。在去掉数据两端的极值后计算得平均值约为 300mm。由于周期性模式对应着尺子上的毫米标记, 因此在拍摄的照片中, 一个像素的估计值 $\approx 1/300$ mm(即换算因子 $k \approx 1/300$ mm/px)

在确定了转换因子后, 再次反转水滴的灰度图像 (单一颜色通道) 并沿着水平或垂直方向绘制黄线, 从强度剖面中读取峰值到峰值的距离 L_{pp} (以像素为单位), iPad 屏幕像素的放大距离 (D) 即为 $L_{pp} \times k$ 。

2.2.2 放大率-实验结论

1. 显然水滴放大倍率 M 与水滴直径 r 存在负相关性。
2. 理论预测的反比例函数图像与实验数据拟合一般 ($R_2 = 91.88\%$)。
3. 显然曲率半径会对放大率 M 造成影响。

2.2.3 分辨率

利用 $2\mu l$ 油滴在 USAF 分辨率测试靶上的成像进行强度测量, 垂直和水平元素的线剖面图展示了油滴解析第 5 组中的垂直元素 4 和水平元素 3 的能力。

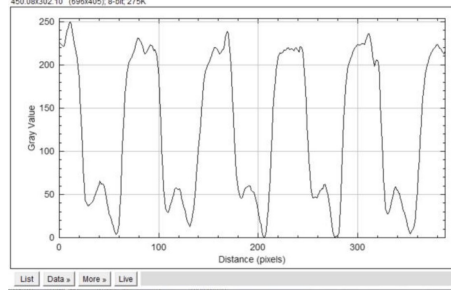


Figure. 3. 强度剖面中的 Lpp 读取

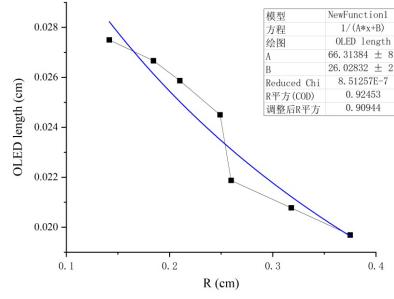


Figure. 4. 放大率实验结果

分辨率可以计算为：

$$Resolution \left(\frac{linear}{mm} \right) = 2^{Group + \frac{Element-1}{6}} \quad (5)$$

由实验数据得光学分辨率为每线对 $24.8\mu m$ 。考虑到这与利用瑞利判据得到的结果（计算得到的油滴光学分辨率结果 $<1\mu m$ ）差别极大，这极有可能是由手机相机像素密度和内置图像压缩算法引起的。可以通过在理论推导中加入探测器分辨率修正因子尝试耦合实验结果。

探测器像素大小大于光学分辨率时，因为探测器分辨率 $r_p = \text{像素大小} \times \text{物镜放大倍数}$ ，故探测器分辨率修正因子为：

$$C_p = \frac{r}{r_p} \quad (6)$$

2.3 总结

在近似将水滴视作半球形的假设下，水滴透镜的放大率的关系式如下：

$$M \propto \left| \frac{1}{\frac{u_1(n-1)}{R_1} - 1} \right| \quad (7)$$

其中 M 是放大率， u_1 是像距， f_1 是水滴透镜的焦距， n 是透镜材料的折射率， R_1 为水滴上表面的曲率半径。对该式中的 f_1 进行代换后可以得到 M 与水滴曲率半径 R_1 的关系式，进而可以得到 M 与水滴底面半径 r 的关系式。由此得出的反比例函数关系在实验中得到了验证。

2. 充分考虑色散修正、波前畸变修正、探测器分辨率修正后，计算水滴透镜分辨率的公式如下：

$$r_{corrected} \approx \frac{0.61\lambda}{n \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{r_{droplet}}{u_1}\right)\right)} \cdot \frac{\int r(\lambda) \cdot S(\lambda) d\lambda}{\int r(\lambda) d\lambda} \cdot C_{wf} \cdot C_p \quad (8)$$

其中 r 是光学分辨率， λ 是光的波长， n 是透镜材料的折射率， $r_{droplet}$ 是底面半径， u_1 是物距。该式显示分辨率与底面半径呈反比例关系。由于摄像系统无法达到足够高的数字分辨率，暂无法进行定量对比。

3 问题

1. 实验中如何保证体积相同的水滴下落到平面后的曲率严格相同？如果不一致会导致放大率差异。
2. 如何解释水滴边缘的畸变？

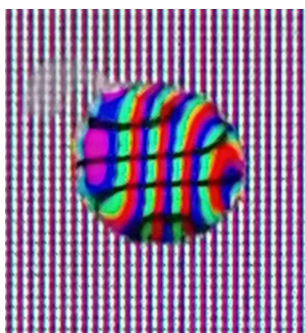


Figure. 5. 畸变