Summary of AP Physics Electromagnetism Concepts and Formulas

Yifu Zheng (Henry)

1 静电场 Electric Forces and Fields

1.1 电场与电场力

1.1.1 库仑定律 Coulomb's Law

The electric force between two particles with charge of q_1 and q_2 , seperated by a distance r, is given by the equation:

$$F_E = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1}$$

这即是库仑定律。

库伦定律的适用条件：1. 严格上仅适用于点电荷 2. 静止电荷 3. 真空环境（库伦常量 $k = 9 \times 10^{-9} N \cdot m^2/C^2$）。但是在一些不是点电荷的情况下也可以使用：1. 电荷与均匀带电球壳 2. 电荷与均匀带电球体 3. 电荷与电荷密度与半径成正比的球体 4. 自由组合。

一般将 k 记作 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$，其中 ε_0 为真空介电常数（permittivity of free space)。

Example 1 Consider two small spheres, one carrying a charge of +1.5 nC and the other a charge of -2.0 nC, separated by a distance of 1.5 cm. Find the electric force between them.("n" is the abbreviation for "nano," which means 10^{-9}.)

1.1.2 电场力的合力

注意力是矢量，电场力也不例外。在计算电场力的合力时要注意电场力的方向，并用矢量相加。

Example 2 Consider four equal, positive point charges that are situated at the vertices of a square. Find the net electric force on a negative point charge placed at the square's center.

1.1.3 电场 Electric field

电场强度的矢量定义式为：

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_c}{q} \tag{2}$$

其中当 q 为正时，$\vec{E}$ 与 $\vec{F}$ 同向；当 q 为负时，$\vec{E}$ 与 $\vec{F}$ 反向。电场强度的单位为 N/C。

正场源电荷的电场线指向外（万箭齐发），负场源电荷的电场线指回场源（万箭穿心）。

对于场源电荷 Q 的电场，距离场源 r 的检验电荷 q 处的电场为：

$$E(r) = \frac{F}{q} = \frac{k\frac{Qq}{r^2}}{q} = k\frac{Q}{r^2}$$

所以对于点场源电荷：

$$E(r) = k\frac{Q}{r^2} \tag{3}$$

可以根据电场绘制出电场线（Electric Field Lines）。电场线的疏密表示电场的大小，电场线的切线箭头方向表示电场的方向。

Example 3 A charge q = +3.0 nC is placed at a location at which the electric field strength is 400 N/C. Find the force felt by the charge q.

1.1.4 电场叠加原理

电场同样是矢量。某一点的电场等于所有场源电荷单独在该点产生电场的矢量叠加。

Example 4 A dipole is formed by two point charges, each of magnitude 4.0 nC, separated by a distance of 6.0 cm. What is the strength of the electric field at the point midway between them?

1.2 电通量与高斯定律

1.2.1 电通量 Electric Flux

电通量的物理意义：衡量了穿过某个面的电场线的多少。电通量的定义式为：

$$\Phi_E = E_\perp S = ES_\perp = ES\cos\theta \tag{4}$$

其中 θ 为电场线与面的法线的夹角。电通量在微分形式下可以写作：

$$\Phi_E = \int \mathrm{d}\Phi_E = \int E\cdot \mathrm{d}A\cdot\cos\theta \tag{5}$$

单侧电通量有正负之分，比如定义左侧为正，则右侧为负。封闭曲面同样可以定义电通量的正负，比如定义从外向内为正，则从内向外为负。在电荷在外部时，对于任意曲面，Φ_E 总是为 0。

1.2.2 高斯定律 Gauss's Law

对于一个点场源电荷，在其边上的任意一个微元内，有：

$$\mathrm{d}\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}A$$

所以：

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\int\mathrm{d}A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\cdot A$$

因为球的表面积为 $4\pi r^2$，所以：

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

这即是高斯定律，其表明在任意封闭曲面内，有：

$$\Phi_E = \oint E \cdot \mathrm{d}A \cdot \cos\theta = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

其中 Q_{in} 为内部静余电荷。

在构造高斯面的时候有 3 种思路：1. 让电场线垂直穿过高斯面 2. 让电场线不穿过高斯面 3. 让高斯面处的电场强度为常数。

Example 5 A very large rectangular plate has a surface charge density of $+\sigma$ (this is the charge per unit area). Use Gauss's law to determine an expression for the electric field it creates.

Example 6 A nonconducting sphere of radius a has excess charged distributed throughout its volume so that the volume charge density ρ as a function of r (the distance from the sphere's center)is given by the equation $\rho(r) = \rho_0(r/a)^2$, where ρ_0 is a constant. Determine the electric field at points inside and outside the sphere.

1.3 电势能、电势与电势差

1.3.1 电势能 Electrical Potential Energy

因为电场力是保守力，所以电势能与电场力做功的关系为：

$$\Delta U_E = -W_E \tag{7}$$

对于在场源电荷 Q 的电场中的两点 r_1 与 r_2，将点电荷 q 从 r_1 移动到 r_2 需要的能量为：

$$W_E = \int_{r_1}^{r_2} F\mathrm{d}s = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{Qq}{x^2}\mathrm{d}x = kQq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

所以从 r_1 到 r_2 的电势能为：

$$\Delta U_E = -W_E = kQq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = k\frac{Qq}{r_2} - k\frac{Qq}{r_1}$$

所以电势能的表达式为：

$$U_E = k\frac{Qq}{r} \tag{8}$$

电势能的单位为 J。注意这个表达式的适用条件为 Q, q 均为点电荷，但是 $\Delta U_E = -W_E$ 一直适用。在用这个表达式计算时需要代入 Q, q 的符号而不能用绝对值计算。电势能为标量，只有大小没有方向，在加总时将每两个电荷之间的电势能都算一次并用标量相加。电势能的零势能点在 $r = +\infty$。

1.3.2 电势 Electrical Potential

因为电势能会受到检验电荷的电荷量的影响，因此我们引入了电势的概念。定义电势为：

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} = \frac{k\frac{Qq}{r}}{q} = k\frac{Q}{r} \tag{9}$$

注意这个表达式的适用条件为场源电荷为点电荷。电势差的单位为 J/C。

可以根据电势绘制等势面，等势面上的电势处处相等。沿着电场线向下游走，电势越来越低。

电势叠加原理：空间中任意一点的电势等于所有场源电荷单独对该点的电势的叠加（标量得加）。

Example 7 Let $Q = 2 \times 10^{-9}$C. What is the potential at a point P that is 2 cm from Q?

1.3.3 电势差 Potential Difference

电势差被定义为两点电势的差，即：

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{U_2}{q} - \frac{U_1}{q} = \frac{U_2 - U_1}{q} = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{W_E}{q} = -\frac{\int F \mathrm{d}x}{q} = -\int E \mathrm{d}x$$

所以

$$\Delta V = -\int E(x) \mathrm{d}x \tag{10}$$

注意前面的负号并注意 1,2 点的位置。

对于平行板电场中距离为 d 的两点：

$$\Delta V = -\int E(x) \mathrm{d}x = -E(x) \cdot d = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \tag{11}$$

Example 8 带电球体的电势 求带电球体内一点的电势（球体均匀带电，体电荷密度为 ρ。

解析：电势可以用 $-\int E(x)\mathrm{d}x$ 得到，因此我们需要用高斯定律得到 $E(x)$ 的表达式并代入。

由高斯定律 $\Phi_E = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$ 可得：

$$E(x) 4\pi x^2 = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

其中 Q_{in} 可以由体积乘以体电荷密度即 ρV 得到。所以：

$$E(x) 4\pi x^2 = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi x^3}{\varepsilon_0}$$

所以：

$$E(x) = \frac{\frac{4}{3}\pi x^3}{4\pi x^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho x}{3\varepsilon_0}$$

因此从 r_1 点到 r_2 点的电势为：

$$V_{r2} - V_{r1} = \int_{r_1}^{r_2} E(x) \mathrm{d}x = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} x \mathrm{d}x = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{1}{2} \left(r_2^2 - r_2^1 \right)$$

2 导体、电容与电介质

2.1 导体 Conductor

2.1.1 导体与绝缘体的区别

绝缘体的原子核对电子的束缚力较强。

2.1.2 摩擦起电

必须是两个绝缘体。因为对电荷的吸引力大小不同导致电荷无法返回原处形成正负电荷差。

2.1.3 感应起电

远端同号，近端异号，中段不带电。

2.1.4 静电平衡 Electrostatic Equilibrium

定义：导体内的电荷不再发生定向移动的状态。

静电平衡状态的特征：1.$E_{inside}=0$，2. 静余电荷位于导体表面的外侧，3. 整个导体是一个等势体（equipotential body），4. 导体表面附近的电场与导体表面垂直，5. 导体表面越尖锐的地方电荷密度越大，凹陷处的电荷密度较小。

注意：所有导体总是处在某种静电平衡状态之中。

2.2 电容器与电容 Capacitors and Capacitance

2.2.1 电容器的广义定义

两个相互靠近且相互绝缘的导体

2.2.2 电容

电容器的电容 C 可以由以下公式计算：

$$C=\frac{Q}{V} \tag{12}$$

其中 Q 是任意一极带电量的绝对值。电容的单位为法拉（F），$1F=\frac{1C}{1J/C}$。

电容的物理意义是衡量电容器容纳电荷能力的大小，其可以类比装水容器的底面积。

2.2.3 简单电容回路

简单电容回路是指只有 1 个电容器与 1 个电源的电路。简单电容回路有三个特性：

1. 在刚连通时有充电电流。
2. 最终电路内部电流为 0（$I=0$）。
3. 最终 $V_c=V_{power}$ 即整个电路形成一个等势体。

2.2.4 平行板电容器的电容

平行板电容是指两个平行的无限大的矩形平面。平行板电容器内的匀强电场可以用高斯定律计算，大小为 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$。

所以在平行板电容器中，电容的大小为：

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d}=\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

即：

$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{13}$$

Example 9 求柱壳电容器的电容 A long cable consists of a solid conducting cylinder of radius a, which carries a linear charge density of $+\lambda$, concentric with an outer cylindrical shell of radius b, which carries a linear charge density of $-\lambda$. This is a coaxial cable. Determine the capacitance of the cable.

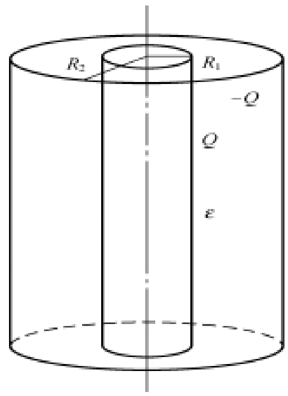

Figure. 1. Example 9

解析：我们需要通过 $C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ 计算电容的大小，因此需要分别确定 Q 与 V 的大小。其中 Q 带电量可以用长度乘以线电荷密度 λl 得到，V 电势可以用 $-\int E(x)\mathrm{d}x$ 得到。因此我们需要确定 $E(x)$ 的大小。故需要应用高斯定律。

由高斯定律 $\Phi_E=\frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$ 可得：

$$E=\frac{Q_{in}}{\varepsilon_0 S}=\frac{\lambda l}{\varepsilon_0\left(2\pi r l\right)}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

所以：

$$V=-\int E(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

代入电容的定义式得到：

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}$$

2.3 电容器的并联与串联

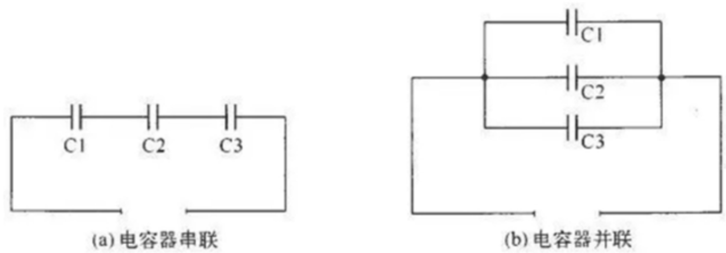

Figure. 2. 电容器的并联与串联

1. 电容器串联：Q 相同、V 相加、$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$（类比 I 相同、U 相加、电阻**并联**）
2. 电容器并联：Q 相加、V 相同、$C=C_1+C_2$（类比 I 相加、U 相同、电阻**串联**）

2.4 电容中的电势能

电容中的电势能等于将电荷微元从电容负极移动到电容正极需要做的总功。即：

$$U_E = \int_0^Q \mathrm{d}V\mathrm{d}q = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{1}{C}\int_0^Q q\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

所以：

$$U_E = \frac{Q^2}{2C}$$

可以用 $C = \frac{Q}{V}$ 对该式中的参数进行代换，最后得到：

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \tag{14}$$

2.5 电介质 Dielectric

当有电介质（其实就是任意绝缘体）介于两个平行板之间时，由于绝缘体的极化现象，会形成一个与原电场方向相反的电场。因此电容内的电场 $E' = E_{original} - E_{inducedfield}$。规定 $E' = \frac{E}{\kappa}$，其中 κ 即为电介质常数（dielectric constant），其

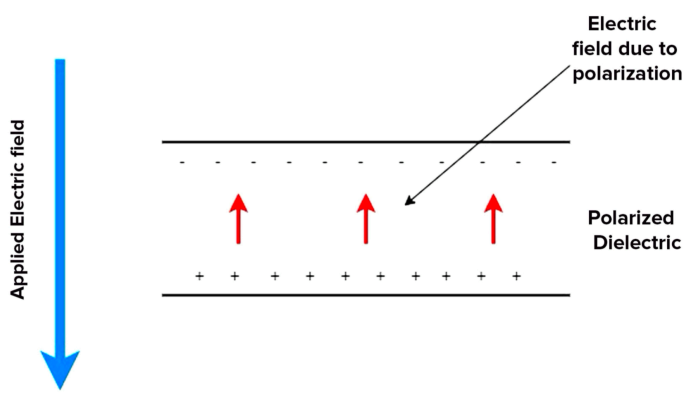

Figure. 3. 电介质

在真空为 1，在其他时候大于等于 1。

对于含有电介质的电场，其电容可以被写作：

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{E'd} = \frac{Q}{\frac{E}{\kappa}d} = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}$$

所以：

$$C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d} \tag{15}$$

3 电路 Curcuit

3.1 电流 Current

在微观中，电流可以表示为：

$$I = nqSv \tag{16}$$

其中 n 为带电粒子的个数体积密度，q 为单个带电粒子的带电量，S 为导线的截面积，v 为带电粒子定向移动的速度。

在宏观上，电流可以表示为单位时刻中流经导线的电荷量，即：

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{17}$$

电流的单位为安培（A）。1C/s=1A。

3.2 电阻器与电阻 Capacitor and Capacitance

3.2.1 电阻与欧姆定律

电阻的计算式为

$$R = \frac{\Delta V}{I} \tag{18}$$

该式可以变换为：

$$V = IR$$

这个式子表明当电流 I 流经电阻 R_1，会导致电势降低 $V = IR$。同时这也表明当 I 与 R 其中任意一个为 0 时不存在电压。这意味着即使 $R \neq 0$，当 $I = 0$ 时 V 仍然等于 0（电压表）；即使 $I \neq 0$，当 $R = 0$ 时 V 仍然等于 0（导线）。

该式还可以变换为：

$$I = \frac{V}{R} \tag{19}$$

这即是欧姆定律（Ohm's Law）的表达式。

3.2.2 线性元件与非线性元件

线性元件的 V 与 I 成正比（线性关系），这意味着 R 不随着 I 的改变而改变。线性元件可能是纯电阻、金属导体、电解质溶液与仅发热的用电器。

非线性元件的 V 与 I 不成正比（非线性关系），这意味着 R 随着 I 的改变而改变。非线性元件可能是非纯电阻、半导体、气体、设备与不只发热的用电器。

3.2.3 电阻率 Resistivity

电阻率是描述材料导电性能的物理量。电阻率越小导电性越好，反之亦然。

电阻的大小与长度和电阻率成正比，与截面大小成反比。电阻的定义式为：

$$R = \frac{\rho L}{A} \tag{20}$$

3.3 电路 Curcuit

3.3.1 电源与电动势 Power Source and Electromotive Force

1. 电源是一种搬运电荷的装置，其将到达负极的正电荷重新搬回正极，到达正极的负电荷重新搬回正极，以维持正负极之间的电势差（电压），并因此使得电流可以循环流动。电源的工作是提供电势差 ε，这又被称作（电源）电动势（emf）。

2. 电源也是一种能量转换装置，其通过非静电力做功，将其他形式的能量转化为电能，非静电力做了多少功，就有多少其他能量转化为电能。

因为电源有内阻，所以电源实际提供的电压 $V_{source} = \varepsilon - Ir_{in}$，其中 r_{in} 是电源内阻。

3.3.2 电路的能量与功率

与电容器的电势能的计算方式类似，电路的能量可以用 VQ 来计算。因为 $Q = It$，所以：

$$W = VIt \tag{21}$$

又因为功率 $P = W/t$，所以功率的计算式为：

$$P = VI \tag{22}$$

如果电阻为线性元件，则功率的计算式还可以写作：

$$P = I^2R \tag{23}$$

这可以用于计算非纯电阻的发热部分。同时也可以写作：

$$P = \frac{V^2}{R} \tag{24}$$

这只能用于纯电阻的计算。

3.3.3 串联与并联 Resistors in Series and Parallel

串联分压 并联分流

串联电流相同电压相加；并联电流相加电压相同。

串联：1.$R_{net} = R_1 + R_2$；2. 串联按阻值正比分压；3. 任意分电阻增加则总电阻增加；4. 越串越大

并联：1.$\frac{1}{R_{net}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$；2. 并联按阻值倒数比分流；3. 任意分电阻增加则总电阻增加；4. 越串越小；5. 两个相差悬殊的电阻并联，总电阻比较小的电阻略小。

3.4 基尔霍夫定律 Kirchhoff's Rules

3.4.1 环路定律 The Loop Rule, KVL

沿着电路中的任意闭合环路，$V_{up} = V_{down}$，即升压 = 降压。

3.4.2 节点定律 The Junction Rule, KCL

在任意节点，$\sum I_{in} = \sum I_{out}$，即流入电流 = 流出电流。

3.5 RC 电路的电量、电压与电流

3.5.1 充电的 RC 电路

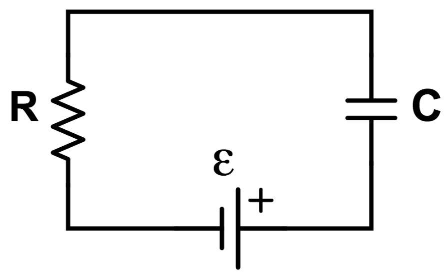

Figure. 4. 充电的 RC 电路

这里我们应用基尔霍夫定律，以电路的左下角为初始点，顺时针对电路环路进行分析。

首先是从电源的负极运动到正极，电压应升高 ε，接着是从电容的正极运动到负极，电压应下降 $V(t)$，最后经过电阻，电压应下降 $I(t)R$。因为闭合环路中升压 = 降压（基尔霍夫环路定律），所以我们得到：

$$\varepsilon - I(t)R - V(t) = 0$$

因为电容中 $V(t) = \frac{Q(t)}{C}$，所以：

$$\varepsilon - I(t)R - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

因为 $I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$，所以：

$$\varepsilon - R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \frac{Q}{C} = 0$$

化简该式：

$$\varepsilon - \frac{Q}{C} = R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{R}{\varepsilon - \frac{Q}{C}}\mathrm{d}Q$$

继续化简：

$$\mathrm{d}t = \frac{CR}{C\varepsilon - Q}\mathrm{d}Q \Rightarrow \frac{1}{CR}\mathrm{d}t = \frac{1}{C\varepsilon - Q}\mathrm{d}Q$$

对两侧同时做积分：

$$\int_0^t \frac{1}{CR}\mathrm{d}t = \int_0^q \frac{1}{C\varepsilon - Q}\mathrm{d}Q$$

化简：

$$\frac{t}{CR} = -\int_0^q \frac{1}{C\varepsilon - Q}\mathrm{d}\left(C\varepsilon - Q\right)$$

所以：

$$\frac{t}{CR} = -\left(\ln\left(C\varepsilon - q\right) - \ln C\varepsilon\right) = -\ln\left(\frac{C\varepsilon - q}{C\varepsilon}\right)$$

所以：

$$-\frac{t}{CR} = \ln\left(\frac{C\varepsilon - q}{C\varepsilon}\right)$$

所以：

$$\frac{C\varepsilon - q}{C\varepsilon} = e^{-\frac{t}{CR}}$$

所以：

$$q=C\varepsilon-C\varepsilon\cdot e^{-\frac{t}{CR}}=C\varepsilon\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

即：

$$Q(t)=C\varepsilon\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right) \tag{25}$$

因为 $V(t)=Q(t)/C$，所以：

$$V(t)=\varepsilon\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right) \tag{26}$$

因为 $I(t)=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$，所以：

$$I(t)=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{CR}} \tag{27}$$

定义时间常数 $\tau=RC$ 用于衡量充/放电速度，τ 越大充放电越慢。所以：

$$\begin{cases} Q(t)=Q_f\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ Q_f=C\varepsilon & (28)\\ V(t)=V_f\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ V_f=\varepsilon & (29)\\ I(t)=I_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}},\ I_f=\dfrac{\varepsilon}{R} & (30)\end{cases}$$

注意充电时 Q 与 V 增加，故用 $\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ 增函数，反之因为 I 减少故用 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 减函数。

3.5.2 放电的 RC 电路

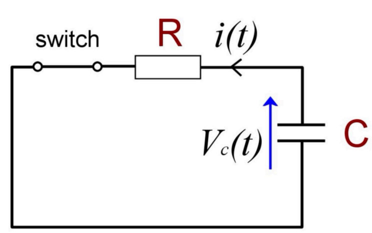

Figure. 5. 放电的 RC 电路

还是由基尔霍夫环路定律得到：

$$-I_0R+\frac{Q_0}{C}=0$$

因为放电的 RC 电路中 I 持续下降，所以 $I=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$（尤其注意负号），因此：

$$R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{C}=0\Rightarrow R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\frac{Q}{C}$$

所以：

$$\frac{1}{Q}\mathrm{d}Q=-\frac{1}{CR}\mathrm{d}t$$

对两侧同时积分，得到：

$$\int_{Q_0}^{Q_t}\frac{1}{Q}\mathrm{d}Q=-\frac{t}{CR}$$

所以：

$$\ln \frac{Q_t}{Q_0} = -\frac{t}{CR}$$

所以：

$$Q_t = Q_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$

因此：

$$\begin{cases} Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & (31) \\ V(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},\ V_0 = \dfrac{Q_0}{C} & (32) \\ I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},\ I_0 = \dfrac{Q_0}{RC} & (33) \end{cases}$$

4 磁场与磁场力 Magnectic Field

4.1 安培力与洛伦兹力

4.1.1 洛伦兹力

定义磁场强度为：

$$B = \frac{F_B}{|q|v}$$

据此，检验电荷在磁场中的受力即洛伦兹力为：

$$F_B = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\sin\theta \tag{34}$$

注意洛伦兹力的计算需要用到向量积。对于由向量积得到的洛伦兹力的方向的判断，我们采用右手定则。伸出右手手指与 $\vec{v}$ 的箭头贴合，随后手指向 $\vec{B}$ 的方向卷曲。如果感应电荷带正电荷，则此时大拇指所指的方向即为 F_B 的方向；如果感应电荷带负电荷，则大拇指所指的方向即为 F_B 的反方向。**注意因为向量积的计算，所以 F_B 始终与 $\vec{v}$ 垂直，永远不做功，但是 F_B 可以改变 $\vec{v}$ 的方向**。

$\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角有三种情况，分别是：

1.$\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 平行，此时 $\theta = 0$，$F_B = 0$，$\vec{v}$ 的方向与大小均不改变。

2.$\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 垂直，此时 $\theta = \frac{\pi}{2}$，$F_B = qvB$ 但方向与 $\vec{v}$ 的方向垂直仍然不改变大小，但是会让检验电荷在磁场中做圆周运动。此时可以列出圆周运动的计算式：

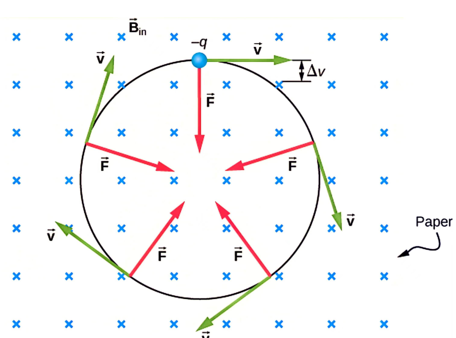

Figure. 6. 检验电荷在磁场中做圆周运动

$$qvB = m\frac{v^2}{r}$$

同时消去 v 得到半径的表达式:

$$r = \frac{mv}{qB} \tag{35}$$

据此可以计算周期:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\frac{mv}{qB}}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \tag{36}$$

3.$\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 成任意夹角，此时 $F_B = qvB\sin\theta$ 使检验电荷在磁场内做螺旋线运动。其中螺距可以由以下公式计算:

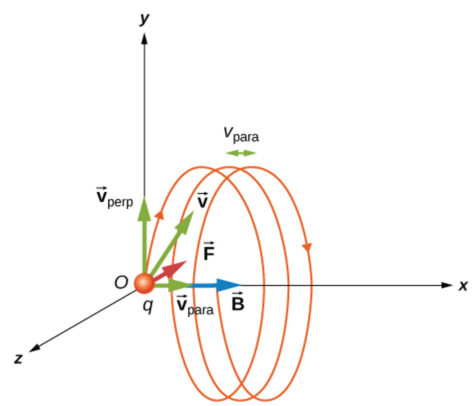

Figure. 7. 检验电荷在磁场内做螺旋线运动

$$l = v_{parallel} \cdot T = v_0 \cos\theta\frac{2\pi m}{qB} \tag{37}$$

4.1.2 安培力

安培力是导线在磁场中受到的力。安培力的计算公式为:

$$F_B = I\vec{L} \times \vec{B} = ILB\sin\theta \tag{38}$$

这同样是向量积的计算。伸出右手手指与 $\vec{L}$ 的箭头贴合并朝向电流方向，随后手指向 $\vec{B}$ 的方向卷曲，大拇指所指的方向即为 F_B 的反方向。

注意任意一段导线上受到的安培力等于首-尾连线的受力。

4.2 毕奥—萨伐尔定律与安培定律

4.2.1 毕奥—萨伐尔定律 The Biot-Savart Law

毕奥—萨伐尔定律被用于计算导线产生的磁场，其仅仅可以表示为微分形式:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\mathrm{d}\vec{l} \times \hat{r} \tag{39}$$

其中 r 为导线上的一个微元到观测点的距离。$\hat{r}$ 大小为 1，方向与 $\vec{r}$ 同向。因此毕奥—萨伐尔定律可以简写作：

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\mathrm{d}\vec{l}\sin\theta \tag{40}$$

其中 θ 为微元处的电流方向与微元与观测点连线的夹角。

Example 10 A circular loop of wire has radius R. If the loop carries a current I, what's the magnetic field created at the center of the loop? 解析：对于圆环上的微元，可以用毕奥—萨伐尔定律表示其在圆心处产生的电场，随后对整个圆环进行积分。

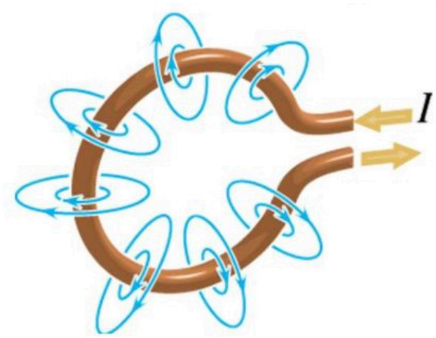

Figure. 8. 环形电流产生的磁场

对于圆环上一微元，有：

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}dl\sin\theta$$

因为微元处的电流方向与圆心的连线垂直，所以 $\sin\theta = 1$。所以：

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}r\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\mathrm{d}\theta$$

同时对两侧做积分，有：

$$B = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

4.2.2 安培定律 The Ampere's Law

安培定律被用于在其他一些特定情况下计算磁场，一般是计算导线穿过的面或环上的磁场。安培定律可以表示为：

$$\oint_{loop}\vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{through} \tag{41}$$

其中 "$\oint_{loop}$" 表示环路积分，$I_{through}$ 表示穿过安培环的总电流。

Example 11 求电流产生的环形磁场 Use Ampere's law to show that the magnetic field due to an infinitely long straight wire carrying a current I is given by the equation $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, where R is the distance from the wire.

解析：本题的重点是要确定安培环并计算等式左边的环路积分。根据安培定则，伸出右手将右手大拇指指向电流方向，则四指方向为磁感线方向，可以发现磁感线在导线周围呈现同心圆分布。构造同样为环状的安培环，因为每一点上磁场方向与安培环的方向都相同，所以左侧环路积分即等于安培环的长度乘以磁场强度。所以我们可以得到：

$$B\cdot 2\pi R = \mu_0 I$$

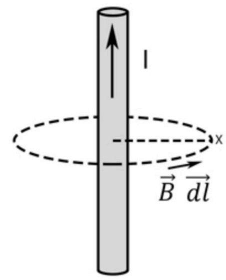

Figure. 9. 电流产生的环形磁场

因此无限长直导线周围的磁场强度为：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{42}$$

Example 12 求平行导线的安培力 The diagram below shows a pair of long, straight parallel wires, separated by a small distance, r. If currents I_1 and I_2 are established in the wires, what is the magnetic force **per unit length** they exert on each other?

解析：本题需要用安培力的计算公式结合无限长直导线周围的磁场强度公式。首先写出导线 1 对导线 2 的安培力：

$$F_{B2} = I_2 L B_1$$

其中 B_1 可以用无限长直导线周围的磁场强度公式计算得到：

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

所以：

$$F_{B2} = I_2 L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

因此：

$$F_{B2unit} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}$$

Example 13 求同轴电缆的磁场 The figure below is a cutaway view of a long coaxial cable that's composed of a solid cylindrical conductor (of radius R_1) surrounded by a thin conducting cylindrical shell (of radius R_2).

The inner cylinder carries a current of I_1, and the outer cylindrical shell carries a smaller current of I_2, **in the opposite direction**. Use Ampere's law to find the magnitude of the magnetic field (a) in the space between the inner cylinder and the shell, and (b) outside the outer shell.

解析：本题的重点是构造正确的安培环。对于 (a) 问，这里在内部圆柱体周围构造环形的安培环。根据安培定律，我们可以得到：

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_1$$

即：

$$B_{between} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

对于 (b) 问，这里在外部圆柱体外构造环形的安培环。根据安培定律，我们可以得到：

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \left(I_1 - I_2\right)$$

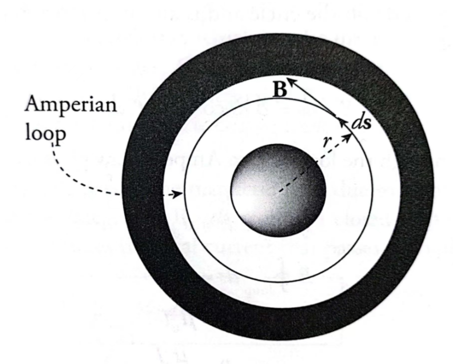

Figure. 10. 同轴电缆

注意这里内部圆柱体与外部圆柱体的电流反向，所以 $I = I_1 - I_2$。因此同轴电缆外侧的磁场大小为：

$$B_{outer} = \frac{\mu_0 (I_1 - I_2)}{2\pi r}$$

Example 14 求通电螺线管的磁场 A tightly wound solenoid with n coils per length has a current I running through it. Use Ampere's law to show the magnetic field inside this ideal solenoid is given by the equation:$B = \mu_0 n I$ 解析：本题的重点同样是构

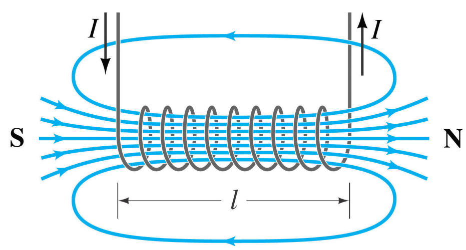

Figure. 11. 通电螺线管的磁场

造正确的安培环。

我们构造一个长方形的安培环，这个长方形的其中一边完全在磁场外，如图：

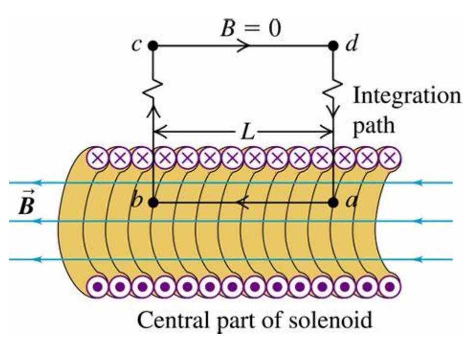

Figure. 12. 安培环的构造

这个长方形中除了在磁场中且与磁场平行的边，其余三条边上的磁场均为 0。其中两边部分与磁场线垂直，剩余部分

没有磁场穿过。根据安培定律，我们可以得到：

$$B \cdot l = \mu_0 NI$$

其中 N 是安培环穿过导线的数量。因此：

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 nI$$

其中 n 是通电螺线管的匝数密度，即 $\frac{N}{L}$。

所以通电螺线管的磁场强度为

$$B = \mu_0 nI = \frac{\mu_0 NI}{L} \tag{43}$$

5 电磁感应 Electromagnetism

5.1 动生电动势 Motional emf

当导体棒在一个匀强磁场中匀速做切割磁感线运动时（如图），洛伦兹力会使得导体棒中的正电荷向导体棒上端移动，负电荷向导体棒下端移动。

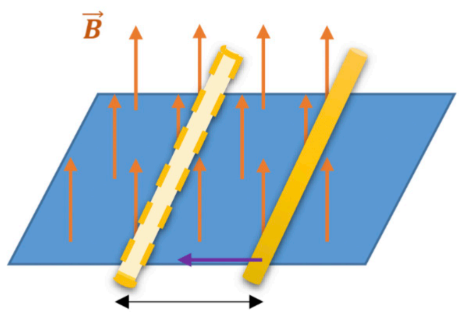

Figure. 13. 导体棒在一个均匀磁场中匀速做切割磁感线运动

随后，分处导体棒两端的正负电荷产生从导体棒上端指向导体棒下端的电场，且该电场随着两端积聚的正负电荷数量的增加而增大。正电荷受到的电场力向下，与正电荷受到的洛伦兹力相反。因此当电场力增加到与洛伦兹力相等时正电荷保持静止不再移动，同理负电荷也保持静止。此时导体棒中的电场与两端的电势差达到最大值。

我们可以通过 F_E 与 F_B 的相等关系得到电场强度与磁场强度的关系式：

$$F_E = F_B \Rightarrow Eq = qvB \Rightarrow E = vB$$

所以导体棒两端的电势差为：

$$\Delta V = \int E(x)\mathrm{d}x = E \cdot L(uniform) = BLv$$

所以动生电动势 ε 的大小为：

$$\varepsilon = BLv \tag{44}$$

注意只有**与磁场垂直的速度**才能贡献电动势。且**导体棒内电流的流动方向 = 导体棒正极方向 = 洛伦兹力方向**。

Example 15 求旋转中的导棒的动生电动势对于导棒上一微元，有：

$$\mathrm{d}\varepsilon = B\mathrm{d}l \cdot v = B\mathrm{d}x \cdot xw$$