《基 础 物 理 实 验》 预 习 报 告

实验名称 RLC 电路的谐振与暂态过程 指导教师 黄金浩
姓名 张钰堃 学号 2022k8009926020 分班分组及座号 2 - 08 - 11 号 (例:1- 04- 5 号)
实验日期 2023 年 10 月 24 日 实验地点 教学楼 709 调课/补课 否 成绩评定

1 实验目的

1. 研究 RLC 电路的谐振现象。
2. 了解 RLC 电路的相频特性和幅频特性。
3. 用数字存储示波器观察 RLC 串联电路的暂态过程，理解阻尼振动规律。

2 实验仪器与用具

标准电感，标准电容，100Ω，标准电阻，电阻箱，电感箱，电容箱，函数发生器，示波器，数字多用表，导线等。

3 实验原理

3.1. 串联谐振

RLC 串联电路如图 1 所示。其总阻抗 $|Z|$、电压 u 与电流 i 之间的相位差 φ、电流 i 分别为

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \tag{1}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{2}$$

$$i = \frac{u}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})}} \tag{3}$$

式中 $\omega = 2\pi f$ 为角频率，$|Z|$、φ 、i 都是 f 的函数

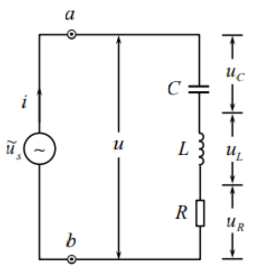


图 1: RLC 串联电路

图 2（a）、（b）、（c）分别为 RLC 串联电路的阻抗、相位差、电流随频率的变化曲线。其中图 2（b）$\varphi - f$ 曲线称为相频特性曲线；图 2（c）$i - f$ 曲线称为幅频特性曲线，它表示在总电压 u 保持不变的条件下 i 随 f 的变化曲线。相频特性曲线和幅频特性曲线有时统称为频率响应特性曲线。

由曲线图可以看出，存在一个特殊的频率 f_0，特点为：（1）当 $f < f_0$ 时，$\varphi < 0$, 电流的相位超前于电压，整个电路呈电容性，且随 f 降低，φ 趋近于-$\frac{\pi}{2}$；而当 $f > f_0$ 时，$\varphi > 0$，电流的相位落后

于电压，整个电路呈电感性，且随 f 升高，φ 趋近于 $\frac{\pi}{2}$（2）随 f 偏离 f_0 越远，阻抗越大，而电流越小。（3）当 $\omega L - \frac{1}{\omega C}$，即

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{4}$$

$\varphi = 0$，电压与电流同相位，整个电路呈纯电阻性，总阻抗达到极小值 $Z_0 = R$，而总电流达到极大值 $i_m = \frac{u}{R}$。这种特殊的状态称为串联谐振，此时角频率 ω_0 称为谐振角频率。在 f_0 处，$i{-}f$ 曲线有明显尖锐的峰显示其谐振状态，因此，有时称它为谐振曲线。谐振时，有

$$u_L = i_m\,|Z_L| = \frac{\omega_0 L u}{R}, \frac{u_L}{u} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} * \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{5}$$

而

$$u_C = i_m\,|Z_C| = \frac{u}{RC\omega_0}, \frac{u_C}{u} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} * \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{6}$$

令

$$Q = \frac{u_C}{u} = \frac{u_L}{u} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} \tag{7}$$

Q 称为谐振电路的品质因数，简称 Q 值。它是由电路的固有特性决定的，是标志和衡量谐振电路性能优劣的重要的参量。

3.2. 并联谐振

如图 3 所示电路，其总阻抗 $|Z_P|$、电压 u 与电流 i 之间的相位差 φ、电压 u（或电流 i）分别为

$$|Z_P| = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{(1-\omega^2 LC)^2} + (\omega CR)^2} \tag{8}$$

$$\arctan\frac{\omega L - \omega C[R^2 + (\omega L)^2]}{R} \tag{9}$$

$$u - i\,|Z_P| = \frac{u_R}{u}\,|Z_P| \tag{10}$$

显然，它们都是频率的函数。当 φ=0 时，电流和电压同相位，整个电路呈纯电阻性，即发生谐振。由式（8）求得并联谐振的角频率 ω_p 为

$$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{L})^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \tag{11}$$

式中 $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{LC}, Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, 可见，并联谐振频率 f_p 与 f_0 稍有不同，当 Q » 1 时，$\omega_p \approx \omega_0$, $f_P \approx f_0$。

图 4（a）、（b）、（c）分别为 RLC 并联电路的阻抗、相位差、电流或电压随频率的变化曲线。由（b）图 $\varphi{-}f$ 曲线可见，在谐振频率 $f = f_P$ 两侧，当 $f < f_P$,$\varphi > 0$，电流的相位落后于电压，整个电路呈电感性；当 $f > f_P$,$\varphi < 0$, 电流的相位超前于电压，整个电路呈电容性。

显然，在谐振频率两边区域，并联电路的电抗特性与串联电路时截然相反。由（a）图 $|Z_p| - f$ 线和（c）图 i − f 曲线可见，在 $f = {f_p}'$ 处（注意：${f_p}'$ 与 f_p 稍有不同）总阻抗达到极大值，总电流达到极小值，而在 ${f_p}'$ 两侧，随 f 偏离 ${f_p}'$ 越远，阻抗越小，电流越大。不言而喻，这种特性，与串联电路时完全相反。（c）图 u − f 曲线为在总电流保持不变的条件下，电感（或电容）两端电压 u 随频率的变化曲线。

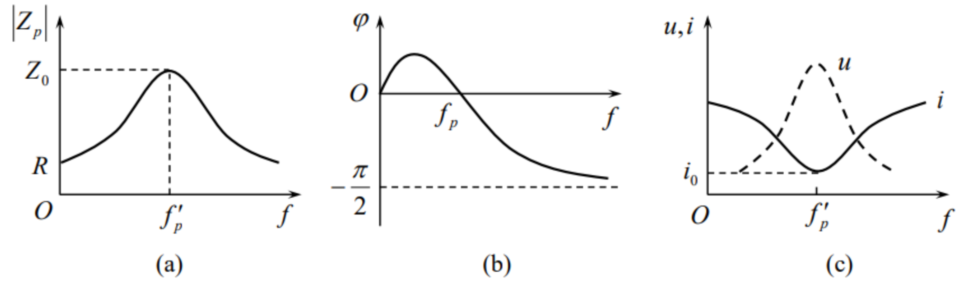


图 4　RLC 并联电路的频率特性（a）阻抗特性；（b）相频特性；（c）幅频特性

与串联谐振类似，可用品质因数 Q，即

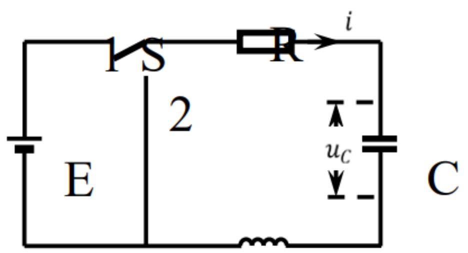
$$Q_1=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R\omega_0 C};Q_2=\frac{i_c}{i}\approx\frac{i_L}{i};Q_3=\frac{f_0}{\Delta f} \tag{12}$$

标志并联谐振电路的性能优劣，其意义也类同。不过，此时 $i_L\approx i_C=iQ$，谐振支路中的电流为总电流的 Q 倍。因此，有时称并联谐振为电流谐振。

3.3.　RLC 电路的暂态过程

电路如图 5。先观察放电过程，即开关 S 先合向“1”使电容充电至 E，然后把 S 倒向“2”，电容就在闭合的 RLC 电路中放电。电路方程为

$$L\frac{di}{dt}+Ri+u_C=0$$



又将 $i=C\frac{du_C}{dt}$ 代入得

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

根据初始条件 t = 0，$u_c=E$，$\frac{du_c}{dt}=0$ 解方程。方程的解分为 3 种情况：

(1)$R^2<\frac{4L}{C}$ 属于阻尼较小的情况。引入阻尼系数 $\zeta=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ 后，对应于 $\zeta<1$。此时方程的解为

$$u_C=\sqrt{\frac{4L}{4L-R^2C}}Ee^{-t/\tau}\cos(\omega t+\varphi)$$

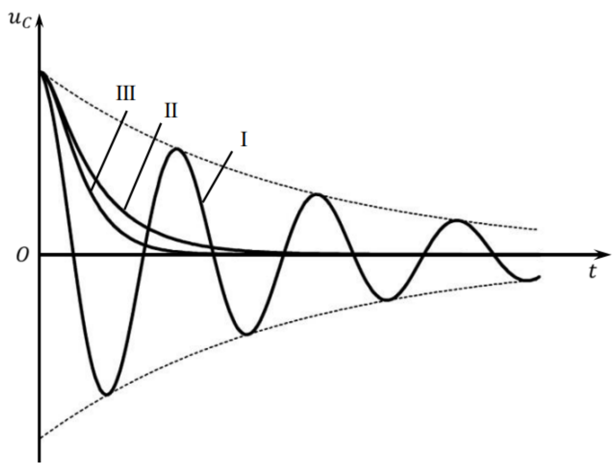
其中时间常量为

$$\tau = 2L/R$$

衰减振动的角频率为

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{R^2C}{4L}}$$

U_C 随时间变化的规律如图曲线 I 所示，即阻尼振动状态。此时振动的振幅呈指数衰减。τ 的大小决定了振幅衰减的快慢，τ 越小，振幅衰减越迅速。



如果 $R^2 << \frac{4L}{C}$，通常是 R 很小的情况，振幅的衰减很缓慢

$$\omega \approx 1/\sqrt{LC} = \omega_0$$

此时近似为 LC 电路地自由振动，ω_0 为 R=0 时 LC 回路的固有频率。衰减振动的周期

$$T = 2\pi/\omega \approx 2\pi\sqrt{LC}$$

(2)$R^2 > \frac{4L}{C}$, 即阻尼系数 ζ> 1,1。对应于过阻尼状态，其解为

$$u_C = \sqrt{\frac{4L}{R^2C-4L}}Ee^{-\alpha t}Sinh(\beta t+\varphi) \qquad \alpha = \frac{R}{2L},\ \beta = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R^2C}{4L}-1}$$

式所表示的 $u_c -$ 的关系曲线见图 6 中的曲线 II，它是以缓慢的方式逐渐回零。可以证明，若 L 和 C 固定，随电阻 R 的增长，u_c 衰减到零的过程更加缓慢。(3)$R^2 = \frac{4L}{C}$，即阻尼系数 ζ= 1。对应于临界阻尼状态，其解为

$$u_C = E\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$$

其中 $\tau = 2\,/\,$。它是从过阻尼到阻尼振动过渡的分界点，$u_c -\ $ 的关系见图 6 中的曲线 III。对于充电过程，即开关 S 先在位置“2”，待电容放电完毕，再把 S 倒向“1”，电源 E 将对电容充电，于是电路方程变为

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

初始条件为 t = 0 时，$u_c = 0$，$\frac{du_c}{dt} = 0$。方程解为

$$R^2 < \frac{4L}{C}，\ u_C = E\left[1 - \sqrt{\frac{4L}{4L-R^2C}}e^{-t/\tau}\cos\left(\omega t + \varphi\right)\right]$$

$$R^2 > \frac{4L}{C}，\ u_C = E\left[1 - \sqrt{\frac{4L}{R^2C-4L}}e^{-\alpha t}Sinh(\beta t + \varphi)\right]$$

$$R^2 = \frac{4L}{C}，\ u_C = E\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right]$$