积分

- 一重积分
  - 定义
  - 物理背景
  - 可积的条件
  - 定积分的性质
    - 线性性质
    - 区间可加性
    - 保号性
    - 乘积函数可积性
    - 施瓦茨不等式
  - 积分中值定理
  - 微积分基本定理
  - 原函数与变上限积分
    - 原函数
    - 变上限积分
      - 定义
      - 连续性
      - 可导性
  - 牛顿-莱布尼茨公式
  - 基本积分表
  - 第一换元法（凑微分法）
  - 第二类换元法
  - 分部积分法
- 二重积分
  - 物理背景
  - 定义
  - 计算
    - 直角座标系
      - x型
      - y型
      - 非x非y型
    - 极座标系
    - 变量替换
- 三重积分
  - 物理背景
  - 定义
  - 计算
    - 直角座标系
    - 极座标系
    - 柱座标系
- 二、三重积分性质
  - 线性性质
  - 区域可加性
  - 保序性
  - 积分中值定理
- 第一类曲线积分
  - 物理背景
  - 定义
  - 计算
  - 性质
    - 线性
    - 可加
    - 中值
- 第一类曲面积分

积分

一重积分

定义

分划做乘积求和取极限，若这个极限存在则称为黎曼可积。

物理背景

知道速度求路程问题等

可积的条件

若函数满足下列条件之一，则$f(x)$可积，记为$f(x) \in R[a,b]$

1. $f(x)$在$[a,b]$连续；
2. $f(x)$在$[a,b]$上有界且只有有限个间断点；
3. $f(x)$在$[a,b]$单调；

定积分的性质

线性性质

设$f,g \in R[a,b]$，又$\alpha,\beta \in R$，则有$\alpha f+\beta g \in R[a,b]$，且有
$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$

区间可加性

设函数$f \in R[a,b], c \in (a,b)$，则$f \in R[a,c], f \in R[c,b]$，且有$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

保号性

设函数$f \in R[a,b]$，且在$[a,b]$上$f(x) \geq 0$，则有$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

推论：

1. （保序性）设函数$f,g \in R[a,b]$，且在$[a,b]$上，$f(x) \leq g(x)$，则有$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$
2. （估值不等式）设函数$f \in R[a,b]$，且在$[a,b]$上，$m \leq f(x) \leq M$，则有
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$
3. （绝对值不等式）设函数$f \in R[a,b]$，则$|f| \in R[a,b]$，且$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

乘积函数可积性

设函数$f, g \in R[a,b]$，则$f \cdot g \in R[a,b]$.

施瓦茨不等式

设函数$f(x), g(x) \in C[a,b]$，则$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$

积分中值定理

设函数$f \in C[a,b], g \in R[a,b]$，且$g(x)$在$[a,b]$上不变号，则$\exists \xi \in [a,b]$，使得
$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$

微积分基本定理

原函数与变上限积分

原函数

原函数求导等于被积函数，这里的原函数可以有一个常数C

变上限积分

定义

设函数$f \in R[a,b]$，则称函数$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$，$(x \in [a,b])$为$f$在$[a,b]$上的变上限积分.

连续性

若$f(x) \in R[a,b]$，则$\Phi \in C[a,b]$.

可导性

若$f(x) \in C[a,b]$，则$\Phi \in D[a,b]$，且$\Phi'(x) = f(x)$.

牛顿-莱布尼茨公式

这里这个连续需要注意
若$f(x) \in C[a,b]$，且$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$的原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

基本积分表 🏴

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arcsin\frac{x}{a}+c\text{（}a>0\text{）}$$
$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctan\frac{x}{a}+c\text{（}a\neq0\text{）}$$
$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}|ln\frac{x-a}{x+a}|+c\text{（}a\neq0\text{）}$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+c\text{（}a\neq0\text{）}$$
$$\int\sqrt{a^2-x^2}=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a}+c$$
$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{a^2}{2}ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+c$$
$$\int secxdx=ln|secx+tanx|+c$$
$$\int cscxdx=ln|cscx-cotx|+c$$

第一换元法（凑微分法）🏴

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+c$

我理解就是把能和dx结合的项与dx结合一下如cosxdx=dsinx

第二类换元法🏴

$\int f(x)dx\xlongequal{x=\varphi(t)}\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F(t)+c=F[\varphi^{-1}(x)]+c$

把变量用一个函数换掉，再把新的自变量的范围求出来，这里就涉及到一些技巧，如$x=\frac{1}{t}$，三角换元等

分部积分法🏴

$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$

我的理解$uv=\int duv=\int udv+\int vdu$

二重积分

物理背景

1. 平面薄板的质量
2. 曲顶柱体的体积

定义

$lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\sigma_i=I=\iint_D f(x,y)d\sigma$

其中$d\sigma$是每一份面积微元，$f(x,y)$相当于曲顶柱体的高度.

这个也有黎曼和的概念

计算

直角座标系

x型

画出区域，定x的范围，将y用x的函数表示，积分两次。

y型

同上

非x非y型

切割

极座标系

$x = rcos\theta$

$y = rsin\theta$

值得注意的是$J = r$不能忘记乘上去，同样需要定限

变量替换

1. $x(u,v), y(u,v) \in C^1(D')$
2. $J = \frac{\alpha(x,y)}{\alpha(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0, (u,v) \in D'$
3. $f(x,y) \in C(D)$

有$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv.$

三重积分

物理背景

空间物体Ω的体密度函数为$\mu(x,y,z)$，通过体密度函数求取空间物体的质量.

定义

有界闭区域Ω在R^3中，函数$f(x,y,z)$在Ω上有上界，取分划，且有$I \in R$，和式$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$取极限值为$I$

计算

直角座标系 🚩

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

极座标系

$x = \rho sin\varphi cos\theta$

$y = \rho sin\varphi sin\theta$

$z = \rho cos\varphi$

$J = \rho^2 sin\varphi$

柱座标系

$x = rcos\theta$

$y = rsin\theta$

z=z

$J = r$

二、三重积分性质

线性性质

可以拆分

区域可加性

可以拆分

保序性

积分前函数值的大小关系在积分后仍然成立

积分中值定理

条件是f在区域上连续，g在区域上可积，理解就是可以找到一个平均的函数值乘上区域面积（或体积）来求出积分值.

第一类曲线积分

物理背景

线密度函数乘弧长计算质量

定义

$\int_c f(x,y)ds$，其中的ds为弧微分，其实f(x, y)就是密度函数.

无方向

计算

$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$

t=x时的特殊形式

$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}$

下面按照正常的积分算

性质

线性

可加

中值

第一类曲面积分

物理背景

面密度函数乘面积计算质量

定义

$\iint_{\sum} f(x, y, z) dS$

无方向

计算

$x = x(u, v)$

$y = y(u, v)$

$z = z(u, v)$

$\iint_{\sum} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{uv}} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$

$A = \frac{\alpha(y,z)}{\alpha(u,v)}$

$B = \frac{\alpha(z,x)}{\alpha(u,v)}$

$C = \frac{\alpha(x,y)}{\alpha(u,v)}$

当z为显式

$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{1 + {z_x}^2 + {z_y}^2}$

第二类曲线积分

物理背景

力场在曲线轨迹上的做功

定义

$W = \int_C [\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{e}_\tau(x, y)] ds$

or

$W = \int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}$

$d\mathbf{r} = (cos\alpha ds, cos\beta ds) = (dx, dy)$

推出一般形式

$\int_C \mathbf{P}(x, y) dx + \mathbf{Q}(x, y) dy$

有方向

计算

还是使用参数形式来推导

$x = x(t)$

$y = y(t)$

还是用很一般的式子来推$dx/dt = x'(t) \to dx = x'(t)dt$，同理$dy = y'(t)dt$

$\int_C \mathbf{P}(x,y)dx + \mathbf{Q}(x,y)dy = \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt$

特别的，当x=t时

$\int_C \mathbf{P}(x,y)dx + \mathbf{Q}(x,y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx$

第二类曲面积分

物理背景

液体在一个面上的流量

定义

$\iint_{\sum} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S}$

dS是面积微元

计算

$d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = (cos\alpha dS, cos\beta dS, cos\gamma dS) = (dydz, dzdx, dxdy)$

$\mathbf{F}(x,y,z) = (P, Q, R)$

$\iint_{\sum +} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

再用类似的方法来推导

$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D$

$(A, B, C) = (\frac{\alpha(y,z)}{\alpha(u,v)}, \frac{\alpha(z,x)}{\alpha(u,v)}, \frac{\alpha(x,y)}{\alpha(u,v)})$

$\iint_{\sum} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_D (PA + QB + RC)dudv$

特别的，当$z = z(x,y)$时，即$x = u, y = v$时，有
$\iint_{\sum} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_{D_{xy}} (-Pz_x - Qz_y + R)dxdy$

格林公式

$\oint_{C+} = Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{\alpha Q}{\alpha x} - \frac{\alpha P}{\alpha y})dxdy$

常用的一个特例

$P = -y, Q = x, \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_{C+} xdy - ydx$

与路径无关的条件

原函数

高斯公式

$$\oiint_{S+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} (\frac{\alpha P}{\alpha x} + \frac{\alpha Q}{\alpha y} + \frac{\alpha R}{\alpha z}) dV$$