

实验 4 差错控制编码实验

1 实验目的

1. 通过 Matlab 仿真，熟悉 (7,4) 汉明码的实现以及纠错性能的计算。
2. 通过 (7,4) 汉明码纠错实验，分析汉明码的纠错能力，熟悉汉明码的编码和译码原理，掌握生成矩阵和监督矩阵的生成方式。
3. 通过 (7,4) 汉明码交织实验，分析交织对于差错控制编码带来的性能提升，熟悉交织的原理和适用场景。

2 实验内容

1. 实现 (7,4) 汉明码的编译码过程，计算在 BSC 信道下，汉明码的误块率和误比特率，分析不同传输差错概率下的纠错性能。
2. 实现交织和解交织的过程，观察交织对汉明码编译码的影响，分析交织深度与连续突发错误比特数的关系。

3 实验环境

MATLAB 是美国 MathWorks 公司出品的商业数学软件，用于算法开发、数据可视化、数据分析以及数值计算的高级技术计算语言和交互式环境。

本次实验需要在 MATLAB 中完成，任意版本均可。

4 实验原理

4.1 BSC 信道

BSC (Binary Symmetric Channel) 信道，全称二元对称信道。它的每次使用的输入和输出均为逻辑 $\{0, 1\}$ 。BSC 信道的特点是， $P(\text{output}1 | \text{input}0) = P(\text{output}0 | \text{input}1) = \varepsilon$ ，即发送其中任意一个元素的出错的概率都是相等的。其转移概率如图 1 所示。

4.2 汉明码

汉明码是一种线性分组码，其最小汉明距离为 3，可以纠正单个错误。给定分组码长为 n ，则校验位需要能够标识出 n 种不同的重量为 1 的错误

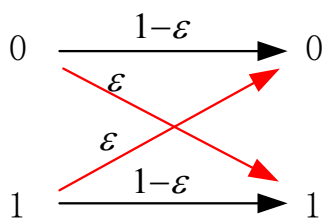


图 1: BSC 信道差错转移概率

图案, 因此校验位 r 要满足 $2^r - 1 \geq n$, 取等号时即为汉明码, 此时信息码长为 $k = n - r$, 记为 (n, k) 汉明码, 码率为:

$$\frac{k}{n} = \frac{k}{k+r} \quad (1)$$

汉明码的系统码形式生成矩阵可以写成 $\mathbf{G} = [\mathbf{I} \ \mathbf{Q}]$ 的形式, 其中 \mathbf{Q} 矩阵的宽度 r 是校验位的长度。假设信息序列为 \mathbf{x} , 编码过程即信息序列与生成矩阵相乘:

$$\mathbf{c} = \mathbf{x}\mathbf{G} = \mathbf{x}[\mathbf{I} \ \mathbf{Q}] \quad (2)$$

注意, 从编码看解码, 可以得到如下恒等式:

$$\mathbf{c} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{x}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

如果对于接受码字 \mathbf{r} , 有 $\mathbf{r}[\mathbf{Q}^T \ \mathbf{I}]^T$ 不等于 $\mathbf{0}$, 则 \mathbf{r} 不是许用码字, 传输出现了差错。我们把 $\mathbf{H} = [\mathbf{Q}^T \ \mathbf{I}]$ 称为典型形式监督矩阵。

我们将经过信道传输的接收信号表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{e} \quad (4)$$

其中, \mathbf{e} 代表传输中出现的错误图案 (矢量):

$$\mathbf{e}(i) = \begin{cases} 0, & \mathbf{c}(i) = \mathbf{r}(i) \\ 1, & \mathbf{c}(i) \neq \mathbf{r}(i) \end{cases} \quad (5)$$

用监督矩阵去计算校正子:

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{H}^T = (\mathbf{c} + \mathbf{e})\mathbf{H}^T = \mathbf{e}\mathbf{H}^T \quad (6)$$

令 $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n]$, 如果仅第 k 位出错, 其它位都没出错, 则校正子为:

$$\mathbf{s} = \mathbf{h}_k^T \quad (7)$$

此时由于汉明码恰好满足 $2^r = n + 1$ 的关系，因此，当 \mathbf{H} 各列非全 $\mathbf{0}$ 且各不相等时，非全 $\mathbf{0}$ 的 r 位校正子，恰好指示 n 种重量为 1 的错误图案。

同时，由于 \mathbf{Q} 矩阵每行至少有 2 个 1，当校正子中只有一个 1 时，则说明是监督位错误。汉明码只能纠正 1 位错误，若错误位数超过 1 位，则有可能导致纠错后错误比特数更多的情况。

4.3 交织



图 2: 信息传输流程图

通信系统中，由于无线信道的深衰落等原因，有可能使得系统中存在不可抗拒的连续突发错误，这使得一组码字中可能出现多于 1 位的错误，则汉明码的纠错能力大大下降。为此，在编码后引入一个交织器，典型的交织器让信息序列按行写入，按列读出，使得原本相邻的码元在时间上的距离拉开。如图 3 所示，交织矩阵的列数一般不小于分组码长，交织矩阵的行数不小于突发错最大长度。一个交织块的长度为交织矩阵的列数乘上行数，略大于交织延时和解交织延时。交织块总长度应为整数个编码块长度，以避免同一个编码块分到前后两个交织块引起过大延时。

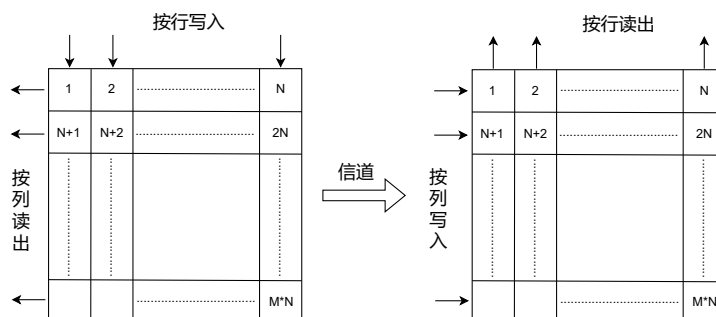


图 3: 交织与解交织过程

接收端在对汉明码进行译码前，先要进行解交织的过程，此时需要进行与交织相反的逆过程，即按列写入，按行读出，读出后的 n 位分组码再进行译码。

5 实验内容

5.1 (7,4) 汉明码的纠错实验

随机生成 40,000 个比特的信息序列，每 4 个比特为一组使用 (7,4) 汉明码进行差错控制编码，生成矩阵 \mathbf{G} 如下：

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

编码后经过误符号率为 ε 的 BSC 信道，在接收端使用监督矩阵 \mathbf{H} 进行纠错。

1. 根据汉明码编译码的相关原理，完成汉明码的纠错过程。
2. 设置 BSC 信道误符号率 ε 分别为 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2 计算出不使用汉明码编码时的误比特率和误块率，以及使用汉明码编码时的误比特率和误块率，将结果填写至表 1 中进行记录。

(将 4 个比特看做一个数据块，一个数据块中有一个比特错误则该块错误，以此来计算误块率)

信道误符号率		0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2
无汉明码编译码	数据块数						
	误比特率						
	误块率						
有汉明码编译码	数据块数						
	误比特率						
	误块率						

表 1: 差错控制编码实验记录

3. 绘制随信道误符号率变化的误码率曲线，四条曲线画在同一张图上，有/无编码采用不同的颜色，误比特率/误块率采用不同的数据点符号样式，信道误符号率取值 $[1e-3, 2e-1]$ ，横纵坐标均采用对数坐标。

4. 观察绘制的曲线图，分析变化原因。(注意：特别关注在信道误符号率较低时，有/无编码对应的曲线斜率变化)

5.2 (7,4) 汉明码的交织实验

1. 调试交织函数 *interleaver* 和解交织函数 *deinterleaver*

(1) 产生一个 $[1,2,3,\dots,35]$ 的整数序列，使用 5 行 7 列的交织块，不编码，不经过信道，绘制交织前后，及解交织前后的序列，检查交织效果。

(2) 将 (1) 中序列换成长度为 35 的全零序列，并使交织后的序列经过一个信道传输，该信道在一个交织块内存在一个长度为 L 的突发错误，且起点随机。令 L 为交织块的行数，绘制并对比解交织前后的错误图案。(提示：调用 `burst_error` 函数产生突发错)

(3) 令 L 为交织块行数的 2 倍，重做 (2)。

2. 随机生成 20 个比特的信息序列，每 4 个比特为一组使用 (7,4) 汉明码进行差错控制编码，经过一个信道传输，该信道在一个交织块内存在一个长度为 5 的突发错误，且起点随机。

(1) 使用一个不同于 5.1 中的生成矩阵 \mathbf{G} ，并记录在实验报告中。

(2) 对汉明码编码后的序列进行 5 行 7 列的交织，经过信道后进行解交织，再进行译码。输出原始的信息序列 x ，汉明码编码后的序列 x_code ，交织后的序列 $x_interleave$ ，经过信道传输后的序列 y ，解交织后的序列 $y_deinterleave$ ，以及纠错后的序列 y_decode ，将其记录在实验报告中，并分析交织的作用和效果。

(3) 随机生成 10000 个数据块，其余条件同 (2)，改变一个交织块内存在的突发错误长度分别为 3, 5, 10, 15, 20, 25，对比使用交织/解交织和不使用无交织/解交织的系统可靠性，将结果记录在表 2 中：

信道突发错误长度		3	5	10	15	20	25
无交织/解交织	数据块数						
	误比特率						
	误块率						
有交织/解交织	数据块数						
	误比特率						
	误块率						

表 2: 差错控制编码实验记录