实验 5 附录

1 一种基于滑动窗 FFT 的功率谱统计方法

对波形 $x(t)$ 以足够小的周期 Δt 进行采样得到 $x[n]$。截取区间 $[0, N_{\text{sz}}\Delta t)$ 内的部分，其频谱 $X_0(f) = \int_0^{N_{\text{sz}}\Delta t} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$ 可做如下近似：

$$X_0(f) \approx \sum_{n=0}^{N_{\text{sz}}-1} x[n]e^{-j2\pi fn\Delta t}\Delta t \tag{1}$$

对其以间隔 Δf 作频域采样

$$X_0(k\Delta f) = \sum_{n=0}^{N_{\text{sz}}-1} x[n]e^{-j2\pi nk\Delta t\Delta f}\Delta t, k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

对比 $x[n], 0 \leq n \leq N_{\text{sz}} - 1$ 的 FFT（matlab 的 fft 函数所采用定义）：

$$X_0[k] = \sum_{n=0}^{N_{\text{sz}}-1} x[n]e^{-j(2\pi/N_{\text{sz}})kn}, 1 \leq k \leq N_{\text{sz}} - 1 \tag{3}$$

可发现取 $\Delta f = 1/(N_{\text{sz}}\Delta t)$ 时有 $X_0(k\Delta f) = X_0[k]\Delta t$

这里需要说明，以上所采用的 FFT 定义（也是 matlab 的 fft 函数）未进行能量归一化，即 $\sum_{k=0}^{N_{\text{sz}}-1} |X_0[k]|^2 = N_{\text{sz}} \sum_{n=0}^{N_{\text{sz}}-1} |x[n]|^2$

波形 $x(t)$ 的功率谱密度函数为

$$S_X(f) = \lim_{N_{\text{sz}}\to\infty} \frac{1}{N_{\text{sz}}\Delta t}\mathbb{E}|X_0(f)|^2 \tag{4}$$

代入 $\Delta f = 1/(N_{\text{sz}}\Delta t)$ 和 $X_0(k\Delta f) = X_0[k]\Delta t$ 得到功率谱密度函数的采样值

$$S_X(k\Delta f) = \lim_{N_{\text{sz}}\to\infty} \frac{1}{N_{\text{sz}}^2\Delta f}\mathbb{E}|X_0[k]|^2 \tag{5}$$

实际计算载波传输信号的功率谱时，一方面，考虑到 FFT 的复杂度为 $O(N_{\text{sz}} \log N_{\text{sz}})$，FFT 的窗长 N_{sz} 不宜过大；另一方面，上式中的期望是根据给定区间内信号的分布，遍历可能的采样值来统计的，但对独立同分布符号传输，可以用时间上的遍历代替对分布的遍历，即对不同起始位置的区间分别计算(5)，再求平均。为了刻画连续传输多个符号时符号间波形变化对功率谱的影响，这些区间应该是有所重叠的。

具体而言，设 N_{sz} 为窗长，N_{st} 为窗移动步长（都以 Δt 为单位，且 $1 \leq N_{\text{st}} < N_{\text{sz}}$）。$X_m[k]$ 为第 m 个窗内的 FFT：$X_m[k] = \sum_{n=0}^{N_{\text{sz}}-1} x[(m-$

$1)N_{\mathrm{st}}+n]e^{-j2\pi kn/N_{\mathrm{sz}}}, 0 \le k \le N_{\mathrm{sz}}-1$，则可用下式近似表示功率谱密度函数的采样值：

$$S_X(k\Delta f) \approx \frac{1}{N_{\mathrm{win}} N_{\mathrm{sz}}^2 \Delta f} \sum_{m=1}^{N_{\mathrm{win}}} |X_m[k]|^2 \tag{6}$$

其中 $N_{\mathrm{win}}-1$ 为 FFT 窗滑动次数。窗长 N_{sz} 足够大而步长 N_{st} 足够小时，该方法能比较准确地估计功率谱密度函数的采样值；在保证准确度的基础上，可以适当减小 N_{sz} 或增大 N_{st} 来降低计算复杂度。