

S1 寒假作业

一、做题须知：

- 1、S1 寒假的课后作业不再强制同学们按时间完成，但是应该在春季开课之前完成。
- 2、**寒假作业按照学习顺序排序，难度与顺序无关**。同学们可以自由规划做题顺序，建议按顺序做，遇到难题可以暂时跳过。
- 3、布置寒假作业的目的是督促同学们课后认真刷题，提高组课程的核心目的是**冲刺奖项**，**不刷题是不可能获奖的!!!** S1 的每堂课课后建议 3~5 小时练习时间。
- 4、遇到困难多和老师沟通，同时保持独立思考的能力，不要偷懒复制网上的题解。
- 5、各星级难度：

星级	对应难度	对应水平
★	上过课就会做	上过课的同学
★★	认真上课就会做	态度端正的同学
★★★	难度不大，熟练的同学会做	课后认真练习的同学
★★★★	有难度，可能需要帮助	课后大量练习的同学

二、各题简析

1、美国血统

【推荐算法】二叉树的遍历序与寻根

【难度】★

2、层次遍历

【推荐算法】BFS

【难度】★★

3、遍历问题

【推荐算法】计数原理

【难度】★★★（思维题）

【提示】如果前序遍历和后续遍历分别出现了形如 AB 和 BA 的组合，那么结点 A 就只有一个儿子。对于一个儿子的结点，它唯一的儿子既可以是左儿子，又可以是右儿子。

4、二叉搜索树个数

【推荐算法】递推

【难度】★★★★（思维题）

【提示】问题要求的是二叉搜索树的个数，不是普通的二叉树的个数，但二叉搜索树同样具有树的递归性质，可以减少待求问题的规模。

实际上，本问题即求**卡特兰数（Catalan）**。许多看似不相关的问题最后都可以归结为卡特兰数。

【学习链接】<https://oi-wiki.org/math/combinatorics/catalan/>，只需了解到递推式即可。

5、对称二叉树

【推荐算法】DFS

【难度】★★★★

【提示】利用二叉树的递归性质进行处理，其实难点在于时间复杂度分析。

6、淘汰赛

【推荐算法】完全二叉树

【难度】★

【提示】回忆在学习堆时，我们是如何将新加入结点上浮的。

7、右视图

【推荐算法】层次遍历

【难度】★★

【提示】并不一定是一路向右。

8、分裂二叉树

【推荐算法】两次 DFS

【难度】★★★★

【提示】记 $\text{sum}[u]$ 表示以 u 为根的子树的子树和，那么每次遍历一条边 (u,v) 时，可以用 $(\text{sum}[1] - \text{sum}[v]) * \text{sum}[v] O(1)$ 得到答案。

然而，为了求出 $\text{sum}[u]$ 和计算答案，不能贪图省事，且需要注意答案可能溢出 int 范围。

9、通行限制

【推荐算法】DFS

【难度】★★

【提示】比起普通的 DFS，仅仅多出了一步。

10、互质树

【推荐算法】DFS，栈

【难度】★★★★（思维题）

【提示】问题的小数据： $1 \leq a[i] \leq 50$ 是突破口。在 DFS 的递归调用时，当前结点的祖先相当于保存在系统栈中，那么更可以保存在代码定义的栈中，方便查询。

11、最小度数

【推荐算法】邻接矩阵、枚举

【难度】★

【提示】虽然可以对度数单独计数，不过，使用 `vector` 表示邻接表时，其 `size()` 亦为度数。

本问题可以进一步拓展： $n, m \leq 10^5$ 时，如何处理？（提示：三元环）

12、Milk Factory

【推荐算法】DFS

【难度】★★

【提示】反向建图。

13、Count Simple Paths

【推荐算法】DFS（确切地说，是回溯法）

【难度】★★★

【提示】显然即求从 1 出发的简单路径数量。然而，按照简单路径定义，需要标记每个结点是否走过，这会导致问题无法用 DP 解决：若用 $dp[u]$ 表示到达结点 u 的简单路径数量，则之前经过了哪些结点是无法确定的。

其实，问题在设问时，已经帮大家降低难度了。

14、Round Trip

【推荐算法】BFS

【难度】★★★

【提示】考虑要判断的问题与起点上下左右四个格子的关系。

15、Swap Place

【推荐算法】BFS，二维状态

【难度】★★★★

【提示】对两个人分别 BFS，无法区分二人权值相同的情况。突破口在于：本问题的 n 和 m 并不大。

16、Skiing

【推荐算法】SPFA

【难度】★★★

【提示】对问题建模时，边的长度可能为负数，因而只能使用 SPFA。

17、新年好

【推荐算法】Dijkstra，回溯法

【难度】★★

【提示】关键在于求出最短路后，5 个亲戚应该以什么顺序访问。

18、Shortest Path on a Line

【推荐算法】Dijkstra，建图优化

【难度】★★★★

【提示】问题要求的连边方式，其实有更简单的等效建图方式。

19、Small Multiple

【推荐算法】Dijkstra，同余最短路

【难度】★★★★

【提示】同余最短路是近年来新兴的套路，直接参照学习链接，学习思路即可。

【学习链接】<https://oi-wiki.org/graph/mod-shortest-path/>

https://www.luogu.com.cn/problem/solution/AT_arc084_b，注意是第 2 篇题解。

20、通往奥格瑞玛的道路

【推荐算法】二分+Dijkstra

【难度】★★★

【提示】如果将血量限制视为可行性，那么问题可以转化为：已知收取费用最大值 $\leq x$ ，判断是否可行。显然能够付费越多，越有可能到达。