

线性代数群讨论班

主办人：柳卓阳

负责人：肖倍达

时间：2025-2026学年春季学期

地点：暂定

目录

1	课程介绍	2
2	课程目标	2
3	前置知识	3
4	相关资料	3
4.1	主教材	3
4.2	参考书目	3
5	课程内容	3
5.1	代数几何预备知识	3
5.2	线性代数群的基本性质	3
5.3	线性代数群的进一步讨论	4
5.4	约化代数群的分类	5

1 课程介绍

代数群理论是现代数学的核心理论之一。经典意义上，代数群指的就是带有群结构的代数簇，它的理论主要包含两大分支：线性代数群与阿贝尔簇。事实上，根据Chevalley结构定理，任何代数群都有极大连通的线性子群，且商群构成一个阿贝尔簇，因而我们可以在一定程度上认为，这两个分支就构成了代数群的全部。在本学期的讨论班中，我们重点关注的对象是线性代数群。

线性代数群这一概念最初引入的动机就是将李群推广到任意域上，从而李理论的相关工具便可用于研究这一类更广泛的群，不单仅限于实数域和复数域上的李群。这一理论的主要工作是由Chevalley在1940到1960年间完成的，他系统性地为代数群建立了公理化基础，并完成了代数闭域上分裂半单线性代数群的分类，而正确认识并严格证明这一分类正是我们本学期讨论班的主要目标。

线性代数群在当今数学研究的各个方向都显得极为重要。在数论方向，线性代数群为数论中的朗兰兹纲领提供了基本语言。在表示论方向，线性代数群的结构与表示理论本就是李理论与表示论的重要组分，并且更深层的几何表示论也是以它为窗口，同时，它为有限群中的李型有限群的结构与表示理论提供了基本研究框架，因此线性代数群对李理论与表示论而言是十分重要的。在代数几何方向，代数群本身也是基本的研究对象，并且它还是构造模空间的重要工具。最后，在数学物理方向，代数群也为规范场论、可积系统等概念提供了关键语言。

2 课程目标

正如介绍中所言，本学期讨论班的主要目标就是理解并证明代数闭域上约化代数群的分类，主要以Springer的《线性代数群》为教材（以下称主教材），范围即为第一章到第十章，并加上Humphreys的《线性代数群》与Borel的《线性代数群》。我们将讨论班主要分为如下四个阶段。

首先，我们需要在寒假熟悉代数几何的基本知识，并熟练运用相关语言，本学期我们暂时不会用到概形，所以只需掌握古典意义上的代数几何（也即代数簇上的代数几何）即可，以读主教材第一章为主，适当辅以其他古典代数几何教材做参考。

随后，我们将正式介绍代数群的基本性质，以及它与李代数之间的关系，范围为主教材第二章到第四章。

接着，我们开始研究代数群更精细的性质并了解基本工具，主要包括态射的拓扑性质与齐性空间，抛物子群、Borel子群与可解群的基本性质，以及Weyl群与根数据，范围为主教材第五章到第七章。

最后，我们将正式研究约化群的分类，主要结果即为Bruhat分解，之后再严格证明同构定理与存在定理，范围为主教材第八章到第十章。

3 前置知识

抽象代数、基础代数几何（寒假预计有线上讨论班）、李代数（了解复数域上半单李代数的分类结果即可）

4 相关资料

4.1 主教材

T.A.Springer. Linear algebraic groups 2nd ed[M]. Birkhauser,2009.

4.2 参考书目

1. Armand Borel. Linear algebraic groups[M]. SpringerVerlag,1991.
2. James E. Humphreys. Linear algebraic groups[M]. SpringerVerlag,1975.

5 课程内容

5.1 代数几何预备知识

- Zariski拓扑与拓扑空间的可约性
- 仿射代数与仿射簇
- 正则函数与环化空间
- 乘积簇
- 簇与预簇
- 射影簇
- 维数
- 态射

5.2 线性代数群的基本性质

1. 线性代数群及其基本性质
 - 代数群

- 一些基本结果
- G -空间
- Jordan分解
- 从表示还原群

2. 交换代数群

- 交换代数群的结构
- 可对角化群与环面
- 加性函数
- 初等幂幺群

3. 导子、微分、李代数

- 导子与切空间
- 微分与可分性
- 光滑点(Simple points)
- 线性代数群的李代数

5.3 线性代数群的进一步讨论

1. 态射的拓扑性质及其应用

- 态射的拓扑性质
- 有限态射与正规性
- 齐性空间
- 半单自同构
- 商簇

2. 抛物子群、Borel子群与可解群

- 完备簇
- 抛物子群与Borel子群
- 连通可解群
- 极大环面, Borel子群的更多性质

3. Weyl群、根与根数据(Root datum)

- Weyl群
- 秩一半单群
- 半单秩一约化群
- 根数据(Root data)
- 双根
- 幂么根(The unipotent radical)

5.4 约化代数群的分类

1. 约化群

- 约化群的结构性质
- Borel子群与正根系
- Bruhat分解
- 抛物子群
- Bruhat分解的几何问题

2. 同构定理

- 二维根系
- 结构常数
- 元素 n_α
- G 的展示
- 结构常数的唯一性
- 同构定理

3. 存在定理

- 定理的表述与约化
- 单连根系(Simply laced root systems)
- 自同构与最终证明