1 Grundlagen ueber reelle Zahlen

1.1 Geordnete Koerper

Definition 1

Es sei A eine Menge. Eine Relation $\prec \subseteq$ AxA heisst totale Ordnung.
1) $\prec$ ist eine Ordnungsrelation (reflexiv, antisymetrisch, transitiv)
2) $\forall$ a,b $\in$ A { a $\prec$ b oder b $\prec$ a }

Bezeichnung 1

Ist a $\prec$ b und a $\neq$ b, so schreiben wir a $\prec$ b

Beispiel 1

Die natuerliche Ordnung $\leq$ der reellen Zahlen, ist eine totale Ordnung.
Sind a,b $\in \Re$ mit a $<$ b, dann a+c $<$ b+c fuer alle c $\in \Re$
(a=5, b=6, c=2, 5<6, 5+2 $<$ 6+2, d.h. 7<8)
0<a,b $\Rightarrow$ 0 $<$ a*b
(a = 5, b = 6, 0 $<$ 5*6 = 30)

Definition 2

Es sei (K,+,*) ein Koerper mit Nullelement 0 und $\prec$ eine totale Ordnung auf K. Dann heisst $\prec$ Anordnu
1) $\forall x, y, z \in K (y < z \Rightarrow x + y < x + z)$
2) $\forall x, y, z \in K (0 < x, y \Rightarrow 0 < x * z)$
$(K, +, *, \prec)$ heisst geordneter Koerper.

Beispiel 2

$(\Re, +, *, \prec)$ heisst geordneter Koerper

Satz 1

Es sei $(K, +, *, \prec)$ ein geordneter Koerper.
Dann gilt $0 \prec a\ oder\ a = 0\ oder\ 0 \prec -a\ fuer\ a \in K$

Beweis (Satz 1)

Angenommen $a \prec 0$ und $a \neq 0$.
Dann $a \prec 0$ nach Definition 1 und $a - a \prec -a$, d.h. $0 \prec -a$ nach Definition 2

Satz 2

Es sei $(K, +, *, \preceq)$ ein geordneter Koerper und $a, b, c, d \in K$.
Ist $a \preceq b\ und\ c \preceq d,\ dann\ a + c \preceq b + d.$

Beweis (Satz 2)

Aus $a \preceq b$ folgt $a + c \preceq b + c$.
Aus $c \preceq d$ folgt $b + c \preceq b + d$.
Die Transitivitaet liefert : $a + c \preceq b + d$

Bemerkung 1

Ist a=c=0, dann liefert Satz 2 : $(0 \preceq b \; und \; 0 \preceq d) \Rightarrow 0 \preceq b + d$.

Definition 3

Es sei (K,+,*) ein Koerper mit Nullelement D und $P \subseteq K$.
P heisst Positivbereich von K, wenn
1) Fuer alle $a \in K \setminus \{0\}$ gilt entweder $a \in P$ oder $-a \in P$
2) $a, b \in P \Rightarrow a + b, a * b \in P$

Bezeichnung 2

Wir setzen $P_< := \{a \in K | 0 \prec a\}$

Satz 3

Ist $(K, +, *, \preceq)$ ein geordneter Koerper, dann ist
$P_<$ ein Positivbereich.

Beweis (Satz 3)

1) Es sei $a \in K \setminus \{0\}$. Es sei $a \notin P_<$ dann gilt
a $= 0$ oder $0 \prec -a$ nach Satz 1, d.h.
$0 \prec -a$ da $a \neq 0$. Somit $(-a) \in P_<$.
Ist $a \in P_<$, d.h. $0 \prec a$, $-a + 0 \prec a - a$.
$-a \prec 0$, d.h. $-a \in P_<$. Analog $-a \in P_< \Rightarrow a \notin P_<$.
Somit gilt entweder $a \in P_< \; oder \; -a \in P_<$
2) Es seien $a, b \in P_<$, d.h. $0 \prec a, 0 \prec b$. Nach Bemerkung 1 gilt
$0 \prec a + b$ und $a + b \in P_<$. Ausserdem gilt $0 \prec a * b$ nach Definition 2, d.h. $a * b \in P_<$.

Bezeichnung 3

Wir setzen $\prec_P = \{(x, y) | y + x \in P \cup \{0\}\}$

Satz 4

Es sei $(K, +, *)$ ein Koerper mit Nullelement 0 und $P \subseteq K$ ein Positivbereich.
Dann ist $(K, +, *, \prec_P)$ ein geordneter Koerper.

Beweis (Satz 4)

Zunaechst zeigen wir, das $\prec_P$ eine totale Ordnung ist (Definition 1)
- refelexiv : Es sei $a \in K$. Dann $a - a = 0$, d.h. $a \prec_P a$
- antisymetrisch : $a \prec_P b$ und $b \prec_P a$, dann $b - a \in P \cup \{0\}$ und $a - b \in P \cup \{0\}$.
Ist $b - a \in P$, dann $-(b - a) \notin P$ (Definition 3), d.h.
Ist $b - a \in P$, ergibt sich $b - a = 0$ also a-b.
-transitiv : Es seien $a \prec_P b$ und $b \prec_P c$, d.h.
$b - a \in P \cup \{0\}$ und $c - b \in P \cup \{0\}$.
Dann $c - a = (c - b) + (b - a) \in P \cup \{0\}$ nach Definition 3

Damit ist $\prec_P$ eine Ordnungsrelation
Es seien $a, b \in K$. ist a=b, dann a-b=0, d.h. $a \prec_P b$.
Ist $a \neq b$, d.h. $b - a \neq 0$. Dann gilt entweder $(b - a) \in P,\ -(b - a) \in P$.
$a - b \in P$ nach Definition 3
d.h. $a \prec_P a$ oder $b \prec_P a$
Damit ist $\prec_P$ eine totale Ordnung und wir haben noch 1) und 2) aus Definition 2 zu zeigen.

1) Es seien $x, y, z \in K$ mit $y \prec_P z$, d.h. $z - y \in P \cup \{0\}$.
Dann $y \notin z$ und $z - y \in P$.
Dann $(z + x) - (y - x) \in P$, d.h. $y + x \prec_P z + x$.
2) Es seien $0 \prec_P x, y$, d.h. $x - 0 \in P \cup \{0\}$ und $y - 0 \in P \cup \{0\}$,
also $x, z \in P \cup \{0\}$ und somit $x, y \in P$, daraus folgt
$x * y \in P$, $x * y - o \in P$ und $0 \prec_P x * y$

Bemerkung 2

Ist P ein Psoitivbereich eines geordneten Koerpers $(K, +, *, \prec)$.
Dann gilt $\prec_P = \prec$

Satz 5

Es sei $(K, +, *)$ ein Koerper mit Nullelement 0 sowie $a \in K \setminus \{0\}$ und
$P \subseteq K$ ein Positivbereich. Dann gilt $a^2 \in P$

Beweis (Satz 5)

Da $a \neq 0$ gilt $a \in P$ oder $-a \in P$ nach Definition 3.
Dann $a^2 \in P$ oder $(-a)^2 \in P$ (d.h. $a^2 \in P$) nach Definition 3.

Satz 6

Es sei $(K, +, *)$ ein Koerper und P ein Positionsbereich von K.
Ist $a \in P$ dann $a^{-1} \in P$ (fuer alle $a \in K \setminus \{0\}$)

Beweis (Satz 6)

Nach Satz 5 gilt $(a^{-1})^2 \in P$.
Aus $a, (a^{-1})^2 \in P$ folgt $a(a^{-1})^2 \in P$ nach Definition 3, d.h. $a^{-1} \in P$

Satz 7

Es sei $(K, +, *)$ ein Koerper mit Einselement e und $\emptyset \neq P \subseteq K$ ein Positivbereich von K. Dann gilt $e \in P$.

Beweis (Satz 7)

Nach Satz 5 gilt $e^2 - e \in P$

Satz 8

Es sei $(K, +, *, \prec)$ ein geordneter Koerper mit Nullelement 0 sowie $a, b, c \in K$ mit $a \prec b$.
Dann gilt : a) $0 \prec c \Rightarrow ca \prec cb$
b) $c \prec 0 \Rightarrow cb \prec ca$

Beweis (Satz 8)

Ist c=0 oder a=b, dann ist die Aussage klar.
Es seien nun $c \neq 0$ und $a \neq b$.
Aus $a \prec b$ folgt $a - a \prec b - a$, d.h. $0 \prec b - a$, d.h. $b - a \in P_<$
wobei $P_<$ ein Positivbereich ist (Satz 3)
a) $0 \prec c$ heisst $c \in P_<$, so $c(b - a) \in P_<$ (Definition 3), d.h.
$cb - ca \in P_<$ und $ca \prec_{P_<} cb$, d.h. $ca \prec cb$ nach Bemerkung 2.
b) $c \prec 0$, also $c \prec_{P_<} 0$, d.h. $0 - c \in P_<$
somit $(-c)(b - a) \in P_<$, d.h. $ca - cb \in P_<,\ cb \prec_{P_<} ca$
also $cb \prec ca$.

Satz 18

Es sei M eine Menge und $\preceq$ eine totale Ordnung auf M. Dann sind die folgenden Eigenschaften aquivalent :
i) $\preceq$ erfuellt die Supremum-Eigenschaft.
ii) $\preceq$ erfuellt die Infimum-Eigenschaft.

Beweis (Satz 18) i) $\Rightarrow$ ii)

Es sei $\emptyset \neq B \subseteq M$ nach unten beschraenkt.
Wir setzen $U_B = \{x \in M | x \text{ ist untere Schranke von } B\}$
$U_B \neq \emptyset$, da B nach unten becshraenkt ist.
U_B ist nach oben beschraenkt, denn fuer $b \in B$
gilt $x \preceq b$ fuer alle $x \in U_B$ $Da \preceq$ die
Supremum-Eigenschaft erfuellt, existiert $Sup(U_B)$.
Wir zeigen, $Sup(U_B) =$ Inf(B). Es sei $b \in B$. Da b eine obere Schranke
von U_B ist, gilt $Sup(U_B) \preceq$ b.
($Sup(U_B)$ ist die kleinste obere Schranke von U_B)
Somit ist $Sup(U_B)$ untere Schranke von B.
Es sei $e \in U_B$ und $u \preceq Sup(U_B)$. Somit
ist $Sup(U_B)$ die groesste untere Schranke von B, d.h.
$Sup(U_B) = Inf(B)$. Also existiert das Infimum von B.
i) $\Rightarrow$ i) .Es sei $\emptyset \neq B \subseteq M$ und nach
oben beschraenkt.
Wir setzen $O_B := \{x \in M | x \text{ ist obere Schranke von } B\}$.
Man kann analog zeigen, dass $Inf(O_B)$ existiert und Sup(B) $= Inf(O_B)$.

Definition 10

Es sei M eine Menge und $\preceq$ eine totale Ordnung auf M.
$\preceq$ heisst vollstaendige Ordnung, wenn $\preceq$ die
Supremum-Eigenschaft erfuellt.

Definition 11

ein geordneter Koerper $(K, +, *, \preceq)$ heisst vollstaendig wenn
$\preceq$ eine vollstaendige Ordnung ist.

Satz 19

Es sei $(K, +, *, \preceq)$ ein vollstaendiger Koerper.
Dann ist die Anordnung $\preceq$ archimedisch.

Beweis (Satz 19)

Es sei $a \in K$. Es sei $a \preceq 0$. Dann gilt
$a \preceq 1$ *denn* $0 \preceq 1$. Es sei $0 \preceq a$.
Angenommen, es gibt kein $n \in \aleph$ mit $a \preceq n$
$(\exists n \; a \prec n) \sim (\forall n \; n \preceq a)$. Dann $n \preceq a$
fuer alle $n \in \aleph$. Dann $\aleph \subseteq K$ nach oben
beschraenkt. Da $\preceq$ eine vollstaendige Ordnung ist, existiert Sup($\aleph$)
Aus $-1 \prec 0$ folgt $Sup(\aleph) - 1 \prec Sup(\aleph)$
d.h.$Sup(\aleph) - 1$ ist keine obere Schranke von $\aleph \subseteq K$.
Damit existiert ein $m \in \aleph$ mit $Sup(\aleph) - 1 \prec m + 1$
$(Sup(\aleph) - 1) + 1 \prec m + 1$, d.h. $Sup(\aleph) \prec m + 1 \in \aleph$
Dies ist ein Widerspruch zu Sup($\aleph$) ist obere
Schranke von $\aleph \subseteq K$. Damit ist die Annahme falsch und es existiert $n \in \aleph$ mit a<n.

1.2 Wurzeln

Definition 12

Es sei (K,+,*) ein Koerper, $a, y \in K$
$2 \leq k \in \aleph$. Ist yk = a, dann heisst yk-te Wurzel aus a.

Beispiel 12

3 und (-3) und 4-te Wurzel aus 81 : $\sqrt[4]{81}$
(-3) ist 3-te Wurzel aus -27 : $\sqrt[3]{-27}$

Satz 20

Es sei $(K, +, *, \preceq)$ ein total geordneter Koerper
$n \in \aleph \setminus \{0\}$ und $a \in K$ mit $0 \preceq a$. Dann gibt es hoechstens ein $y \in K$ mit $0 \prec y\ undy^n = a$.

Beweis (Satz 20)

Es seien $y_1, y_2 \in K$ mit $y_1^n = y_2^n = a$.
Dann $y_1 \preceq y_2$ oder $y_2 \preceq y_1$ oder $y_1 = y_2$.
Es sei $0 \prec y_1 \prec y_2$ Wir zeigen mit vollstaendiger Induktion
dass $0 \prec< y_1^n \prec y_2^n$
IA : n=1 ist klar nach Voraussetzung $0 \prec y_1 \prec y_2$
IV : n=k Es gilt $0 \prec y_1^k \prec y_2^k$.
IBh: n=k+1 Es gilt $0 \prec y_1^{k+1} \prec y_2^{k+1}$
IBw: Nach IV gilt $0 \prec y_1^k \prec y_2^k$ und $0 \prec y_1$
Nach Satz 8a) erhaelt man
$0 \prec y_1^{k+1} \prec y_2^{k+1}$ Aus $y_1 \prec y_2$ und
$0 \prec y_2$ folgt $y_1 y_2^k \prec y_2^{k+1}$ (Satz 8a).
Die Transitivitaet liefert :
$0 \prec y_1^{k+1} \prec y_2^k y_1 \prec y_2^{k+1}$, d.h.
$0 \prec y_1^{k+1} \prec y_2^{k+1})$
Damit $y_1^n \neq y_2^n$, ein Widerspruch. Analog erhaelt man
ein Widerspruch falls $y_2 \prec y_1$. Also $y_1 = y_2$.

Satz 20.a

(O.B.) Es sei (K,+,*,$\preceq$) ein archimedischer Koerper,
$n \in \aleph \setminus \{0\}$ und $a \in K$ mit $0 \prec a$.
Dann sind die folgenden Aussagen aequivalent.
i) Es existiert ein $y \in K$ mit $0 \prec y$ und $y^n = a$
ii) Die Menge B :=$\{x \in K | x^n = a\}$ hat ein supremum.
und es gilt $Sup(B)^n = a$ sowie $0 \prec sup(B)$.

Bemerkung 6

Ist (K,+,*,$preceq$) ein vollstaendiger Koerper,
$a \in K$ mit $0 \prec a$ und $n \in \aleph \setminus \{0\}$.
Dann gibt es genau ein $y \in K$ mit $0 \prec y$ und $y^n = a$.

Bezeichnung

Man schreibt $\sqrt[n]{a} =$ y oder y $= a^{1/n}$
fuer die n-te Wurzel aus a.

Satz 21

Es sei (K,+,*) ein Koerper. Dann existiert hoechstens eine totale Ordnung $\preceq$, so dass (K,+,*,$\preceq$) vollstaendig ist.

Beweis (Satz 21)

Es sei $\preceq$ eine totale Ordnung, so dass (K,+,*,$\prec$)
vollstaendig ist. Es sei $a \in K \setminus \{0\}$. Ist a=x fuer
$x \in K \setminus \{0\}$, dann ist $a = x^2 \in P_<$ nach Satz 5. d.h. $0 \prec a$
Ist $0 \prec a$, dann existiert ein $x \in K \setminus \{0\}$
mit $a = x^2$ nach Bemerkung 6.
da (K,+,*,$\preceq$) vollstaendig ist. Dann gilt
$0 \prec a \Leftrightarrow x \in K \setminus \{0\} mit x^2 = a$existiert.
Dies zeigt $P_< = \{x^2 | x \in K \setminus \{0\}\}$ fuer jede totale Ordnung
$preceq$ fuer die (K,+,*,$\preceq$) vollstaendig ist. Nach Bemerkung 2 gilt
$\preceq = \preceq_{P_<}$. Ausserdem gilt
$\preceq_{P_<} = \{(a,b) | b - a \in \{x^2 | x \in K \setminus \{0\}\} \cup \{0\}\}$
Dies zeigt, dass die totale Ordnung eindeutig durch den Koerper (K,+,*)
festgelegt ist (falls eine derartige totale Ordnung $\preceq$ existiert)

Bemerkung 7

Es sei $a \in K$ mit $0 \prec a$ und $m, n \in \aleph \setminus \{0\}$.
Dann gilt $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
und $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Bezeichnung

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Beispiel 13

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2]{4} = 2$
$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt[6]{64} = 2$
$2^{4/2} = \sqrt[2]{2^4} = \sqrt[2]{16} = 4$

Bemerkung 8

1) Fuer $q \in Q$ mit q<0 und $a \in K$ gilt $a^q = (a^{-q})^{-1}$
2) $q \in Q$ und $a, b \in K$ mit $0 \prec a, b$ gilt $(ab)^q = a^q b^q$
3) Fuer $p, q \in Q$ und $a \in K$ mit $0 \prec a$ gilt
$(a^p)^q = a^{p*q}$ und $a^p * a^q = a^{p+q}$
4) Fuer $q \in Q^+$ und $a, b \in K$ mit $0 \preceq a \prec b$ gilt
$a^q \prec b^q$ 5) Fuer $q \in Q$ mit $q \prec 0$ und $a, b \in K$ mit
$0 \prec a \prec b$ gilt $b^q \prec a^q$

1.3 Die reellen Zahlen als DedeKind-Schnitte

Definition 13

Es sei $\emptyset \neq M \subset Q$. M heisst DedeKind-Schnitt,
wenn fuer alle $p \in M$ gilt $\{a \in Q | a \preceq p\} \subset M$

Bemerkung 9

Ist M ein DedeKind-Schnitt dann gilt a) $\forall p \in M \forall a \in Q \{a \leq p \Rightarrow a \in M\}$ b) $\forall p \in M \exists r \in M \{p < r\}$

Beispiel 14

$M = \{x \in Q | x^3 < -1\}$ Wir wollen zeigen, dass M ein DedeKind-Schniit ist
Es sei $p \in M$, d.h. $p^3 < -1$. Fuer $a \in Q$ mit $a \leq p$ gilt
$a^3 \leq p^3 < -1$, d.h. $a^3 < -1$. Dann ist $\{a \in Q | a \leq p\} \subseteq M$
Es gilt $p \neq -1$ und nach Satz 17 existiert ein $r \in Q$ mit
$p < r < -1$, d.h. $r^3 < -1$ und somit $r \in M$. Dies zeigt
$\{a \in Q | a \subseteq p\} \subset M$, da r nicht zur linken Menge gehoert,
aber in M liegt.

Satz 22

Es sei $M \subseteq Q$ ein Dedekind-Schnitt.
Dann ist M eine nach oben beschraenkte Menge in dem Koerper $(Q, +, *, \leq)$

Beweis (Satz 22)

Angenommen, M ist nicht nach oben beschraenkt.
.[Dann gilt es zu jedem $m \in \aleph$ ein $q \in M$ mit $m \subseteq q$] *
Es sei $q \in Q$. Dann existiert ein $n \in \aleph \setminus \{0\}$
mit $q \subset n$ (Def 6), da $(Q, +, *, \leq)$ archimedisch ist.
Zu n existiert wegen (*) ein $p \in M$ mit $n \leq p$, d.h. $n \in M$, da
M Dedekind-Schnitt und wegen q<n ist auch $q \in M$. Also
$Q \subseteq M$, das widerspricht $M \neq Q$ (Definition 13)

Satz 23

(O.B.) Man kann auf der Menge aller Dedekind-Schnitte (bezeichnet mit M*) eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\odot$ sowie eine totale Ordnung $\preceq$ definieren, sodass $(M*, \oplus, \odot, \preceq)$ ein vollstaendiger Koerper ist, der $(Q, +, *)$ enthaelt und $\preceq$ die natuerliche Ordnung leq der rationalen Zahlen fortsetzt.
Jeder geordnete Koerper mit dieser Eigenschaft ist isomorph zu $(M*, \oplus, \odot, \preceq)$.

Bezeichnung

Der in Satz 23 betrachtete Koerper $(M*, \oplus, \odot, \preceq)$ wird der Koerper der reellen Zahlen genannt und mit (R,+,*) bezeichnet.

1.4 Absolutbetrag und Bewertung

Definition 14

Es seien $(K, +, *, \preceq)$ ein geordneter Koerper mit Nullelement 0 und $a \in K$. Dann heisst
$|a| := \{afalls 0 \preceq a\ oder\ -afallsa \prec 0$
Absolutbetrag von a

Bemerkung

Der Absolutbetrag von a ist von der Anordnung $\preceq$ abhaengig.

Beispiel 15

Ist $r \in \Re$, dann beschreibt |r| bezueglich der natuerlichen Ordnung $\leq$ der reellen Zahlen den Abstand von r zum Nullpunkt auf dem genormten Zahlenstrahl.

Bemerkung 11

a) Es gilt $|a| = |-a|$
b) $|a| \geq 0$
c) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
d) $|a * b| = |a| * |b|$
e) $|a + b| \leq |a| + |b| (Dreiecksungleichung)$
f) $|a| - |b| \leq |a - b|, |a + b|$
g) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Bezeichnung

i ist ein Symbol mit $i \notin)\Re$. Wir setzen $i^2 = -1$.
Sind $a, b \in \Re$, dann heisst a+b komplexe Zahl.
a heisst Realteil, b heisst Imaginaerteil.
$C := \{a + ib | a, b \in \Re\}$ - MEnge der $|a + ib| := \sqrt[2]{a^2 + b^2}$
heisst Norm von a+ib
z=a+ib, dann heisst $\overline{z} := a - ib$ konjugiert komplexe Zahl
zu z = a+ib

Bemerkung 12

a) Es gilt $(a + ib)(a + ib) = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$
b) $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b * b')$
Ist z=a+ib, dann $z * \overline{z} = a^2 + b^2$, d.h.
$|z| = \sqrt[2]{z * \overline{z}}$

Beispiel 16

z = 4+i3 , $|z| = \sqrt[2]{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$
$z_1 = 4 + i3, z_2 = 1 - i2$
$z_1 + z_2 = 4 + 1 + i(3 - 2) = 5 + i$
$z_1 * z_2 = 4 * 1 - (3(-2)) + i(4(-2) + 3 * 1) = 10 + i(-5) = 10 - i5$