ORTAÖĞRETİM
GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

MEBİ

KONU ÖZETLERİ

MATEMATİK

AYT

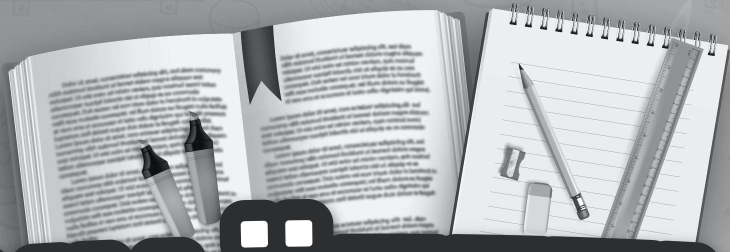
Zengin ve Anlaşılır İçerik

Hızlı ve Etkili Öğrenme

Görsel Destekli Anlatım

ORTAÖĞRETİM
GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

MEBİ



KONU ÖZETLERİ

MATEMATİK

AYT

Zengin ve Anlaşılır İçerik

Hızlı ve Etkili Öğrenme

Görsel Destekli Anlatım

MEBİ AYT KONU ÖZETLERİ - MATEMATİK

ISBN 978-975-11-8472-6

Yazar KOMİSYON

mebi.eba.gov.tr

Millî Eğitim Bakanlığı
Atatürk Bulvarı No: 98
Bakanlıklar / ANKARA

Tel: 0312 4132680
0312 4132681
0312 4131838

www.meb.gov.tr

Bu yayının tüm yayın hakları Millî Eğitim Bakanlığı'na aittir. Hiçbir şekilde ticari amaçla kullanılamaz veya kullandırılamaz. Bu kitabın ve kitapta yer alan içeriklerin ticari amaçla kullanılması, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Yasası'na aykırıdır. Aykırı davrananlar hakkında hukuki ve cezai her türlü başvuru hakkı saklıdır.

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif ERSOY

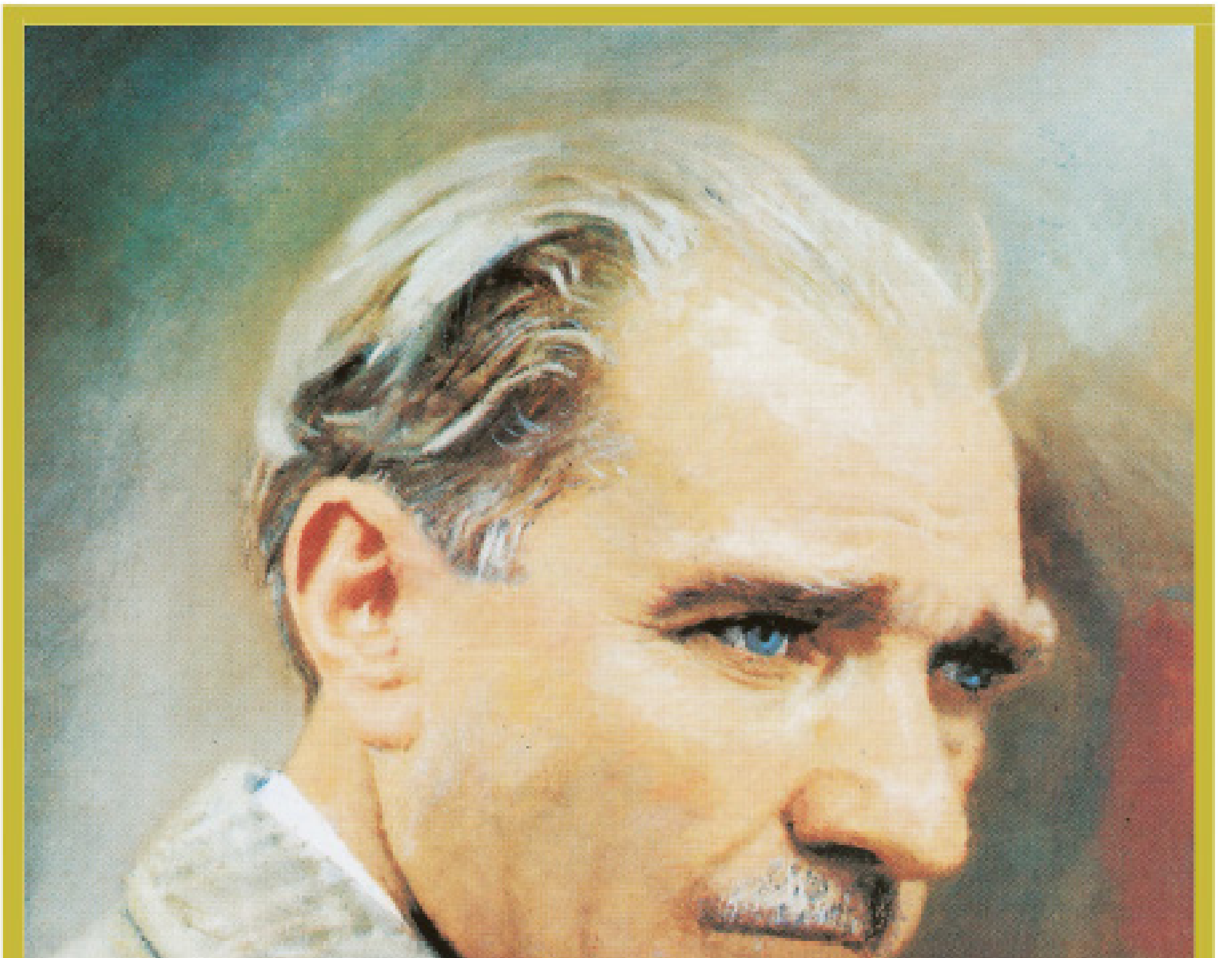
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk

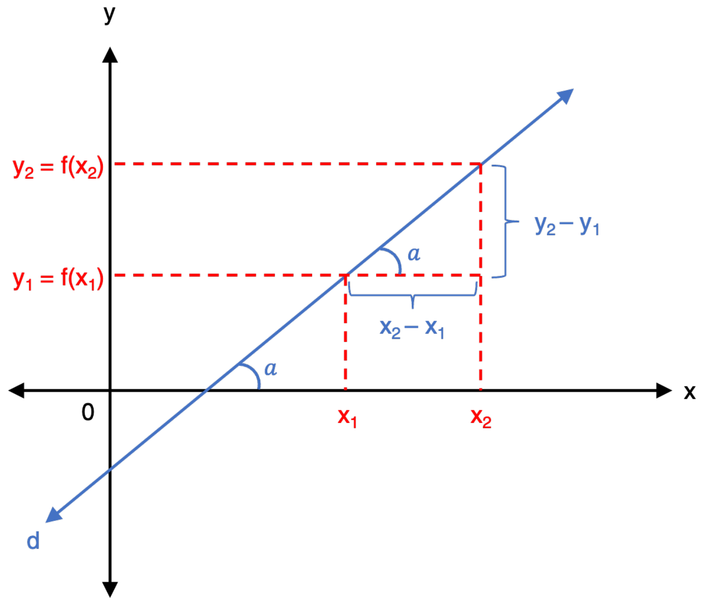


MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

İki değişken arasında doğrusal bir ilişki varsa bu ilişki, a ve b gerçek sayılar olmak üzere, y = ax + b doğrusal fonksiyonu veya bu fonksiyonun grafiği ile ifade edilir.

Geçtiği Bir Nokta ve Eğimi Bilinen Doğru Denklemi



d doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α olmak üzere α açısının tanjant değeri doğrunun eğimine eşittir. Dik üçgende bir açının tanjant değeri karşı dik kenar uzunluğunun komşu dik kenar uzunluğuna oranına eşit olduğundan doğrunun eğimi $\tan\alpha = m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur.

$A(x_0, y_0)$ noktasından geçen, eğimi m olan doğrunun denklemi $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ formülü ile bulunur.
Aralarında doğru veya ters orantı bulunan çoklukların ortak çözümleri yapılırken doğrusal fonksiyonlar kullanılır.

Birbirleriyle ilişkili değişkenler arasındaki gelir gider dengesi, bir aracın deposunda kalan yakıt miktarı, aldığı yol, bir ürünün alış ve satış fiyatı arasındaki ilişki gibi modellemelerin yorumlanmasında doğrusal fonksiyonlar kullanılır.

Örneğin 4 · 7 işleminin yapılması istendiğinde beyinde bir takım imgeler belirir. Geçmişte öğrenilen bilgiler doğrultusunda zihinde 28 sayısı veya başka bir sonuç belirmesi beynin bir fonksiyonudur. Bunun gibi çevremizde gördüğümüz birçok şey bir fonksiyondur. Matematikte fonksiyon tıpkı günlük hayatta gözlemlenen olay ve sonuçlar gibi bilimsel bir kurala göre girdi ve çıktılardan oluşan bir dönüştürücüdür.

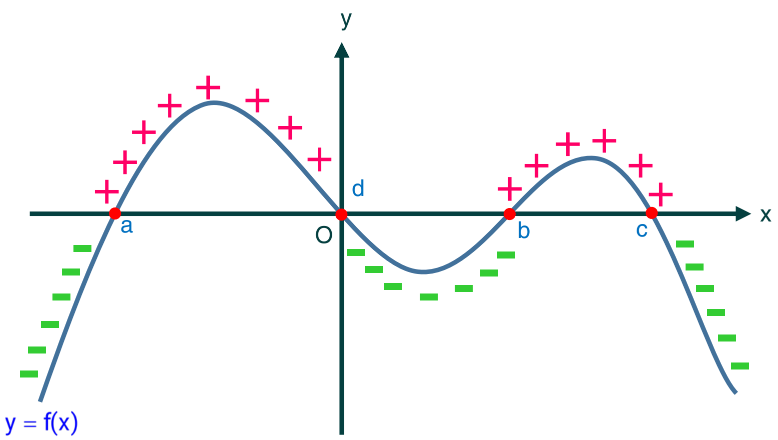
- $y = f(x)$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar, $y = 0$ için $f(x) = 0$ denkleminin kökleridir.
- $y = f(x)$ fonksiyonunun y eksenini kestiği noktalar, $x = 0$ için $y = f(0)$ denklemini sağlayan y değerleridir.
- $y = f(x)$ polinom fonksiyonlarında sabit terim, fonksiyonun y eksenini kestiği noktanın ordinatına eşittir.
- İkinci dereceden fonksiyonlar y eksenini mutlaka bir noktada keser. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu için bu nokta $(0, c)$ noktasıdır.

FONKSİYONUN NEGATİF VE POZİTİF OLDUĞU NOKTALAR

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

- $y = f(x)$ fonksiyonunda $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) < 0$ ise f fonksiyonu negatif değerlidir ve fonksiyonun grafiği x ekseninin altında kalır.

- $y = f(x)$ fonksiyonunda $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > 0$ ise f fonksiyonu pozitif değerlidir ve fonksiyonun grafiği x ekseninin üstünde kalır.



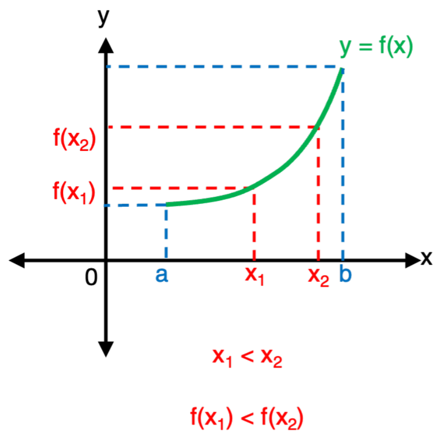
Grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun,

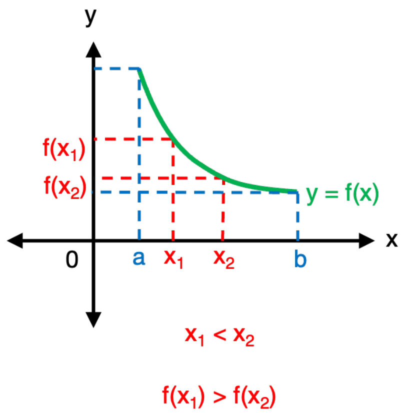
- Pozitif değerler aldığı aralık $(a, d) \cup (b, c)$,
- Negatif değerler aldığı aralık $(-\infty, a) \cup (d, b) \cup (c, \infty)$

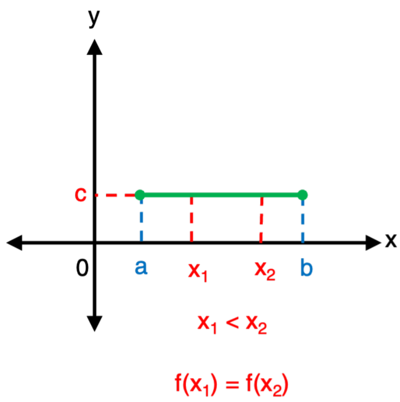
FONKSİYONUN ARTAN VEYA AZALAN OLDUĞU ARALIKLAR

f: [a, b] → ℝ olacak şekilde f(x) fonksiyonu tanımlanıyor. [a, b]'nda $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2$ iken

- $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f(x) fonksiyonu artandır,
- $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f(x) fonksiyonu azalandır,
- $f(x_1) = f(x_2)$ oluyorsa f(x) fonksiyonu sabittir.



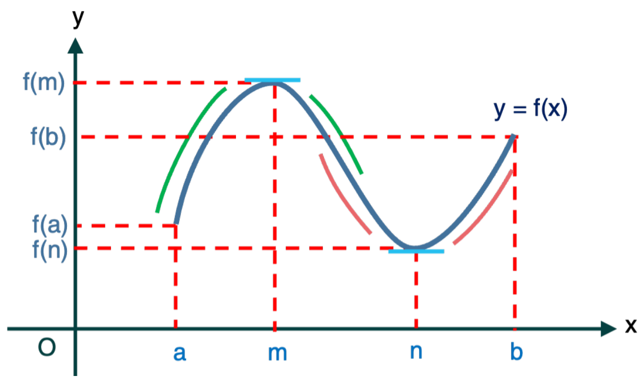




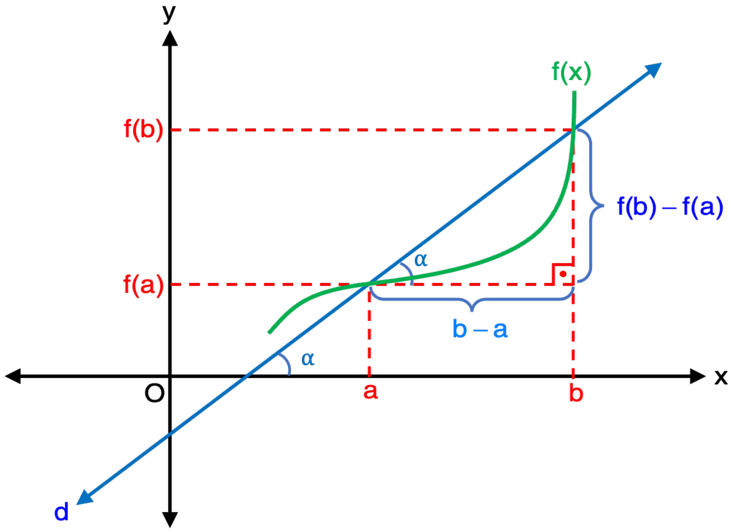
FONKSİYONUN MAKSİMUM VE MİNİMUM DEĞERLERİ

f: [a, b] → ℝ olacak şekilde f(x) fonksiyonu verilsin

- $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq f(n)$ olacak şekilde $n \in [a, b]$ sayısı varsa (n, f(n)) noktasına minimum nokta, f(n) değerine de f fonksiyonunun minimum değeri denir.
- $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq f(n)$ olacak şekilde $m \in [a, b]$ sayısı varsa (m, f(m)) noktasına maximum nokta, f(m) değerine de f fonksiyonunun maximum değeri denir.



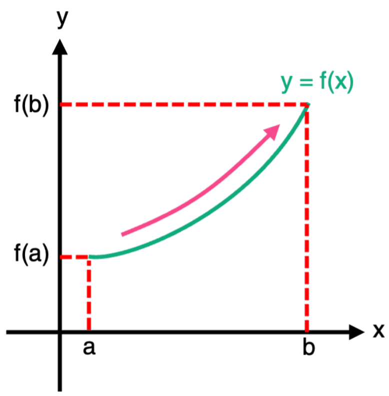
Bir f fonksiyonunun [a, b]'ndaki ortalama değişim hızı fonksiyonun grafiğini (a, f(a)) ve (b, f(b)) noktalarında kesen doğrunun eğimidir.



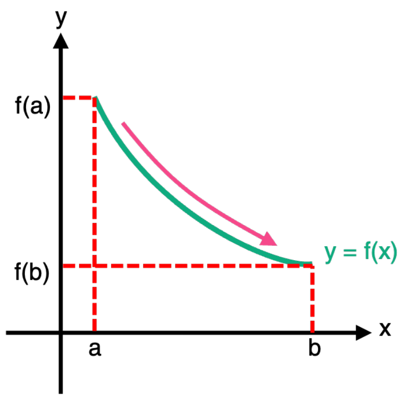
y = f(x) fonksiyonunun [a, b]'nda ortalama değişim hızı, d doğrusunun eğimine eşittir. O halde d doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α olmak üzere α açısının tanjant değeri doğrunun eğimine eşit ve dik üçgende bir açının tanjant değeri karşı dik kenar uzunluğunun komşu dik kenar uzunluğuna oranına eşit olduğundan;

Ortalama değişim hızı = $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olur.

f(x) = ax + b şeklindeki doğrusal fonksiyonların eğimi a olduğundan herhangi bir tanım aralığı için ortalama değişim hızı a'dır.



Artan fonksiyonların ortalama değişim hızı pozitiftir.

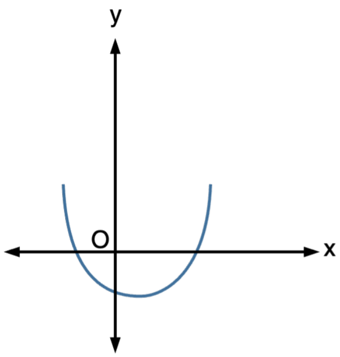


Azalan fonksiyonların ortalama değişim hızı negatiftir.

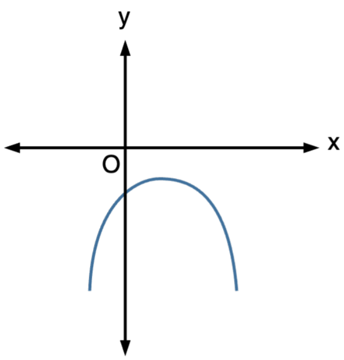
$a \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere gerçek sayılar kümesinde tanımlı, $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindeki fonksiyona **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon** denir.

$f = \{(x, y): y = ax^2 + bx + c\ ,\ a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları olan (x, y) ikililerine analitik düzlemde karşılık gelen noktaların oluşturduğu grafiğe **parabol** denir.

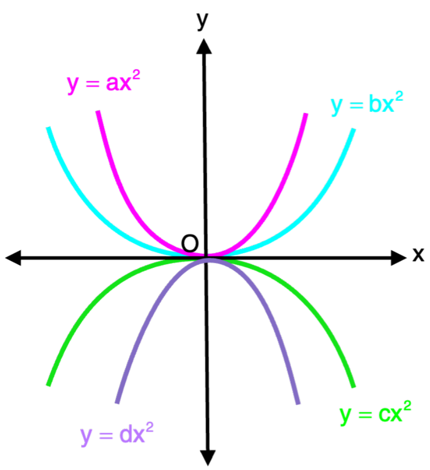
- $a > 0$ ise grafiğin kolları şekildeki gibi yukarı doğrudur.



- $a < 0$ ise grafiğin kolları şekildeki gibi aşağı doğrudur.



İpucu: $f(x) = ax^2$ parabolünün kolları, $|a|$ arttıkça birbirine yaklaşır.



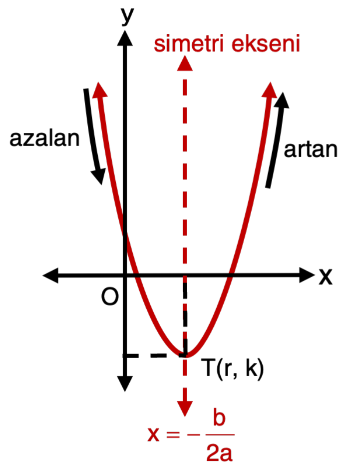
$d < c < b < a$

TEPE NOKTASI, SİMETRİ EKSENİ VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonun grafiğine **parabol** adı verilir.

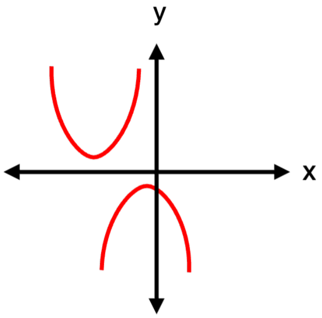
- Bir parabolün artanlıktan azalanlığa ya da azalanlıktan artanlığa geçtiği noktasına **tepe noktası** denir.
- Tepe noktasının koordinatları T(r, k) olarak isimlendirilir.
- x = r doğrusuna parabolün **simetri ekseni** denir.
- $r = -\dfrac{b}{2a}$ ve $k = f(r) \Rightarrow f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ olur.
- Parabolün **en büyük** ya da **en küçük** değeri k'dir.



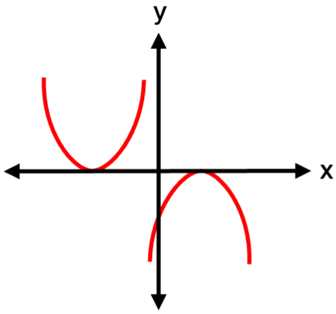
- $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere,

  $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülü ile bulunur.

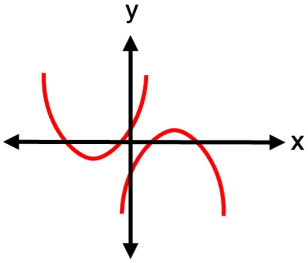
- $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar $f(x) = 0$ denkleminin kökleridir.

- 

  $\Delta < 0$ ise denklemin gerçek kökü yoktur ve parabol x eksenini kesmez.

- 

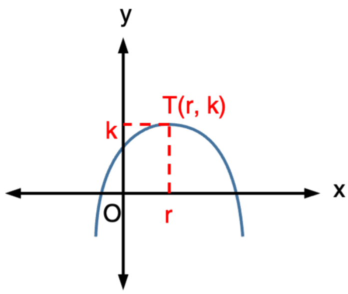
  $\Delta = 0$ ise denklemin eşit iki kökü vardır ve parabol x eksenine teğettir.

- 

  $\Delta > 0$ ise denklemin iki farklı reel kökü vardır ve parabol x eksenini iki noktada keser.

- $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası $T(r, k)$ ise

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a\cdot\left(x^2 + \dfrac{bx}{a} + \dfrac{c}{a}\right) \\[2ex] r = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow \dfrac{b}{a} = -2r \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = a\cdot\left(x^2 - 2rx + \dfrac{c}{a}\right)$$



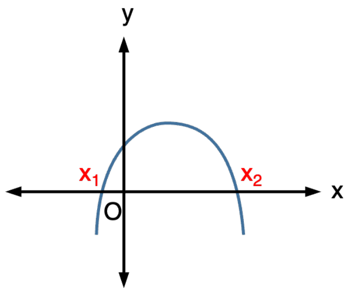
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a\cdot\left(x^2 - 2rx + \dfrac{c}{a}\right) \\[2ex] x^2 - 2rx + r^2 = (x-r)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = a\cdot\left((x-r)^2 - r^2 + \dfrac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\cdot\left((x-r)^2 - r^2 + \dfrac{c}{a}\right) \Rightarrow f(x) = a\cdot\left((x-r)^2 - \left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{c}{a}\right) \Rightarrow f(x) = a\cdot(x-r)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow f(x) = a\cdot(x-r)^2 + k$$

- $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a\cdot\left(x^2 + \dfrac{bx}{a} + \dfrac{c}{a}\right) \\[2ex] x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow \\[2ex] \dfrac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = a\cdot\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + \dfrac{c}{a}\right)$$

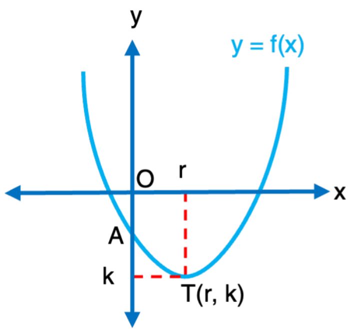


$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a\cdot\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + \dfrac{c}{a}\right) \\[2ex] x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = a\cdot\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1\cdot x_2\right) \Rightarrow f(x) = a\cdot\left(x^2 - x_1x - x_2x + x_1\cdot x_2\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a\cdot\left(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right) \Rightarrow f(x) = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$$

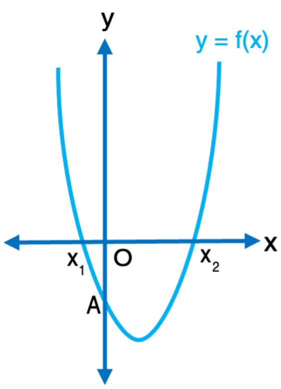
BAZI ELEMANLARI VERİLEN PARABOL DENKLEMİNİ YAZMA

- $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası $T(r, k)$ ve geçtiği bir A noktasının koordinatları verildiğinde



$f(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$ fonksiyonunun tepe noktasının koordinatları verildiğinden A noktasının koordinatları yerine yazılarak a değeri bulunarak parabolün denklemi yazılır.

- $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar x_1 ve x_2 ile fonksiyonunun geçtiği A noktası koordinatları verildiğinde



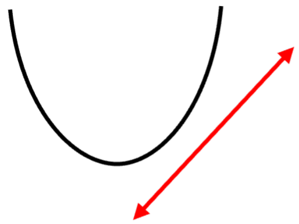
$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalarının koordinatları verildiğinden A noktasının koordinatları fonksiyonda yerine yazılarak a değeri bularak parabolün denklemi yazılır.

- $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun tepe noktası ve x eksenini kestiği noktalar dışında geçtiği herhangi üç nokta verildiğinde verilen noktalar fonksiyonu sağlayacağı için fonksiyonda yerine yazılarak üç bilinmeyenli üç denklem elde edilerek yok etme veya yerine koyma metodu kullanılarak fonksiyonun denklemi bulunur.

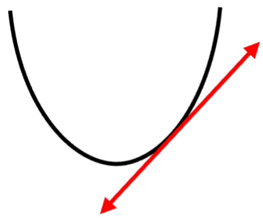
PARABOL İLE DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusu verilmiş olsun. (x, y) noktası parabol ve doğrunun ortak noktası ise nokta her iki denklemi sağlamalıdır. Her iki denklemi sağlayan x değerini bulmak için denklemler $ax^2 + bx + c = mx + n$ şeklinde eşitlenir. Elde edilen $ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$ ikinci derece denklemin diskriminantı Δ olsun.

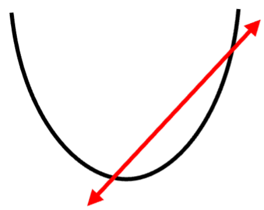
- $\Delta < 0$ ise parabol ile doğru kesişmez.



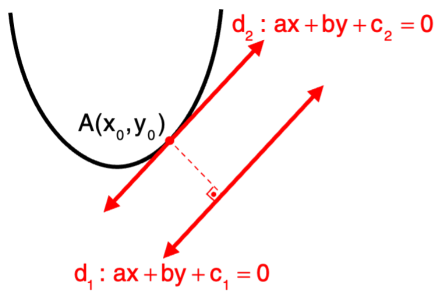
- $\Delta = 0$ ise parabol ile doğru yalnız bir noktada kesişir. (Doğru parabole teğettir.)



- $\Delta > 0$ ise parabol ile doğru farklı iki noktada kesişir.



- Bir parabolün dışındaki bir doğruya en yakın noktasını bulmak için verilen doğruya paralel ve parabole teğet bir doğru çizilerek çizilen doğru ile parabolün ortak noktalarının koordinatları bulunur.



- $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolüne orijinden çizilen teğetler birbirine dik ise $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi için, $\Delta = -1$,
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolüne parabolün x eksenini kestiği noktalardan çizilen teğetler birbirine dik ise $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi için $\Delta = 1$ olur.

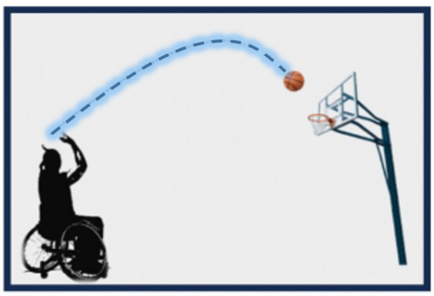
$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası $T(r, k)$ ise $r = -\dfrac{b}{2a}$ ve $k = f(r)$

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünde $a > 0$ ise en küçük değeri tepe noktasının ordinatıdır.

Asma köprülerin ana direkleri arasındaki halatlar $a > 0$ olan parabollere örnektir.

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünde $a < 0$ ise en büyük değeri tepe noktasının ordinatıdır.

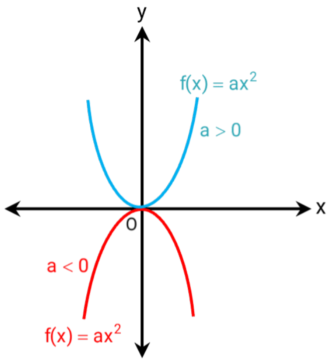
Su kemerlerin ayakları $a < 0$ olan parabollere örnektir. Diğer yandan parabollerin günlük hayatta birçok kullanım alanı vardır.



ÇİFT VE TEK FONKSİYONLAR

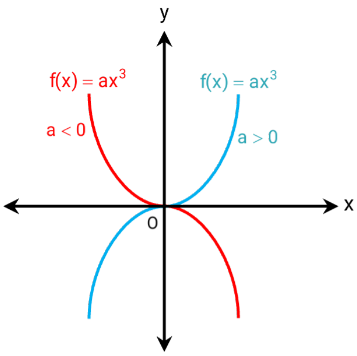
f(x) çift fonksiyon ise

- $f(-x) = f(x)$'dir.
- f(x) fonksiyonunda tek dereceli terim yoktur.
- f(x) fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir.



f(x) tek fonksiyon ise

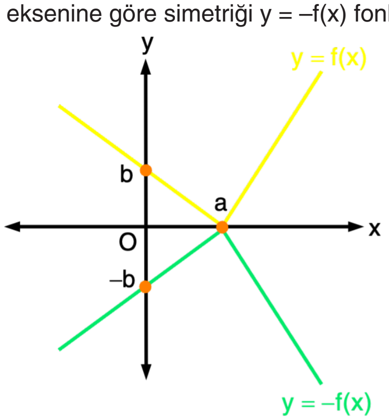
- $f(-x) = -f(x)$ dir.
- f(x) fonksiyonunda çift dereceli terim yoktur.
- f(x) fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.



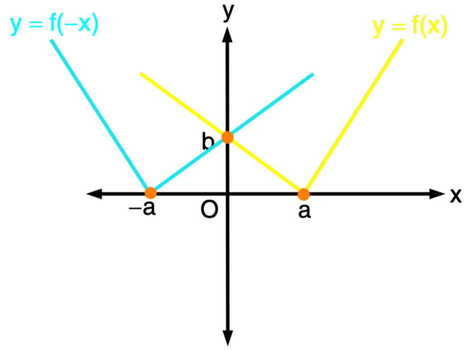
FONKSİYONLARDA SİMETRİ

y = f(x) fonksiyonunun,

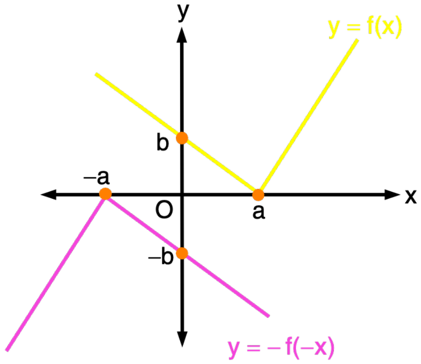
- x eksenine göre simetriği $y = -f(x)$ fonksiyonudur.



- y eksenine göre y = f(–x) simetriği



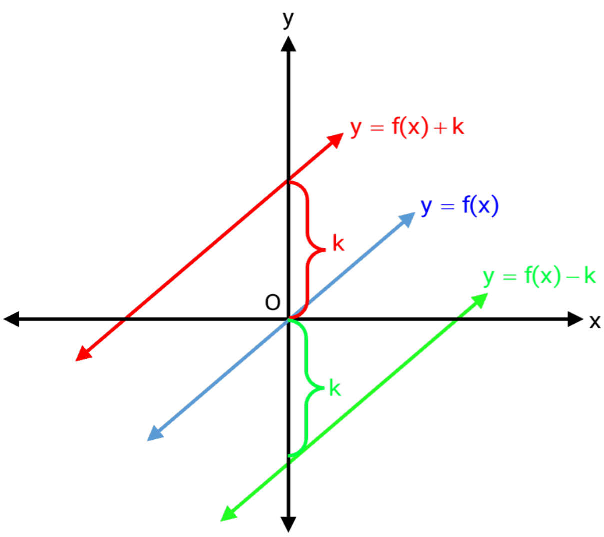
- orjine göre simetriği y = – f(–x) fonksiyonudur.



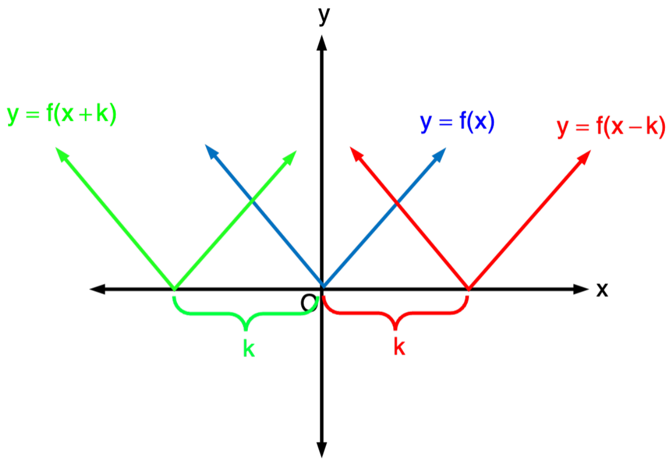
FOKSİYONLARDA ÖTELEME

k ∈ $\mathbb{R}^+$ olmak üzere y = f(x) fonksiyonunun

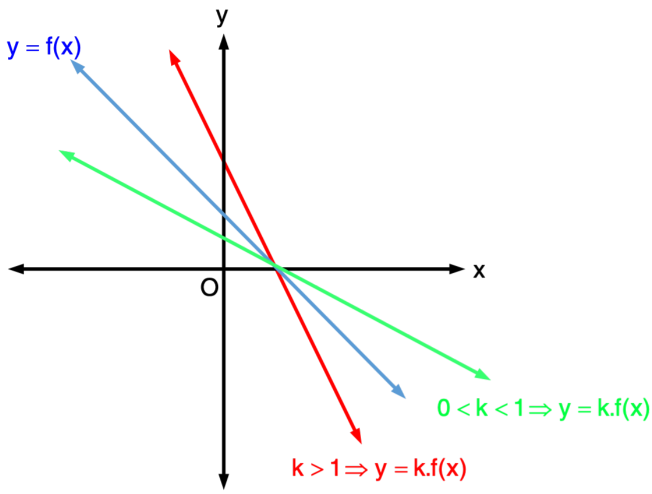
- y ekseni boyunca k birim yukarı ötelenmesi ile y = f(x) + k fonksiyonu,
- y ekseni boyunca k birim aşağı ötelenmesi ile y = f(x) – k fonksiyonu oluşur.



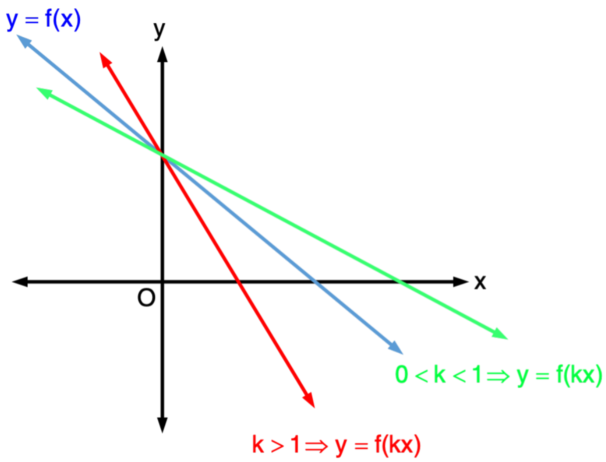
- x ekseni boyunca k birim sağa ötelenmesi ile y = f(x – k) fonksiyonu,
- x ekseni boyunca k birim sola ötelenmesi ile y = f(x + k) fonksiyonu oluşur.



- 0 < k < 1 ⇒ y = f·k(x) y = f(x) grafiğinin x eksenine göre dikey olarak açılması (gerilmesi) ile oluşur.
- k > 1 ⇒ y = k·f(x) grafiğinin x eksenine doğru dikey olarak sıkıştırılması (büzülmesi) ile oluşur.



- k > 1 ⇒ y = f(kx) y = f(x) fonksiyonunun grafiğinin y eksenine doğru yatay olarak daraltılması ile oluşur.
- 0 < k < 1 ⇒ y = f(kx) fonksiyonunun grafiğinin y ekseninden yatay olarak açılması ile oluşur.



İKİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMİ

a, b, c, d, e ve f birer gerçek sayı ve a, b, c sayılarından en az ikisi sıfırdan farklı olmak üzere,

$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir.

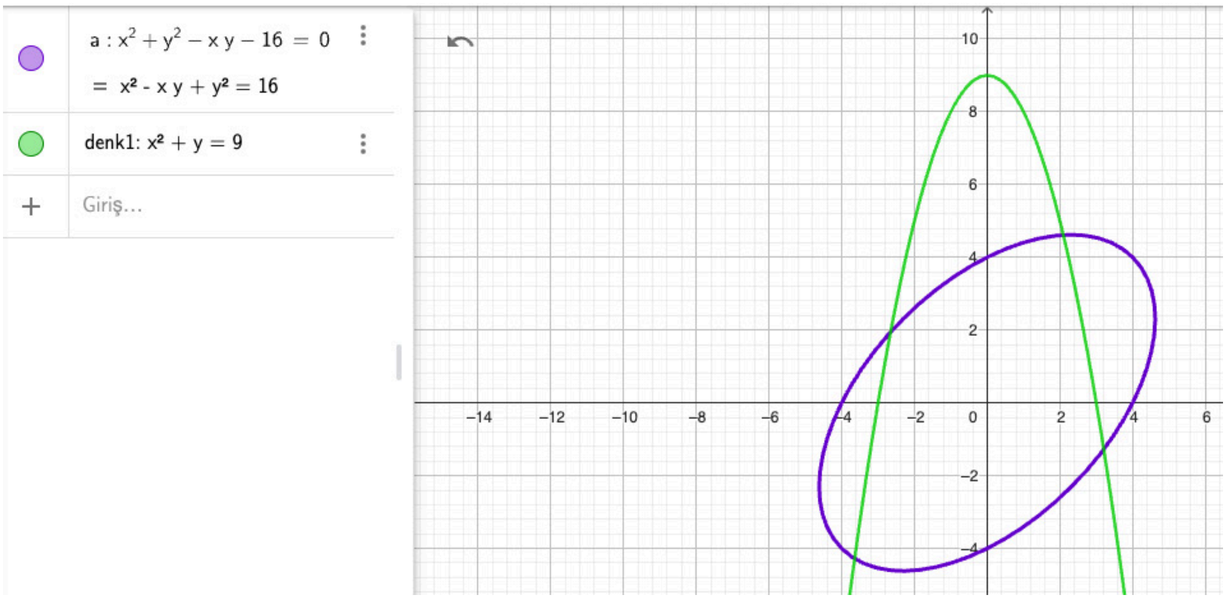
Denklem sistemini sağlayan (x, y) biçimindeki gerçek sayı ikilileri bu denklem sisteminin çözüm kümesini oluşturur.

İki bilinmeyen içeren en az birinin ikinci dereceden olduğu birden fazla denklemden oluşan sisteme ikinci dereceden **iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

İki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümesi bulunurken yerine koyma metodu veya yok etme metotları kullanılır.

Kökler, sistemi oluşturan bağıntıların grafiklerinin kesim noktalarıdır.

$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - xy - 16 = 0 \\ x^2 + y = 9 \end{array}\right\}$ grafik yardımıyla çözüm kümesini bulup yorumlayınız.



$x^2 + y^2 - xy - 16 = 0$ denkleminin grafiği ile $x^2 + y = 9$ denkleminin grafiği dört farklı noktada kesiştiğinden çözüm kümesi dört elemanlıdır.

İşaret Tablosu Yaparken Kullanılan Gösterimler

	Pay		Payda	
	Tek Kat	Çift Kat	Tek Kat	Çift Kat
Çözüm kümesine dahil	●	●●	○	○○
Çözüm kümesine dahil değil	○	○○	○	○○

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerin İşaret İncelemesi

$ax^2 + bx + c = 0$ denklemi için;

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a ile aynı işaretli	○	a ile ters işaretli	○	a ile aynı işaretli

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a ile aynı işaretli	○○	a ile aynı işaretli

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$

x	$-\infty$ gerçek kök yok $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a ile aynı işaretli

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Çözüm Kümesi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli fonksiyonu verilsin.

- $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ ve $f(x) \leq 0$ eşitsizliklerine **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

- $a \neq 0$ $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

  a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $ax^2 + bx + c > 0$ ise $a > 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.

  b) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $ax^2 + bx + c < 0$ ise $a > 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.

- Verilen eşitsizliği sağlayan x gerçek sayılarının kümesine eşitsizliğin **çözüm kümesi** denir.

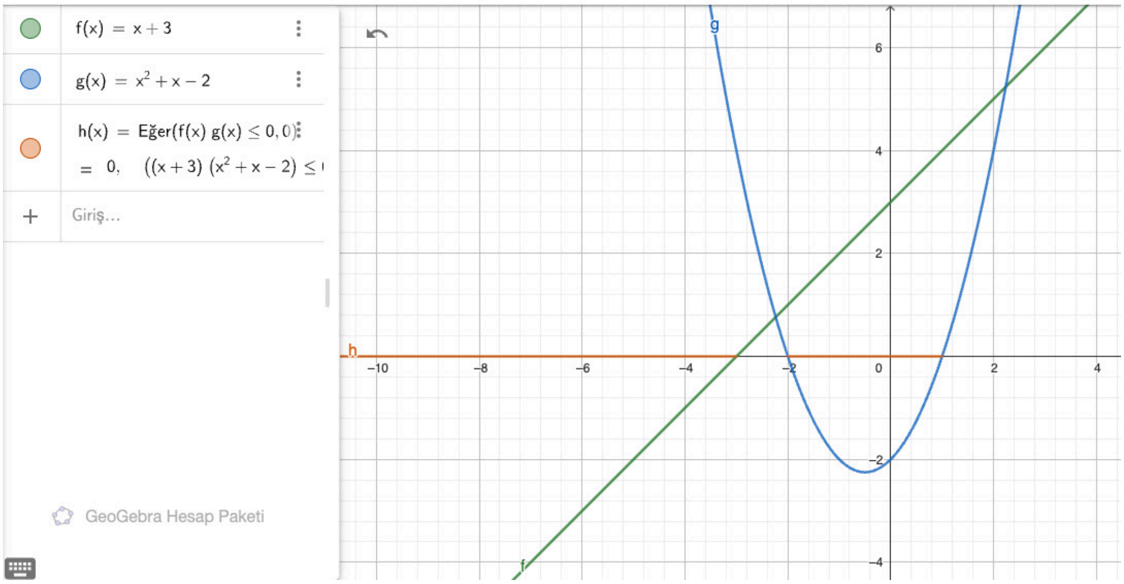
$f(x) \cdot g(x)$ veya $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ şeklinde iki ifadenin çarpımı veya bölümü şeklinde verilen eşitsizliklerin çözüm kümesi bulunurken,

- $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$ denklemlerinin kökleri bulunur ve kökler sayı doğrusuna yerleştirilir.
- $f(x)$ ve $g(x)$ polinom fonksiyonlarının en büyük dereceli terimlerinin katsayılarının işaretleri çarpılır. Bulunan işaret tablonun en sağındaki aralığın işaretidir.
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ifadesinde $g(x) = 0$ denkleminin kökleri çözüm kümesine dâhil edilmez.

$(x+3)(x^2+x-2) \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini geogebra yazılımında çizerek bulmak için,

Girişe $x + 3$ yazarak grafiği çiziniz. Girişe $x^2 + x - 2$ yazarak grafiği çiziniz. Çizilen grafiklerin cebirsel karşılığı cebir penceresinde sırayla $f(x)$ ve $g(x)$ olarak gözükecektir. Girişe eğer yazınız. Oluşan satırdaki şart doğruysa yerine sırasıyla $f * g \leq 0,0$ yazınız. Grafik ekranında bu eşitsizliğin çözüm kümesi farklı bir renkte görülecektir.

Eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty,-3] \cup [-2,1]$ olur ve $(-\infty,-3] \cup [-2,1]$ kümesindeki her x değeri için $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ olur.



İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİK SİSTEMİ

- İki veya daha fazla eşitsizliğin oluşturduğu sisteme **eşitsizlik sistemi** denir.

- Bir eşitsizlik sistemindeki tüm eşitsizlikleri sağlayan değerlerin kümesine eşitsizlik sisteminin **çözüm kümesi** denir.

- İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemleri, fonksiyonlardan en az birinin 2. dereceden, diğerinin 1 veya 2. dereceden verilmesiyle oluşan sistemlerdir.

- Bu sistemler,

  $\left.\begin{matrix} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} f(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{matrix}\right\}$ vb. şekilde ifade edilir.

- Bu şekildeki eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümeleri, ortak işaret tablosu oluşturulup eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimi alınarak bulunur.

  Örneğin,

  $\left.\begin{matrix} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{matrix}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

  $x^2 + 3x - 4 = 0$

  $\Rightarrow (x + 4) \cdot (x - 1) = 0$

  $\Rightarrow x = -4$ veya $x = 1$

  $x^2 - 2x - 3 = 0$

  $\Rightarrow (x + 1) \cdot (x - 3) = 0$

  $\Rightarrow x = -1$ veya $x = 3$

x	$-\infty$	-4	-1	1	3	∞
x^2+3x-4	+	−	−	+	+	
x^2-2x-3	+	+	−	−	+	

  Ç = [1, 3]

E eş olumlu örnek uzayında A ve B iki olay olsun. B olayının gerçekleşmiş olması hâlinde A olayının gerçekleşme olasılığına **A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı** denir ve P(A / B) ile gösterilir.

$P(B) > 0$ olmak üzere $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$ şeklindeki eşitliğe olasılıkta **çarpma kuralı** denir.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{s(A \cap B)}{s(E)}}{\frac{s(B)}{s(E)}} = \frac{s(A \cap B)}{s(E)} \cdot \frac{s(E)}{s(B)} \Rightarrow P(A/B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)}$$

P(A / B) hesaplanırken $P(A \cap B)$ ve P(B) hesaplanıp oranlanmasının yerine $\dfrac{s(A \cap B)}{s(B)}$ hesaplanması yeterlidir.

Örneğin; Aşağıdaki tabloda İngilizce kulübündeki 38 kişilik bir öğrenci grubunun dağılımı verilmiştir.

Tablo: İngilizce Kulübündeki Öğrenci Dağılımı

	10.Sınıf	11.Sınıf
Kız	10	6
Erkek	8	14

Gruptan rastgele bir öğrenci kulüp başkanı seçiliyor.

Seçilen öğrencinin erkek olduğu bilindiğine göre 10.sınıf öğrencisi olma olasılığını bulunuz?

Sorusunun çözümünde P(A / B) hesaplanırken

$P(A \cap B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(E)} = \dfrac{8}{38} = \dfrac{4}{19}$ ve $P(B) = \dfrac{s(B)}{s(E)} = \dfrac{22}{38} = \dfrac{11}{19}$ bulunup bu iki olasılık oranlanarak

$P(A/B)\ \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{4}{19}}{\frac{11}{19}} = \dfrac{4}{19} \cdot \dfrac{19}{11} = \dfrac{4}{11}$ bulunabileceği gibi

$P(A/B)\ \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)} = \dfrac{8}{22} = \dfrac{4}{11}$ şeklinde kolaylıkla da hesaplanabilir.

E örnek uzayının iki olayı A ve B olsun. A ile B olaylarından birinin gerçekleşmesi diğerinin gerçekleşmesini etkilemiyorsa bu olaylara **bağımsız olaylar** denir.

A ile B bağımsız olaylar olduğunda herhangi bir koşul altında birbirlerini etkilemezler.

Bu durumda P(A / B) = P(A) olur. Koşullu olasılığa göre

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

A ile B bağımsız olaylar ise

P(A ve B) için $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

P(A veya B) için $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

P(A ya da B) için $P(A\cap B') + P(B\cap A')$

BAĞIMLI OLAYLAR

E örnek uzayının iki olayı A ve B olsun. A ile B olaylarından birinin gerçekleşmesi diğerinin gerçekleşmesini etkiliyorsa bu olaylara **bağımlı olaylar** denir.

HATIRLATMA

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r'li kombinasyonlarının sayısı

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

şeklinde hesaplanır.

BİLEŞİK OLAYLARIN OLASILIĞI

Birden fazla basit olaydan oluşan olaylara **bileşik olaylar** denir. Bileşik olaylarda iki veya daha çok olay birlikte ya da birbiri ardınca gerçekleşir.

Örneğin

Bir zar arka arkaya iki defa atıldığında birincisinin asal sayı ikincisinin çift sayı gelmesi bileşik olaydır.

Özdeş topların bulunduğu A ve B torbalarından, A torbasından bir top çekip B torbasına atıp sonra da B torbasından bir top çekme olayı bileşik olaydır.

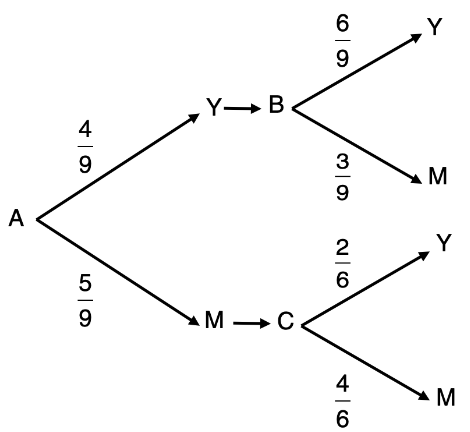
Bileşik olayların olasılığının hesaplanmasında ağaç diyagramı kullanımı işlem kolaylığı sağlamaktadır.

Örneğin;

Renkleri hariç özdeş toplar bulunan A torbasında 4 yeşil 5 mavi, B torbasında 6 yeşil 3 mavi top C torbasında 2 yeşil 4 mavi top vardır.

A torbasından rastgele bir top çekiliyor çekilen top yeşil ise B torbasından, çekilen top mavi ise C torbasından bir top çekiliyor.

Çekilen bilyenin yeşil olma olasılığını bulunuz?



$$\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{9}+\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{6}=\frac{8}{27}+\frac{5}{27}=\frac{13}{27}$$

Bir olayın gerçekleşme olasılığını olayla ilgili yapılan bir deneyin sonuçlarına göre hesaplamaya **deneysel olasılık** denir.

Hilesiz bir zarın 3 gelme olasılığı hesaplanmak İsteniyor. → Zar 100 kez atılıyor. → 37 kez 3 geliyor. → Zarın 3 gelme olasılığı $\frac{37}{100}$

Bir olasılık deneyinden teorik olarak beklenen olasılığa **teorik olasılık** denir. Deney yapmadan olasılık sonucunun hesaplanarak bulunduğu olasılık çeşididir.

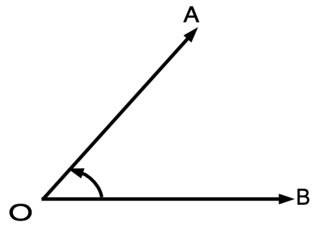
Örneğin;

Bir zar atılma deneyinde → zarın 6 yüzü olduğundan → üst yüze gelen sayının → 3 olma olasılığı $\frac{1}{6}$'dır.

BİLGİ: Deneysel olasılıktaki deneme sayısı artırıldığında sonucun teorik olasılığa yaklaştığı görülür.

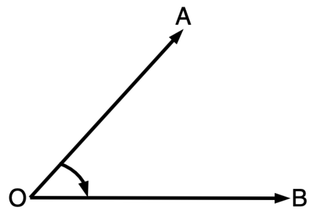
Kenarlarından biri başlangıç, diğeri bitiş kenarı olarak belirlenmiş açıya **yönlü açı** denir. Bir açı, kenarlarının yazılış sırasına göre iki farklı biçimde yönlendirilebilir.

- **Pozitif Yön**



Bu açı başlangıç kenarı üzerinden başlanarak ($\widehat{BOA}$) biçiminde gösterilir.

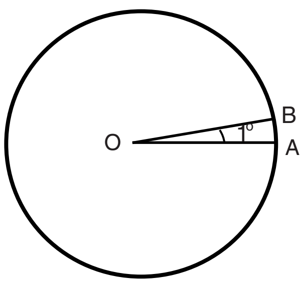
- **Negatif Yön**



Bu açı başlangıç kenarı üzerinden başlanarak ($\widehat{AOB}$) biçiminde gösterilir.

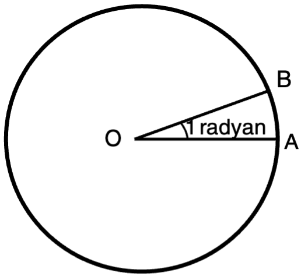
AÇI ÖLÇÜ BİRİMLERİ

Derece:



- Bir çemberin çevresinin 360 eş parçaya ayrılması ile elde edilen bir parçaya **1 derecelik yay** ve bu yayı gören merkez açıya **1 derecelik açı** denir. Bu açının ölçüsü 1° şeklinde gösterilir. Dakika ve saniye derecenin alt birimleridir.
- 1 derecenin $\frac{1}{60}$'ine **1 dakika** denir. 1 dakika 1' ile gösterilir. 1° = 60' olur.
- 1 dakikanın $\frac{1}{60}$'ine **1 saniye** denir. 1 dakika 1" ile gösterilir. 1' = 60" olur.

Radyan:



- Bir çemberin yarıçapı uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsüne **1 radyan** denir. Yanda verilen O merkezli çemberde AOB açısının ölçüsü 1 radyandır.
- Bir açının derece cinsinden ölçüsü D, radyan cinsinden ölçüsü R olmak üzere, $\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ olur.

ESAS ÖLÇÜ

- Bir tam çember yayını gören merkez açının ölçüsü 360°'dir.
- $k \in \mathbb{Z}$ ve $0 < \alpha < 360°$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k \cdot 360°$ olan bir açının esas ölçüsü α derecedir.
- $k \in \mathbb{Z}$ ve $0 < \alpha < 2\pi$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k \cdot 2\pi$ olan bir açının esas ölçüsü α radyandır.

NOT:

- Saatin dönme yönü açılar için negatif yön, saatin dönme yönünün tersi açılar için pozitif yöndür.
- Saniye cinsinden verilen değer 60'a bölünerek dakikaya çevrilirken kalan saniye, bulunan bölüm 60'a bölünerek dereceye çevrilirken kalan dakikaya eşittir.

Saniye | 60
-
Dakika

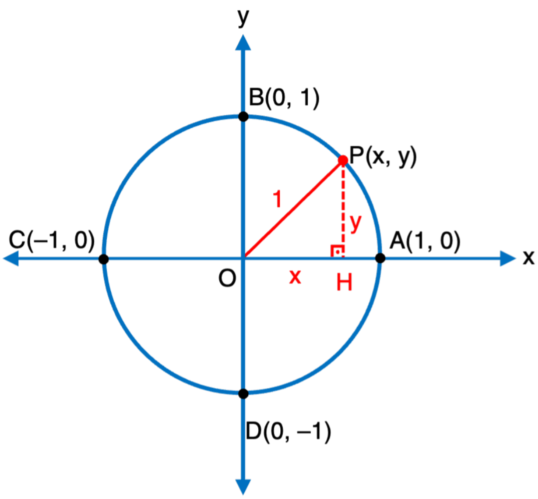
Kalan = saniye

Dakika | 60
-
Derece

Kalan = dakika

- Radyan cinsinden verilen açı ölçü birimini dereceye kolay yoldan çevirmek için $\frac{a\pi}{n}$ ifadesinde $\pi = 180°$ olduğundan π yerine 180° yazılabilir.
- Derece cinsinden verilen açı ölçü birimini radyana kolay yoldan çevirmek için $\frac{\pi}{180} = 1$ olduğundan verilen açı $\frac{\pi}{180}$ ile çarpılarak sadeleştirilebilir.

Tanım: Analitik düzlemde merkezi orijinde bulunan ve yarıçap uzunluğu 1 birim olan çembere **birim çember** denir.



POH dik üçgeninde Pisagor Bağıntısından $x^2 + y^2 = 1$ eşitliği elde edilir.

Birim çember üzerindeki her nokta $x^2 + y^2 = 1$ bağıntısını sağlar.

Örneğin;

$P(\frac{1}{\sqrt{2}}, a)$ noktası birim çember üzerinde olduğuna göre a'nın alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + a^2 = 1$$

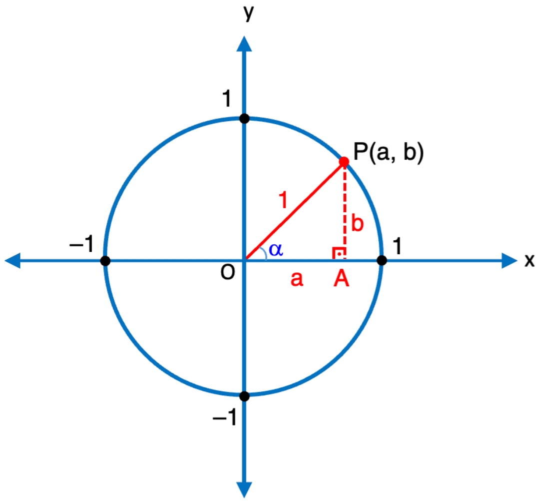
$$\Rightarrow \frac{1}{2} + a^2 = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 - \frac{1}{2}$$

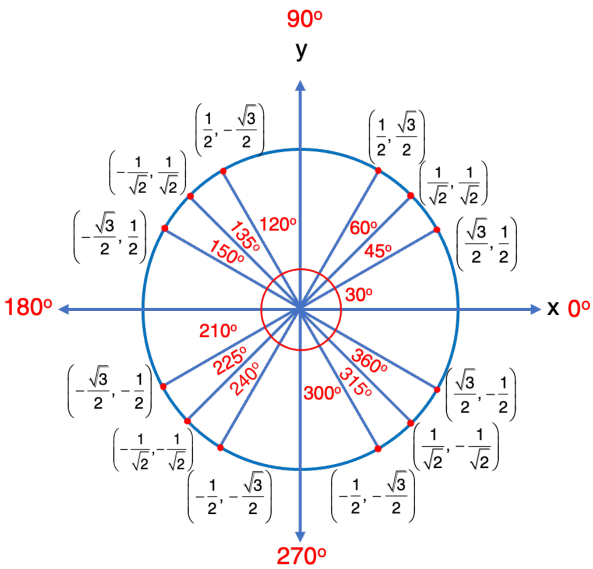
$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

O halde a'nın alabileceği değerler çarpımı $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$ olur.

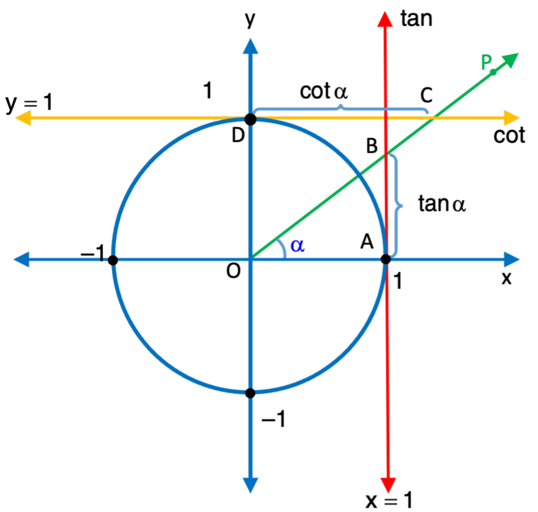
Birim çember üzerindeki P (a, b) noktasını birim çemberin merkezine birleştiren doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α olsun. P noktasından x eksenine indirilen dikmenin x eksenini kestiği nokta A olmak üzere,

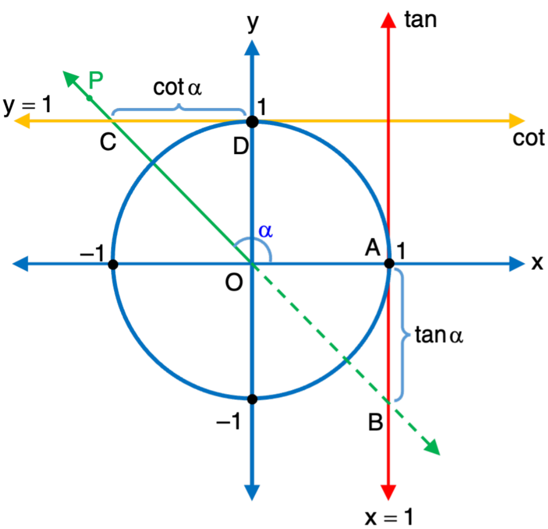


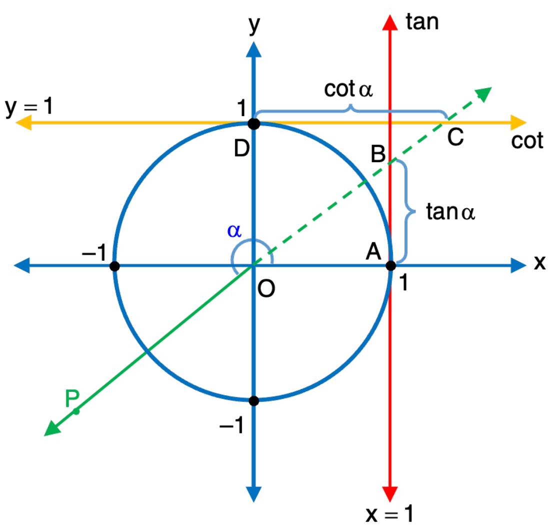
- Sinüs değeri, karşı dik kenar uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranı olduğundan
  $\sin\alpha = \dfrac{|PA|}{|OP|} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{b}{1} \Rightarrow b = \sin\alpha$ olur.
- Kosinüs değeri, komşu dik kenar uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranı olduğundan
  $\cos\alpha = \dfrac{|AO|}{|OP|} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{a}{1} \Rightarrow a = \cos\alpha$ olur.
- $a = \cos\alpha$ ve $b = \sin\alpha$ olduğundan $P(a, b) \Rightarrow P(\cos\alpha, \sin\alpha)$
- P noktası birim çember üzerinde olduğundan $a^2 + b^2 = 1$ denklemini sağlar o halde $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ olur.
- $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ için, $\cos: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ olduğundan α açısının kosinüsü $-1 \le \cos\alpha \le 1$ aralığında değerler alır.
- $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ için, $\sin: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ olduğundan α açısının sinüsü $-1 \le \sin\alpha \le 1$ aralığında değerler alır.

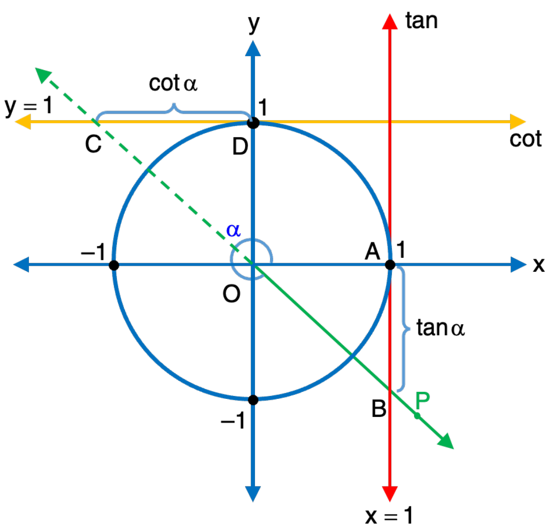


x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α olan [OP tanjant eksenini B noktasında, kotanjant eksenini C noktasında kesmektedir. Buna göre;



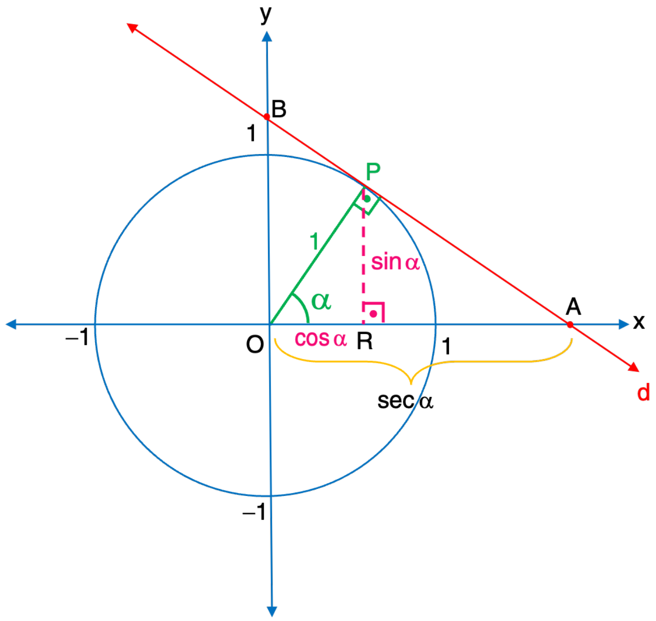






- B(1, tanα) $\Rightarrow$ |AB| = tanα
- f: $\mathbb{R} - \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \mathbb{R}$, f(x) = tanx
- C(cotα, 1) $\Rightarrow$ |CD| = cotα
- f: $\mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \mathbb{R}$, f(x) = cotx
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

Birim çember üzerindeki P noktasını birim çemberin merkezine birleştiren doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α ve d doğrusu P noktasında birim çembere teğet olmak üzere

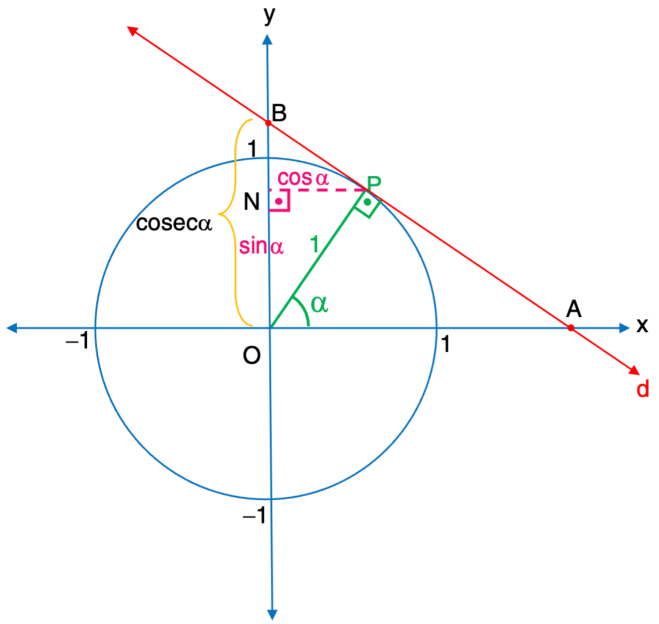


$$\widehat{OPR} \sim \widehat{OAP}$$

$$\frac{|OP|}{|OA|} = \frac{|OR|}{|OP|}$$

$$\frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Sekant fonksiyonunun tanım kümesi sec : $\mathbb{R} - \left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ görüntü kümesi $\mathbb{R} - (-1, 1)$ dir.



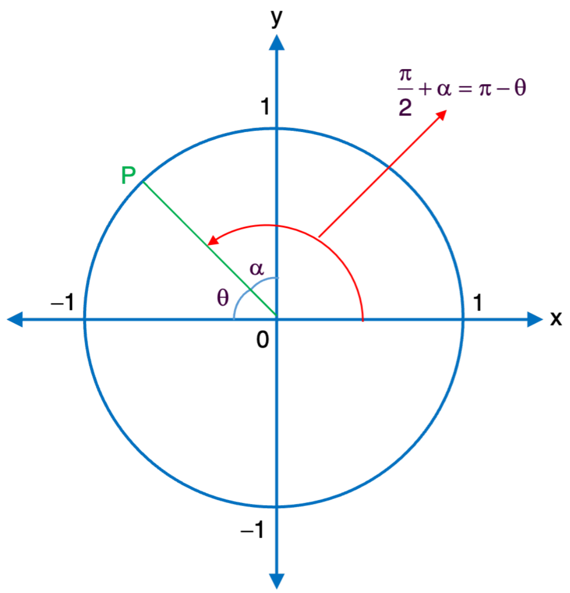
$$\widehat{OPN} \sim \widehat{OBP}$$

$$\frac{|OP|}{|OB|} = \frac{|ON|}{|OB|}$$

$$\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Kosekant fonksiyonunun tanım kümesi cosec : $\mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ görüntü kümesi $\mathbb{R} - (-1, 1)$'dir

- Birim çember üzerindeki P noktasını birim çemberin merkezine birleştiren doğrunun y ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α, x ekseni ile negatif yönde yaptığı açı θ olmak üzere



$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$

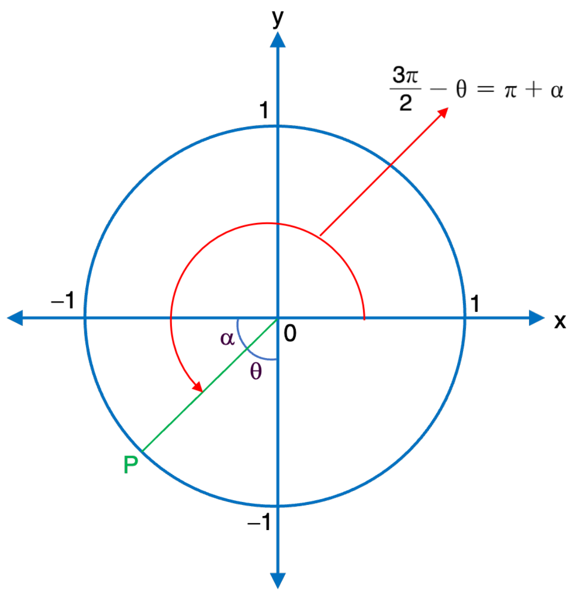
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

- Birim çember üzerindeki P noktasını birim çemberin merkezine birleştiren doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α, y ekseni ile negatif yönde yaptığı açı θ olmak üzere



$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$

$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

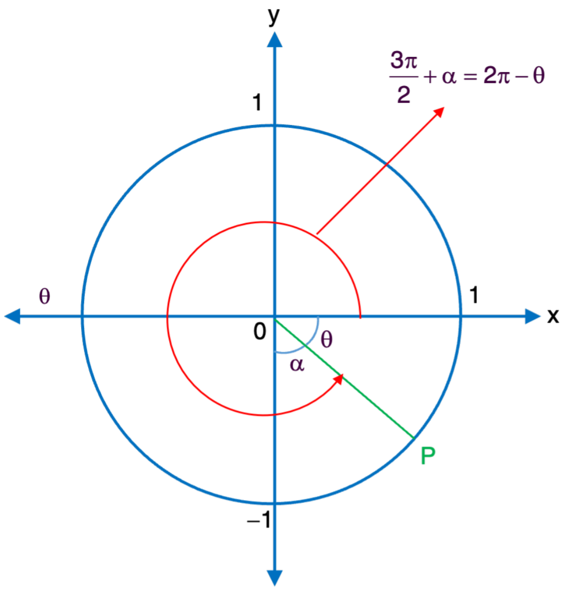
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cot\alpha$

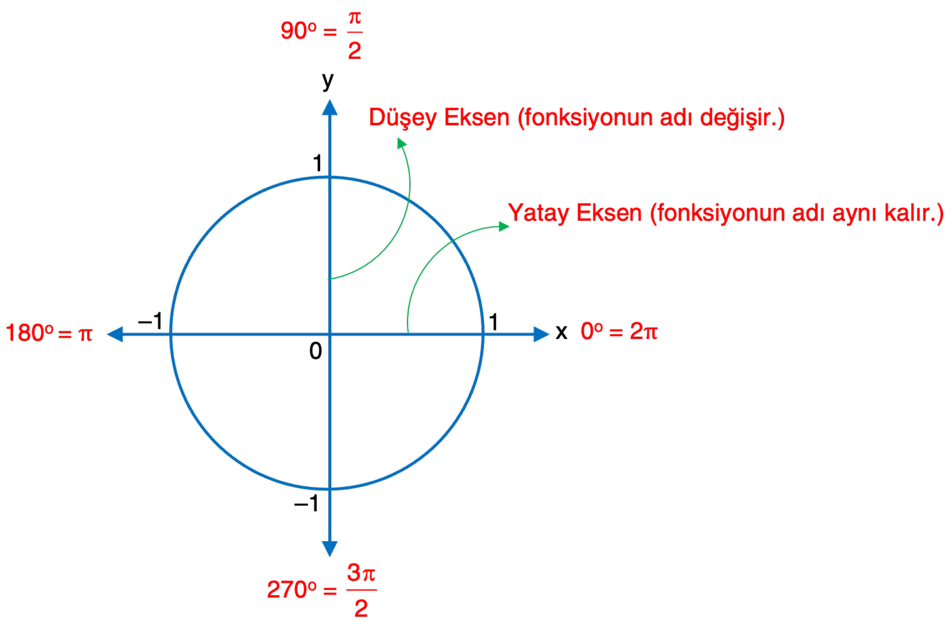
$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\tan\alpha$

- Birim çember üzerindeki P noktasını birim çemberin merkezine birleştiren doğrunun y ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α, x ekseni ile negatif yönde yaptığı açı θ olmak üzere



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

$$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$$

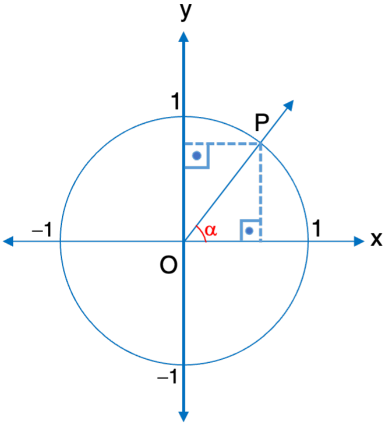


90° den büyük açıların trigonometrik değerleri bulunurken $0° < \alpha < 90°$ için

$\beta=\pi\mp\alpha$ ve $\beta=2\pi\mp\alpha$ şeklindeki ifadelerde önce açının bulunduğu bölge için trigonometrik fonksiyonun işareti yazılır daha sonra trigonometrik fonksiyon değiştirilmeden α türünden yazılır.

$\beta=\frac{\pi}{2}\mp\alpha$ ve $\beta=\frac{3\pi}{2}\mp\alpha$ şeklindeki ifadelerde önce açının bulunduğu bölge için trigonometrik fonksiyonun işareti yazılır daha sonra trigonometrik fonksiyon değiştirilerek α türünden yazılır. Trigonometrik fonksiyonlar arasındaki değişim $\cos\leftrightarrow\sin$, $\tan\leftrightarrow\cot$ ve $\sec\leftrightarrow\text{cosec}$ olacak şekilde yapılır.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İŞARETLERİ



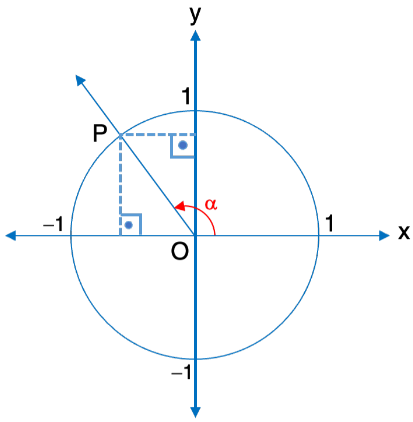
I.Bölge

cosα +

sinα +

tanα +

cotα +



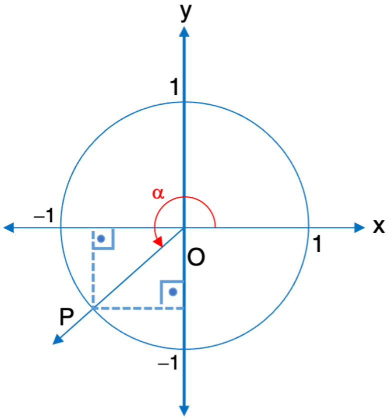
II.Bölge

cosα –

sinα +

tanα –

cotα –



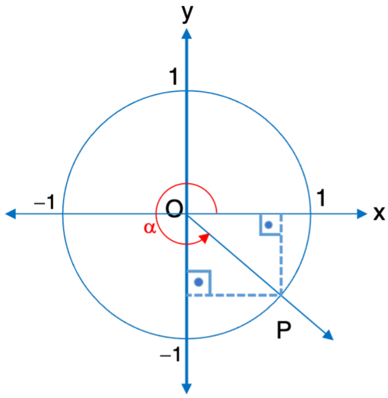
III.Bölge

cosα –

sinα –

tanα +

cotα +



IV.Bölge

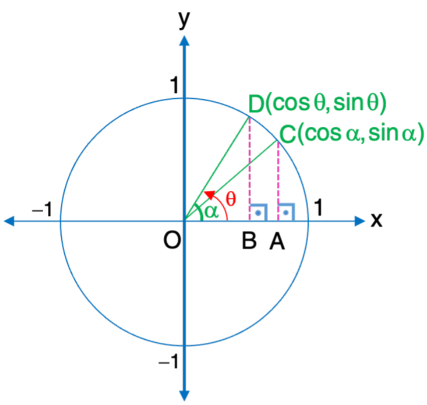
cosα +

sinα –

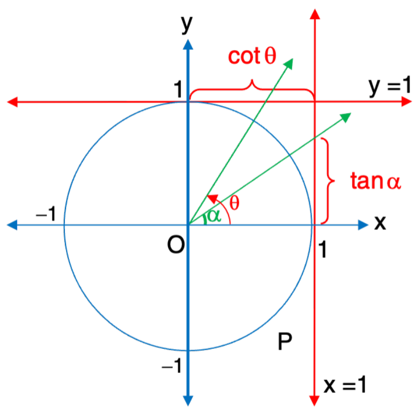
tanα –

cotα –

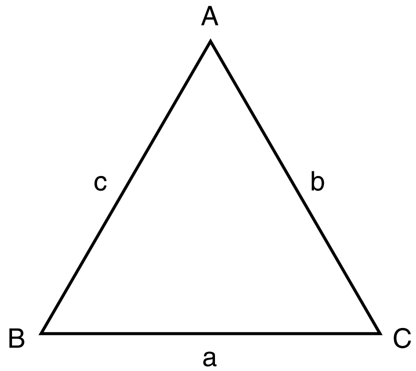
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN AÇI DEĞERLERİNE GÖRE SIRALANMASI



$$\alpha < \theta \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha < \sin\theta \\ \cos\alpha > \cos\theta \end{cases}$$



$$\alpha < \theta \Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha < \tan\theta \\ \cot\alpha > \cot\theta \end{cases}$$



ABC üçgeninde;

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\widehat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\widehat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\widehat{C}$

eşitlikleri sağlanır.

İSPAT: Verilen ABC üçgeninde [AC] ⊥ [BH] olacak şekilde [BH] çizilir. |BH| = h olsun. Buna göre,

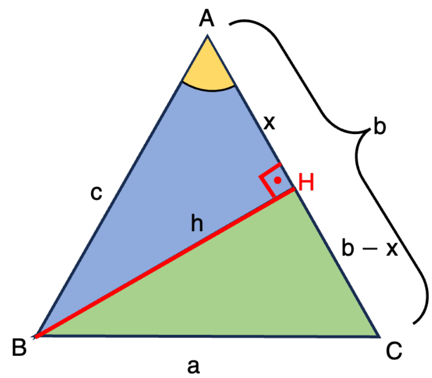
$c^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2$

$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - (b-x)^2$

$a^2 - (b-x)^2 = c^2 - x^2$

$a^2 - b^2 + 2bx - x^2 = c^2 - x^2$

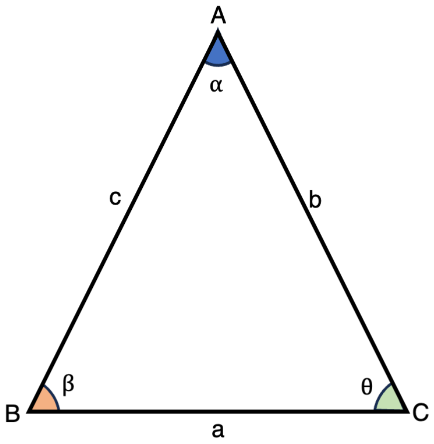
$a^2 = c^2 + b^2 - 2bx$ eşitliği elde edilir.



$\cos\widehat{A} = \dfrac{x}{c}$

$c \cdot \cos\widehat{A} = x$

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$ şeklinde verilen bir kosinüs teoreminde $\cos\alpha$ ifadesi eşitliğin bir tarafında yalnız bırakıldığında $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$ eşitliği elde edilir.

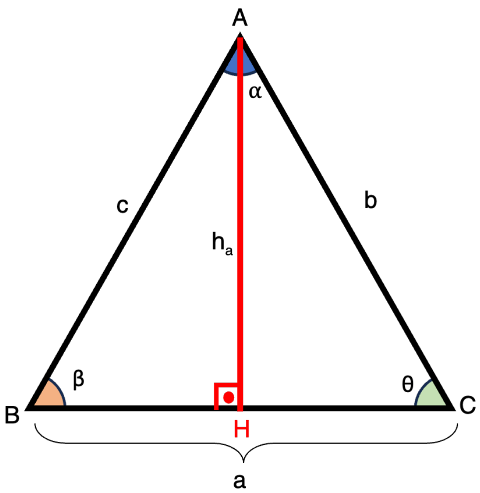


ABC üçgeninde;

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\theta}$$

eşitliği sağlanır.

İSPAT:



AHB dik üçgeninde $\sin\widehat{B}=\frac{h_a}{c} \Rightarrow c\cdot\sin\widehat{B}=h_a$

$A(\overset{\frown}{ABC})=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{a\cdot c\cdot\sin\widehat{B}}{2}$

Benzer şekilde $A(\overset{\frown}{ABC})=\frac{a\cdot b\cdot\sin\widehat{C}}{2}=\frac{c\cdot b\cdot\sin\widehat{A}}{2}$

Buradaki alan bağıntılarını birbirine eşitledikten sonra eşitliğin her tarafı a · b · c ifadesine bölünsün.

$$\frac{a\cdot c\cdot\sin\widehat{B}}{2\cdot a\cdot b\cdot c}=\frac{a\cdot b\cdot\sin\widehat{C}}{2\cdot a\cdot b\cdot c}=\frac{c\cdot b\cdot\sin\widehat{A}}{2\cdot a\cdot b\cdot c}$$

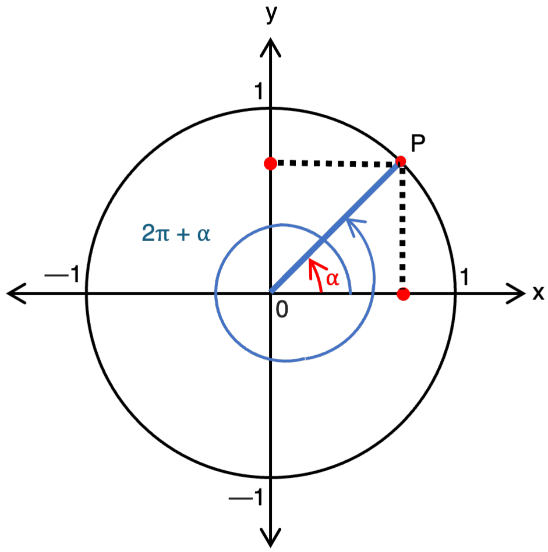
Bulunan ifadede gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$\frac{\sin\widehat{B}}{b}=\frac{\sin\widehat{C}}{c}=\frac{\sin\widehat{A}}{a}$$

$\Rightarrow \frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=\frac{a}{\sin\widehat{A}}$ şeklinde sinüs teoremi elde edilir.

f(x) fonksiyonunun tanım kümesindeki her x elemanı için f(x) = f(x + T) eşitliğini sağlayan $T \in \mathbb{R}^+$ varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, en küçük T sayısına bu fonksiyonun **periyodu** denir.

Periyot (T) aynı değerlerin tekrar ettiği en küçük aralıktır.

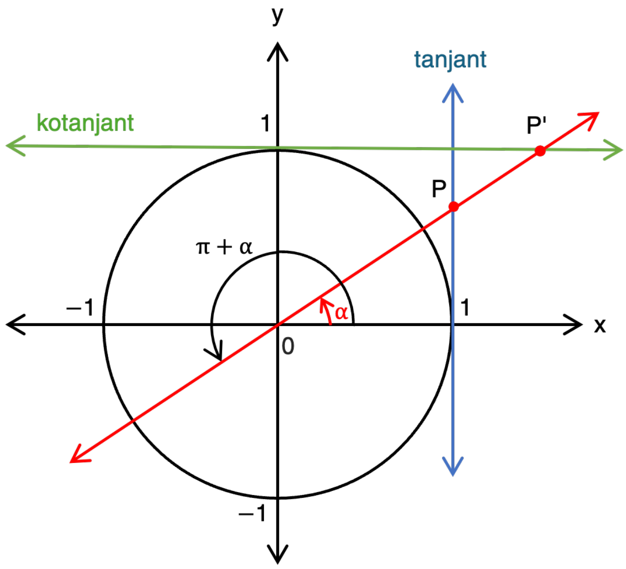


Birim çemberdeki α açısına 2π'nin katları eklendiğinde sinüs ve kosinüs değerleri değişmez.

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi \cdot k)$

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi \cdot k)$

Buna göre sinx ve cosx fonksiyonlarının periyodu 2π'dir.



Birim çemberdeki α açısına π'nin katları eklendiğinde tanjant ve kotanjant değerleri değişmez.

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\tan\alpha = \tan(\alpha + \pi \cdot k)$

$\cot\alpha = \cot(\alpha + \pi \cdot k)$

Buna göre tanx ve cotx fonksiyonlarının periyodu π'dir.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

sin(ax + b) + c ve cos(ax + b) + c fonksiyonlarının periyodu $\dfrac{2\pi}{|a|}$ olur.

tan(ax + b) + c ve cot(ax + b) + c ve fonksiyonlarının periyodu $\dfrac{\pi}{|a|}$ olur.

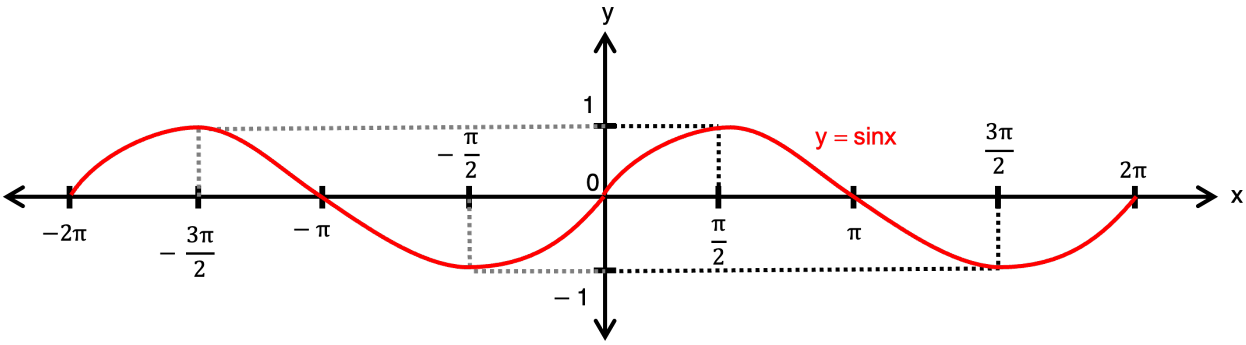
Sinüs Fonksiyonunun Grafiği:

f: $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, f(x) = sinx fonksiyonunun grafiği $\{(x, \sin x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesine analitik düzlemde karşılık gelen noktalar kümesidir.

$\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

$\sin(x + 2k \cdot \pi) = \sin x \quad \Rightarrow \quad$ Periyot = 2π

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	...
sinx	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0	...



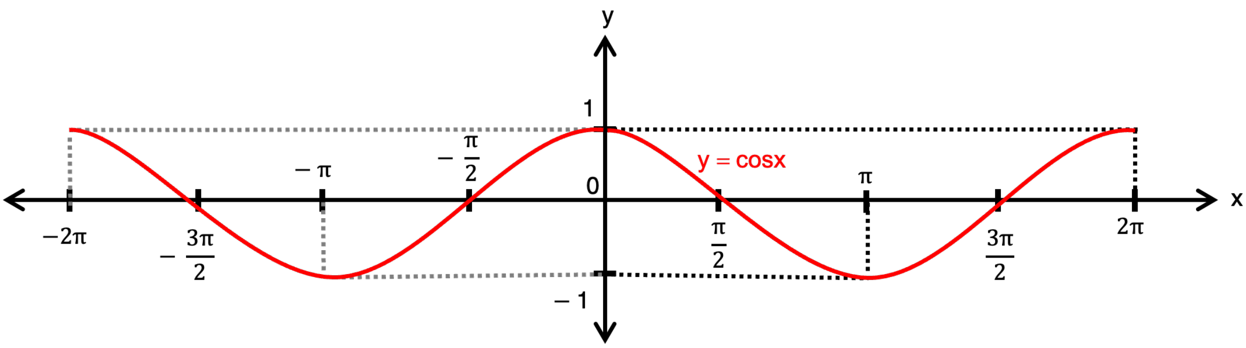
Kosinüs Fonksiyonunun Grafiği:

f: $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, f(x) = cosx fonksiyonunun grafiği $\{(x, \cos x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesine analitik düzlemde karşılık gelen noktalar kümesidir.

$\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

$\cos(x + 2k \cdot \pi) = \cos x \quad \Rightarrow \quad$ Periyot = 2π

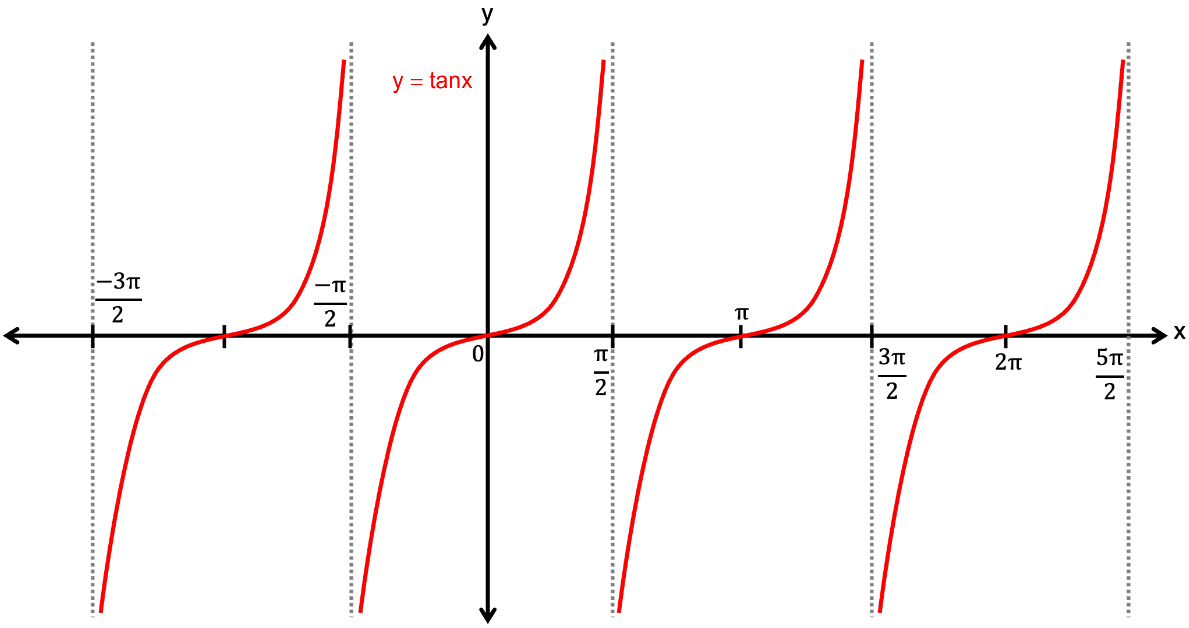
x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	...
cosx	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0	...



Tanjant Fonksiyonunun Grafiği:

$k \in \mathbb{Z}$ için f: $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, f(x) = tanx fonksiyonunun grafiği $\left\{(x, \tan x) : x \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right\}\right\}$ kümesine analitik düzlemde karşılık gelen noktalar kümesidir.

$\forall x \in \mathbb{R}\left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(x + k\cdot\pi) = \tan x$ $\Rightarrow$ Periyot $= \pi$

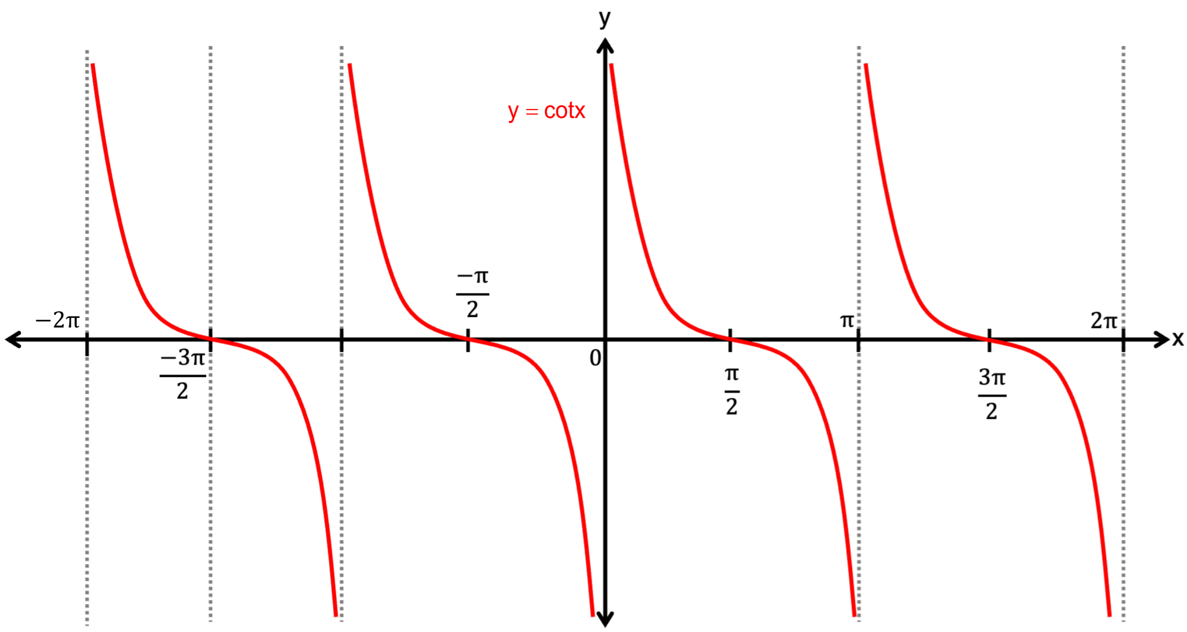


Kotanjant Fonksiyonunun Grafiği:

$k \in \mathbb{Z}$ için f : $\mathbb{R} - \{k \cdot \pi\} \to \mathbb{R}$, f(x) = cotx fonksiyonunun grafiği $\{(x, \cot x) : x \in \mathbb{R} - \{k \cdot x\}\}$ kümesine analitik düzlemde karşılık gelen noktalar kümesidir.

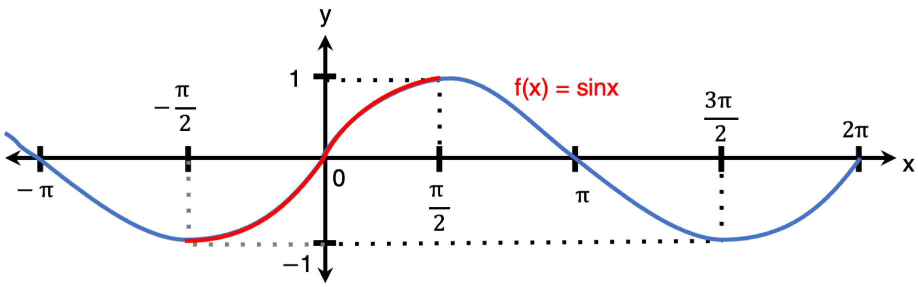
$\forall x \in \mathbb{R}, -\{k \cdot \pi\}, k \in \mathbb{Z}$

$\cot(x + k \cdot \pi) = \cot x$ $\Rightarrow$ Periyot $= \pi$



Sinüs Fonksiyonunun Tersi:

Sinüs fonksiyonunun bire bir ve örten olabilmesi için tanım kümesi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ve değer kümesi [–1, 1] olarak alınır.



O hâlde

$f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, $y = f(x) = \sin x$ fonksiyonu bire bir ve örtendir.

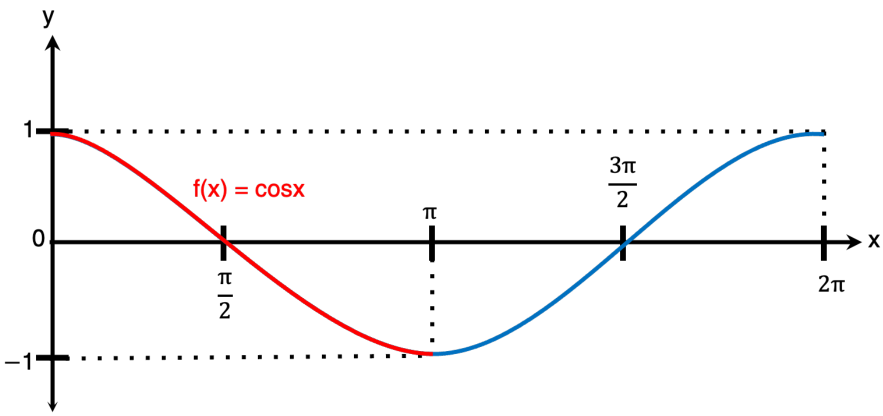
$f^{-1}:[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x) = \arcsin x$ fonksiyonuna **sinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir. $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$ olur.

Kosinüs Fonksiyonunun Tersi:

Kosinüs fonksiyonunun bire bir ve örten olabilmesi için tanım kümesi $[0, \pi]$ ve değer kümesi [–1, 1] olarak alınır.

O hâlde f: $[0, \pi] \to [-1, 1]$,

y = f(x) = cosx fonksiyonu bire bir ve örtendir.



$f^{-1}:[-1,1] \to [0,\pi]$, $f^{-1}(x) = \arccos x$ fonksiyonuna **kosinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir.
$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ olur.

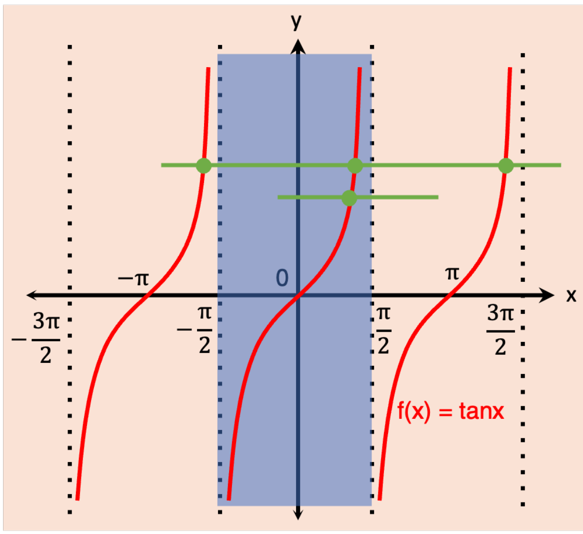
Tanjant Fonksiyonunun Tersi:

Tanjant fonksiyonunun bire bir ve örten olabilmesi için tanım kümesi $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olarak alınır.

O hâlde $f:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, y = f(x) = tanx fonksiyonu bire bir ve örtendir.

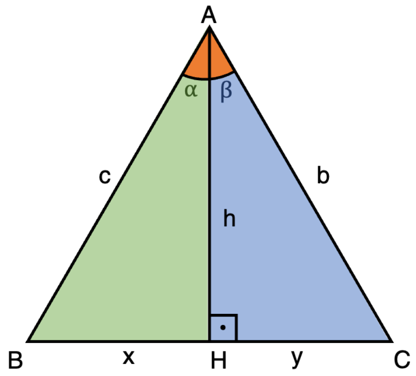
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f^{-1}(x) = \arctan x$ fonksiyonuna **tanjant fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir.

$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$ olur.



Kosinüs Fonksiyonunun Toplam - Fark Formülleri

Aşağıdaki ABC üçgeninde $\widehat{A}$'na göre kosinüs teoremi uygulansın.



$$\frac{h}{c} = \cos\alpha \qquad \frac{h}{b} = \cos\beta$$

$$\frac{x}{c} = \sin\alpha \qquad \frac{y}{b} = \sin\beta$$

$$m(\widehat{A}) = \alpha + \beta \Rightarrow (x+y)^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

$$2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha+\beta) = b^2 + c^2 - (x+y)^2$$

$$2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha+\beta) = b^2 + c^2 - x^2 - 2\cdot x\cdot y - y^2$$

$$2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha+\beta) = \underbrace{b^2 - y^2}_{h^2} + \underbrace{c^2 - x^2}_{h^2} - 2\cdot x\cdot y$$

$$2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha+\beta) = 2\cdot h^2 - 2\cdot x\cdot y$$

$$\frac{2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha+\beta)}{2\cdot b\cdot c} = \frac{2\cdot(h^2 - x\cdot y)}{2\cdot b\cdot c} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{h^2}{b\cdot c} - \frac{x\cdot y}{b\cdot c}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \underbrace{\frac{h}{c}\cdot\frac{h}{b}}_{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \underbrace{\frac{x}{c}\cdot\frac{y}{b}}_{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Buna göre $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$ kosinüs toplam formülü elde edilir.

Bulunan eşitlikte β yerine $-\beta$ yazıldığında,

$\cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cdot\underbrace{\cos(-\beta)}_{\cos\beta} - \sin\alpha\cdot\underbrace{\sin(-\beta)}_{-\sin\beta}$ olduğundan

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$ kosinüs fark formülü elde edilir.

Sinüs Fonksiyonunun Toplam - Fark Formülleri

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$ formülünde α yerine $\frac{\pi}{2}-\alpha$ yazalım.

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta$$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$ sinüs fark formülü elde edilir.

Bulunan eşitlikte β yerine $-\beta$ yazıldığında,

$\sin(\alpha-(-\beta)) = \sin\alpha\cdot\cos(-\beta) - \cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$ sinüs toplam formülü elde edilir.

α ve β gibi iki açının toplamının tanjantı

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$ tanjant toplam formülü elde edilir.

Bu formülde β yerine $-\beta$ yazılsın. Buna göre

$$\tan(\alpha+(-\beta))=\frac{\tan\alpha+\overbrace{\tan(-\beta)}^{-\tan\beta}}{1-\tan\alpha\cdot\underbrace{\tan(-\beta)}_{-\tan\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$ tanjant fark formülü elde edilir.

α ve β gibi iki açının toplamının kotanjantı

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$ kotanjant toplam formülü elde edilir.

Bu formülde β yerine $-\beta$ yazılsın. Buna göre

$$\cot(\alpha+(-\beta))=\frac{\cot\alpha\cdot\overbrace{\cot(-\beta)}^{-\cot\beta}-1}{\cot\alpha+\underbrace{\cot(-\beta)}_{-\cot\beta}}$$

$$=\frac{-\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha-\cot\beta}=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$ kotanjant fark formülü elde edilir.

Sinüs Fonksiyonunun İki Kat Açı Formülleri

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ şeklinde bilinen sinüs toplam formülünde β yerine α yazılsın. Buna göre,

$\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ şeklinde sinüs iki kat açı formülü elde edilir.

Kosinüs Fonksiyonunun İki Kat Açı Formülleri

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$ şeklinde bilinen sinüs toplam formülünde β yerine α yazılsın. Buna göre,

$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \sin\alpha \Rightarrow \cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ şeklinde kosinüs iki kat açı formülü elde edilir.

Şimdi daha önceden bildiğimiz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ eşitliğini ele alalım. Bu eşitlikte $\cos^2\alpha$ ve $\sin^2\alpha$ ifadelerini yalnız bıraktığımızda sırasıyla $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ … (1) ve $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ … (2) eşitlikleri elde edilir.

Kosinüs iki kat açı formülünde (1) eşitliğine göre $\cos^2\alpha$ yerine $1 - \sin^2\alpha$ yazdığımızda

$\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ elde edilir.

Benzer şekilde kosinüs iki kat açı formülünde (2) eşitliğine göre $\sin^2\alpha$ yerine $1 - \cos^2\alpha$ yazdığımızda

$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \Rightarrow \cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ elde edilir.

Bulunanları kısaca özetlemek gerekirse herhangi bir α açısı için;

- $\sin2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
- $\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

eşitlikleri sağlanır.

Ek olarak herhangi bir α açısı için $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha$ açılımının sağlandığı bilinmektedir. Burada $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ve $\sin2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ olduğundan $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin2\alpha$ eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin2\alpha$ eşitliği sağlanır.

Kosinüs iki kat açı formüllerinde iki kare farkı açılımı yapıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\cos\alpha - \sin\alpha)\cdot(\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \left(1 - \sqrt{2}\sin\alpha\right)\cdot\left(1 + \sqrt{2}\sin\alpha\right)$$

$$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \left(\sqrt{2}\cos\alpha - 1\right)\cdot\left(\sqrt{2}\cos\alpha + 1\right)$$

Tanjant Fonksiyonunun İki Kat Açı Formülleri

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ şeklinde bilinen tanjant toplam formülünde β yerine α yazılsın. Buna göre,

$\tan(\alpha+\alpha)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}\Rightarrow \boxed{\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$ şeklinde tanjant iki kat açı formülü elde edilir.

Kotanjant Fonksiyonunun İki Kat Açı Formülleri

$\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$ şeklinde bilinen tanjant toplam formülünde β yerine α yazılsın. Buna göre,

$\cot(\alpha+\alpha)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\alpha-1}{\cot\alpha+\cot\alpha}\Rightarrow \boxed{\cot2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}}$ şeklinde kotanjant iki kat açı formülü elde edilir.

Ek olarak elde edilen tanjant iki kat açı formülünün paydasında iki kare farkı açılımı yapıldığında herhangi bir α açısı için $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}$ eşitliği sağlanır. Şimdi bu eşitliğin sağlandığını farklı bir yolla gösterelim.

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}=\frac{2\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\left(1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}=\frac{2\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{2\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}}{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^{\cancel{2}}\alpha}}$$

$$=\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\tan2\alpha$$

Benzer şekilde kotanjant iki kat açı formülünün payında iki kare farkı açılımı yapıldığında herhangi bir α açısı için $\cot2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}=\dfrac{(\cot\alpha-1)(\cot\alpha+1)}{2\cot\alpha}$ eşitliği sağlanır. Şimdi bu eşitliğin sağlandığını farklı bir yolla gösterelim.

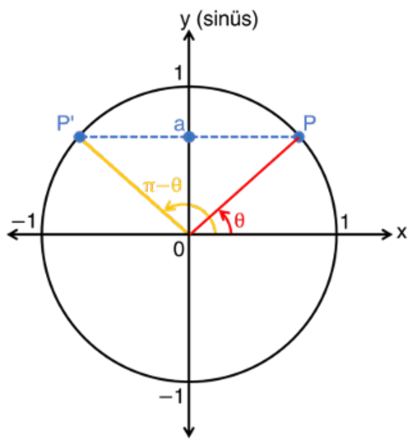
$$\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}=\frac{(\cot\alpha-1)(\cot\alpha+1)}{2\cot\alpha}=\frac{\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-1\right)\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+1\right)}{2\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}}{2\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^{\cancel{2}}\alpha}}{2\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\cot2\alpha$$

İçinde bilinmeyenin trigonometrik fonksiyonları bulunan, bilinmeyenin bazı değerleri için doğru olan eşitliklere **trigonometrik denklem** denir.

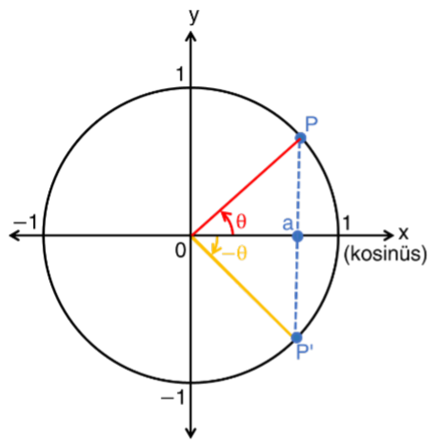
Denklemi sağlayan değerlere denklemin **kökleri**, köklerin oluşturduğu kümeye **çözüm kümesi** denir.



sinx = a denkleminin Çözüm Kümesi

$a \in [-1, 1]$ olmak üzere sinx = a denklemini $[0, 2\pi)$'nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi:

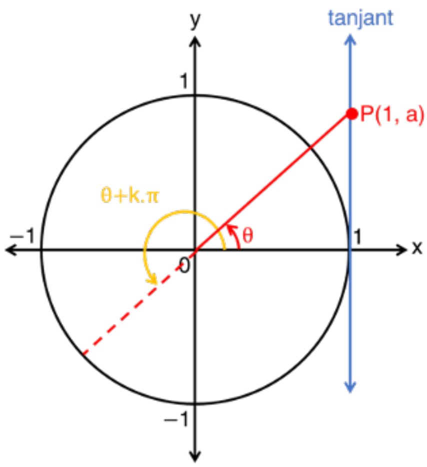
$Ç = \{x \mid x = \theta + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \theta + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$



cosx = a denkleminin Çözüm Kümesi

$a \in [-1, 1]$ olmak üzere cosx = a denkleminin $[0, 2\pi)$'nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi:

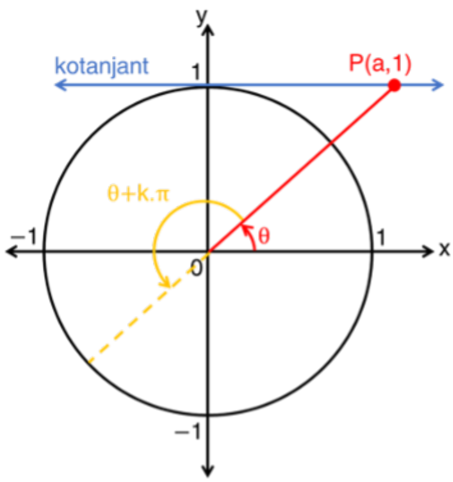
$Ç = \{x \mid x = \theta + k \cdot 2\pi \vee x = -\theta + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$



tanx = a denkleminin Çözüm Kümesi

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere tanx = a denkleminin $[0, 2\pi)$'nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi:

$Ç = \{x \mid x = \theta + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$



cotx = a denkleminin Çözüm Kümesi

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere cotx = a denkleminin $[0, 2\pi)$ 'nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi:

$Ç = \{x \mid x = \theta + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$

sinx ve cosx'e Göre Lineer (Doğrusal) Denklemler

$a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ biçimindeki denklemlere **sin x** ve **cos x'e göre lineer (doğrusal) denklem** adı verilir. Bu denklemin çözümü için öncelikle verilen denklemde eşitliğin her iki tarafı a ile bölünür.

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \Rightarrow \sin x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$$

Daha sonra $\frac{b}{a} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ olacak şekilde yerine yazılır.

$$\Rightarrow \sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sin x \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos x}{\cos\alpha} = \frac{c}{a}$$

Eşitliğin her iki tarafı $\cos\alpha$ ile çarpılır.

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos\alpha$$

Burada eşitliğin sol tarafı sinüs toplam formülünün açılımı olduğundan $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cdot \cos\alpha$ elde edilir. Sinüs fonksiyonunun değer kümesi $[-1, 1]$ olduğundan $-1 \leq \frac{c}{a} \cdot \cos\alpha \leq 1$ olmalıdır. Buna göre denklemin çözülebilmesi için bu eşitsizlik sağlanmalıdır. Bu eşitsizliğin her tarafının karesi alındığında $0 \leq \frac{c^2}{a^2} \cdot \cos^2\alpha \leq 1$ elde edilir. Buradaki $\frac{c^2}{a^2} \cdot \cos^2\alpha \leq 1$ ifadesi düzenlendiğinde $c^2 \leq \frac{a^2}{\cos^2\alpha}$ bulunur. $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ olduğundan $c^2 \leq a^2 + (1 + \tan^2\alpha)$ olacaktır.$\tan\alpha = \frac{b}{a}$ olduğundan bulunan eşitlikte yerine yazıldığında $c^2 \leq a^2 \cdot \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$ eşitsizliği elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde $c^2 \leq a^2 + b^2$ bulunur. Bu eşitsizliğin sağlanması durumunda denklemin çözüm kümesi bulunabilir, sağlanmaması durumunda çözüm kümesi Ø olur.

Birinci Dereceden Homojen Trigonometrik Denklemler

$a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere biçimindeki denklemlere **birinci dereceden homojen trigonometrik denklem** adı verilir. Bu denklemin çözümü için öncelikle verilen denklemde $\cos x \neq 0$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafı cosx ile bölünür ve gerekli sadeleştirmeler yapılır.

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + b \cdot \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + b \cdot \underbrace{\frac{\cos x}{\cos x}}_{\tan x} = 0 \Rightarrow a \cdot \tan x + b = 0 \text{ elde edilir.}$$

Bulunan denklemde tanx yalnız bırakıldığında $\tan x = -\frac{b}{a}$ bulunur.

Buna göre birinci dereceden homojen trigonometrik denklem $\tan x = -\frac{b}{a}$ denklemine dönüştürülerek çözüm yapılır.

Üstel Fonksiyonun Tanımı

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ biçiminde tanımlanan fonksiyonlara **üstel fonksiyon** adı verilir.

$a \in \mathbb{R}^-$ için $f(x) = a^x$ gerçek sayılar kümesinde bir fonksiyon belirtmez. Bu yüzden;

- Üstel fonksiyonda taban negatif olmalıdır.
- Üstel fonksiyonda taban 0 veya 1 olmamalıdır.

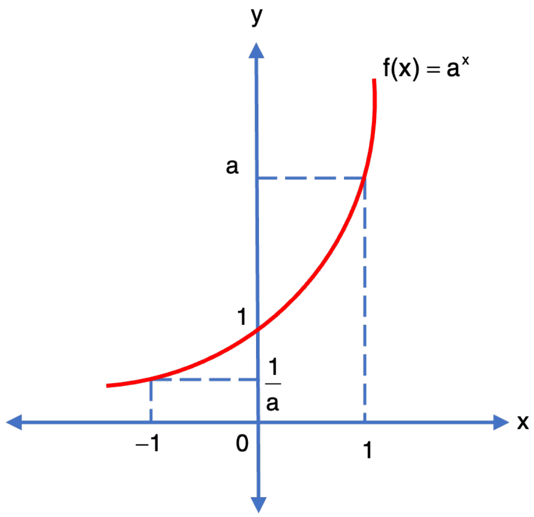
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ biçiminde tanımlanan üstel fonksiyonlarda, $f(0) = 1$'dir. Bu yüzden üstel fonksiyonların grafikleri y eksenini (0, 1) noktasında keser.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tanımlı üstel fonksiyonlar, birebir ve örtendir. Bu yüzden ters fonksiyonları tanımlı olup, logaritma fonksiyonu belirtmektedir.

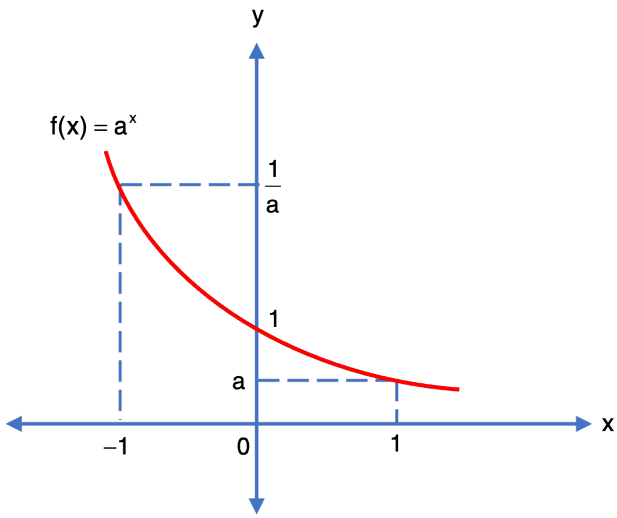
Üstel Fonksiyonun Grafiği

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna ait grafikler aşağıda verilmiştir.

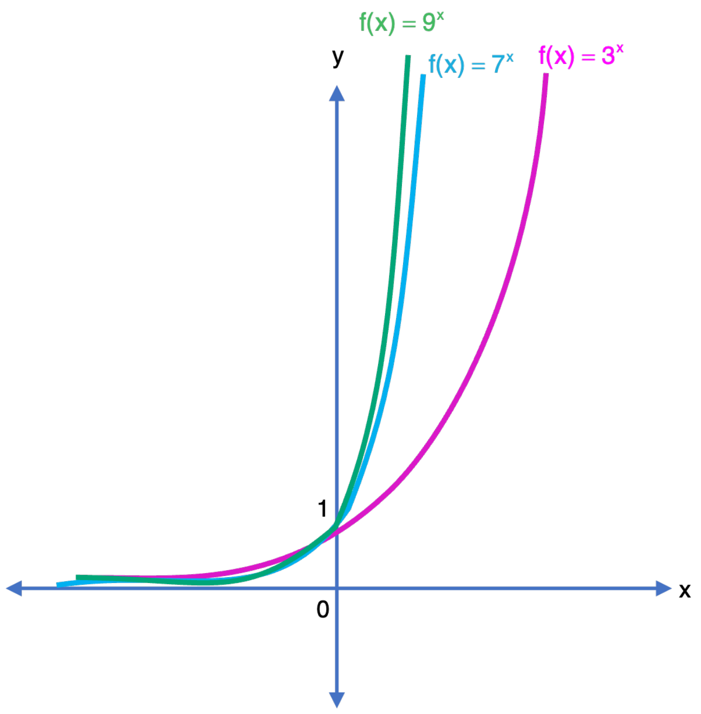
$a > 1$ için, $f(x) = a^x$ fonksiyonu artandır.



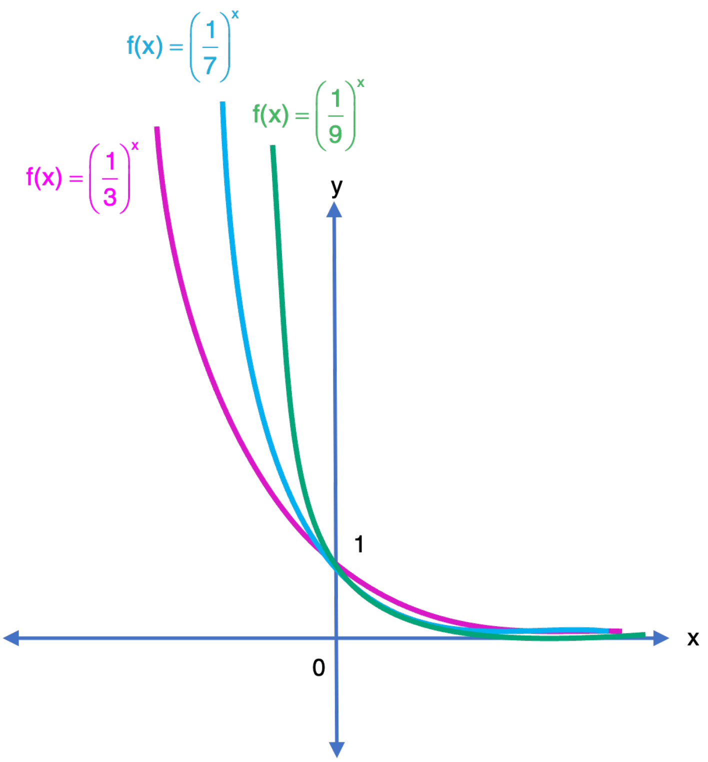
$0 < a < 1$ için, $f(x) = a^x$ fonksiyonu azalandır.



$f(x) = a^x$ fonksiyonu için, $a > 1$ iken a değeri arttıkça fonksiyonun grafiği y eksenine yaklaşır.



$f(x) = a^x$ fonksiyonu için, $0 < a < 1$ iken a değeri arttıkça fonksiyonun grafiği y ekseninden uzaklaşır.



Logaritma Fonksiyonunun Tanımı

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ biçiminde tanımlanan üstel fonksiyonun tersi olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonuna, a tabanına göre logaritma fonksiyonu denir.

$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ biçiminde ifade edilir. $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için $y = a^x$ ise $x = \log_a y$ biçiminde ifade edilir.

Neden logaritma fonksiyonuna ihtiyaç duyuldu?

$3^x = 9$ ise $x = 2$ veya $2^x = 16$ ise $x = 4$'tür.

$3^x = 10$ ise $x = ?$, eşitliğini sağlayan herhangi bir x tam sayı değeri yoktur. Bu x gerçek sayı değerini bulabilmek için logaritma fonksiyonuna ihtiyaç duyulmuştur.

$3^x = 10$ ise $x = \log_3 10$ biçiminde ifade edilir.

$f(x) = \log_{g(x)} h(x)$ fonksiyonunun tanımlı olması için aşağıdaki üç koşulun sağlanması gerekir:

- $g(x) > 0$
- $g(x) \neq 1$
- $h(x) > 0$

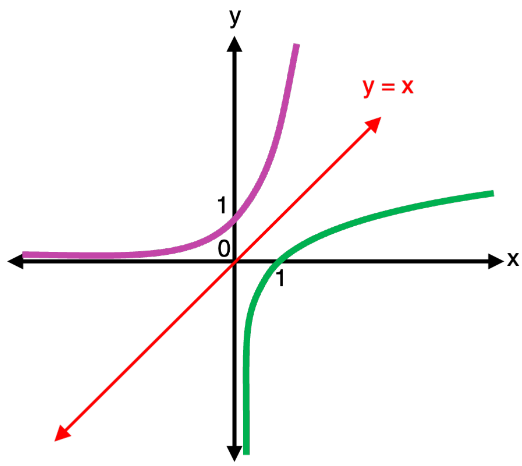
Logaritma Fonksiyonunun Tersi

$f(x) = \log_a x$ ise, $f^{-1}(x) = a^x$ biçiminde ifade edilir.

$f(x) = a^x$ ise, $f^{-1}(x) = \log_a x$ biçiminde ifade edilir.

Logaritma fonksiyonun tersi olan üstel fonksiyonlar birebir ve örten olduğundan, logaritma fonksiyonu da birebir ve örten bir fonksiyondur.

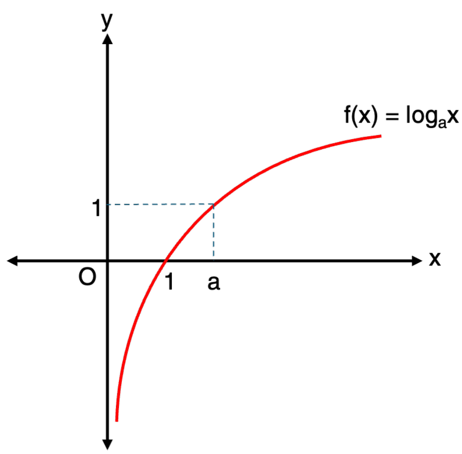
Birbirinin tersi olan bu iki fonksiyonun grafiği y = x doğrusuna göre simetriktir.



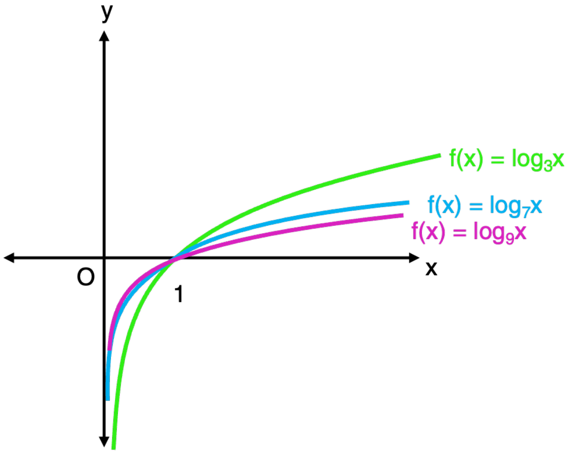
Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

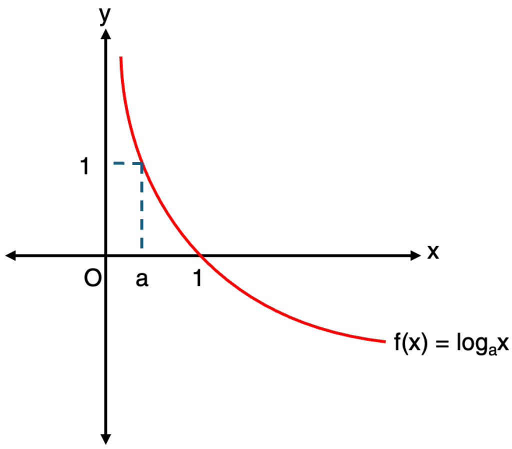
$a > 1$ ise, $y = \log_a x$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur. Grafiği yanda verilmiştir.



$a > 1$ ve $y = \log_a x$ logaritma fonksiyonunun tabanı arttıkça, grafiğin kolu x eksenine yaklaşır. Grafiği aşağıdaki gibidir.

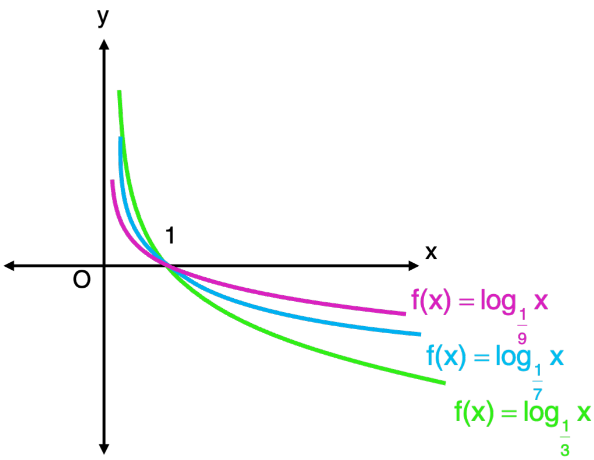


$0 < a < 1$ ve $y = \log_a x$ logaritma fonksiyonunun tabanı arttıkça, grafiğin kolu x ekseninden uzaklaşır. Grafiği aşağıdaki gibidir.

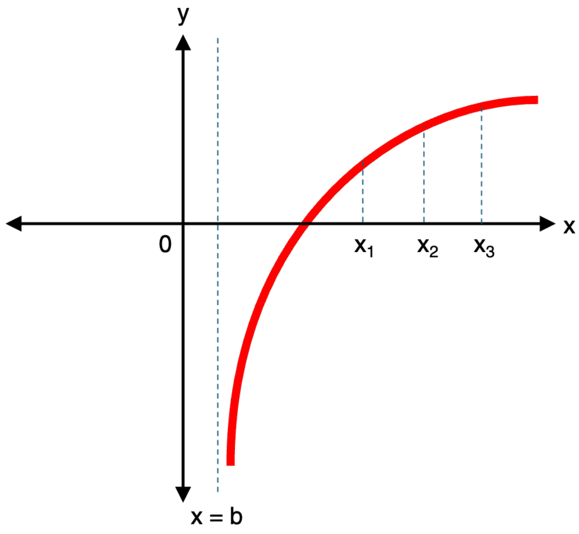


$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

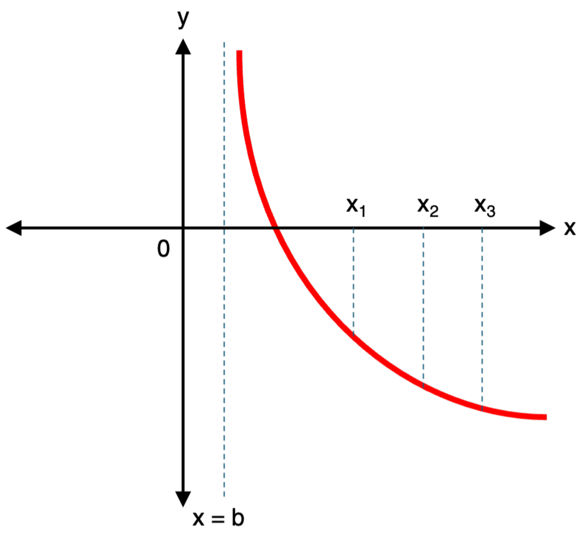
$0 < a < 1$ ise, $y = \log_a x$ fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. Grafiği aşağıda verilmiştir.



$a > 1$ ise $y = \log_a(x - b)$ **artan** fonksiyondur.



$0 < a < 1$ ise $y = \log_a(x - b)$ **azalan** fonksiyondur.



Onluk Logaritma Fonksiyonu

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna onluk **logaritma fonksiyonu** veya **bayağı logaritma fonksiyonu** denir.

$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x > 0$ olmak üzere, $f(x) = \log_{10}x$ veya $f(x) = \log x$ biçiminde ifade edilmektedir.

UYARI

$\log_{10}10 = 1$

$\log 1 = 0$

Euler'in (e) Sayısı

Euler'in sayısı (e), aslında sonsuz bir dizi olan bir matematiksel sabittir.

Matematikçi Leonhard Euler tarafından keşfedilmiş ve yaklaşık değerinin 2,7182… şeklinde bir irrasyonel sayı olduğunu göstererek bu sayıyı aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Euler'in sayısı (e) farklı alanlarda hesaplama işlemlerinde kullanılmaktadır. Bunların bazıları aşağıdaki gibidir;

- Matematik ve ekonomide bileşik faiz hesaplamalarında
- Tıpta ilaçların etki süresinin hesaplanmasında
- Kimyada buhar basıncı ve tepkime hızları hesaplamalarında
- Fizikte elektromotor kuvvetin hesaplanmasında

Doğal Logaritma Fonksiyonu

Tabanı e irrasyonel sayısı olan logaritma fonksiyonuna doğal logaritma fonksiyonu denir.

$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x > 0$ olmak üzere

$f(x) = \log_e x$ veya $f(x) = \ln x$ biçiminde ifade edilmektedir.

UYARI

$y = \ln x$ ise $x = e^y$

$\log_e e = \ln e = 1$

$\log_e 1 = \ln 1 = 0$

Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

1.

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere, $\log_a a = n$ ise $a^n = a$ ve $n = 1$ olduğundan $\log_a a = 1$ olur.
- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $\log_a 1 = k$ ise $a^k = 1$ ve $k = 0$ olduğundan $\log_a 1 = 0$ olur.

2.

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

  $\log_a x = n$ ve $\log_a y = k$ için, $x = a^n$ ve $y = a^k$ olur.

  $x \cdot y = a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ ise $\log_a (x \cdot y) = n + k$ olduğundan $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ olur.

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

  $\log_a x = n$ ve $\log_a y = k$ için, $x = a^n$ ve $y = a^k$ olur.

  $\frac{x}{y} = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ ise $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = n - k$ olduğundan $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ olur.

3.

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

  $\log_a x^n = \log_a (\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}}) = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \ldots + \log_a x}_{n \text{ tane}}$

  Bu durumda $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ olur.

4.

- $a, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$ olur.

  Bu özelliğe **taban değiştirme özelliği** denir.

  $\log_a b = p$ ve $\log_c a = r$ olsun. Bu durumda $b = a^p$ ve $a = c^r$ olur.

  $a = c^r \Rightarrow a^p = (c^r)^p$ (Eşitliğin her iki tarafının p. kuvveti alınır.)

  $\Rightarrow b = c^{r \cdot p}$ $(a^p = b)$

  $\Rightarrow \log_c b = r \cdot p$

  $\Rightarrow \log_c b = \log_c a \cdot \log_a b$ $(p = \log_a b)$

  $\Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (Eşitliğin her iki tarafını $\log_c a$ ile bölünür.)

5.

- a, b $\in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere, $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$ şeklinde ifade edilir.
- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$ şeklinde ifade edilir.
- a, b, c, d, …, $m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot ... \cdot \log_m n = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log c}{\log b} \cdot \frac{\log d}{\log c} \cdot ... \cdot \frac{\log n}{\log m} = \frac{\log n}{\log a} = \log_a n \text{ olur.}$$

6.

- $m, n \in \mathbb{R}^+$ ve $n \neq 0$ olmak üzere,

$$\log_{a^n} x^m = \frac{\log_a x^m}{\log_a a^n} = \frac{m \cdot \log_a x}{n \cdot \log_a a} = \frac{m}{n}\log_a x \text{ olur.}$$

Bu durumda $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\log_{a^n} x^m = \dfrac{m}{n}\log_a x$ şeklinde ifade edilir.

7.

- $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $a, c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ olur.

$c = 1$ ise $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} = 1$ olur.

$c \neq 1$ ve $c > 0$ ise, $x = a^{\log_b c} \Rightarrow \log_c x = \log_c\left(a^{\log_b c}\right)$ (Her iki tarafın c tabanında logaritması alınır.)

$$\Rightarrow \log_c x = \log_b c \cdot \log_c a$$

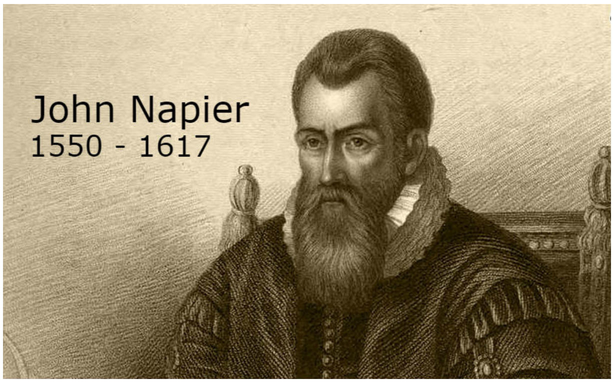
$$\Rightarrow \log_c x = \frac{\cancel{\log c}}{\log b} \cdot \frac{\log a}{\cancel{\log c}}$$

$$\Rightarrow \log_c x = \frac{\log a}{\log b}$$ (Taban değiştirme özelliğinden)

$$\Rightarrow \log_c x = \log_b a$$

$$\Rightarrow x = c^{\log_b a}$$

John NAPIER (Con Nepyer) (1550 - 1617)



Logaritmayı bulan İskoçyalı matematikçidir. Sayısal hesaplamaları kolaylaştıracak bir yol ararken önce Napier'in kemikleri olarak bilinen üzerlerine rakamlar yazılmış küçük değnekler yardımıyla yapılan bir çarpma veya bölme metodu buldu. 1614'te yazdığı "Logaritma Kurallarının Tanımı" adlı eserinde aritmetik dizi ile geometrik diziyi karşılaştırarak matematiğe logaritma kavramını kazandırmıştır.

Napier logaritma sözcüğünü orantıların sayısı ya da algoritmik hesap anlamına gelen logos ve aritmos sözcüklerinden oluşturarak "logaritm" adını vermiştir.

(Meydan Larousse Büyük Lügat ve Ansiklopedisi,1992)

Üstel Denklemler

Tabanı 1'den farklı pozitif gerçek sayı olan ve bilinmeyenin üs olarak bulunduğu denklemlere **üstel denklemler** denir. Bu tür denklemlerin çözüm kümelerinin bulunmasında üslü sayıların veya logaritmik fonksiyonların özellikleri kullanılır.

$a^{f(x)}$ için $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Logaritmik Denklemler

İçinde bilinmeyenin logaritmasını bulunduran denklemlere **logaritmik denklemler** denir. Logaritmik denklemlerde logaritması alınan ifadelerin pozitif olması şartının yanı sıra taban x'e bağlı bir fonksiyon ise tabanının da pozitif ve 1'den farklı olması şartı aranır.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

- $f(x) > 0$ için, $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ şeklinde ifade edilir.
- $f(x) > 0,\ g(x) > 0,\ f(x) \neq 1$ için, $\log_{f(x)} g(x) = b \Rightarrow g(x) = f(x)^b$ şeklinde ifade edilir.
- $f(x) > 0,\ g(x) > 0,$ için, $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$ şeklinde ifade edilir.

$f(x) > 0$ olmak üzere $\log_{g(x)} f(x) = b$ denkleminin çözüm kümesini bulmak için aşağıdaki adımlar uygulanmalıdır.

1. Logaritmik fonksiyonu yalnız bırakılır.
2. Logaritmanın tabanı karşıya atılarak üstel denkleme dönüştürülür.
3. Denklem çözülür ve çözüm kümesindeki $f(x) > 0$ şartını sağlayan değerler alınır.
4. $\log_{g(x)} f(x) = b$ şeklinde tabanı x'e bağlı bir fonksiyon $g(x) > 0$ ve 1'den farklı olması şartı aranır.

Gelenbevi İsmail Efendi (1730 - 1790)

Gelenbevi, matematik konusundaki dehasını ve bu alanda meydana gelen yenilik ve gelişmeleri takip ettiğini, 1787 yılında İstanbul'a gelen bir Fransız mühendisinin Babıali'ye (Osmanlı Hükûmetine) sunduğu, ancak dönemin ilim adalarınca pek anlaşılmayan bazı logaritma cetvellerinin nasıl kullanılacağı hususunda yazdığı, "Logaritma Şerhi" adıyla da tanınan "Şerh-i Cedâvili'l-ensâb" adlı Türkçe eseriyle ortaya koymuştur. Bu eser iki bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde sayı sistemleri ve bunların özellikleri üzerinde durulurken ikinci bölümde logaritma cetvellerinin nasıl oluştuğu ve bunların dayandıkları esaslar açıklanmıştır.

(Gölcük ve Yurdagür, 1996)

Üstel Eşitsizlikler

Tabanı 1'den farklı pozitif gerçel sayı, üssü ise bilinmeyen bulunduran üslü ifadelerin bulunduğu eşitsizliklere **üstel eşitsizlikler** denir. Bu eşitsizliklerin bir tarafı üslü ifade diğer tarafı sayı veya iki tarafı da üslü ifade olabilir.

$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ için,

- $a > 1$ ise $f(x) \geq g(x)$ olur.
- $0 < a < 1$ ise $f(x) \leq g(x)$ olur.

Logaritmik Eşitsizlikler

Tabanı 1'den farklı pozitif gerçel sayı, içi ise pozitif olan fonksiyon bulunduran logaritmaların eşitsizliğine **logaritmik eşitsizlikler** denir. Bu eşitsizliklerin bir tarafı logaritma diğer tarafı sayı veya iki tarafı da logaritma olabilir.

$\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ için,

- $a > 1$ ise $f(x) \leq g(x)$ olur.

  Logaritma fonksiyonu artandır. Eşitsizlik yön değiştirmez.

- $0 < a < 1$ ise $f(x) \geq g(x)$ olur.

  Logaritma fonksiyonu azalandır. Eşitsizlik yön değiştirir.

- Logaritmanın tanımı gereği; $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmalıdır.

İnsan kulağının zarar görmeden duyabileceği en yüksek ses şiddeti 1 watt / m^2 iken duyarlı olduğu en düşük ses şiddeti 10^{-12} watt / m^2 dir. Bu yüzden insanlar karıncanın ayak seslerini, uzaydaki gezegenlerin veya yıldızların hareketlerinin seslerini duyamazlar.

I : Kaynağın ses şiddet
I_0 : 10^{-12} watt / m^2
L : Ses düzeyi

dB (desibel) türünden ses düzeyi

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Genlik, bir dalganın normal konumundan yükselme ve alçalma mesafesidir. Uzanımın en büyük ve en küçük olduğu konumlar diye tarif edilebilir. Genlik, dalgayı ortaya çıkaran enerjinin miktarına bağlıdır. Dalganın enerjisi artarken genlik de artar. Depremin büyüklüğü artarsa, meydana gelen dalga nedeniyle genlik de artar. Depremin büyüklüğü deprem merkez üssünden 100 km uzaklıktaki sismograf tarafından kaydedilen dalgaların maksimum genliklerinden yararlanılarak hesaplanır.

(Kılıçkaya, 1996)

Mikron cinsinden ölçülen maksimum genlik : d
Depremin Richter ölçeğine göre büyüklük : R

R = log d

Canlı iken kemikte bulunan Carbon (Karbon) 14 adıyla anılan atomlar canlının ölümünden sonra düzenli bozunarak Carbon 12 atomu hâline dönüşürler. 5730 yılda bozunmayan Carbon 14 atomlarının sayısı yarıya iner. Diğer yarısı Carbon 12 atomu hâline dönüşür. Bu süreye yarılanma süresi denir. Kemik fosilindeki bu iki cins atomların miktarları ölçülerek canlının yaklaşık kaç yıl önce öldüğü anlaşılabilmektedir. Carbon 14 atomlarının zaman içinde yarılanma süresi;

(Üstel Fonksiyon ve Logaritma Fonksiyonu, www.eba.gov.tr)

x : Zaman (yıl)

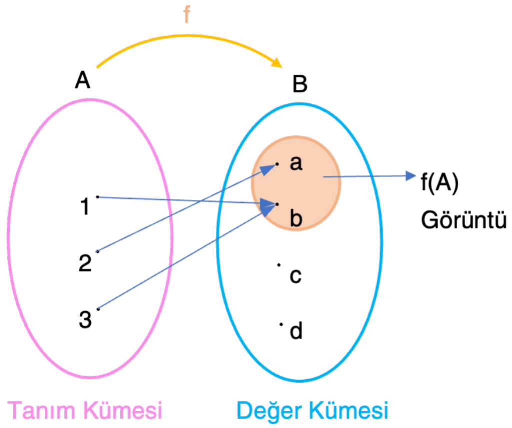
$$\frac{\textbf{y : Carbon 14 miktarı}}{\textbf{Toplam Carbon miktarı}}$$

$$x = -5730 \cdot \frac{\log y}{\log 2}$$

$$y = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right]^{x}$$

DİZİ KAVRAMI VE DİZİNİN TERİMLERİ

- A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A kümesinin her bir elemanını, B kümesinin bir ve yalnız bir elemanı ile eşleyen ilişkiye A'dan B'ye tanımlı bir **fonksiyon** denir.

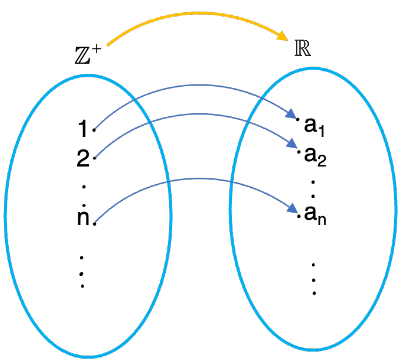


- Matematikte $\mathbb{Z}^+$ kümesinden $\mathbb{R}$ ye tanımlanan her fonksiyona özel olarak **gerçek sayı dizisi** veya kısaca **dizi** adı verilir.
- $f(n) = a_n$ olmak üzere $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$'ye tanımlanan her fonksiyona **dizi** adı verilir.
- Dizi genellikle (a_n) biçimde gösterilmekte ve **"a_n dizisi"** olarak okunmaktadır.
- $f(n) = a_n$ değerine dizinin n. terimi veya **genel terimi** adı verilir.
- Genel terimi verilmeyen sayı kümeleri dizi belirtmez.
- Genel terimi a_n olan bir dizi, pozitif tam sayılar kümesinden gerçek sayılar kümesine tanımlanan bir fonksiyondur. Fonksiyonun kuralı ise dizinin genel terimine karşılık gelmektedir.

- Genel terimi a_n olan bir dizi,

  $(a_n) = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ ...)$ biçiminde yazılır.

1. terim   2. terim   3. terim   4. terim



- $A = \{1, 2, 3, \ldots, r\} \subset \mathbb{Z}^+$ için $A \rightarrow \mathbb{R}$'ye tanımlanan dizilere **sonlu dizi** adı verilir. Sonlu dizinin belli bir sayıda terimi bulunur.
- Sonlu dizi olduğu belirtilmediği sürece her dizinin sonsuz dizi olduğu anlaşılmalıdır.
- Dizi genel terimleri ile belirlidir. Genel terimleri verilmeden yazılan sayı grupları dizi belirtmez.
- Genel olarak $c \subset \mathbb{R}$ olmak üzere genel terimi $a_n = c$ olan $(a_n) = (c, c, c, \ldots, c, \ldots)$ dizisine **sabit dizi** adı verilir.
- (a_n) ve (b_n) iki dizi olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n = b_n$ oluyorsa (a_n) ve (b_n) dizilerine **eşit diziler** adı verilir ve bu durum, $\mathbf{(a_n) = (b_n)}$ biçiminde gösterilir.
- Bazen dizinin bir terimi, kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden tanımlanan diziye **indirgemeli dizi**, tanımlama bağıntısına da **indirgeme bağıntısı** adı verilir.

Örneğin;

1'den n'ye kadar ardışık doğal sayıların toplamını veren sayılara **üçgensel sayılar** denir.

$0 + 1 = 1$

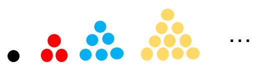
$1 + 2 = 3$

$1 + 2 + 3 = 6$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

olduğundan 1, 3, 6, 10, 15 sayıları üçgensel sayılardır. n sayma sayısı olmak üzere üçgen sayılar, $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ şeklinde yazılabilen sayılardır.



1 3 6 10 …

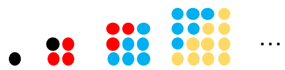
Ardışık iki üçgen sayısının toplamı bir karesel sayıdır.

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$3 + 6 = 9 = 3^2$

$6 + 10 = 16 = 4^2$

olduğundan 4, 9, 16 sayıları birer karesel sayıdır. n, 1'den büyük sayma sayısı ve ardışık iki üçgensel sayı, $\dfrac{(n-1) \cdot n}{2}$ ve $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ olmak üzere olduğundan kare sayı, $\dfrac{(n-1) \cdot n}{2} + \dfrac{n \cdot (n+1)}{2} = n^2$ olur



1 1 + 3 3 + 6 6 + 10 …

- Ardışık terimleri arasındaki farkın sabit olduğu dizilere **aritmetik dizi** denir.
- (a_n) bir aritmetik dizi ise $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$ için
  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_{n+1} - a_n = \dots = d$ olur.
- $a_{n+1} - a_n = d$ eşitliğindeki d sayısına aritmetik dizinin ortak farkı denir. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_{n-1} - a_n = d$ olur.
- (a_n) aritmetik dizisinin genel terimi, ardışık terimleri arasındaki fark sabit olduğundan,

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2} - a_1 &= d \\
\cancel{a_3} - \cancel{a_2} &= d \\
a_4 - \cancel{a_3} &= d \\
&\vdots \\
a_n - \cancel{a_{n-1}} &= d \\
+\ \hline
a_n - a_1 &= \underbrace{d + d + d + \dots + d}_{(n-1)\ \text{tane}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ olur.

Burada a_n ifadesine dizinin **genel terimi** denir.

- $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$
  a_n sonlu aritmetik dizisinde
  $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$ olur.
  $a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d = 2a_1 + (n-1) \cdot d$
  $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2) \cdot d = 2a_1 + (n-1) \cdot d$
  .
  .
  .
  $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1) \cdot d + a_1 + (n-k+1-1) \cdot d = 2a_1 + (n-1) \cdot d$
  Sonuç olarak x, y, z, t $\in \mathbb{Z}^+$ için $x + y = z + t$ ise $a_x + a_y = a_z + a_t$ olur.

- Bir aritmetik dizinin k. terimi a_k, p. terimi a_p olsun.
  $d = \dfrac{a_p - a_k}{p - k}$

- a ve b gibi iki gerçek sayı arasına aritmetik dizi oluşturacak şekilde p tane terim yerleştirilirse ortak fark $d = \dfrac{b - a}{p + 1}$ olur.

- (a_n) aritmetik dizisinde $1 < k < n$ olmak üzere iki terim a_{n-k} ve a_{n+k} olsun. Bu terimlerin ortasındaki terim a_n olmak üzere $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ olur.

GEOMETRİK DİZİ VE ÖZELLİKLERİ

- Bir (a_n) dizisinde $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ve $r \in \mathbb{R}$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise (a_n) dizisine **geometrik dizi** ve r sayısına da geometrik dizinin **ortak çarpanı** adı verilir.

- (a_n) bir geometrik dizi ise $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$ için $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olur.

- (a_n) geometrik bir dizisinde ilk terimden itibaren diğer terimler, bir önceki terimin r katı kadardır.

  $\mathbf{a_{n+1} = r \cdot a_n}$ indirgeme bağıntısı ile yazılabilir.

- İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinin genel terimi,

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot r = a_2 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_1 \cdot \underbrace{r \cdot r \cdot r \cdot r \cdot ... \cdot r}_{n-1 \text{ tane}}$$

$\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$ şeklinde bulunur.

- Ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinde $\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$ olmak üzere $1 \le k \le n$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\mathbf{a_n = a_k \cdot r^{n-k}}$ olur.

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ a_k &= a_1 \cdot r^{k-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{a_k} = \frac{\cancel{a_1} \cdot r^{n-1}}{\cancel{a_1} \cdot r^{k-1}} = r^{n-k} \Rightarrow a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

- Herhangi bir sonlu (a_n) geometrik dizisinde baştan ve sondan eşit uzaklıklarda bulunan terimlerin çarpımı birbirine eşittir. $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ... , a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ geometrik dizisinde $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ...$ olur.

- Bir geometrik dizide herhangi iki teriminin ortasında bir terim varsa bu terim, diğer iki terimin geometrik ortalamasıdır. (a_n) geometrik dizisinde $1 < k < n$ olmak üzere iki terim, a_{n-k} ve a_{n+k} olsun. Bu terimlerin ortasındaki terim a_n olmak üzere $a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$ olur.

- Bir geometrik dizide $k > p$ için k. terim a_k, p. terim a_p olmak üzere dizinin ortak çarpanı $r = \sqrt[k-p]{\frac{a_k}{a_p}}$ olur.

- Dizinin herhangi bir terimi bir önceki ve bir sonraki terimin geometrik ortasıdır.

- b ve c gibi iki gerçek sayı arasına k tane terim yerleştirilerek oluşan k + 2 terimli geometrik dizinin ortak çarpanı $r = \sqrt[k+1]{\frac{c}{b}}$ olur.

- $\sum$ simgesi olup **sigma** biçiminde okunur. Bu simge, çok terimli toplamları kısaca yazmaya yarar.

- $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ toplamı, $\sum$ simgesi kullanılarak kısaca $\sum_{k=1}^{n} a_k$ biçiminde yazılır ve **k = 1'den n'ye kadar a_k sayılarının toplamı** biçiminde okunur.

- Bu ifadede k'ye **indis** ya da **değişken**, 1'e **alt sınır**, n'ye ise **üst sınır** adı verilir.

- Dizisinin ilk n terim toplamı S_n ile gösterilir.

- $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ formülüyle yazılır.

- Bir (a_n) aritmetik dizisinin ilk n terim toplamı $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$ biçiminde hesaplanır.

- Bir aritmetik dizide $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ genel terim ifadesi kullanılarak dizinin ilk n teriminin toplamı

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$= \underbrace{(a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1)}_{\text{n tane}} + \underbrace{(d + 2d + \ldots + (n-1)d)}_{(1+2+\ldots+n-1)\cdot d}$$

$$= n \cdot a_1 + \frac{(n-1)\cdot n}{2} \cdot d = \frac{2n \cdot a_1 + (n-1)\cdot n \cdot d}{2} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

olarak bulunur.

- (a_n) geometrik dizisinin ilk terimi a_1 ise bu durumda ilk n teriminin toplamı,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\Rightarrow S_n = a_1 + \cancel{a_1 \cdot r} + \cancel{a_1 \cdot r^2} + \cancel{a_1 \cdot r^3} + \ldots + \cancel{a_1 \cdot r^{n-1}}$$

$$- \Rightarrow r \cdot S_n = \cancel{a_1 \cdot r} + \cancel{a_1 \cdot r^2} + \cancel{a_1 \cdot r^3} + a_1 \cdot r^4 + \ldots + a_1 \cdot r^n$$

$$S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot r^n \Rightarrow (1-r)\cdot S_n = a_1(1-r^n) \Rightarrow S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

olarak bulunur.

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... biçiminde devam eden diziye **Fibonacci sayı dizisi** adı verilir.

- Fibonacci dizisi; ilk iki terimi 1 ve diğer terimleri önceki iki terimin toplamından oluşan bir dizi olduğundan indirgemeli bir dizidir.

- Bu dizinin indirgeme bağıntısı ise

  $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ve $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n > 2)$ olarak tanımlanır.

  Fibonacci dizisinin genel terimi ise $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ biçimindedir.

Leonardo Fibonacci (Leonardo Fibonaçi) ve Tavşan Hikayesi

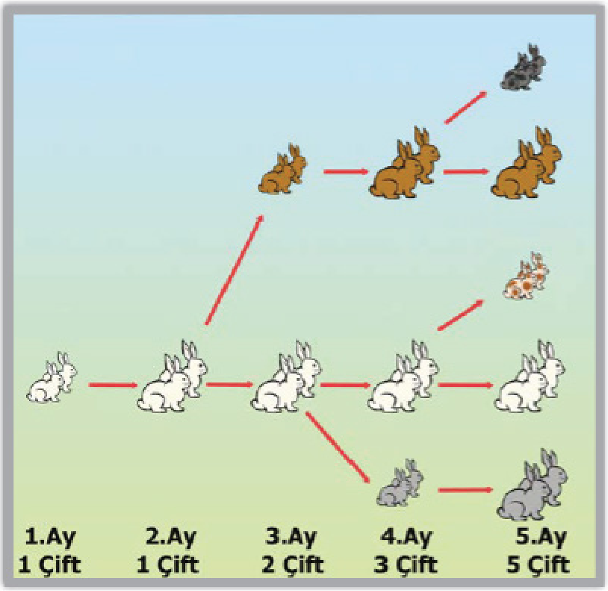
Görsel 2.1

İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci, yazdığı matematik kitaplarının birinde tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğu iddia edilen bir problem sunar. Bu probleme göre arkadaşının çiftliğinde tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapmazlar. Üçüncü aydan itibaren her çift her ay bir çift yavru yapar. Buna göre Fibonacci'nin arkadaşı üretime bir çift tavşanla başlarsa kaç ay sonra kaç tavşanı olur?

Görsel 2.2'de görüldüğü gibi, bir çiftçinin ilk ay yeni doğmuş bir çift tavşanı olsun. İkinci ayda bu tavşanlar henüz yavrulamadıkları için hâlâ bir çift tavşanı vardır. Üçüncü ay bunlar bir çift yavru verecek ve iki çift tavşanı olacaktır. Yeni doğan çift dördüncü ay yavrulamayacak, oysa ana babaları yeniden bir çift yavru yapacak ve toplam üç çift tavşan olacaktır.

Birinci ve ikinci aylarda birer çift tavşanı vardı. Demek ki üçüncü ay iki çift tavşanı olacaktır. İkinci aydaki bir çift ile üçüncü aydaki iki çift toplanırsa dördüncü aydaki üç çift bulunur. Böylece her ay daha önceki iki aydaki tavşan çiftlerinin sayısı toplanırsa o ay kaç çift tavşan olacağı bulunur.

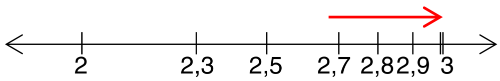
(Sertöz, 2017)



Görsel 2.2

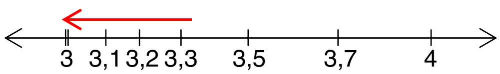
Yaklaşım Kavramı ve Limit Kavramı

- **Soldan Yaklaşma:** x bağımsız değişkeni bir a gerçek sayısına a'dan küçük değerler ile artarak yaklaşıyorsa bu yaklaşım durumuna x'in a'ya soldan yaklaşımı denir ve $x \to a^-$ ile gösterilir.

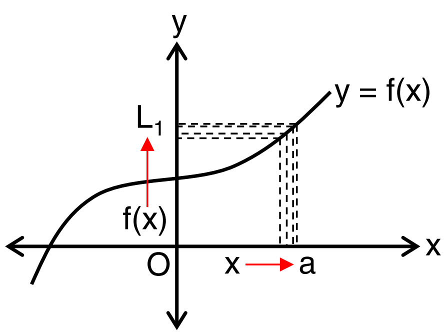


- Yukarıdaki sayı doğrusunda 3'e soldan yaklaşım gösterilmiştir. $x \to 3^-$ gösterimi x'in 3 değerini almadığı ancak 3'ten küçük 2,3 ; 2,5 ; 2,7 ; 2,8 ; 2,9 ; 2,99... değerler alarak 3'e yaklaştığını ifade eder.

- **Sağdan Yaklaşma:** x bağımsız değişkeni bir a gerçek sayısına a'dan büyük değerler ile azalarak yaklaşıyorsa bu yaklaşım durumuna x'in a'ya sağdan yaklaşımı denir ve $x \to a^+$ ile gösterilir.

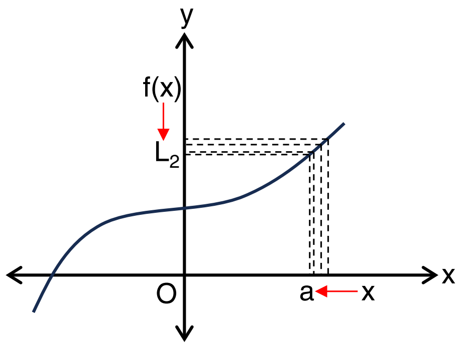


- Yukarıdaki sayı doğrusunda 3'e sağdan yaklaşım gösterilmiştir. $x \to 3^+$ gösterimi x'in 3 değerini almadığı ancak 3'ten büyük 3,7 ; 3,5 ; 3,3 ; 3,2 ; 3,1 ; 3,01... değerler alarak 3'e yaklaştığını ifade eder.



- Yukarıda verilen f(x) fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a sayısına soldan yaklaşırken f(x)'in L_1 gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

  L_1 gerçek sayısına f(x) fonksiyonunun x = a apsisli soldan limiti denir ve $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ biçiminde gösterilir.



- Yukarıda verilen f(x) fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a sayısına sağdan yaklaşırken f(x)'in L_2 gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

  L_2 gerçek sayısına f(x) fonksiyonunun x = a apsisli sağdan limiti denir ve $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ biçiminde gösterilir.

- Bir fonksiyonun x = a apsisli noktada sağdan ve soldan limit değerleri eşit ise fonksiyonun x = a noktasında limiti vardır ve sağ – sol limit değerine eşittir.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \text{ ise } \lim_{x \to a} f(x) = L \text{ dir.}$$

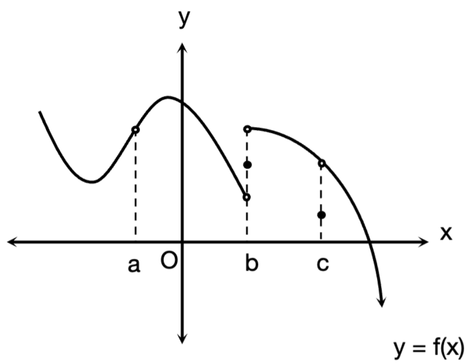
- Bir fonksiyonun x = a apsisli noktada sağdan ve soldan limit değerleri farklı ise fonksiyonun x = a noktasında limiti yoktur.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ ise } \lim_{x \to a} f(x) \text{ yoktur.}$$

- Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olmaması için fonksiyonun o noktada tanımlı olma zorunluluğu yoktur.

- Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, fonksiyonun o noktadaki değerinden farklı olabilir.

- Bir fonksiyonun grafiği üzerindeki kopukluk olan noktalara **kritik noktalar** denir.

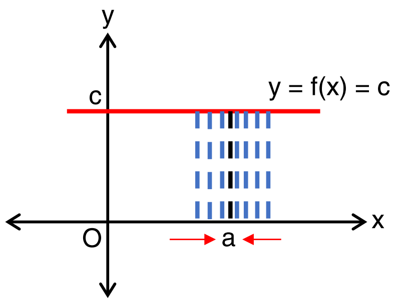


- Yukarıda verilen y = f(x) fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x = a, x = b ve x = c apsisli noktaların kritik noktalar olduğu görülür. Bu noktalarda limit araştırılırken sağdan ve soldan limitler incelenmelidir.

- Eğer limiti araştırılan nokta, kritik nokta değilse fonksiyonun limiti, fonksiyonun o noktadaki değerine eşittir.

Limit ile İlgili Özellikler ve Parçalı Tanımlı Fonksiyonların Limiti

- a, c ∈ ℝ ve f(x) = c sabit fonksiyon olmak üzere $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ olur.



- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 x^0$ polinom fonksiyonu olmak üzere her x_0 gerçek sayısı için; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ olur.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ limitleri mevcut olmak üzere;

  I. Toplamın limiti, limitler toplamına eşittir. Yani $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ olur.

  II. Farkın limiti, limitler farkına eşittir. Yani $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$ olur.

  III. Çarpımın limiti, limitler çarpımına eşittir. Yani $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$ olur.

  IV. Bölümün limiti, limitler bölümüne eşittir. Yani $\lim\limits_{x\to a}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, $(\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ ve $g(x) \neq 0)$ olur.

  V. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to a}[k\cdot f(x)] = k\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$ olur.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti mevcut ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$ olur.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti mevcut ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

  I. n tek ise $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ olur.

  II. n çift, $f(x) \geq 0$ ve $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$ ise $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ olur.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti mevcut olmak üzere; $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$ olur.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti mevcut ve c pozitif bir gerçek sayı olmak üzere; $\lim\limits_{x\to a} c^{f(x)} = c^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ olur.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti mevcut ve $f(x) > 0$ olmak üzere;

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ ise $\lim\limits_{x\to a}(\log_b f(x)) = \log_b\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$ olur.

- $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

I. $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$

II. $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

III. $\lim_{x \to a} \tan x = \tan a \quad (a \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z})$

IV. $\lim_{x \to a} \cot x = \cot a \quad (a \neq k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z})$ olur.

Parçalı Tanımlı Fonksiyonların Limiti:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \text{ ise} \\ c, & x = a \text{ ise} \\ h(x), & x > a \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar için;

I. x = a apsisli noktası dışında bir noktanın limiti araştırılırken o nokta fonksiyonun hangi parçasına ait ise o parçada limit araştırılır.

$t < a$ ise $\lim_{x \to t} f(x) = \lim_{x \to t} g(x)$ olur.

$t > a$ ise $\lim_{x \to t} f(x) = \lim_{x \to t} h(x)$ olur.

II. x = a apsisli noktasında fonksiyonun kuralı değiştiğinden bu nokta kritik noktadır. Bu noktadaki limit araştırılırken sağdan ve soldan limitleri incelenmelidir.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = L_1$ ve $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} h(x) = L_2$ olsun.

a) $L_1 = L_2$ ise $\lim_{x \to a} f(x) = L$ olur.

b) $L_1 \neq L_2$ ise $\lim_{x \to a} f(x)$ yoktur.

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY

1789'da Paris'te doğan Fransız matematikçidir. Bugün Cauchy Teoremi adıyla bilinen teoremi ifade ederek ispatlamıştır. Limit, süreklilik, türev ve integral üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bunların hesaplama yöntemleri yine Cauchy tarafından verilmiştir.

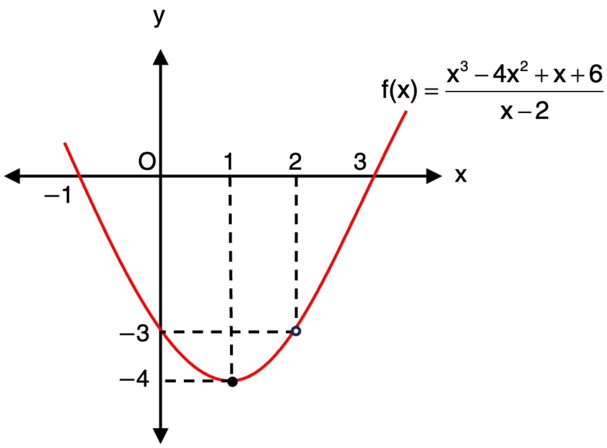
Cauchy, türev ve integral hesaplamaları üzerine çalışmaları neticesinde matematiğe karmaşık fonksiyonlar teorisini kazandırmıştır. Cauchy'in kendi adıyla anılan Cauchy-Schwarz eşitsizliği, Cauchy-Riemann denklemleri, Cauchy teoremi, Cauchy integral formülü ve Cauchy dizisi gibi çalışmaları bulunmaktadır.

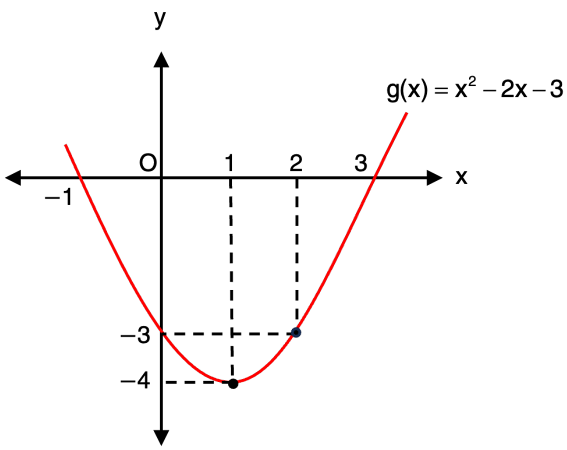
Limitte Belirsizlik Durumları ve Uygulamaları

- Gerçek sayılar kümesinde tanımlı ve çarpanlarına ayrılabilen f(x) ve g(x) fonksiyonları için $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ olması durumunda $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği ortaya çıkar.
- Burada x = a için f(a) = 0 ve g(a) = 0 olduğundan her iki fonksiyonun da (x – a) biçiminde çarpanı vardır.
- Belirsizlik durumunda pay ve payda çarpanlarına ayrılır. Pay ve paydadaki (x – a) çarpanları sadeleştirilerek belirsizlik giderilir ve limit bulunur.

Rasyonel Biçimde İfade Edilen Fonksiyon Grafiği ve Sadeleşme Sonucu Elde Edilen Polinom Fonksiyonunun Grafiği

- Aşağıda rasyonel biçimde ifade edilen f(x) fonksiyonun grafiği ve ortak çarpanları sadeleştirerek elde edilen g(x) polinom fonksiyonunun grafiği verilmiştir.





- Bir rasyonel fonksiyon ve o fonksiyonun pay ve paydasındaki ortak bir çarpanın sadeleşmiş hali bir nokta dışında (kritik nokta) aynı fonksiyonlardır ve grafikleri özdeştir.
- Kritik nokta pay ve paydadaki çarpanı sıfır yapan ve belirsizliğe neden olan x değerinin karşılık geldiği noktadır.
- Kritik nokta rasyonel biçimde ifade edilen fonksiyonun grafiğinde tanımsız, sadeleşmiş fonksiyonda ise tanımlıdır.
- Limit bir noktadaki fonksiyonun değeri ile değil, o noktanın civarındaki yaklaşımla ilgilendiği için iki fonksiyon arasındaki bu ayrımın limit hesaplamasına bir etkisi yoktur. Dolayısıyla sadeleşme sonucu yeni fonksiyon oluşsa da bu noktadaki limit değeri açısından iki fonksiyon özdeştir.

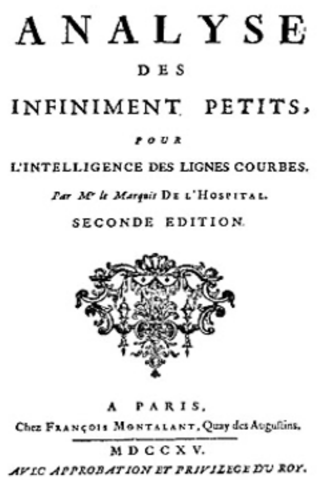
Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661 – 1704 Paris)

Fransız matematikçidir. En çok tanınmasına sebep olan çalışması kendi adıyla anılan bir rasyonel (kesirli) bir fonksiyonda pay ve paydanın limitlerinin değeri sıfır veya sonsuz olması durumunda uygulanan bir formüldür.

Asil bir aileden gelmesi sebebiyle ilk olarak bir süvari alayında yüzbaşı rütbesi ile görev yaptı. Ancak gözlerinin ileri derecede bozuk olması ve matematiğe olan yoğun ilgisi ve yeteneği sonucu askerliği bırakarak tamamen matematiğe yöneldi.

Dönemin ünlü matematikçilerinden Johann Bernoulli'nin yönetiminde çalıştı ve amatör olarak ilgilendiği matematikte kendisini yetiştirdi. Aralarından Isaac Newton gibi pek çok önemli bilim insanının çözmek için uğraştığı Brachystochrone adı verilen problemi çözdü. 1693 yılında Paris Bilimler Akademisi'ne onursal üye olarak seçildi.

L-Hospital Kuralı


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par M^r le Marquis DE L'HOSPITAL.
SECONDE EDITION.
A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT, Quay des Augustins.
MDCCXV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

En ünlü eseri 1692 yılında yazdığı ve 1696'da yayımlanan "**Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes**"dir. Bu kitap diferansiyel analiz üzerine yazılmış ilk ders kitabıdır. **L'Hopital Kuralı** olarak bilinen yöntemi de ilk kez bu kitapta açıklamıştır.

Limitte $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ olması durumunda pay ve paydanın türevinin ayrı ayrı alınması kuralına denir. Belirsizlik durumu ortadan kalkıncaya kadar türev almaya devam edilmesiyle, limitteki belirsizlik durumunu ortadan kaldıran önemli bir kuraldır.

Ancak yöntemin aslında **Johann Bernoulli** tarafından bulunduğu kabul edilse de bu kural halen L-Hospital ismi ile kaynaklarda yer almaya devam etmektedir. L'Hospital, Bernoulli ile belli bir miktar aylık karşılığı anlaşma yapmış, birtakım problemleri ona çözdürmüş ve anlaşmayı kimseye söylememesini ondan istemiştir.

L'Hospital'in 1696'da yayımladığı matematik kitabıyla dünyaya tanıttığı bu kural yakın zamanda keşfedilmiştir ki kuralın ispatı ve örnekleri, Bernoulli'nin 1694 yılında L'Hospital'e yazdığı bir mektupta aynen bulunmaktadır.

Süreklilik

- $A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun $a \subset A$ olmak üzere;

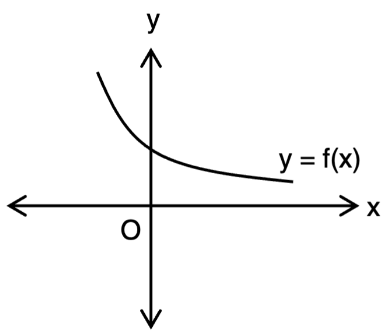
  $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu x = a noktasında süreklidir.

  $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonu x = a noktasında sağdan süreklidir.

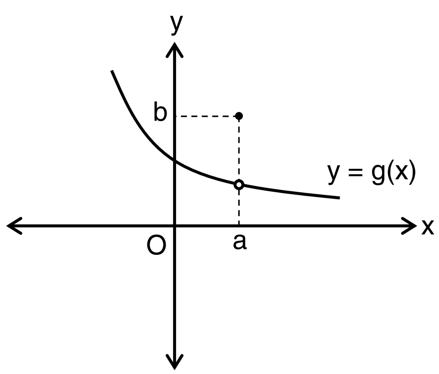
  $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonu x = a noktasında soldan süreklidir.

  Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonu A kümesinde süreklidir.

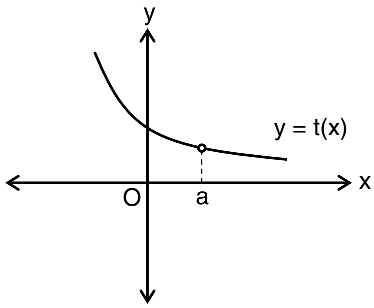
- Aşağıda grafiği verilen f fonksiyonu her x gerçek sayısı için tanımlı ve her noktadaki limiti fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olacağından fonksiyon her x gerçek sayısı için süreklidir.
- Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R}$ olur.



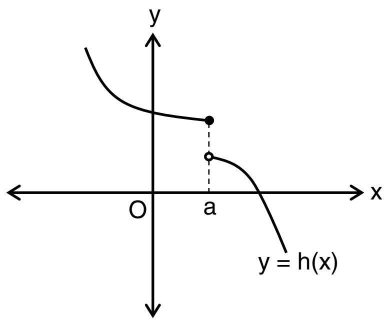
- Aşağıda grafiği verilen g fonksiyonu x = a noktasında tanımlı ve limite sahip olmasına rağmen bu noktadaki limiti görüntüsüne eşit olmadığından g fonksiyonu x = a apsisli noktasında sürekli değildir.
- Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{a\}$ olur.



- Aşağıda grafiği verilen t fonksiyonu x = a noktasında tanımlı olmadığından t fonksiyonu x = a apsisli noktasında sürekli değildir.
- Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{a\}$ olur.



- Aşağıda grafiği verilen h fonksiyonu x = a noktasında tanımlı olmasına rağmen bu noktada limiti olmadığından fonksiyon x = a noktasında sürekli değildir.
- Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{a\}$ olur.

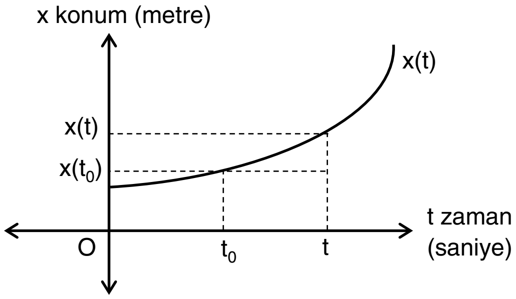


DİKKAT

- [a, b]'nda tanımlı bir fonksiyon (a, b)'nda sürekli, x = a noktasında sağdan sürekli, x = b apsisli noktasında soldan sürekli ise f fonksiyonu [a, b]'nda süreklidir denir.
- Polinom fonksiyonların en geniş tanım kümesi gerçek sayılar kümesidir. Her noktadaki limiti, o noktadaki görüntüsüne eşit olduğu için polinom fonksiyonlar her x gerçek sayısı için süreklidir.
- f(x) ve g(x) birer polinom fonksiyonu olmak üzere $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ fonksiyonu, f(x) ve g(x) fonksiyonlarının ortak tanımlı oldukları en geniş kümede süreklidir.

Anlık Değişim Oranı ve Türev

- Doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği verilmiştir. Bu hareketlinin t_0. ve t. saniyeler arasında ortalama hızı; bu hareketlinin konumundaki değişiminin, zamandaki değişime oranı ile hesaplanır.



V_{ort}, bu hareketlinin t_0. ve t. saniyeler arasında ortalama hızı

Δ_x, konumdaki değişimi

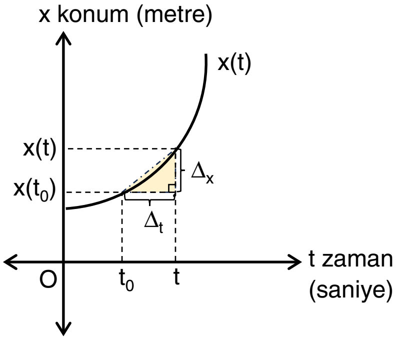
Δ_t, zamandaki değişimi olmak üzere;

$$V_{ort} = \frac{\Delta_x}{\Delta_t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

Burada Δ_x, x bağımlı (t'ye bağlı) değişkenin değişimidir.

Δ_t, bağımsız değişkenin değişimidir.

Buna göre $V_{ort} = \frac{\Delta_x}{\Delta_t}$ ifadesine **değişim oranı** denir.



- Doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği gösterilmiştir. Bu hareketlinin t_0. ve t. saniyeleri arasındaki ortalama hızı

$$V_{ort} = \frac{\Delta_x}{\Delta_t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

olup bu hareketlinin t_0 anındaki anlık hızı bulunmak istenirse t'nin t_0'a yaklaşırken fonksiyonun değişim oranı hesaplanır. Bu oran

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

- Bir fonksiyonun t_0 anındaki anlık değişim oranına ise fonksiyonun t_0 noktasındaki türevi denir ve bu türev

  $x'(t_0),\ \frac{d}{dx}(x(t_0)),\ Dx(t_0)$

  sembolleri ile gösterilir.

  Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi aynı noktadaki teğetinin eğimine eşittir.

- $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için

  $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti varsa bu limit değerine f fonksiyonunun x = a noktasındaki **soldan türevi** denir ve $f'(a^-)$ ile gösterilir.

  $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti varsa bu limit değerine f fonksiyonunun x = a noktasındaki **sağdan türevi** denir ve $f'(a^+)$ ile gösterilir.

- $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için f fonksiyonu sürekli ve

  $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ eşitliği sağlanıyor ise

  $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limitine f fonksiyonunun x = a noktasındaki **türevi** denir ve $f'(a)$ ile gösterilir.

- f fonksiyonunun x = a noktasında türevi olan $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ifadesinde

  $x - a = h$ dönüşümü yapılırsa

  $x = a + h$ ve $x \to a \Rightarrow h \to 0$ olur.

  Bu durumda f fonksiyonunun x = a noktasında türevi $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ biçiminde ifade edilebilir.

Türevin Keşfi

Türev, matematikte bir fonksiyonun değişkenindeki küçük bir değişime karşılık gelen fonksiyonun değerindeki değişimi veren kavramdır.

Türev, fonksiyonların incelenmesinde, analizde, geometride, fizikte, mühendislikte ve daha birçok alanda önemli bir yol oynar.

Türev analitik geometrinin ve modern matematiğinin temelini oluşturur.

Türevin ilk kavramsal temelleri antik Yunan matematikçilerinin çalışmalarının temelinde yatmaktadır. Ortaçağda Arap matematikçiler türevin gelişimine katkıda bulunmuşlardır. Örneğin, Ömer Hayyam bir fonksiyonun bir noktadaki eğimini veren kavramı tanımlamıştır.

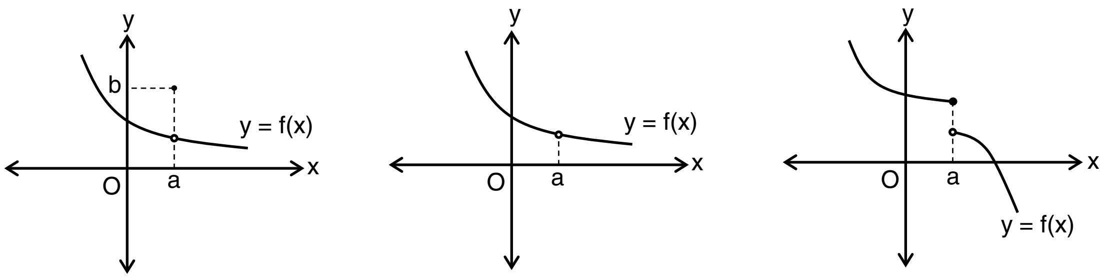
17. yüzyılda İngiliz matematikçi Isaac Newton ve Alman matematikçi Gottfried Wilhelm Leibniz bağımsız olarak türevin modern kavramını geliştirmişler.

Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz türevin fonksiyonların incelenmesinde ve analizde önemli bir araç olduğunu göstermişler.

Isaac Newton türevi, hareket yasalarını formüle etmek için kullanabileceğini, Gottfried Wilhelm Leibniz ise türevi, fonksiyonların grafiklerini çizmek için kullanabileceğini fark etmiştir. Leibniz'in geliştirdiği türev kavramı bugün matematikte kullanılan kavramdır.

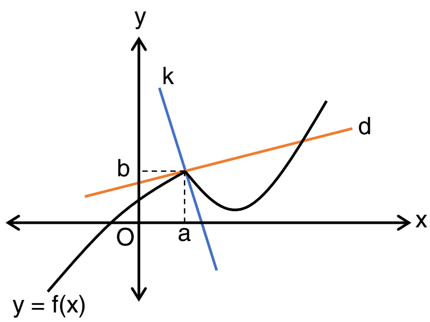
Kaynak: http://meb.ai/UfrL4kQ

- $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$ olur.
- $a \in \mathbb{R}$ ve n bir rasyonel sayı olmak üzere $f(x) = a \cdot x^n$ ise $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ olur.
- f(x) fonksiyonun türevi $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ için $\frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2f(x)}{dx} = f''(x)$ ifadesine f(x) fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi denir.
- $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için f sürekli olmak üzere f fonksiyonunun x = a noktasındaki soldan ve sağdan türevleri birbirine eşit ise f fonksiyonu x = a noktasında türevlenebilir. Yani; $f'(a^-) = f'(a^+) = k$ ise $f'(a) = k$ olur.
- Bir f fonksiyonu (a, b)'ndaki her noktada türevlenebilir ise bu fonksiyon (a, b)'nda türevlenebilirdir.
- $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için f fonksiyonu x = a noktasında sürekli değilse bu noktada türevi yoktur.



Yukarıdaki grafikleri verilen fonksiyonlar x = a noktasında sürekli olmadıklarından bu noktada türevli değildir.

- $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için f fonksiyonu x = a noktasında sürekli olsa bile türevlenebilir olmayabilir.



Yukarıda verilen y = f(x) fonksiyonunun grafiği incelenirse a noktasına soldan yaklaşırken eğriye çizilen teğetin d doğrusu ve a noktasına sağdan yaklaşırken çizilen teğetin k doğrusu olduğu görülür.

- Bu durumda d doğrusunun eğimi m_d ve k doğrusunun eğimi m_k olarak ifade edilirse $f'(a^-) = m_d$ ve $f'(a^+) = m_k$ olur.
- Burada $m_d \neq m_k$ olduğundan fonksiyonun a noktasındaki sağdan ve soldan türevleri farklıdır.
- O hâlde f fonksiyonunun x = a noktasında türevi yoktur.
- f fonksiyonunun x = a apsisli noktasında sürekli olmasına rağmen bu noktada türevi yoktur.
- Bu tür noktalara fonksiyonun **kırılma noktası** denir.

TÜREVLENEBİLEN İKİ FONKSİYONUN TOPLAMININ, FARKININ, ÇARPIMININ VE BÖLÜMÜNÜN TÜREVİ

- Türevlenebilen iki fonksiyonun toplamlarının türevi fonksiyonların türevlerinin toplamıdır.

  $(f + g)(x)$ fonksiyonunun türevi $\dfrac{d}{dx}(f + g)(x) = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ olur.

- Türevlenebilen iki fonksiyonun farkının türevi fonksiyonların türevlerinin farkıdır.

  $(f - g)(x)$ fonksiyonunun türevi $\dfrac{d}{dx}(f - g)(x) = (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$ olur.

- $f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

  $(f \cdot g)(x)$ fonksiyonunun türevi $\dfrac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ olur.

- $f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonunun türevi

  $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f}{g}(x)\right) = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$ olur.

Michel ROLLE (Mişel ROL) (1652 - 1719)

1652 yılında Fransa'da doğan ve bir ilkokul öğretmeni olan Rolle, çağdaşları olan Newton (Nivton) ve Leibnitz'in (Leyibnitz) sistematik olarak geliştirdikleri diferansiyel ve integral hesap kuramının karşıtlarından ve en çok eleştirenlerden biri olmasına rağmen polinomların köklerini araştırırken bulmuş olduğu ve günümüzde kendi ismi ile anılan Rolle teoremi bu kuramın temel yapı taşlarından biri olmuştur. Rolle aynı zamanda bir x sayısının n. dereceden kökünü temsil etmede kullandığımız $\sqrt[n]{x}$ sembolünü ilk kullanan kişi olarak da bilinmektedir.

(Zill ve Warren, 2013)

İKİ FONKSİYONUN BİLEŞKESİNİN TÜREVİ

- f ve g türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere;

  $y = (fog)(x) = f(g(x))$ **bileşke fonksiyonunun türevi** $y' = (fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ tir.

- Bu kuralın nasıl elde edildiğini gösterelim. $y = (fog)(x) = f(g(x))$ bu ifade de $u = g(x)$ dönüşümü yapılırsa $u = g(x)$ ve $y = f(u)$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} y = f(u) \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = f'(u) \\[2ex] u = g(x) \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = g'(x) \end{array}\right\}$$

İfadeleri taraf tarafa çarpılırsa

x

O halde $y = (fog)(x)$ bileşke fonksiyonunun türevi $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ olarak elde edilir.

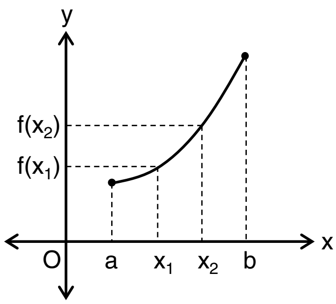
$y = f(u)$ ve $u = g(x)$ olmak üzere $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ ifadesine **zincir kuralı** denir.

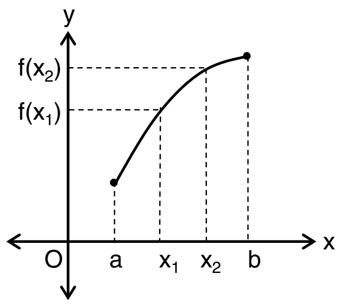
- **Sonuç:** $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Q}$ ve f(x) sıfırdan farklı türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

  $y = a \cdot [f(x)]^n$ ise $y' = a \cdot n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$ olur.

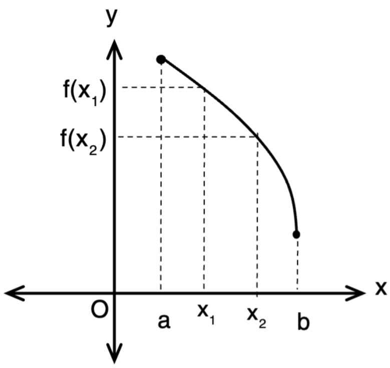
- **Pratik Bilgi:** $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$ olur.

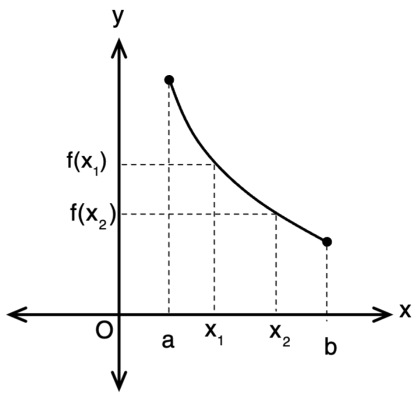
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ve [a, b]'nda sürekli olmak üzere $\forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu [a, b] 'nda artandır.



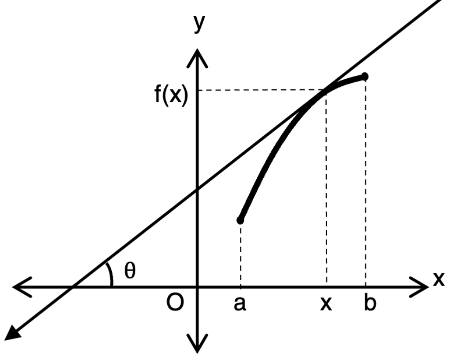


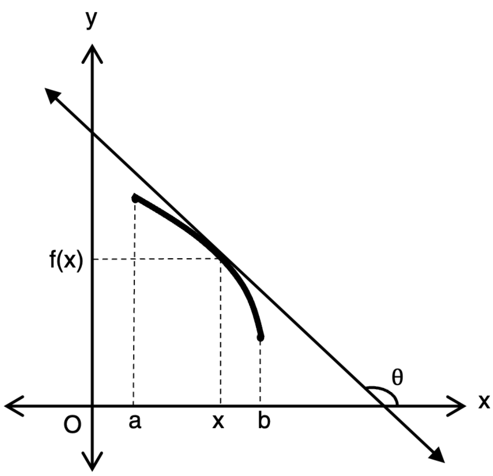
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ve [a, b]'nda sürekli olmak üzere $\forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu [a, b]'nda azalandır.



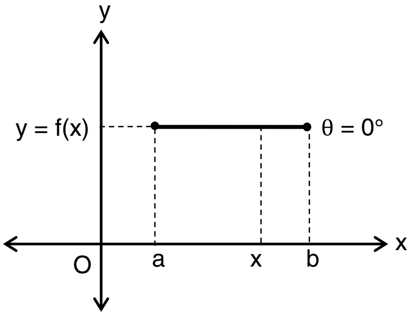


- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu [a, b]'nda artan ise bu aralığın her noktasındaki teğetinin eğimi pozitif (θ dar açı), azalan ise teğetinin eğimi negatiftir (θ geniş açı).





- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $[a, b]$ ’nda sürekli olmak üzere $y = f(x)$ sabit fonksiyon ise $m = \tan\theta = 0$’dır.

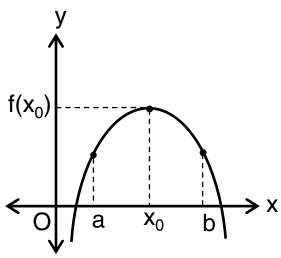


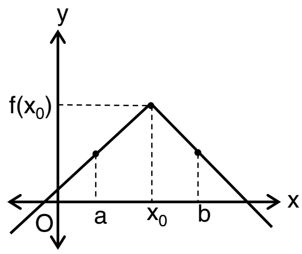
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $[a, b]$ ’nda sürekli olmak üzere $y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) ’nda türevlenebilir olsun.

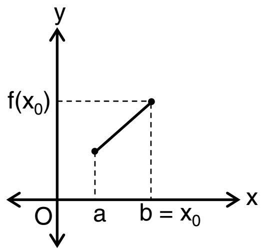
  $\forall x \in (a, b)$ için

  1. $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$’nda artandır.
  2. $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$’nda azalandır.
  3. $f'(x) = 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$’nda sabittir.

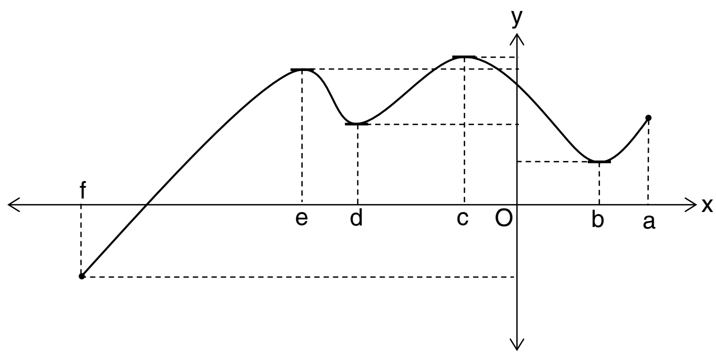
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $(a, b) \subset A$ olmak üzere bir $x_0 \in (a, b)$ için fonksiyonun bu aralıktaki en büyük değeri $f(x_0)$ oluyorsa $(x_0, f(x_0))$ noktasına bir f fonksiyonunun **yerel maksimum noktası** denir.



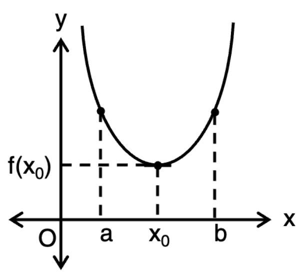


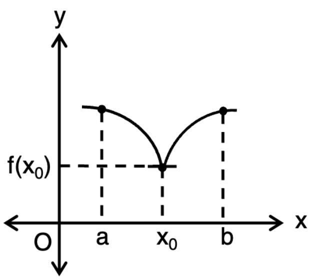


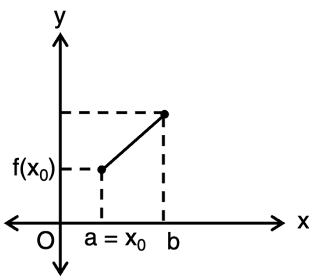
- Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki en büyük değerini aldığı noktaya **mutlak maksimum noktası**, en büyük değerine ise **mutlak maksimum değeri** denir.



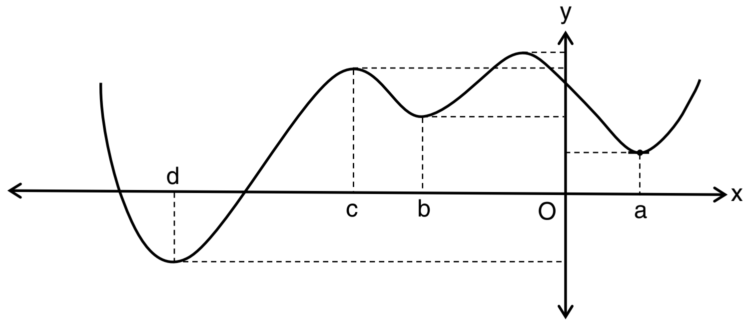
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $(a, b) \subset A$ olmak üzere bir $x_0 \in (a, b)$ için fonksiyonun bu aralıktaki en küçük değeri $f(x_0)$ oluyorsa $(x_0, f(x_0))$ noktasına bir f fonksiyonunun **yerel minimum noktası** denir.





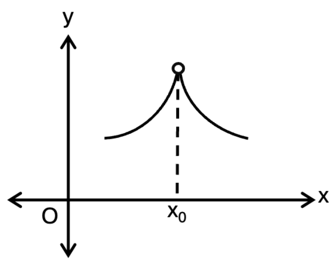


- Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki en küçük değerini aldığı noktaya **mutlak minimum noktası**, en küçük değerine ise **mutlak minimum değeri** denir.

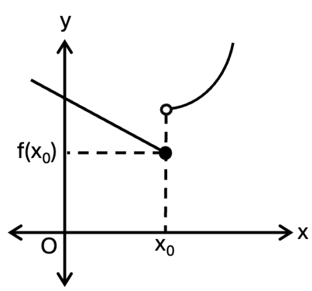


- Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına genel olarak **ekstremum noktaları** denir.

- Aşağıda grafiği verilen fonksiyon x_0 apsisli noktada tanımlı olmadığı için bu noktada ekstremum noktası yoktur.

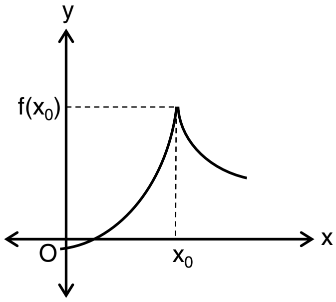


- Aşağıda grafiği verilen fonksiyon x_0 apsisli noktada tanımlı ve tanım değeri fonksiyonun minimum değeridir. Fonksiyonun yerel minimum değeri $f(x_0)$'a eşittir.

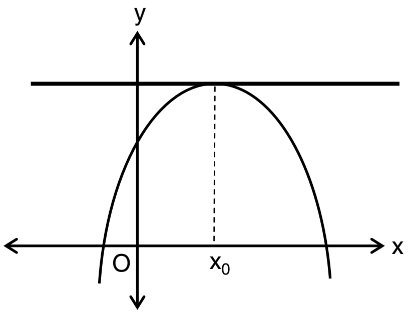


- Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun x_0 apsisli nokta kırılma noktası olduğundan fonksiyonun x_0 noktasında türevi yoktur.

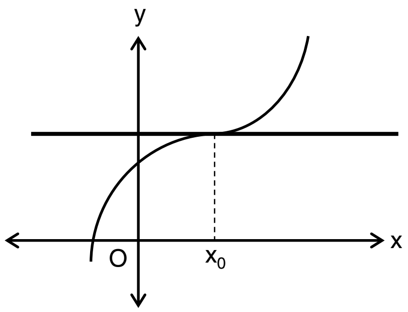
  Ancak fonksiyonun $(x_0, f(x_0))$ noktasında bir yerel maksimumu vardır.



- Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun x_0 apsisli noktasında bir ekstremum noktası vardır. Bu noktada çizilen teğet x eksenine paralel olacağından bu teğetin eğimi sıfırdır. Bu yüzden $f'(x_0) = 0$ olur.



- Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun x_0 apsisli noktasında teğetinin eğimi sıfır ($f'(x_0) = 0$) olmasına rağmen bu nokta ekstremum noktası değildir.



- Bir fonksiyonun grafiği çizilirken tanım kümesine dikkat edilmelidir.

- Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalara bakılmalıdır. $f(x) = 0$ denkleminin tek katlı köklerinde grafik x eksenini keserken çift katlı köklerinde x eksenine teğet olur.

- Fonksiyonun türevi yardımıyla varsa ekstremum noktaları bulunur ve artan ile azalanlık durumları incelenmelidir.

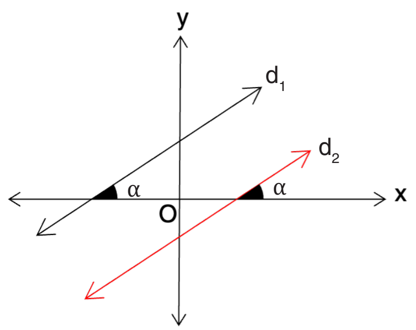
- $y = mx + n$ biçiminde verilen doğrunun eğimi m'dir.

- $ax + by + c = 0$ biçiminde verilen bir doğrunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ olur.

- Grafiği verilen bir doğrunun eğimi, bu doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α olmak üzere $m = \tan\alpha$ olur.

- $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur.

- Paralel iki doğrunun eğimleri birbirine eşittir.

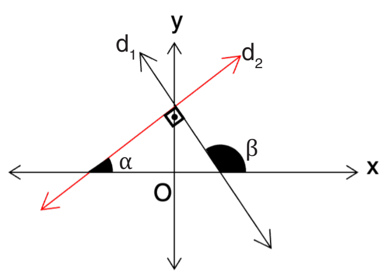


d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri sırasıyla

m_1 ve m_2 olmak üzere

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ olur.

- Birbirine dik olan iki doğrunun eğimleri çarpımı –1 olur.



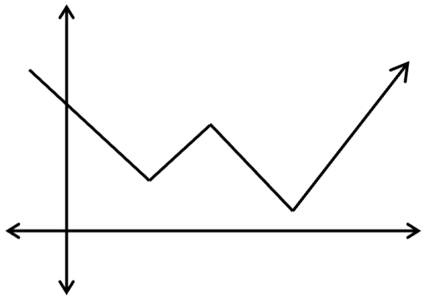
d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri sırasıyla

m_1 ve m_2 olmak üzere

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ olur.

- $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen eğimi m olan doğrunun denklemi $y - y_0 = m(x - x_0)$ olarak bulunur.

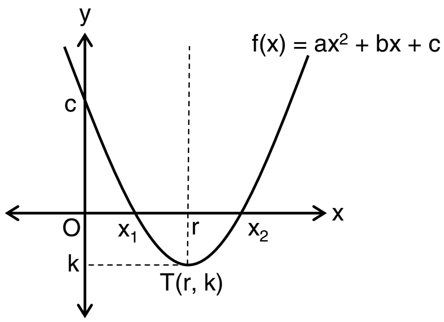
- Bilimde, iş hayatında ve mühendislikte bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerinden sıklıkla yararlanılır. Örneğin; her işte minimum harcama ile maksimum kazanç elde edilmek amaçlanır.



- Maksimum veya minimum problemlerinde en büyük ya da en küçük olması istenen değeri, tek değişkene bağlı bir fonksiyon olarak ifade ettikten sonra bu fonksiyonun maksimum ve minimum değeri araştırılır.
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli fonksiyonun grafiğine **parabol** denir. Parabolün kollarının baktığı yöne göre maksimum ya da minimum değerlerinden birini alır.

  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $f(x) = ax^2 + bx + c$ denklemi koordinat düzleminde parabol belirtir.

  Örneğin $a > 0$ için parabolün minimum değeri vardır ve bu değer $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ olur.



- Maksimum ya da minimum değeri bulunmak istenilen denklem tek değişken ile ifade edildikten sonra bu denkleminin birinci türevi alınarak kökü bulunur. Daha sonra bu bulunan kök değeri denklemde yerine yazıldığında ise parabolün minimum değerini buluruz.

  $f'(x) = 2ax + b = 0$ denkleminin kökü $x = -\dfrac{b}{2a}$ olur.

  Bulduğumuz değer fonksiyonda yerine yazılırsa

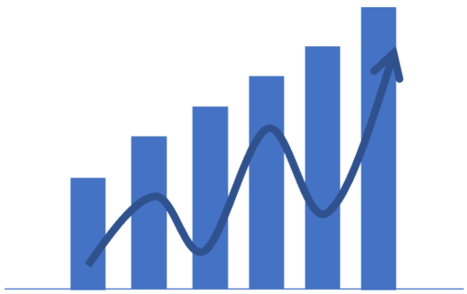
  $$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

  $$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ bulunur.}$$

  Buna göre $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = k$ olduğunu göstererek parabolün maksimum ya da minimum değeri türev yardımıyla bulunur.

Günlük Hayatta Türevin Yeri

- Türev ekonomi, finans gibi alanlarda önemli rol oynar.
- Piyasa talep ve arz eğrilerini analiz etmek, marjinal gelir ve maliyetleri hesaplamak ve gelecekteki ekonomik eğilimleri tahmin etmek için kullanılır.
- Bir malın talep fonksiyonun türevi, o malın fiyatındaki bir değişikliğe karşılık gelen talepteki değişikliğe eşittir.
- Bir şirketin gelirinin zamanla nasıl değiştiğini analiz etmek veya bir hisse senedinin fiyatının ne kadar hızlı değiştiğini belirlemek için türev kullanılır.



- Türevin temel bir uygulaması da optimizasyondur. Bir fonksiyonun kritik noktalarını bulmak için türevden yararlanılır. Kritik noktalar, fonksiyonun maksimum, minimum veya eyer noktalarıdır. Bu gerçek hayatta maliyeti en aza indirmek, kârı en üst düzeye çıkarmak veya yolculuk süresini optimize etmek gibi problemlerde kullanılır.
- İstatistik ve veri analizi gibi alanlarda da kullanılır. Örneğin, bir veri setindeki trendleri belirlemek veya bir değişkenin diğer değişkenlere olan etkisini analiz etmek için türev kullanılır.

- F(x) fonksiyonunun türevi f(x) olsun. f(x) fonksiyonunun türevi alınmadan önceki hâli olan F(x) fonksiyonuna f(x) fonksiyonunun **ters türevi** veya **belirsiz integrali** denir.

- Bir fonksiyonun ters türevini bulma işlemine **integral alma işlemi** denir.

- Bir f(x) fonksiyonunun belirsiz integrali $\int f(x)dx$ biçiminde ifade edilir. Bu integralin bulunması için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde bir F(x) fonksiyonu araştırılır ve c sabit sayısı bu fonksiyona eklenerek f(x) belirsiz integrali F(x) + c olarak elde edilir.

- Burada c sabit sayısına, **integral sabiti** denir.

- $\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow \frac{d}{dx}\int f(x)dx = \overbrace{\frac{d}{dx}(F(x)+c)}^{f(x)}$ **(Eşitliğin her iki tarafının türevi alınır.)**

  $\Rightarrow \frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ olur.

- $n \neq -1$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \Rightarrow F'(x) = x^n$ olduğundan $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ olur.

- $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ olur.

  $\frac{d}{dx}\int a \cdot f(x)dx = a \cdot f(x)$ **..(1)**

  $\frac{d}{dx}\left(a \cdot \int f(x)dx\right) = a \cdot \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = a \cdot f(x)$ **..........(2)**

  (1) ve **(2)** eşitliklerinden $\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx$ olur.

- f(x) ve g(x) sürekli fonksiyonlar olmak üzere;

  $\frac{d}{dx}\int [f(x) \pm g(x)]dx = f(x) \pm g(x)$ **......................................(1)**

  $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)dx \pm \frac{d}{dx}\int g(x)dx$

  $= f(x) \pm g(x)$ **..............................(2)**

  (1) ve **(2)** eşitliklerinden

  $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

  $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

  olur.

- Türevlenebilir bir f(x) fonksiyonunun türevi $\frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x)$ olmak üzere d(f(x)) ifadesine f(x) fonksiyonunun **diferansiyeli** denir ve d(f(x)) = f′(x)dx olur.

- İntegral alma kuralları ile alınması zor olan bazı integraller değişken değiştirme yöntemi kullanılarak daha basit integraller haline getirildikten sonra kolayca integrali alınır.

- $n \neq 0$, $n \neq -1$ olmak üzere

  $\int f(x)^n . f'(x)dx$ biçimdeki integrallerde sırasıyla aşağıdaki adımlar uygulanır:

  f(x) = u dönüşümü yapılır. Sonra her iki tarafın diferansiyeli alınır.

  f′(x)dx = du olur. Buradan dönüşüm ve diferansiyel verilen integralde yerine yazılarak

  $\int f(x)^n . f'(x)dx = \int u^n . du$ elde edilir.

  $= \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ (Yeni elde edilen u değişkenine bağlı integral alınır.)

  $= \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$ (Bulunan ifadede u yerine eşiti olan f(x) yazılarak integral alma işlemi tamamlanır.)

- $f(x) \neq 0$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

  $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx$ biçimindeki integrallerde dönüşümü yapılır.

  $f(x) = u \Rightarrow f'(x)dx = du$ olur.

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = \int \underbrace{\frac{1}{[f(x)]^n}}_{\frac{1}{u^n}} \cdot \underbrace{f'(x)dx}_{du} = \int \frac{1}{u^n}du$$

$$= \int u^{-n}du$$

$$= \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + c$$

$$= \frac{[f(x)]^{1-n}}{1-n} + c \text{ bulunur.}$$

- $\int f'(g(x)) \cdot g'(x)dx = du$ biçimindeki integrallerde g(x) = u dönüşümü yapılır.

  $g(x) = u \Rightarrow g'(x)dx = du$

$$\underbrace{\int f'(g(x))}_{f'(u)} \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f'(u)du$$

$$= f(u) + c$$

$$= f(g(x)) + c \text{ olur.}$$

Diferansiyel Kavramı

- Diferansiyel, matematiksel bir kavramdır ve ilk olarak Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz tarafından bağımsız olarak geliştirilmiştir.

- Diferansiyel, bir fonksiyonun bir noktadaki eğiminin ve değişim oranının hesaplanmasını sağlar. Bu sayede bir fonksiyonun belirli bir noktada ne kadar hızlı değiştiği ya da ne kadar eğimde olduğu gibi bilgiler elde edilebilir.

- Diferansiyel, matematiksel analizin temel kavramlarından biridir ve birçok uygulama alanında kullanılır. Fizik, mühendislik ve ekonomi gibi disiplinlerde çokça kullanılan bir yöntemdir. Özellikle, hareketli cisimlerin hızı ve ivmesi gibi problemlerin çözümünde sıkça kullanılır

- Karmaşık sistemlerin analiz edilmesinde büyük bir fayda sağlar.

- Newton ve Leibniz'in diferansiyel kavramını geliştirmesi, diferansiyel denklemler, integral hesaplama gibi konularda büyük bir ilerleme sağlamıştır. Bu sayede birçok karmaşık problemin çözümü daha kolay hale gelmiştir.

- **Mühendislikteki Uygulamalar:** Diferansiyel uygulamaları, mühendislikte birçok alanda yaygın olarak kullanılır. Elektrik mühendisliğinde devre analizi, mekanik mühendisliğinde hareketli sistemlerin modellenmesi ve inşaat mühendisliğinde yapıların davranışının analizi gibi birçok uygulamada diferansiyel uygulamaları kullanılır.

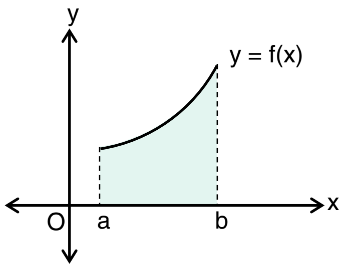
- **Fiziksel Uygulamalar:** Diferansiyel uygulamaları, fizikte çeşitli problemlerin çözümünde kullanılır. Örneğin, hareket problemleri, termodinamik problemleri ve elektriksel alan problemleri gibi birçok fiziksel problemin analizinde diferansiyel uygulamaları kullanılır.

- **Ekonomi ve Finansta Uygulamalar:** Ekonomi ve finans alanında, diferansiyel uygulamaları optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılır. Örneğin, şirketin karını maksimize etmek veya riski minimize etmek gibi problemleri çözmek için diferansiyel uygulamaları kullanılır. Ayrıca, finansal piyasalarda gelecekteki fiyat tahminlerinde diferansiyel uygulamaları kullanmak da yaygındır.

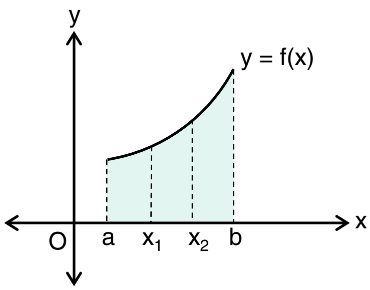
- **Tıp ve Biyolojide Uygulamalar:** Diferansiyel uygulamaları, tıpta ve biyolojide birçok alanda kullanılır. Örneğin, bir ilacın vücuttaki etkisini modellemek veya genetik popülasyon dinamiklerini analiz etmek gibi problemlerde diferansiyel uygulamalarından yararlanılır.

- Diferansiyel hesaplama, matematiksel fonksiyonların değişimi hakkında bilgi sağlayan bir matematik dalıdır. Bu dalın temel yöntemleri şunlardır: Türev alma, integral hesaplama, limitsiz işlemler, Taylor serisi ve nümerik yöntemlerdir.

- Aşağıda [a, b]'nda tanımlı y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. [a, b]'nda y = f(x) eğrisi ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı Alman matematikçi Bernhard Riemann tarafından hesaplanmıştır.



- [a, b]'nda $a < x_1 < x_2 < b$ olmak üzere $a = x_0$ ve $b = x_3$ seçilerek oluşturulan $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ kümesine [a, b]'nın bir bölüntüsü denir. Bu bölüntü eşit aralıklarla olmak zorunda değildir.

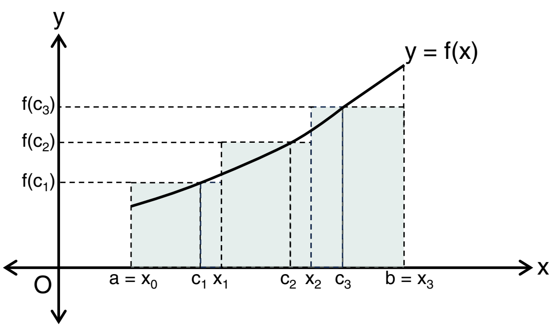


Eğer [a, b], n tane eşit aralığa bölünecek olursa ortak genişlik $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}$ olur.

- $c_1 \in [x_0, x_1]$ için $f(c_1)$, $[x_0, x_1]$'nın görüntü kümesinin bir elemanı,

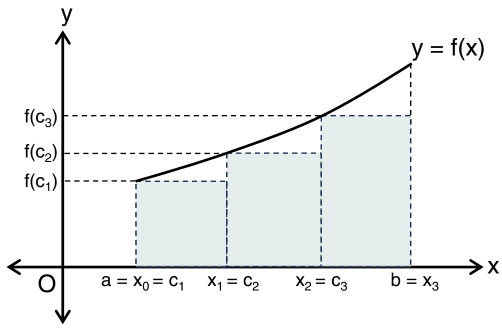
  $c_2 \in [x_1, x_2]$ için $f(c_2)$, $[x_1, x_2]$'nın görüntü kümesinin bir elemanı,

  $c_3 \in [x_2, x_3]$ için $f(c_3)$, $[x_2, x_3]$'nın görüntü kümesinin bir elemanı olmak üzere



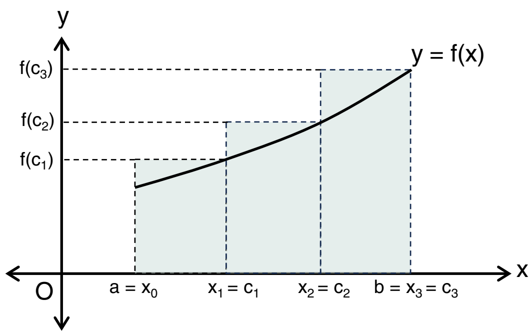
Grafikte oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren $\Delta x \cdot f(c_1) + \Delta x \cdot f(c_2) + \Delta x \cdot f(c_3)$ toplamına f(x) fonksiyonunun [a, b]'na ait bir **Riemann toplamı** denir. Burada [a, b], 3 alt aralığa ayrılmıştır. Eğer [a, b] daha fazla alt aralığa ayrılacak olursa bulunan Riemann toplamının değeri, eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

- $c_1 \in [x_0, x_1]$ için $f(c_1)$, $[x_0, x_1]$'nın görüntü kümesinin en küçük elemanı,
  $c_2 \in [x_1, x_2]$ için $f(c_2)$, $[x_1, x_2]$'nın görüntü kümesinin en küçük elemanı,
  $c_3 \in [x_2, x_3]$ için $f(c_3)$, $[x_2, x_3]$'nın görüntü kümesinin en küçük elemanı olmak üzere



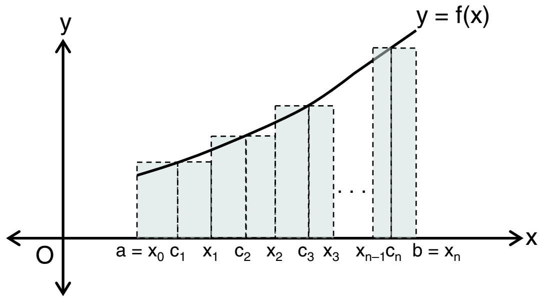
Grafikte oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren $\Delta x \cdot f(c_1) + \Delta x \cdot f(c_2) + \Delta x \cdot f(c_3)$ toplamına f(x) fonksiyonunun [a, b]'na ait bir **Riemann alt toplamı** denir. Burada [a, b], 3 alt aralığa ayrılmıştır. Eğer [a, b] daha fazla alt aralığa ayrılacak olursa bulunan Riemann alt toplamının değeri, eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

- $c_1 \in [x_0, x_1]$ için $f(c_1)$, $[x_0, x_1]$'nın görüntü kümesinin en büyük elemanı,
  $c_2 \in [x_1, x_2]$ için $f(c_2)$, $[x_1, x_2]$'nın görüntü kümesinin en büyük elemanı,
  $c_3 \in [x_2, x_3]$ için $f(c_3)$, $[x_2, x_3]$'nın görüntü kümesinin en büyük elemanı olmak üzere



Grafikte oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren $\Delta x \cdot f(c_1) + \Delta x \cdot f(c_2) + \Delta x \cdot f(c_3)$ toplamına f(x) fonksiyonunun [a, b]'na ait bir **Riemann üst toplamı** denir. Burada [a, b], 3 alt aralığa ayrılmıştır. Eğer [a, b] daha fazla alt aralığa ayrılacak olursa bulunan Riemann üst toplamının değeri, eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

•



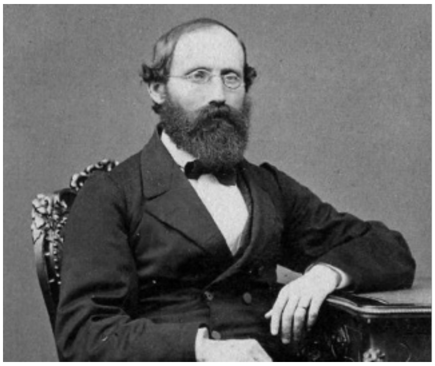
f fonksiyonunun [a, b]'nda hesaplanan Riemann toplamı A ise y = f(x) eğrisinin altında kalan alan yaklaşık olarak

$A = \Delta x \cdot f(c_1) + \Delta x \cdot f(c_2) + \Delta x \cdot f(c_3) + ... + \Delta x \cdot f(c_n) = \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(c_k)$ olur.

Buna göre Riemann toplamı n'nin sonsuza yaklaşması durumunda y = f(x) ile x ekseni arasında kalan alanı vereceğinden bu alan, $\lim_{x\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(c_k))$ limiti ile hesaplanır.

Ayrıca $\lim_{x\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(c_k))$ değerine y = f(x) fonksiyonunun [a, b]'ndaki belirli integrali denir ve $\sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(c_k) = \int_a^b f(x)dx$ şeklinde gösterilir.

Bernhard Riemann



Bernhard Riemann, 17 Eylül 1826 tarihinde Almanya'nın Hannover kentinde doğmuştur. Matematiğe olan ilgisini erken yaşlarda göstermiş ve öğrenim hayatına Hannover'de başlamıştır. Üniversite eğitimi için Göttingen Üniversitesi'ne gitmiş ve burada Carl Friedrich Gauss ve diğer ünlü matematikçilerle tanışma fırsatı bulmuştur ve Gauss'un öğrencisi olmuştur.

Riemann, matematik alanındaki başarısıyla dikkat çekmiş ve doktora tezini tamamlayarak Göttingen Üniversitesi'nden mezun olmuştur. Daha sonra matematik alanında öğretim görevlisi ve ardından profesör olarak görev yapmıştır.

Bernhard Riemann, matematik alanında yaptığı özgün ve derin çalışmalarıyla ün kazanmıştır. Özellikle diferansiyel geometri ve karmaşık analiz alanlarında yaptığı çalışmalar, matematik dünyasında büyük bir etki yaratmıştır.

Riemann'ın 1854 yılında yayımladığı geometrinin temelleri üzerine yazdığı makalesi, diferansiyel geometri alanında çığır açan bir eserdir. Bu makalede, Riemann, farklı geometrik yapıları ele almış ve eğrilik kavramını geliştirerek matematiğin temel yapı taşlarından birini oluşturmuştur.

Ayrıca, Riemann'ın karmaşık analiz alanında yaptığı çalışmalar, matematiğin bu alanında da önemli ilerlemelere yol açmıştır. Kompleks düzlemde analitik fonksiyonların davranışını inceleyerek, bu alanda önemli teoremler ve yöntemler geliştirmiştir.

Kaynak: http://meb.ai/L1Mdns

- a ve b gerçek sayılar olmak üzere $\int_a^b f(x)dx$ integraline **belirli integral** denir. a'ya **alt sınır**, b'ye **üst sınır** adı verilir.

  f(x), [a, b]'nda sürekli bir fonksiyon ve $F'(x) = f(x)$ olmak üzere

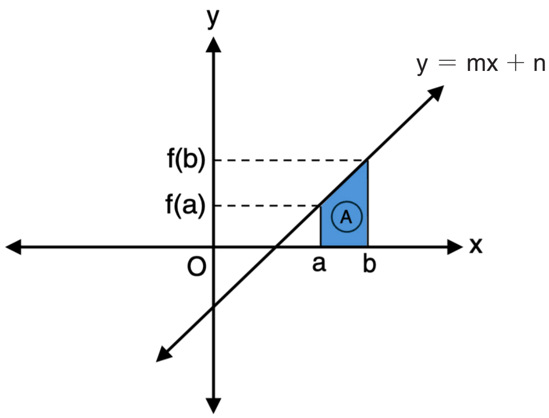
  $$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x) + c]\Big|_a^b$$

  $$\int_a^b f(x)\,dx = (F(b) + c) - (F(a) + c)$$

  $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \text{ olur.}$$

  (Bu işlemde c sabitleri sadeleştiğinden belirli integralde c sabiti bulunmaz.)

- Aşağıda f(x) = mx + n fonksiyonunun grafiği verilmiştir. [a, b]'nda f(x) fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan dik yamuğun alanı A birimkare olsun.



  Bu dik yamuğun alanı hesaplanırsa

  $$A = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a)$$
  $$= \frac{ma + n + mb + n}{2} \cdot (b - a)$$
  $$= \left(m\left(\frac{a + b}{2}\right) + n\right) \cdot (b - a) \text{ olur.}$$

- f(x) fonksiyonun integrali F(x) olsun. $F(x) = \int f(x)dx$ ise $F(x) = \int (mx + n) \cdot dx = \frac{mx^2}{2} + nx + c$ olur.

  $F(x) = \frac{mx^2}{2} + nx + c$ ise

  $$F(b) - F(a) = \left(\frac{mb^2}{2} + nb + c\right) - \left(\frac{ma^2}{2} + na + c\right) = \left(m \cdot \frac{a + b}{2} + n\right) \cdot (b - a) = A \text{ bulunur.}$$

  Sonuç olarak f(x) fonksiyonunun integrali F(x) olmak üzere [a, b]'nda f(x) fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alan F(b) – F(a) olur.

- [a, b] 'nda integrallenebilir f(x) ve g(x) fonksiyonları için;

I. Belirli integralde alt ve üst sınırlar eşit ise belirli integralin değeri sıfırdır.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ olur.}$$

II. Belirli integralde alt ve üst sınırlar yer değiştirirse belirli integral işaret değiştirir.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \text{ olur.}$$

III. a < c < b olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ olur.}$$

IV. Bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının belirli integrali, fonksiyonun belirli integralinin sabitle çarpımına eşittir. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \text{ olur.}$$

V. İki fonksiyonun toplamının ya da farkının belirli integrali, belirli integrallerin toplamına ya da farkına eşit olur.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \text{ olur.}$$

- g(x) ve h(x) gerçek sayılar kümesinde integrallenebilir iki fonksiyon ve $a \le c \le b$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < c \text{ ise} \\ h(x), & x \ge c \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonunun [a, b]'ndaki integralini bulmak için integral, fonksiyonun kuralının değiştiği c noktasına göre

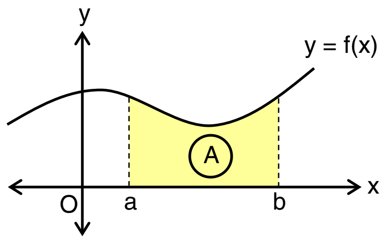
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b h(x)dx$$

biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılabilir.

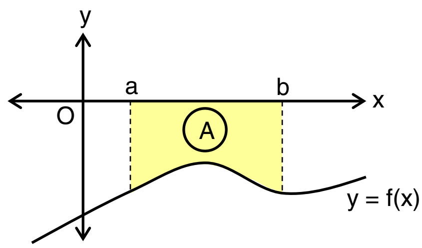
BELİRLİ İNTEGRAL İLE ALAN HESAPLAMA

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı A olmak üzere $A = \int_a^b |f(x)|dx$ ile hesaplanır.

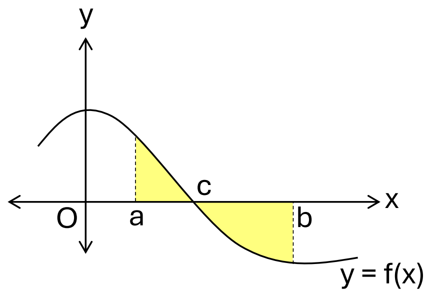
- $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$'nda pozitif değerli ise diğer bir ifadeyle $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı x ekseninin üzerinde kalıyorsa $|f(x)| = f(x)$ olacağından bu bölgenin alanı, A ile gösterilmek üzere, $A = \int_a^b f(x)dx$ ile hesaplanır.



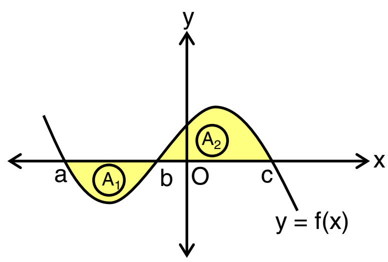
- $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$'nda negatif değerli ise diğer bir ifadeyle $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı x ekseninin altında kalıyorsa $|f(x)| = -f(x)$ olacağından bu bölgenin alanı, A ile gösterilmek üzere,
$A = -\int_a^b f(x)dx$ ile hesaplanır.



- $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$'nda pozitif ve negatif değerlerin her ikisini birden alıyor ise
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq c \text{ ise} \\ -f(x), & c \leq x \leq b \text{ ise} \end{cases}$$
olduğundan $y = f(x)$ fonksiyonun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı, A ile gösterilmek üzere,
$A = A_1 + A_2 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$ ile hesaplanır.



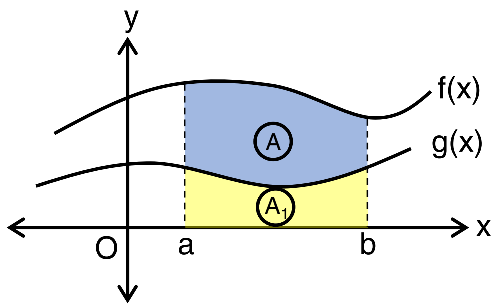
- Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve eksenler arasında kalan sınırlı bölgelerinin alanları A_1 ve A_2 olmak üzere,



I. $\int_a^c f(x)dx = -A_1 + A_2$ olur.

II. $[a, c]$'nda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı $\int_a^c |f(x)|dx = A_1 + A_2$ olur.

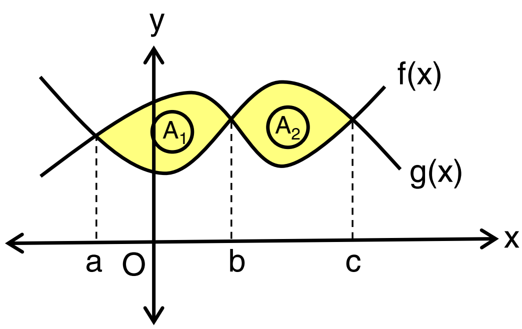
- Aşağıda gösterilen f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri ile x = a ve x = b doğruları arasında kalan sınırlı bölgenin alanı A; g(x) fonksiyonunun grafiği, x = a ve x = b doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı A_1 olmak üzere,



$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= A + A_1\\ \int_a^b g(x)dx &= A_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

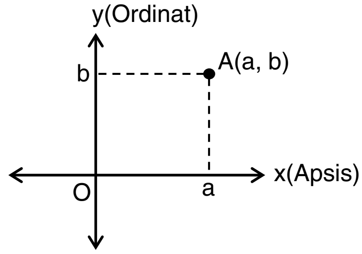
Buradan $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ bulunur.

- Eğer f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibi verilirse boyalı bölgelerin toplam alanı, A_1 ile A_2 alanlarının ayrı ayrı hesaplanarak toplanması ile bulunur.

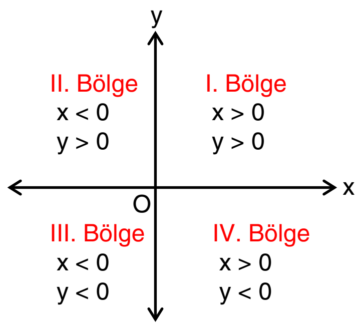


$A = A_1 + A_2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]dx$ şeklinde olur.

- İki sayı doğrusunun 0 (sıfır) sayısına karşılık gelen O noktasında biri yatay diğeri dikey doğruların dik kesişmesiyle oluşan sisteme **dik koordinat sistemi** denir. Bu dik koordinat sisteminin bulunduğu düzleme ise **analitik düzlem** denir.



- Yatay olarak alınan eksene x ekseni (apsis ekseni) denir.
- Dikey olarak verilen eksene y ekseni (ordinat ekseni) denir.
- Koordinat sistemi üzerinde alınan herhangi bir A(a, b) için x = a ve y = b doğrularının kesiştiği noktaya **A noktasının koordinatları** denir.
- Koordinat sisteminde x ekseni üzerinde bulunan bir noktanın koordinatları (x, 0) biçimindedir.
- Koordinat sisteminde y ekseni üzerinde bulunan bir noktanın koordinatları (0, y) biçimindedir.
- Yatay ve dikey eksenlerin kesim noktasına O(0, 0) **başlangıç noktası (orijin)** denir.
- Koordinat sistemini oluşturan eksenler analitik düzlemi dört bölgeye ayırır.



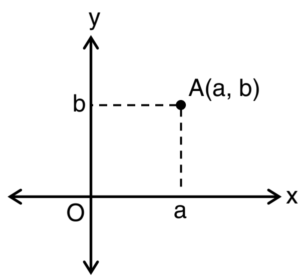
$x > 0$ ve $y > 0$ ise A noktası I. bölgededir.

$x < 0$ ve $y > 0$ ise A noktası II. bölgededir.

$x < 0$ ve $y < 0$ ise A noktası III. bölgededir.

$x > 0$ ve $y < 0$ ise A noktası IV. Bölgededir.

- Koordinat düzleminde bulunan herhangi bir A(a, b) noktasının;

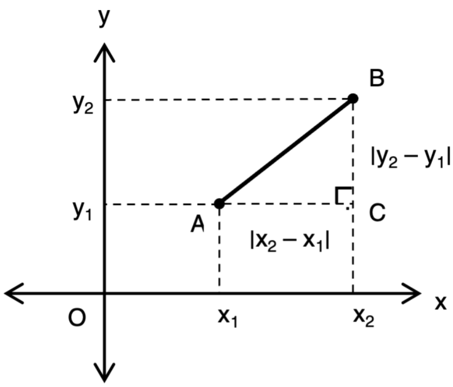


x eksenine uzaklığı $|b|$ dir.

y eksenine uzaklığı $|a|$ dır.

Analitik Düzlemde İki Nokta Arası Uzaklık

- Analitik düzlemde verilen $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arası uzaklık $|AB|$ olsun.



ABC üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanırsa

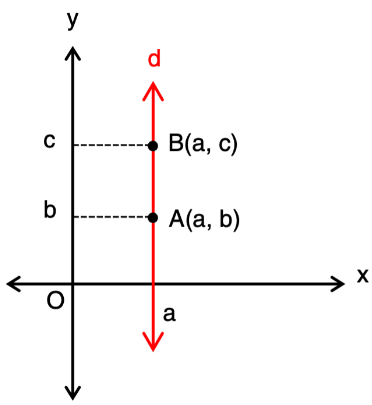
$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$$

$$|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ bulunur.

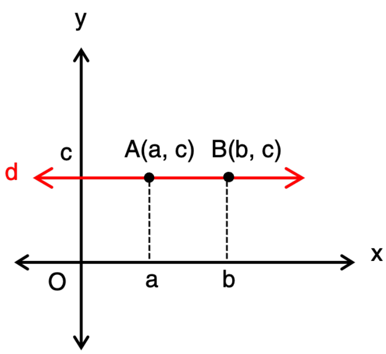
- Analitik düzlemde verilen apsisleri eşit A(a, b) ve B (a, c) noktaları arası uzaklık $|AB|$ olsun.



Yanda verilen şekildeki A(a, b) ve B(a, c) noktaları arasındaki uzaklık, iki nokta arasındaki uzaklık formülü uygulanırsa

$|AB| = \sqrt{(a-a)^2 + (c-b)^2} = \sqrt{0 + (c-b)^2} = |c-b|$ olur.

- Analitik düzlemde verilen ordinatları eşit A(a, c) ve B (b, c) noktaları arası uzaklık $|AB|$ olsun.

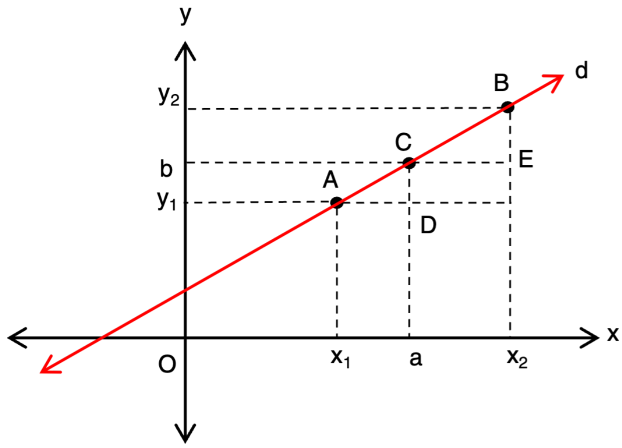


Yanda verilen şekildeki A(a, b) ve B(a, c) noktaları arasındaki uzaklık, iki nokta arasındaki uzaklık formülü uygulanırsa

$|AB| = \sqrt{(a-b)^2 + (c-c)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + 0} = |a-b|$ olur.

Bir Doğru Parçasını Belirli Bir Oranda İçten Bölen Noktanın Koordinatları

- Aşağıdaki analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarını $\dfrac{|AC|}{|BC|} = k$ olacak şekilde bölen $C \in [AB]$ noktasına [AB]'nı k oranında **içten bölen nokta** denir.



$[AD] \,//\, [CE]$ olup $\widehat{ADC} \sim \widehat{CEB}$'dir.

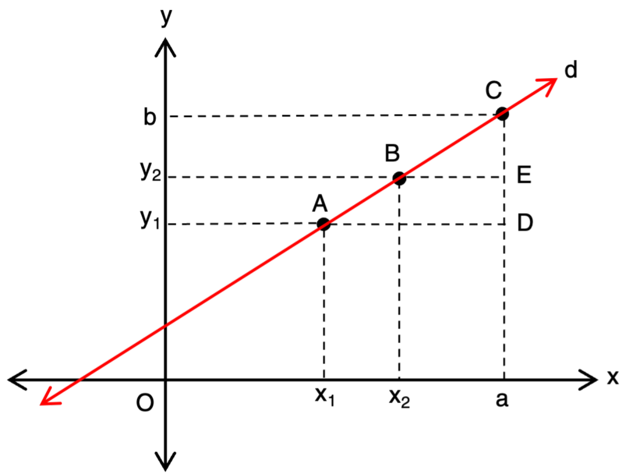
$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{a - x_1}{x_2 - a} = k \text{ ise } a = \frac{x_1 + kx_2}{1+k} \text{ olur.}$$

$$\frac{|CD|}{|EB|} = \frac{b - y_1}{y_2 - b} = k \text{ ise } b = \frac{y_1 + ky_2}{1+k} \text{ olur.}$$

Buradan $C(a,b) = C\left(\dfrac{x_1 + kx_2}{1+k}, \dfrac{y_1 + ky_2}{1+k}\right)$ bulunur.

Bir Doğru Parçasını Belirli Bir Oranda Dıştan Bölen Noktanın Koordinatları

- Aşağıdaki analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarını $\dfrac{|AC|}{|BC|} = k$ olacak şekilde bölen $C \in [AB]$ noktasına [AB]'nı k oranında **dıştan bölen nokta** denir.



$[AD] \,//\, [BE]$ olup $\widehat{ADC} \sim \widehat{BEC}$'dir.

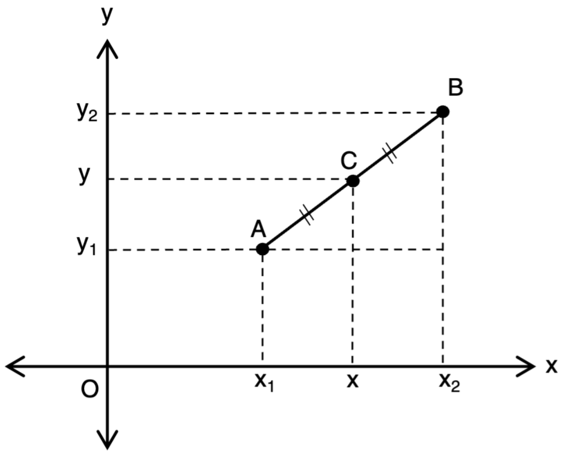
$$\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{a - x_1}{a - x_2} = k \text{ ise } a = \frac{x_1 - kx_2}{1-k} \text{ olur.}$$

$$\frac{|CD|}{|EC|} = \frac{b - y_1}{b - y_2} = k \text{ ise } b = \frac{y_1 - ky_2}{1-k} \text{ olur.}$$

Buradan $C(a,b) = C\left(\dfrac{x_1 - kx_2}{1-k}, \dfrac{y_1 - ky_2}{1-k}\right)$ bulunur.

Bir Doğru Parçasının Orta Noktasının Koordinatları

- Aşağıdaki analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarının orta noktası $C(x_0, y_0)$ olsun.

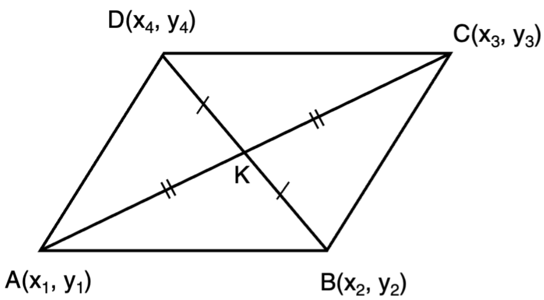


$$C(x_0, y_0) = C\left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k}\right)$$

eşitliğinde k = 1 yazılırsa C noktasının koordinatları

$$C(x_0, y_0) = C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$ bulunur.

- ABCD bir paralelkenar olmak üzere



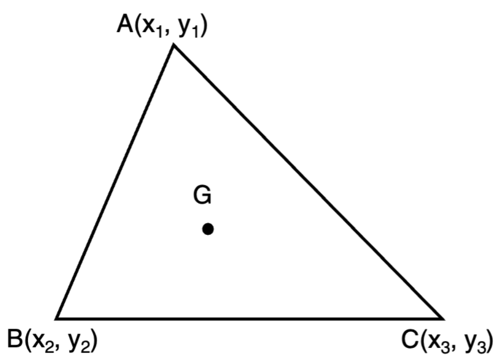
[AC]'nın orta noktası $K\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$

[BD]'nın orta noktası $K\left(\frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2}\right)$ olur.

Buradan $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ ve $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$ bulunur.

Bir Üçgenin Ağırlık Merkezinin Koordinatları

- Aşağıdaki analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeni verilmiştir.

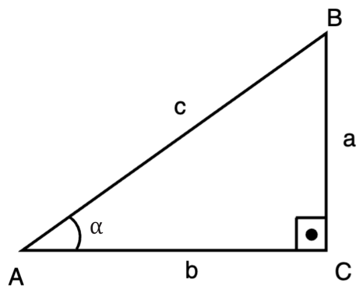


ABC üçgeninin ağırlık merkezi G olmak üzere

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$ olur.

Doğrunun Eğimi

- Bir doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıya **eğim açısı** denir. Bu açının ölçüsü α olmak üzere tanα değerine **doğrunun eğimi** denir.



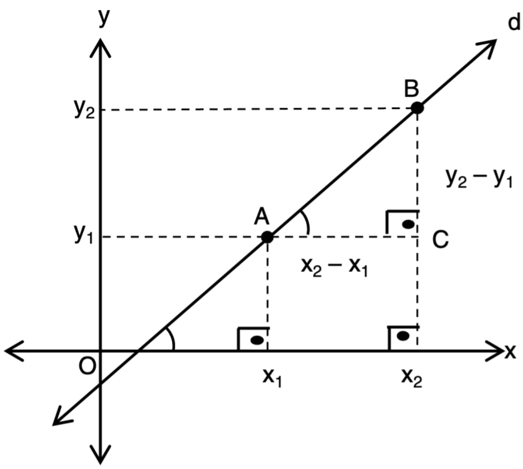
Bir dik üçgende

$\tan\alpha = \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{a}{b}$ olur.

- Yandaki analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen d doğrusunun eğimi

$\tan\alpha = \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur.

- Eğim genellikle m sembolü ile gösterilir.



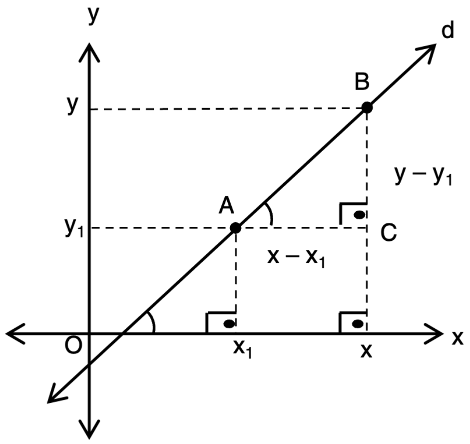
- y = mx + n biçiminde yazılan doğrunun eğimi m'dir.

- ax + by + c = 0 biçiminde yazılan doğrunun eğimi $-\dfrac{a}{b}$ 'dir

Doğru Denklemleri Özel Doğru Denklemleri

I. Eğimi ve Bir Noktası Bilinen Doğru Denklemi:

Analitik düzlemde eğimi m ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen d doğrusunun denklemini bulmak için doğru üzerinde bulunan herhangi bir $B(x, y)$ noktası alınır.

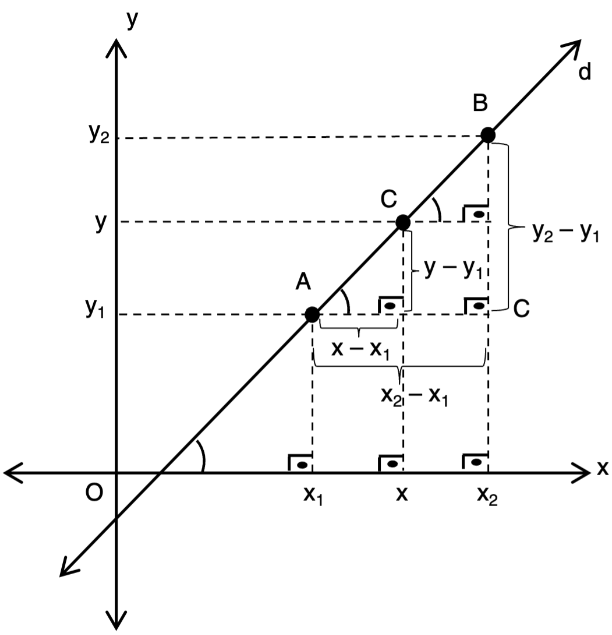


$\tan\alpha = m = \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ olduğundan doğrunun denklemi

$y - y_1 = m\cdot(x - x_1)$ bulunur.

II. İki Noktası Bilinen Doğru Denklemi:

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen d doğrusunun denklemini bulmak için doğru üzerinde bulunan herhangi bir $C(x, y)$ noktası alınır.



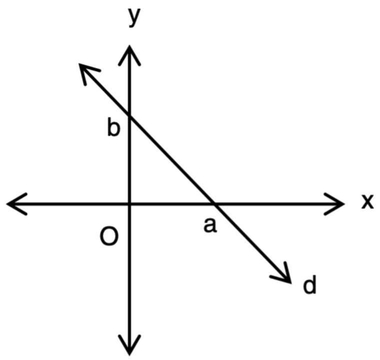
$\tan\alpha = m = \dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ olduğundan

d doğrusunun denklemi

$\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ olur.

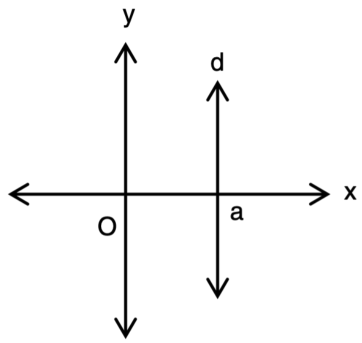
III. Eksenleri Kestiği Noktalar Bilinen Doğru Denklemi:

Analitik düzlemde eksenleri (a, 0) ve (0, b) noktalarında kesen d doğrusunun denklemi

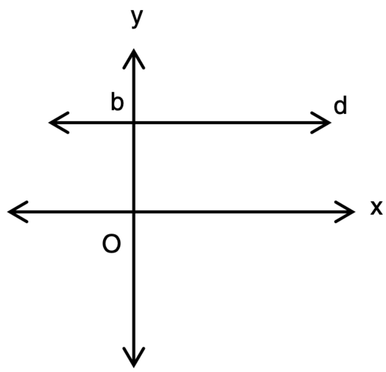


$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ biçimindedir.

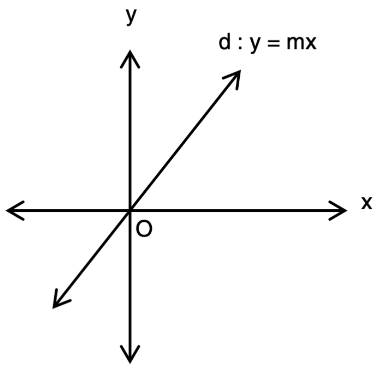
- x eksenini dik kesen (y eksenine paralel) d doğrunun denklemi x = a biçimindedir.



- y eksenini dik kesen (x eksenine paralel) d doğrunun denklemi y = b biçimindedir.



- Orijinden geçen ve eğimi m olan d doğrunun denklemi y = mx biçimindedir.



- Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ noktası d : ax + by + c = 0 doğrusunun üzerinde ise A noktası doğru denklemini sağlar.

(Doğrunun Grafiği)

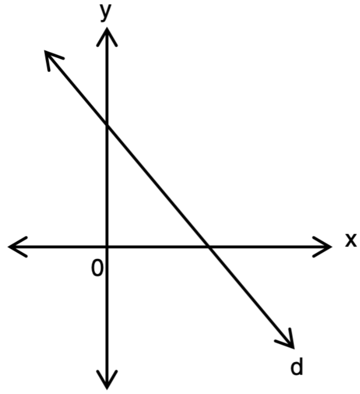
(Doğruların Birbirlerine Göre Durumları)

- Denklemi d : ax + by + c = 0 olan doğrunun denkleminin tam olarak çizilebilmesi için doğrunun geçtiği iki nokta bulunmalıdır.

Denklemde x = 0 yazılırsa $y=-\frac{c}{b}$ olur. Doğru y eksenini $\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ noktasında keser.

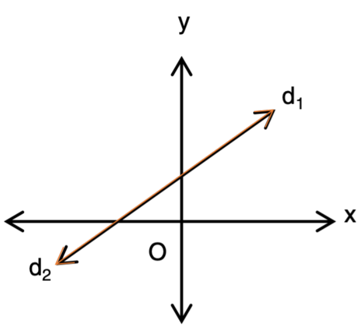
Denklemde y = 0 yazılırsa $x=-\frac{c}{a}$ olur. Doğru x eksenini $\left(-\frac{c}{a},0\right)$ noktasında keser.

Analitik düzlemde eksenleri $\left(-\frac{c}{a},0\right)$ ve $\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ noktalarında kesen d doğrusunun grafiği aşağıdaki gibidir.

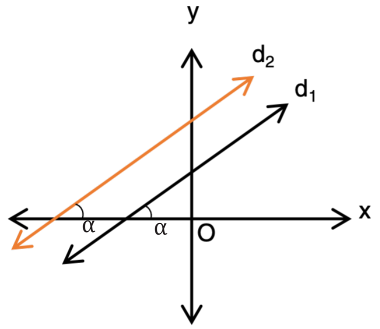


- a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve $c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğruları verilsin.

I. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ eşitliği sağlanıyorsa d_1 ve d_2 doğruları çakışık (aynı) doğrulardır.

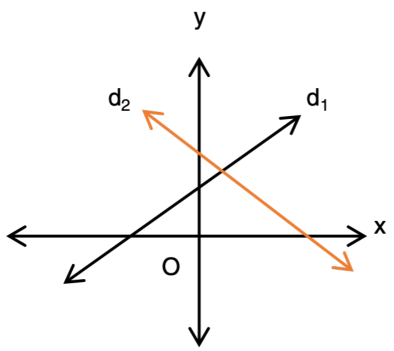


II. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ şartı sağlanıyorsa d_1 ve d_2 doğruları paralel doğrulardır.



d_1 // d_2 ise $m_1 = m_2$'dir.

III. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ şartı sağlanıyorsa d_1 ve d_2 doğruları tek bir noktada kesişir.



d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktası, doğru denklemlerinin oluşturduğu denklem sisteminin çözüm kümesidir.

- d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri sırasıyla m_1 ve m_2 olsun.

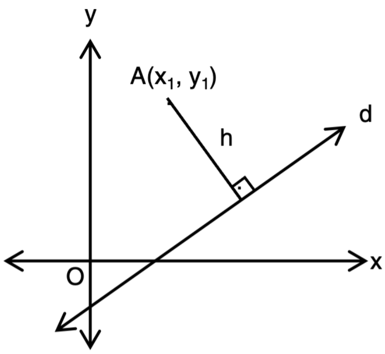
  $d_1 \perp d_2$ ise $m_1 \cdot m_2 = -1$'dir.

Analitik Geometri Nedir?

Analitik geometri diğer adıyla koordinat geometrisi, geometri ile cebri birleştiren bir matematik dalıdır. Analitik geometrinin önemi, geometrik eğriler ve cebirsel denklemler arasında bir ilişki kurmasıdır. Bunun sayesinde geometrideki problemleri cebirdeki eşdeğer problemler olarak yeniden formüle edilir. Bu esnada iki Fransız matematikçi René Descartes ve Pierre de Fermat daha cesur davrandı. Descartes ve Fermat, 1630'larda Viète'nin çalışmalarından yola çıkarak analitik geometrinin temellerini birbirinden bağımsız olarak kurdular.

Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

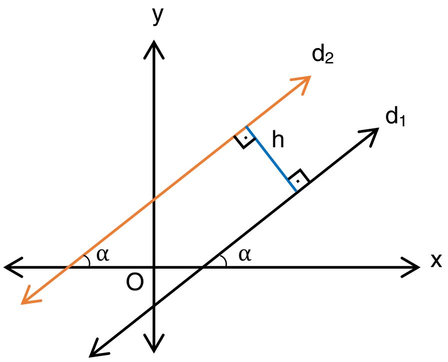
- Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ noktasının $d : ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı h olsun.



$h = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ birim olur.

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

- Analitik düzlemde birbirine paralel olan $d_1 : ax + by + c_1 = 0$ ve $d_2 : ax + by + c_2 = 0$ doğruları arasındaki uzaklık h olsun.



$h = \dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ birim olur.

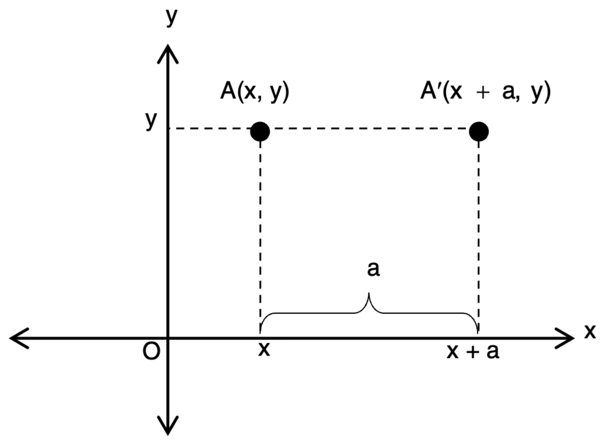
René Descartes

Ünlü Fransız düşünürü Descartes, 31 Mart 1596 yılında doğmuş ve 54 yıl sonra Şubat 1650'de vefat etmiştir. Analitik geometri (Osmanlıca Tahlili hendese, Fransızca Géometri analytique), geometrik çalışmaya cebir analizini uygulayan, cebir problemlerinin çözümünde geometrik kavramları kullanan bir matematik dalıdır. Bütün bunlar kartezyen sistem denilen bir dik koordinat sisteminin kullanılmasıyla olanak içine girer. Kartezyen sözcüğü, batıda analitik geometride ilk bilimsel çalışmayı yapan René Descartes'tın adından türetilmiştir. Descartes'ın Kartezyen koordinat sistemini kullanarak, cebir dilini geometriye uygulayarak bulduğu bu yöntemle geometri problemleri cebir denklemlerine çevrildi. Bunlar cebirle çözümlendikten sonra geometri diliyle açıklandı. Birçok fizik probleminin çözümü de bu yöntemle kolaylaşmış oldu.

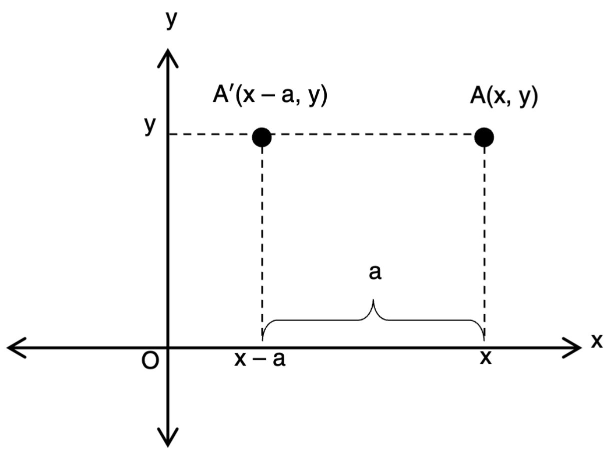
Öteleme Dönüşümü

- Analitik düzlemde verilen bir noktanın belli bir doğrultuda ve belli bir yönde yer değiştirmesine **öteleme** denir.

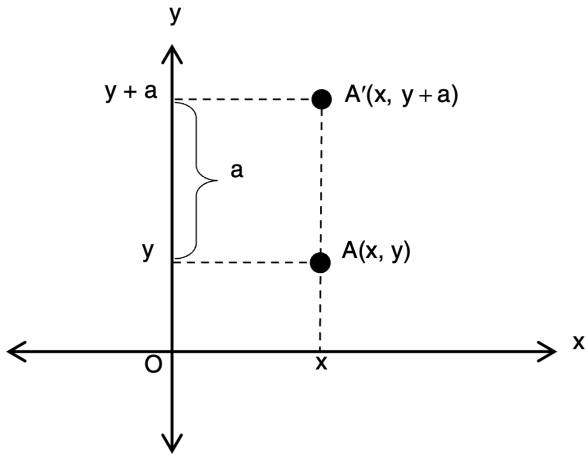
- Analitik düzlemde A(x ,y) noktası x ekseni boyunca pozitif yönde (sağa doğru) a birim ötelendiğinde oluşan yeni nokta A′(x + a, y) noktası olarak elde edilir.



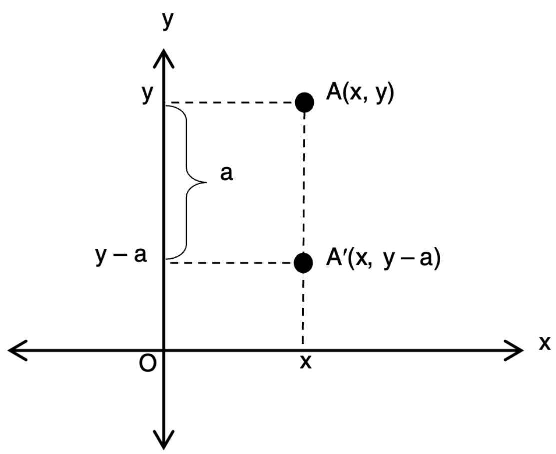
- Analitik düzlemde A(x ,y) noktası x ekseni boyunca negatif yönde (sola doğru) a birim ötelendiğinde oluşan yeni nokta A′(x – a, y) noktası olarak elde edilir.



- Analitik düzlemde A(x ,y) noktası y ekseni boyunca pozitif yönde (yukarı doğru) a birim ötelendiğinde oluşan yeni nokta A′(x, y + a) noktası olarak elde edilir.



- Analitik düzlemde A(x ,y) noktası y ekseni boyunca negatif yönde (aşağı doğru) a birim ötelendiğinde oluşan yeni nokta A′(x, y – a) noktası olarak elde edilir.

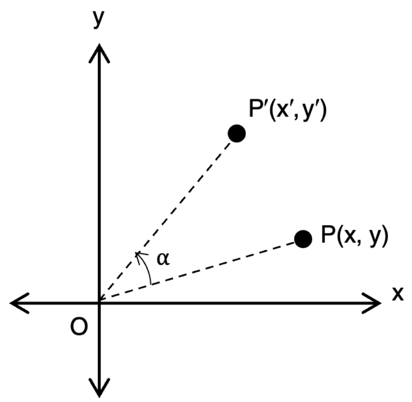


Dönme Dönüşümü

- Analitik düzlemde bir P noktasının koordinatları (x, y) , [OP]'nın x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı θ ve |OP| = r olmak üzere P noktasının koordinatları

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\theta \\ y &= r\cdot\sin\theta \end{aligned}\right\} \text{ olur.}$$

- Analitik düzlemde P(x, y) noktasının orijin etrafında pozitif yönde α açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen P'(x', y') noktası;



Elde edilen noktanın koordinatları

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\cdot\cos(\theta+\alpha) \\ y' &= r\cdot\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}\right\} \text{ olmak üzere}$$

$$x' = r\cdot(\cos\theta\cdot\cos\alpha - \sin\theta\cdot\sin\alpha)$$

$$= \underbrace{r\cdot\cos\theta}_{x}\cdot\cos\alpha - \underbrace{r\cdot\sin\theta}_{y}\cdot\sin\alpha$$

$$= x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha$$

$$y' = r\cdot(\sin\theta\cdot\cos\alpha + \cos\theta\cdot\sin\alpha)$$

$$= \underbrace{r\cdot\sin\theta}_{y}\cdot\cos\alpha + \underbrace{r\cdot\cos\theta}_{x}\cdot\sin\alpha$$

$= y\cdot\cos\alpha + x\cdot\sin\alpha$ elde edilir. Böylece P' noktası

$P'(x', y') = R_\alpha(x,y) = (x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha,\ x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha)$ olur.

- Burada α açısına **dönme açısı** denir. α açısı kadar dönme dönüşümü R_α ile gösterilir.
- Herhangi bir (x, y) noktasının orijin etrafında ve pozitif yönde 90°, 180°, 270° ve 360° döndürüldüğünde aşağıda verilen noktalar elde edilir.

  $R_{90°}(x, y) = (-y, x)$

  $R_{180°}(x, y) = (-x, -y)$

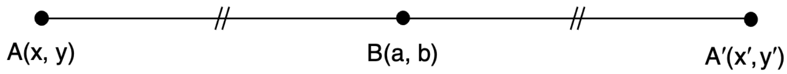
  $R_{270°}(x, y) = (y, -x)$

  $R_{360°}(x, y) = (x, y)$
- Dönme dönüşümü, analitik düzlemde bir nokta dışındaki tüm noktaları değiştirir. Dönme dönüşümün değiştirmediği bu noktaya **dönme merkezi** denir.

Simetri Dönüşümü

- **Bir Noktanın Başka Bir Noktaya Göre Simetrisi:**

  A(x, y) noktasının B(a, b) noktasına göre simetriği A′(x′, y′) olsun.



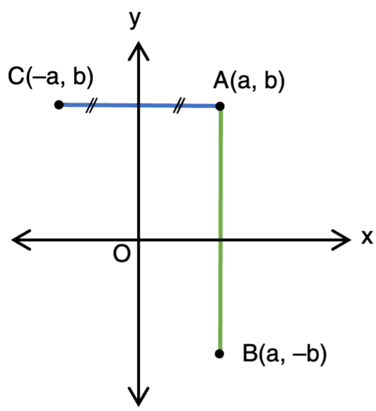
  Orta nokta koordinatlarından A(x, y) noktasının B(a, b) noktasına göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü olan A′(x′, y′) noktasının koordinatları A′(2a – x, 2b – y) olur.

- A(x, y) noktasının O(0, 0) noktasına yani orijine göre simetriği A′(–x, –y) noktasıdır.

- **Bir Noktanın x ve y Eksenlerine Göre Simetriği:**

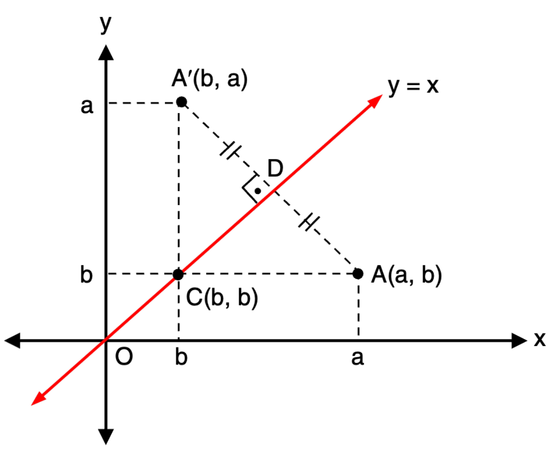
  A(a, b) noktasının x eksenine göre simetriği B(a, –b)' dir.

  A(a, b) noktasının y eksenine göre simetriği C(–a, b)'dir.



- **Bir Noktanın y = x Doğrusuna Göre Simetriği**

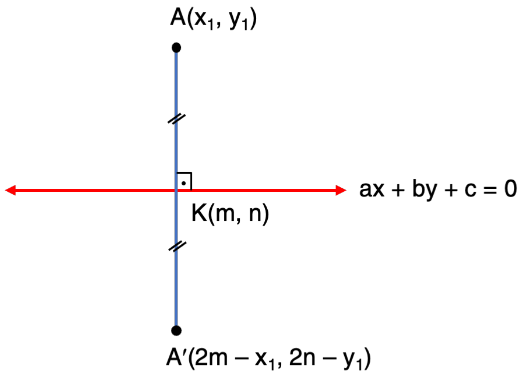
  A(a, b) noktasının y = x doğrusuna göre simetriği A′(b, a)'dır.



- **Bir Noktanın Bir Doğruya Göre Simetriği:**

  Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna göre simetriğini bulmak için aşağıdaki adımlar sırasıyla uygulanır.

- Doğrunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ bulunur.

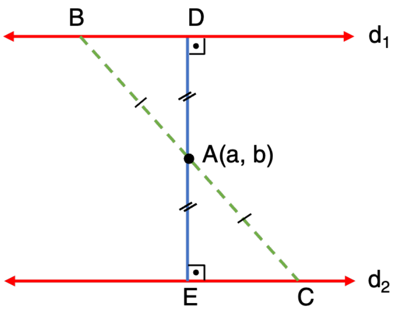


- $[AA']$ ile $ax + by + c = 0$ doğruları birbirlerine dik olduklarından $[AA']$'nın eğimi $\frac{b}{a}$ olur.
- Eğimi $m = \frac{b}{a}$ olan ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğrusunun denklemi $y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$ ifadesinden elde edilir.
- Yeni bulunan AA' doğrusunun denklemi ile $ax + by + c = 0$ doğrusunun denklemi ortak çözülerek $K(m, n)$ noktası elde edilir.
- $A(x_1, y_1)$ noktasının $K(m, n)$ noktasına göre simetrisi alınarak $A'(2m - x_1, 2n - y_1)$ noktası elde edilir.

- **Bir Doğrunun Bir Noktaya Göre Simetriği:**

  d_1 doğrusunun A noktasına göre simetriği d_2 doğrusu olsun.

- $d_1 \parallel d_2$ olduğundan $|AE| = |AD|$ ve $|AB| = |AC|$ olur.



- d_1 doğrusu üzerindeki bir $B(x, y)$ noktasının $A(a, b)$ noktasına göre simetriği olan $C(2a - x, 2b - y)$ noktası d_2 doğrusu üzerindedir.
- d_2 doğrusunun denklemini bulmak için d_1 doğrusunun denkleminde x yerine $2a - x$ ve y yerine $2b - y$ yazılarak d_1 doğrusunun A noktasına göre simetriği olan d_2 doğrusu elde edilir.

Temel Dönüşümlerin Bileşkesi

Ötelemeli Dönme Dönüşümü:

- Öteleme ve dönme dönüşümünün birlikte uygulandığı dönüşümlere **ötelemeli dönme dönüşümü** denir.
- Ötelemeli dönme dönüşümü uygulanan şekillerin üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık değişmez ve şekillerin üzerindeki açıların ölçüleri de aynı kalır.

Ötelemeli Simetri Dönüşümü:

- Öteleme ve simetri dönüşümünün birlikte uygulandığı dönüşümlere **ötelemeli simetri dönüşümü** denir.
- Ötelemeli simetri dönüşümü uygulanan şekillerin üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık değişmez. Şekillerin üzerindeki açıların ölçülerinin yönü değişir.

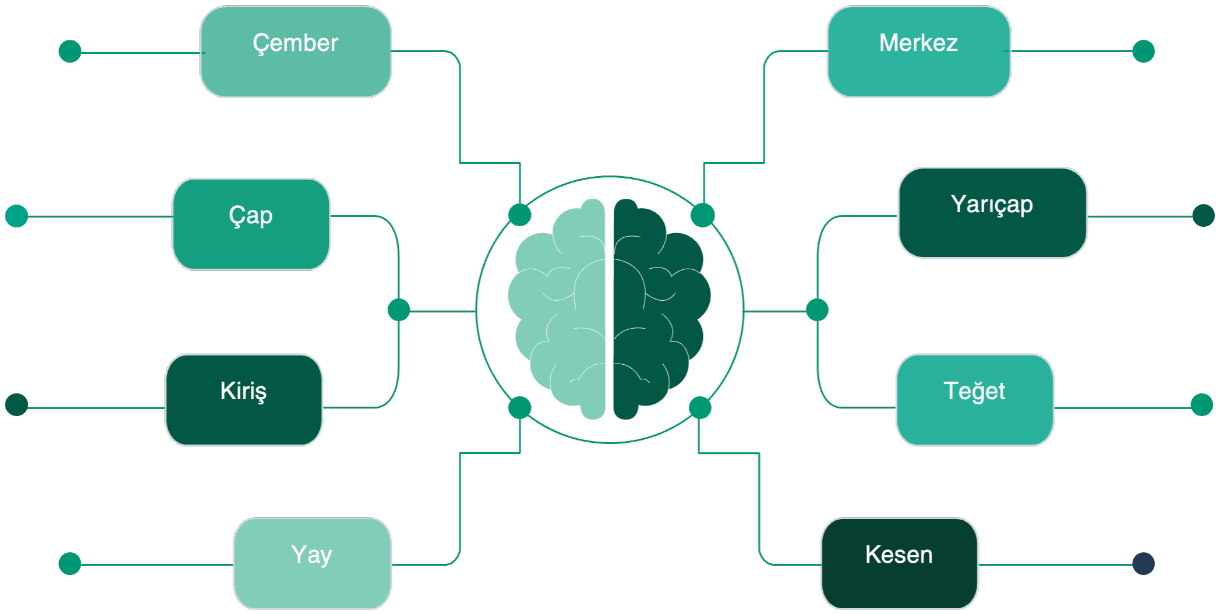
Doğada ve Mimari Eserlerde Dönüşümler

Simetri, dönme ve öteleme kavramlarını daha iyi anlamak için çevreye bakmak yeterlidir. Doğada, mimaride kısacası gerçek hayatın her alanında simetri örnekleri mevcuttur. Örneğin bir kuşun tüyüne bakıldığında üzerindeki şekillerin simetrik olduğu görülür. Bir çiçeğin yapraklarında dönme dönüşümü ve simetri görülür.

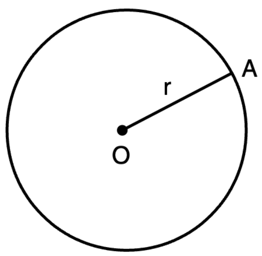
Simetri, dönme ve öteleme mimarinin de vazgeçilmez unsurlarından biridir. Çağlar boyu mimarlar binaların yapımında ve süslenmesinde bu kavramlardan yararlanmışlardır.

Özellikle süsleme alanında halı, kilim, çini, el işleri gibi sanatlarda simetri, dönme ve öteleme örnekleriyle sıkça karşılaşılmaktadır.

Çemberin Temel Elemanları



- **Çember Nedir?**

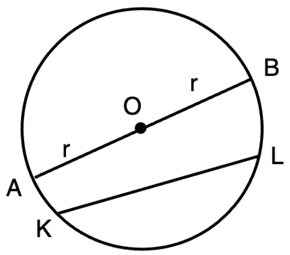


Çemberin merkezi O noktasıdır.

[OA] çemberin **yarıçapı**dır.

|OA| = r çemberin **yarıçap uzunluğu**dur.

- **Kiriş Nedir?**

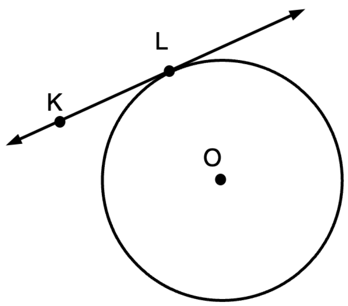


O merkezli çemberde [AB] ve [KL] **kiriş**tir.

Merkezden geçen kirişe **çap** denir.

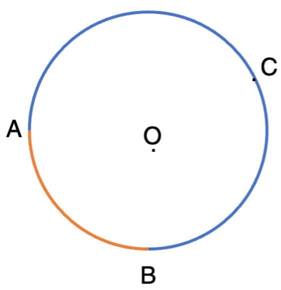
|AB| = 2r çemberin **çap uzunluğu**dur.

- **Teğet Nedir?**



KL doğrusu L noktasında O merkezli çembere **teğet**tir.

- **Yay Nedir?**



AB yayı $\overset{\frown}{AB}$

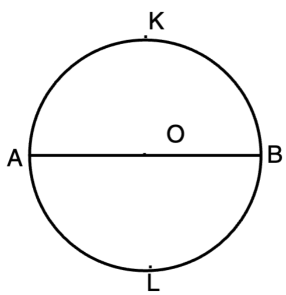
ACB yayı $\overset{\frown}{ACB}$

AB yayının ölçüsü $m(\overset{\frown}{AB})$

ACB yayının ölçüsü $m(\overset{\frown}{ACB})$

AB yayının uzunluğu $|\overset{\frown}{AB}|$

ACB yayının uzunluğu $|\overset{\frown}{ACB}|$

- 

Bir çemberin çevresi 360°'dir.

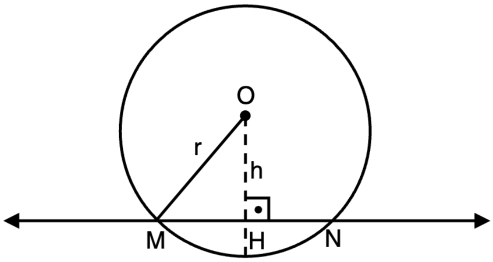
Çap çemberi iki eş ölçülü yaya ayırır.

Yandaki O merkezli [AB] çaplı çemberde

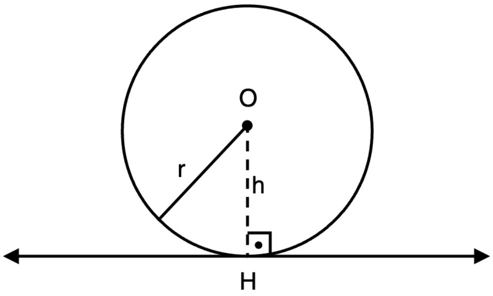
$m(\overset{\frown}{AKB}) = m(\overset{\frown}{ALB}) = 180°$ dir.

- **Bir Çember ile Bir Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları**

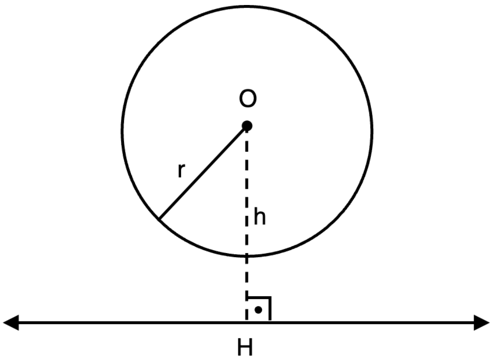
I. h < r ise doğru çemberi iki noktada keser.



II. h = r ise doğru çembere teğettir.

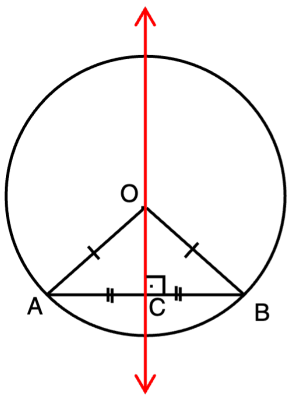


III. h > r ise doğru çemberi kesmez.



Çemberde Kirişin Özellikleri

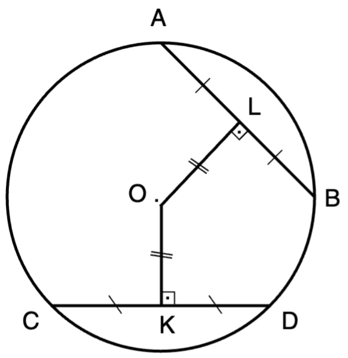
- **Çemberde Kiriş Özellikleri**



Çemberin merkezi ile kirişin orta noktasını birleştiren doğru kirişe dik olur.

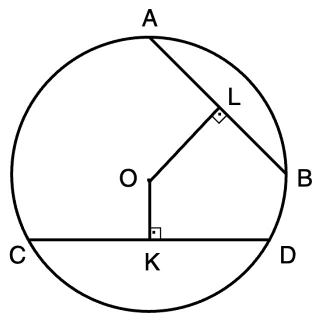
Çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme, kirişi eşit uzunlukta iki parçaya böler.

- Bir çemberde eşit uzunluktaki kirişlerin merkeze olan uzaklıkları eşittir.



Yandaki O merkezli çemberde [AB] ve [CD] çemberin kirişleri olmak üzere
O merkez noktasından kirişlere dikmeler indirildiğinde
$|AB| = |CD|$ ise $|OK| = |OL|$ olur.

- Bir çemberin iki kirişinden uzun olanı merkeze daha yakındır.

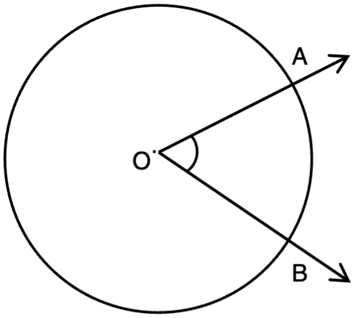


Yandaki O merkezli çemberde
[AB] ve [CD] çemberin kirişleri,
$[OL] \perp [AB]$ ve $[OK] \perp [CD]$ olmak üzere
$|AB| < |CD|$ ise $|OL| > |OK|$ olur.

Çemberde Merkez Açı ve Çevre Açı

- **Merkez Açı Nedir?**

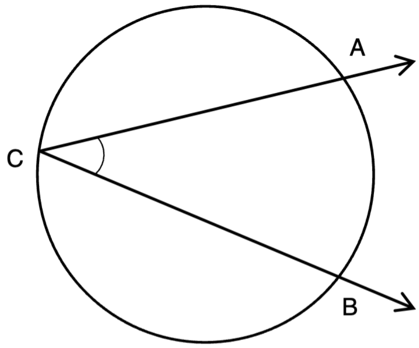
  Çemberin merkezinden çıkan iki ışının oluşturduğu açıya **merkez açı** denir.



O merkezli çemberde AOB açısı merkez açıdır ve $m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB})$ olur.

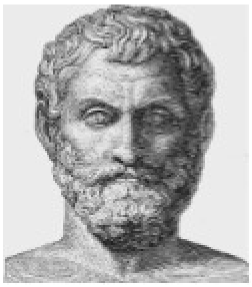
- **Çevre Açı Nedir?**

  Köşesi çemberin üzerinde olan ve çemberi kesen ışınların oluşturduğu açıya **çevre açı** denir.



O merkezli çemberde ACB açısı çevre açıdır ve $m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$ olur.

Thales

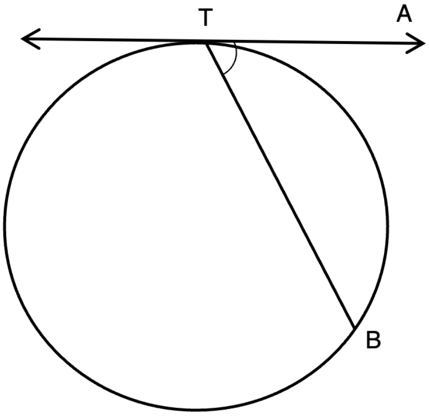


Thales milattan önce 547 ve milattan önce 624 yılları arasında yaşamış matematikçi ve filozoftur. Eski Yunan'da insanlığa ışık tutmuş "yedi bilge insan" içerisindeki ilk bilgedir. Thales'in doğru geometrisini oluşturduğu ve bu açıdan soyut geometrinin babası olduğu iddia edilir. Thales'in bizler için önemini kat kat arttıran bir mesele onun Türkiye'li olmasıdır. O Anadolu topraklarında doğmuş Milet'li Thales'tir. Çemberdeki açıların özelliklerini ve formüllerini ilk olarak keşfedendir. Thales çember üzerindeki açıların gördüğü yayların ölçüsünün yarısı kadar olduğu keşfetti. Bu keşif, çember geometrisinin temellerinin birini oluşturmaktadır.

Kaynak: http://meb.ai/TbE5Mc

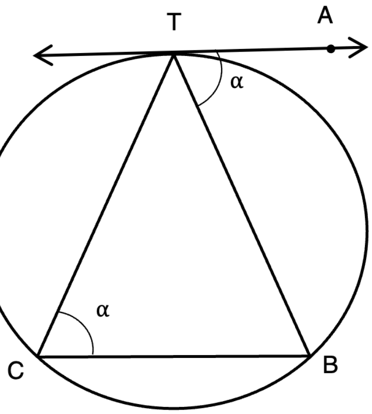
Teğet Kiriş Açı

Köşesi çember üzerinde bulunan, kollarından biri çemberin teğeti, diğeri çemberin kirişi olan açıya teğet-kiriş açı denir. Bir teğet-kiriş açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.



$m(\widehat{ATB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{TB})}{2}$ olur.

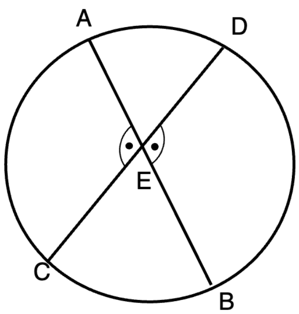
- Bir çemberde aynı yayı gören teğet-kiriş açı ile çevre açının ölçüleri eşittir.



$m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{TCB})$ olur.

Çemberde İç Açı

Bir çemberde iç açının ölçüsü, bu açının gördüğü yayların ölçüleri toplamının yarısına eşittir.



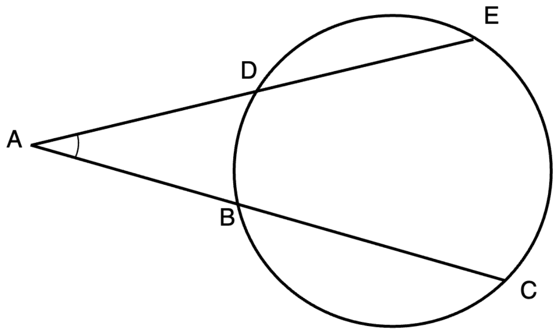
$m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{BED})$ (iç ters açı)

$m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{BED}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC}) + (\overset{\frown}{BD})}{2}$

Çemberde Dış Açı

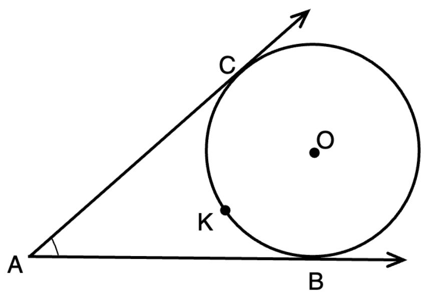
Bir çembere dışındaki noktadan çizilen iki kesenin, iki teğetin veya bir teğetle bir kesenin çemberin dışında oluşturduğu açıya çemberin **dış açısı** denir.

Bir dış açının ölçüsü, gördüğü yaylardan büyük olan açı ile küçük olan açının ölçüsünün farkının yarısına eşittir.



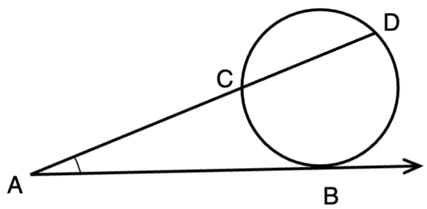
$m(\widehat{EAC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{EC}) - m(\overset{\frown}{DB})}{2}$ olur.

- Aşağıdaki şekilde verilen [AB ve [AC, O merkezli çembere sırasıyla B ve C noktalarında teğettir.



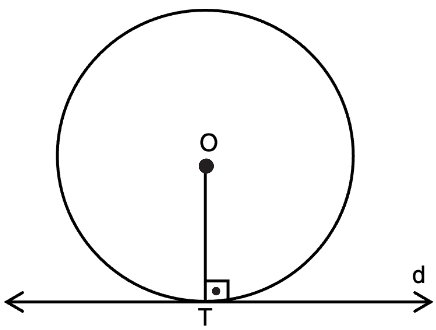
$m(\widehat{BAC}) + m(\overset{\frown}{BKC}) = 180°$ olur.

- Aşağıdaki şekilde verilen [AB çembere B noktasından teğet ve A, C, D noktaları doğrusaldır.



$m(\widehat{BAC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{BC})}{2}$

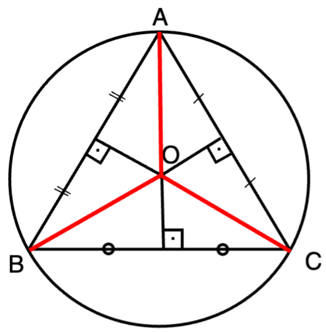
- Bir çemberde merkezden teğetin değme noktasına indirilen doğru parçası teğete diktir.



$[OT] \perp d$

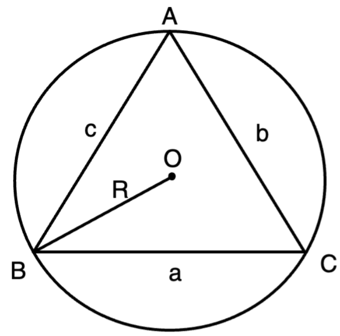
Çevrel Çember

Bir üçgenin köşelerinden geçen çembere üçgenin **çevrel çemberi** denir. Bir üçgenin kenar orta dikmeleri çevrel çemberin merkezinden geçer.



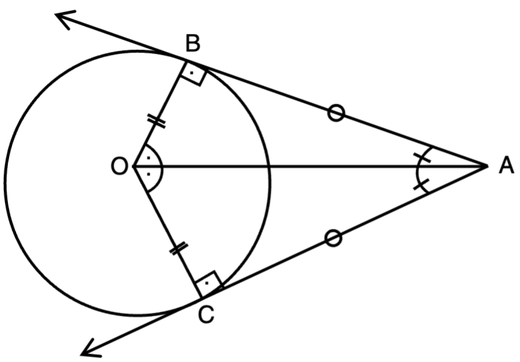
Çemberde Sinüs Teoremi

Şekildeki ABC üçgeninin O merkezli, R yarıçaplı çevrel çemberi verilmiştir. Üçgenin kenarları ve açıları arasında $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$ bağıntısı vardır.



Çemberde Teğetin Özellikleri

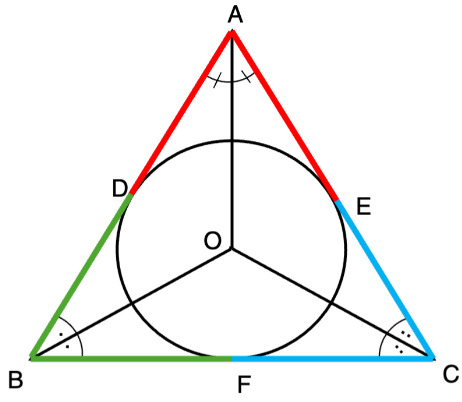
Bir çembere çemberin dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir.



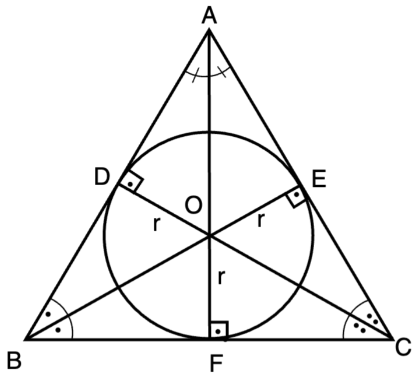
$|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{CAO})$, $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOC})$ olur.

İç Teğet Çember

Aşağıdaki şekilde yer alan çember ABC üçgenine D, E, F noktalarında teğettir. Bir üçgenin üç kenarına da teğet olan çembere üçgenin **iç teğet çemberi** denir.



- İç teğet çemberinin merkezi üçgenin iç açıortaylarının kesim noktasıdır.



$|OD| = |OE| = |OF| = r$

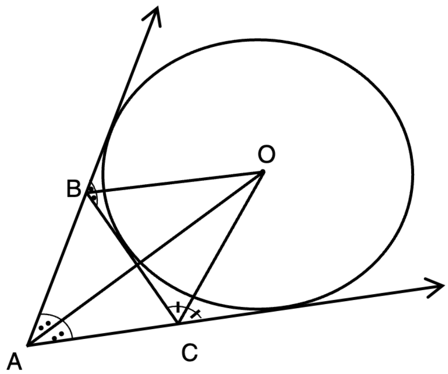
$|AD| = |AE|$

$|BF| = |BD|$

$|CF| = |CE|$ olur.

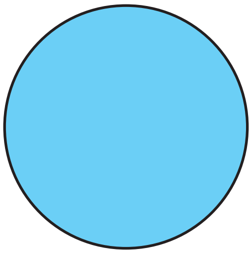
Dış Teğet Çember

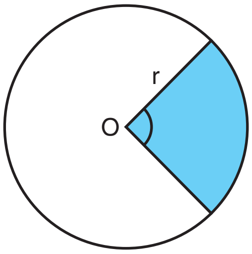
Üçgenin bir kenarına ve diğer iki kenarının uzantısına teğet olan çembere bu üçgenin bir **dış teğet çemberi** denir. Bir üçgenin herhangi bir açısının iç açıortayı ile diğer iki açısının dış açıortayı aynı noktada kesişir.



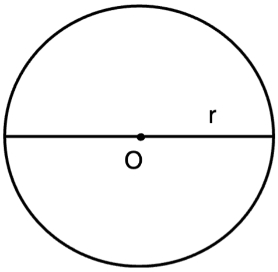
Bir çemberin kendisi ile iç bölgesinin birleşimine daire denir.

- Herhangi bir dairenin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranı sabit bir sayı olup elde edilen bu orana π sayısı denir.
- Bir dairede herhangi bir yayın ve yayın uç noktalarını daire merkeziyle birleştiren iki yarıçapın sınırladığı bölgeye daire dilimi denir.



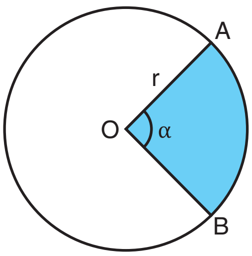


- O merkezli ve r yarıçaplı bir dairenin çevre uzunluğu $2\pi r$ olur.



Çevre = $2\pi r$ formülü ile hesaplanır.

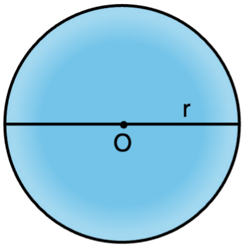
- O merkezli ve r yarıçaplı çember yayının tamamının derece türünden ölçüsü 360° dir. 360° lik yayın uzunluğu çemberin çevresi olan $2\pi r$ dir.
- O merkezli ve r yarıçaplı dairede $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ merkez açısının gördüğü yay uzunluğu



$$|\widehat{AB}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

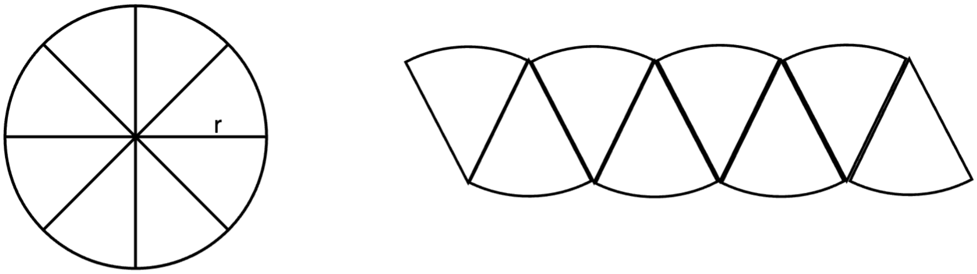
Daire Diliminin Çevresi = $2r + |\widehat{AB}|$ ile bulunur.

- O merkezli ve r yarıçaplı bir dairenin alanı πr^2 olur.

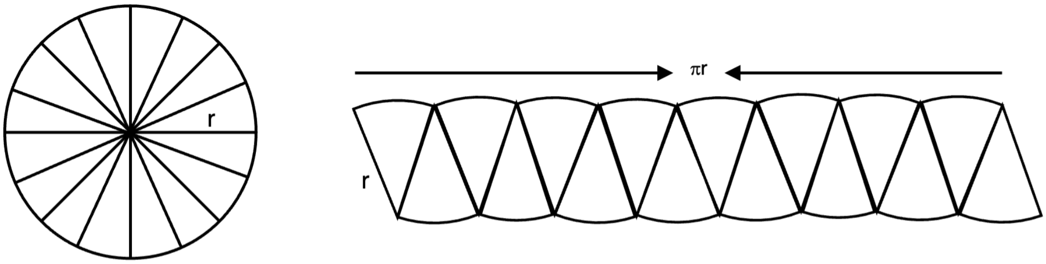


- Bir dairenin alanı hesaplanırken

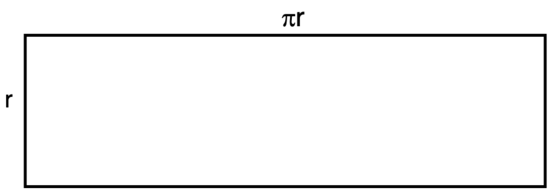
  r yarıçaplı daire 8 eş dilime bölünüp elde edilen dilimler aşağıda verilen şekildeki gibi dizildiğinde elde edilen şekil bir paralelkenara benzemektedir.



- r yarıçaplı daire 16 eş dilime bölünüp elde edilen dilimler aynı şekilde yan yana dizilirse şeklin kıvrımları azalır.

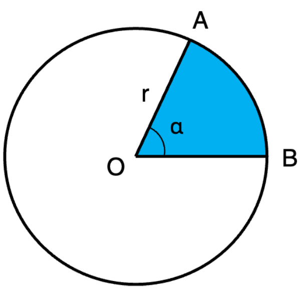


- Bu şekilde daire daha çok dilime bölünüp elde edilen dilimler yan yana dizilirse şekil giderek bir dikdörtgene benzeyecektir.



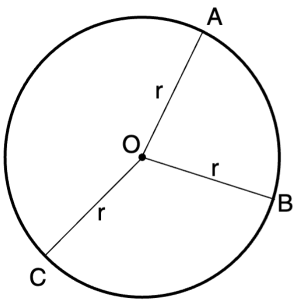
Buradan da dikdörtgenin alanından yararlanarak dairenin alanı πr^2 olur.

- Bir dairede herhangi bir yayın ve yayın uç noktalarını daire merkeziyle birleştiren iki yarıçapın sınırladığı bölgeye **daire dilimi** denir.



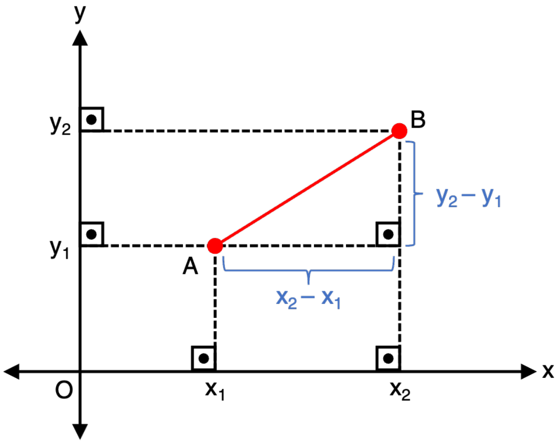
$\text{Alan} = \pi r^2 . \frac{\alpha}{360^\circ}$ ile bulunur.

- Düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **çember** denir.
- Sabit noktaya **çemberin merkezi,** çember üzerindeki herhangi bir noktanın çemberin merkezi olan uzaklığına ise çemberin **yarıçapı** denir.



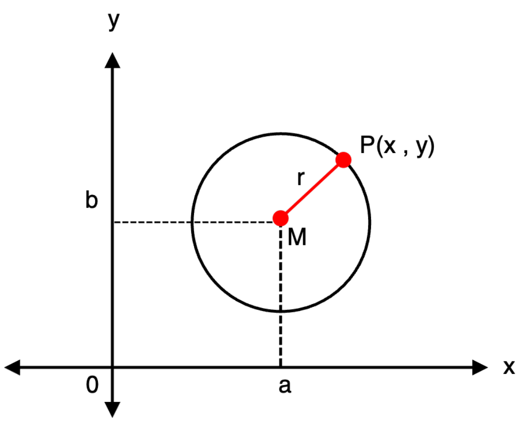
$|OA| = |OB| = |OC| = r$

- Dik koordinat sisteminde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık ACB dik üçgeninde **Pisagor teoremi** uygulanarak hesaplanır.



$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ olarak hesaplanır.

- Analitik düzlemde M(a, b) merkezli ve r yarıçaplı çember üzerinde bir P(x , y) noktası alınırsa M(a, b) ile P(x, y) noktaları arasındaki uzaklık $|MP| = r$;



$|MP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

Her iki tarafın karesi alınırsa

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ elde edilir.

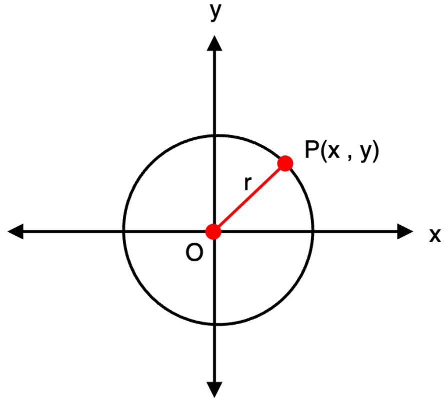
- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ denklemine merkezi M(a, b) ve yarıçapı r birim olan **çemberin standart denklemi** denir.

  Çember üzerindeki bir P(x, y) noktası çemberin denklemini sağlar.

Özel Çember Denklemleri

1) Merkezi Orijinde Olan Çemberin Denklemi

Merkezi orijinde ve yarıçapı r olan çemberin standart denklemi;



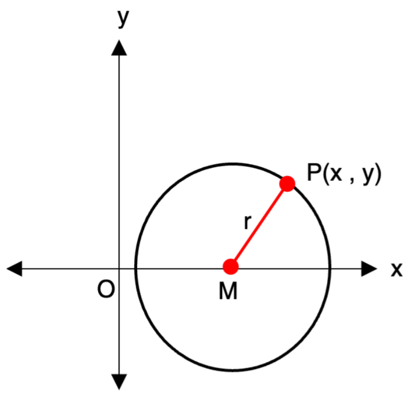
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$

$x^2+y^2=r^2$ olur.

2) Merkezi x Ekseni Üzerinde Olan Çemberin Denklemi

Merkezi x ekseni üzerinde bulunan bir çemberde merkezin koordinatları M(a, 0) olacaktır. Çemberin yarıçapı r olmak üzere standart denklemi;

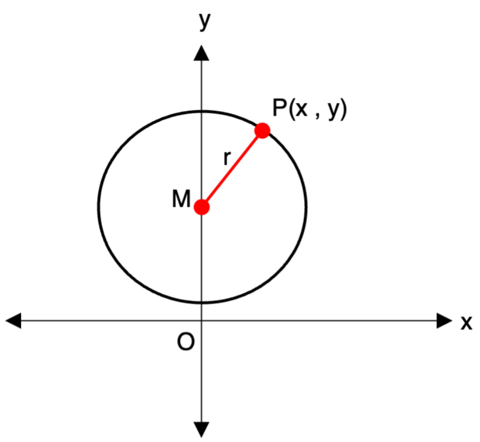


$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$(x-a)^2+y^2=r^2$ olur.

3) Merkezi y Ekseni Üzerinde Olan Çemberin Denklemi

Merkezi y ekseni üzerinde bulunan bir çemberde merkezin koordinatları M(0, b) olacaktır. Çemberin yarıçapı r olmak üzere standart denklemi;

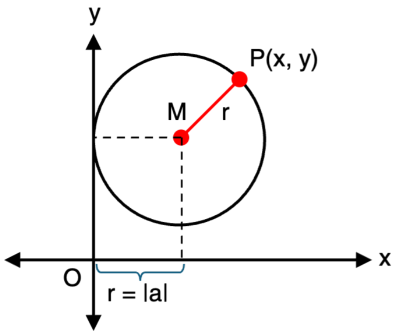


$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$x^2+(y-b)^2=r^2$ olur.

4) y Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi

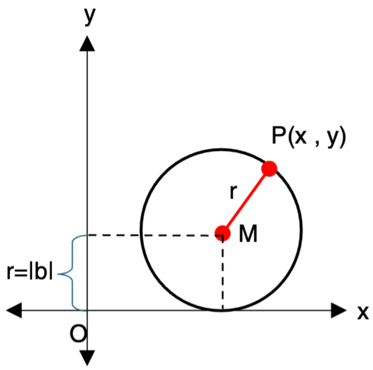
Merkezi M(a, b) ve yarıçapı r birim olan bir çember, y eksenine teğet ise r = |a| olur. Bu durumda çemberin standart denklemi



$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2$ olur.

5) x Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi

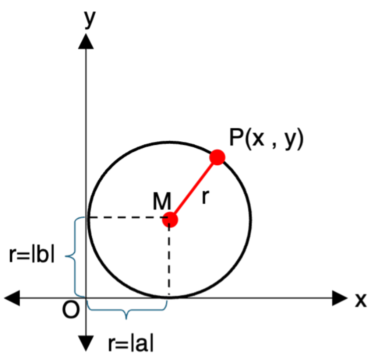
Merkezi M(a, b) ve yarıçapı r birim olan bir çember, x eksenine teğet ise r = |b| olur. Bu durumda çemberin standart denklemi



$(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$ olur.

6) Her İki Eksene de Teğet Olan Çemberin Denklemi

Merkezi M(a, b) ve yarıçapı r birim olan bir çember, her iki eksene de teğet ise r = |a| = |b| olur. Bu durumda;



- Çemberin merkezi I.bölgede ise

  $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ olur.

- Çemberin merkezi II.bölgede ise

  $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$ olur.

- Çemberin merkezi III.bölgede ise

  $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$ olur.

- Çemberin merkezi VI.bölgede ise

  $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$ olur.

- Analitik düzlemde M(a, b) merkezli ve r birim yarıçaplı çemberin standart denklemi

  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ şeklindedir. Bu denklem düzenlenerek $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ elde edilir.

  $-2a = D$, $-2b = E$ ve $a^2 + b^2 - r^2 = F$ alınırsa

  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemi elde edilir. Bu denkleme **çemberin genel denklemi** denir.

- Analitik düzlemde M(a, b) merkezli ve r birim yarıçaplı çemberin genel denklemi

  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ve $D = -2a$, $E = -2b$, $F = a^2 + b^2 - r^2$ olduğundan

  Çemberin merkezi $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

  Yarıçapı $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ olarak bulunur.

- $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ çemberinde yarıçap

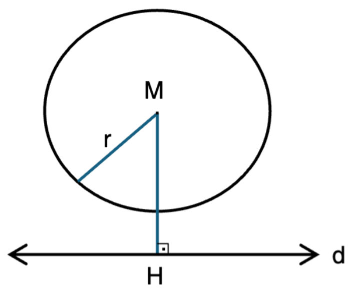
  $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ olduğundan

  - $D^2 + E^2 - 4F > 0$ ise verilen denklem çember belirtir.
  - $D^2 + E^2 - 4F \geq 0$ ise verilen denklem bir nokta belirtir.
  - $D^2 + E^2 - 4F < 0$ ise verilen denklem gerçek sayılar kümesinde çember belirtmez.

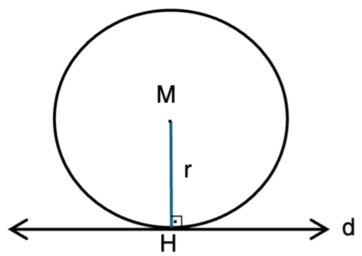
- $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ denkleminin bir çember belirtmesi için

  - $C = 0$ olmalıdır.
  - x^2 li ve y^2 li terimlerin katsayıları eşit $(A = B \neq 0)$ olmalıdır.
  - Verilen denklem x^2 ve y^2 li terimlerin katsayıları 1 olacak şekilde düzenlenerek genel çember denklemi elde edilir ve çember olma şartı incelenir.

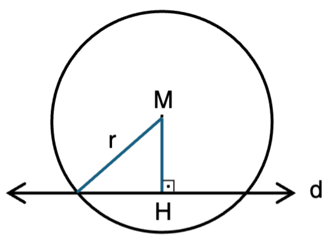
- Doğru ile çemberin birbirine göre durumları, çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığına göre değerlendirilir. Herhangi bir d doğrusu ile merkezi M ve yarıçapı r olan çemberin birbirine göre üç durumu vardır.



|MH| > r ise doğru çemberi kesmez.



|MH| = r ise doğru çembere teğettir.

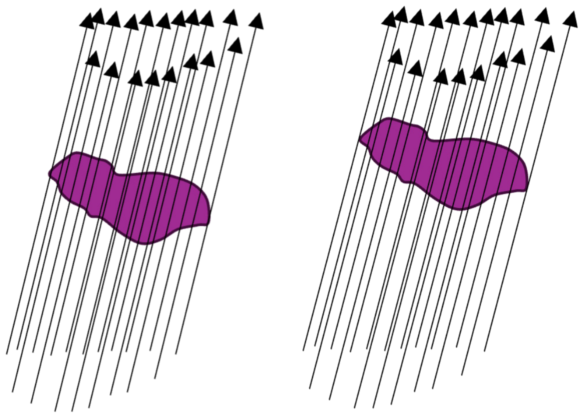


|MH| < r ise doğru çemberi iki noktada keser.

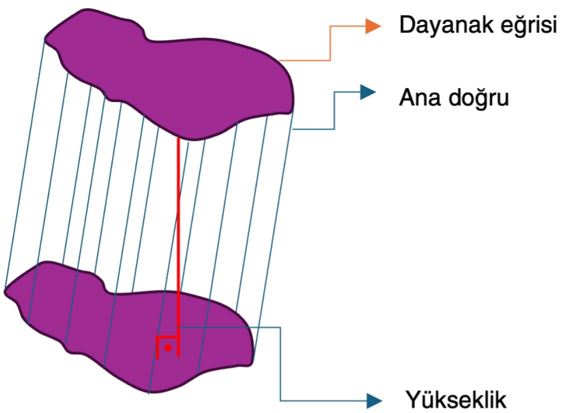
- Genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ olan çember ile $y = mx + n$ doğrusunun ortak çözümü yapılarak doğru ile çemberin birbirine göre durumu incelenir. Çember denkleminde y yerine $mx + n$ yazılarak $ax^2 + bx + c = 0$ biçiminde ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemin diskriminantı $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere

  - $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise elde edilen denklemin kökü yoktur. Bu durumda doğru çemberi kesmez.
  - $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise elde edilen denklemin çift katlı kökü vardır. Bu durumda doğru çembere teğettir. Denklemin kökü, doğrunun çembere teğet olduğu noktanın apsisidir.
  - $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise elde edilen denklemin farklı iki kökü vardır. Bu durumda doğru çemberi iki noktada keser. Denklemin kökleri, doğru ile çemberin kesim noktalarının apsisleridir.

- Uzaydaki bir düzlemde bir k kapalı eğrisi ile bu düzleme paralel olmayan bir d doğrusu verilmiş olsun. k eğrisini kesen ve d doğrusuna paralel olan doğruların kümesine **silindirik yüzey** denir. k eğrisine **silindirik yüzeyin dayanak eğrisi,** d doğrusuna paralel olan doğruların her birine **silindirik yüzeyin ana doğrusu** denir.

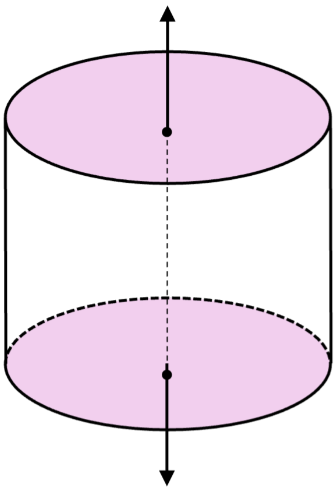


Silindirik Yüzey



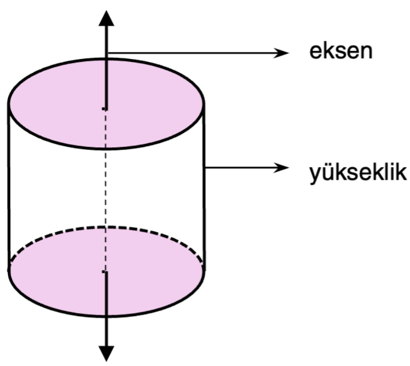
Silindir

- Silindirik yüzey ile bu yüzeyi kesen paralel iki düzlemin sınırladığı cisme **silindir** denir.Düzlem ile oluşan kesitlerin her birine **silindirin tabanı** denir. Ana doğrunun tabanı kestiği noktada, tabandan geçen bütün doğrulara dik olan silindire dik silindir, tabanları daire olan **dik silindire dik dairesel silindir** denir.

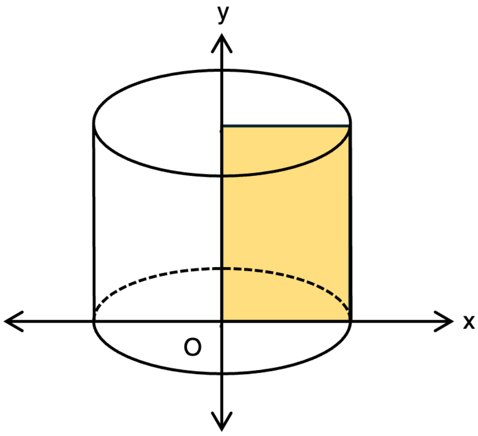


Bundan sonraki çalışmalarımızda kolaylık olması için “silindir” denildiğinde “dik dairesel silindir” anlaşılmalıdır.

- Silindirin tabanlarının merkezinden geçen doğruya **silindirin ekseni** denir.
- Silindirin tabanları arasındaki uzaklığa **silindirin yüksekliği** denir.
- Silindirin yüksekliği aynı zamanda ana doğru parçasının uzunluğudur.

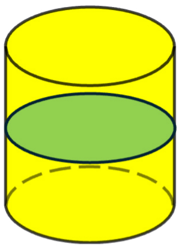


- Dikdörtgensel bölgenin y ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile dönel silindir elde edilir. Dik dairesel silindire **dönel silindir** de denir.

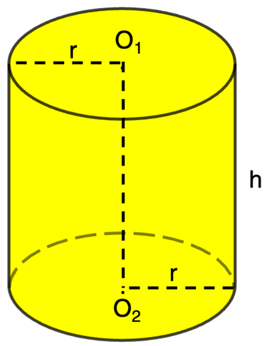


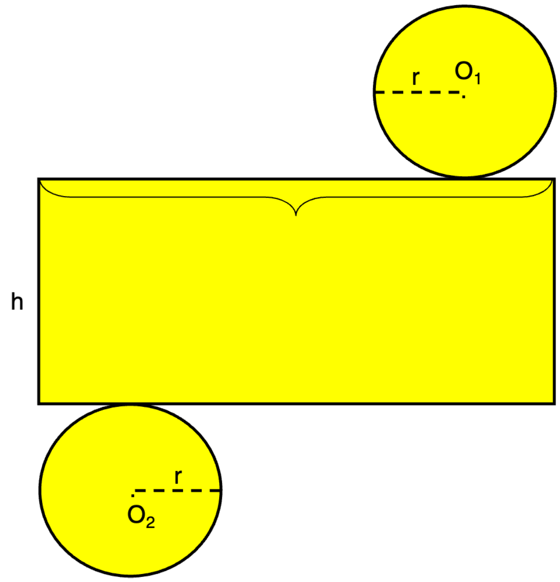
- Silindir ile silindirin tabanlarına **dik** bir düzlemin kesişimi **dikdörtgen**dir.

- Silindir ile silindirin tabanlarına **paralel** bir düzlemin kesişimi **daire**dir.



- Taban yarıçap uzunluğu r, yüksekliği h olan silindirin açınımı;





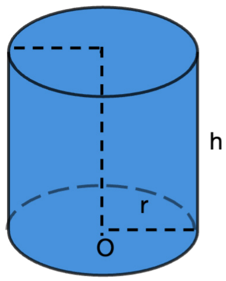
Açınımda silindirin yan yüzeyi bir dikdörtgen; tabanları, birbirine eş dairelerdir. Silindirin yüzey alanı, oluşan dikdörtgenin alanı ve iki taban dairesinin alanları toplamıdır. Dikdörtgenin bir kenar uzunluğu silindirin yüksekliğine, bu kenara dik olan kenar uzunluğu dairenin çevre uzunluğuna eşittir. Bazı ifadelerin sembolleri verilmiştir;

Yanal yüzey alanı = Y_A
Taban alanı = T_A
Tüm silindirin yüzey alanı = S_A
Taban dairesinin yarıçap uzunluğu = r

Buradan;
Y_A = Taban çevre uzunluğu • Yükseklik = $2\pi rh$
$T_A = \pi r^2$
Taban alanları toplamı = $2\,T_A = 2\pi r^2$ olur.
Tüm silindirin yüzey alanı = Yanal yüzey alanı + 2 · Taban alanı olduğundan
$S_A = Y_A + 2T_A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ olur.

- Aşağıdaki şekilde verilen taban yarıçap uzunluğu r, yüksekliği h olan bir dik dairesel silindir verilsin. Dik dairesel silindirin hacmi V olmak üzere;

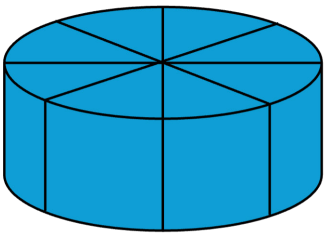
  Dik dairesel silindirin hacmi (V) = Taban Alanı · Yükseklik

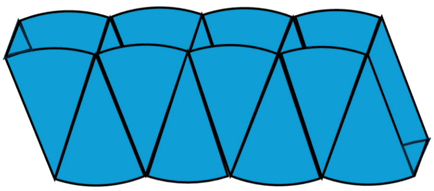


$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ ile bulunur

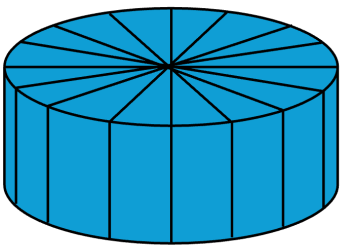
- Bir silindirin hacim formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

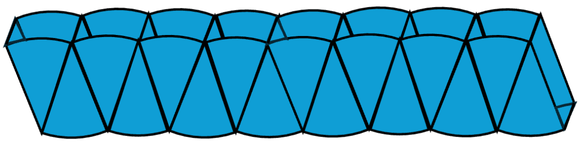
  Yarıçap uzunluğu r, yüksekliği h olan bir silindir 8 eş dilime bölünüp elde edilen dilimler aşağıda verilen şekildeki gibi dizilsin.



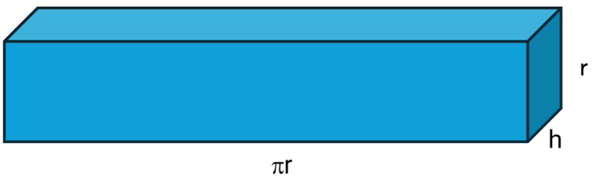


- Aynı silindir 16 eş dilime bölünüp aşağıda verilen şekildeki gibi dizildiğinde şeklin kıvrımları azalır. Şeklin alt ve üst taban alanları silindirin yanal alanının yarısıdır. Silindirin yarıçap uzunluğu prizmanın yüksekliğine eşittir.





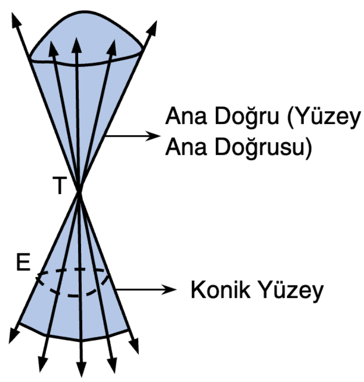
- Bu şekilde silindir daha çok dilime bölünüp elde edilen dilimler yan yana dizilirse şekil giderek dikdörtgenler prizmasına benzeyecektir.



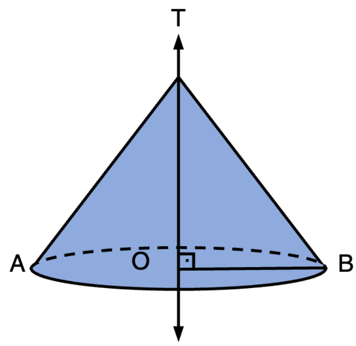
Dikdörtgenler prizmasının hacmi: $\pi \cdot r^2 \cdot h$ olur.

Buradan da hacim: $\pi \cdot r^2 \cdot h$ bulunur.

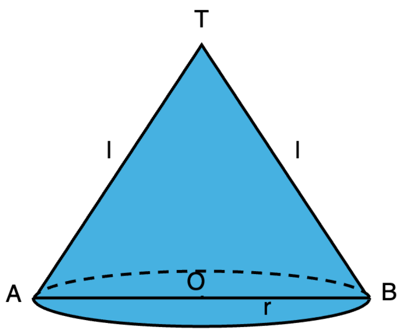
- Uzayda kapalı bir E eğrisi ile bu eğrinin düzlemi dışında bir T noktası olsun.
- T noktasından geçen ve E eğrisini kesen doğruların kümesine **konik yüzey** denir.
- T noktasına konik yüzeyin tepe noktası, konik yüzeyi oluşturan doğruların her birine konik yüzeyin **ana doğrusu** denir.
- Bir konik yüzeyin sınırladığı bölgeye **koni** denir.

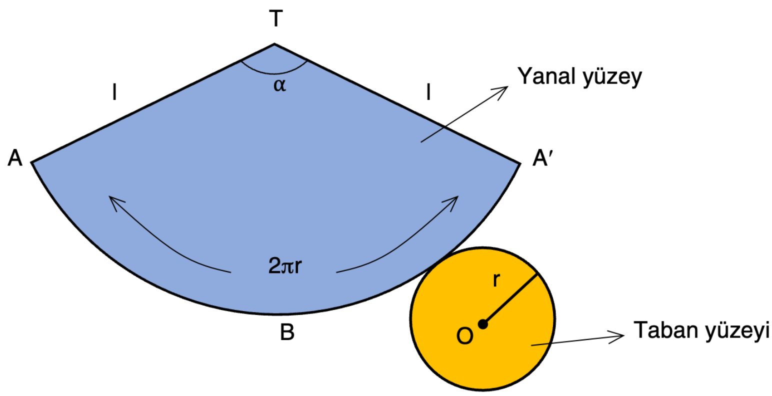


- Tabanı daire olan konilere **dairesel koni** ve dairesel koninin tabanının merkezi ile tepe noktasından geçen doğruya **koninin ekseni** denir.
- Ekseni taban düzlemine dik olan konilere **dik koni**, dik koninin tabanı daire şeklinde ise bu koniye **dik dairesel koni** denir.



- Taban dairesinin merkezi O noktası olan yandaki dik dairesel koninin ana doğrusu [TA] ve [TB], **yüksekliği** [TO] ve **taban yarıçapı** [OB] olur. Bundan sonraki çalışmalarımızda kolaylık olması için "koni" denildiğinde "dik dairesel koni" anlaşılmalıdır
- Koni, ana doğrusu [TA] boyunca kesilirse aşağıdaki gibi görünür.



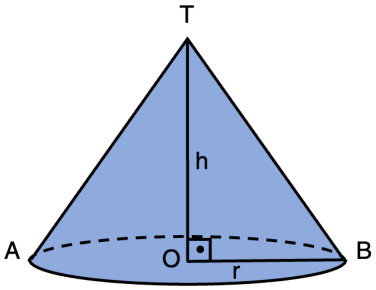


Daire diliminden $\frac{r}{l} = \frac{\alpha}{360^\circ}$ olur.

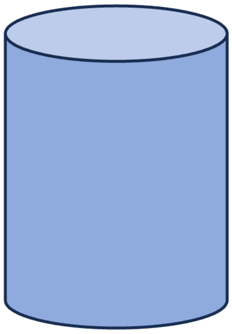
Daire diliminin yüzey alanı Y_A olmak üzere, $Y_A = \pi r l$ ile hesaplanır.

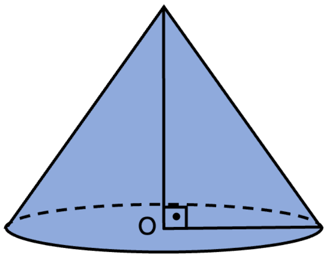
Koninin taban alanı T_A, yüzey alanı A olmak üzere, $A = Y_A + T_A = \pi r l + \pi r^2$ ile hesaplanır.

- Taban dairesinin yarıçap uzunluğu r birim ve yüksekliği h birim olan koninin hacmi (V)



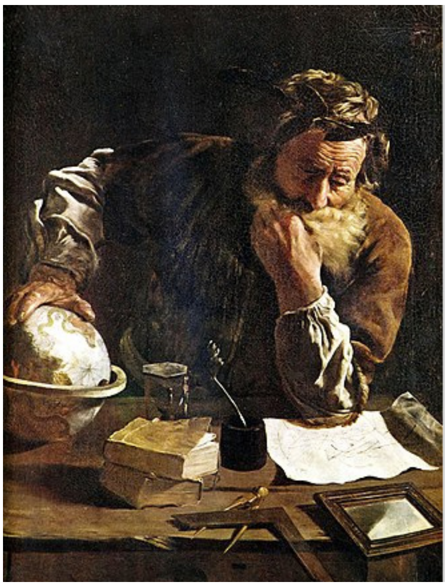
$V = \frac{1}{3} \cdot$ Taban Alanı $\cdot$ Yükseklik $= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ şeklinde hesaplanır.





Prizma ve piramit arasındaki ilişkinin aynısı silindir ile koni arasında da vardır.. Silindirin hacmi ile koninin hacimleri arasında da $\frac{1}{3}$ oranının olduğu görülür.

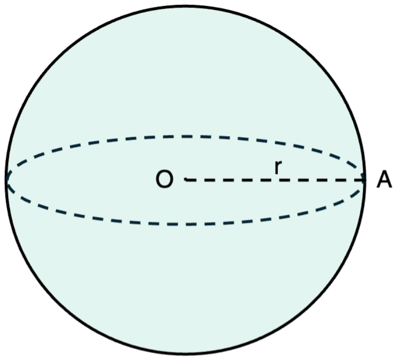
Arşimet (MÖ 287 - MÖ 212)



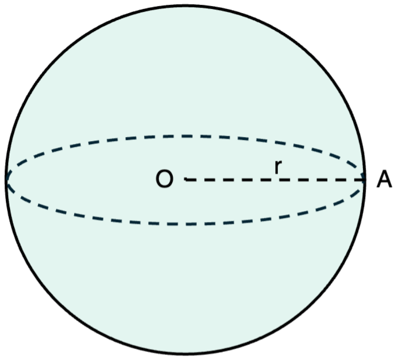
Antik dünyanın ilk ve en büyük bilim insanı olarak kabul edilir.

Hidrostatiğin ve mekaniğin temelini atmıştır.Bir hamamda su ile yıkanırken bulduğu iddia edilen suyun kaldırma kuvveti bilime en çok bilinen katkısıdır. Bu kuvvet cismin batan hacmi, içinde bulunduğu sıvının yoğunluğu ve yer çekimi ivmesinin çarpımına eşittir. Ayrıca, pek çok matematik tarihçisine göre integral hesabın kaynağı da Arşimet'tir.

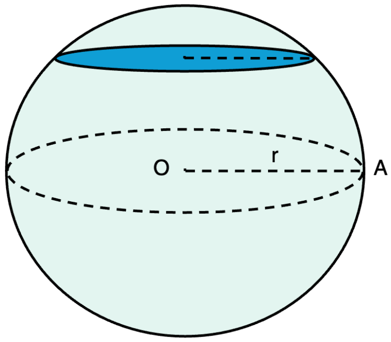
Geometriye yapmış olduğu en önemli katkılardan birisi, bir kürenin yüzölçümünün $4 \cdot \pi \cdot r^2$ ve hacminin ise $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ eşit olduğunu kanıtlamasıdır. Bir dairenin alanının, tabanı bu dairenin çevresine ve yüksekliği ise yarıçapına eşit bir üçgenin alanına eşit olduğunu kanıtlayarak pi değerinin $3 + \frac{1}{7}$ ve $3 + \frac{10}{71}$ arasında bulunduğunu göstermiştir. Başka bir deyişle bu formülleri suyun hacim kullanma esnasında alabileceği özkütle çapıdır.



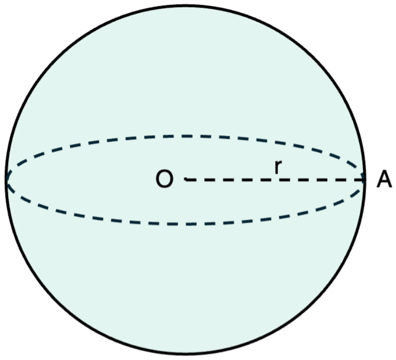
- Uzayda sabit bir O noktasından eşit uzaklıkta bulunan noktaların birleşim kümesine **küre yüzeyi** ve bu yüzeyle sınırlanan katı cisme **küre** denir.



- Sabit olan O noktasına **kürenin merkezi,** O noktası ile küre yüzeyi arasındaki sabit olan uzaklığa ise **kürenin yarıçap uzunluğu** denir. Aşağıdaki şekilde verilen **kürenin yarıçapı** [OA], yarıçap uzunluğu ise $|OA| = r$ olur.



- Küre yüzeyinin düzlemle olan ara kesiti bir çemberdir. Bu çembere **küre çemberi** denir. Eğer küre çemberi, kürenin merkezinden geçiyorsa buna **kürenin büyük çemberi** denir.



- Merkezi O ve yarıçap uzunluğu r olan kürenin;

  Alanı $= 4 \cdot \pi \cdot r^2$ dir.

  Hacmi $= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ tür.

- Bir yarım daire, çapı etrafında 360° döndürüldüğünde taradığı bölge küre şeklinde olur.

MEBİ

mebi.eba.gov.tr