Xác Suất Thống Kê

Chương 1: Đại cương về xác suất thống kê

CMC UNIVERSITY

Nội dung chính

- Chương 1. Đại cương về xác suất và ứng dụng
- Chương 2. Biến ngẫu nhiên
- Chương 3. Thống kê mô tả
- Chương 4. Ước lượng
- Chương 5. Kiểm định giả thuyết
- Chương 6. Phân tích tương quan và hồi quy

CMC UNIVERSITY

Đánh giá học phần

❑Kiểm tra đánh giá

- Đánh giá quá trình: 25%

+ Đánh giá chuyên cần: 5%

+ Đánh giá bài tập: 20%

- Đánh giá cuối kỳ: 75%

+ Đánh giá giữa kỳ: 20%

+ Đánh giá cuối kỳ: 55%

❑Quy định của học phần

- Sinh viên nghỉ quá 20% số giờ lên lớp sẽ không được dự thi cuối kỳ

- **Điểm thi cuối kỳ ≤ 2 được tính là điểm liệt**

Tài liệu tham khảo

❑ Học liệu bắt buộc

- Mary C. Meyer (2019), Probability and Mathematical Statistics: Theory, Applications, and Practice in R, Siam.

❑ Học liệu tham khảo

- Đặng Hùng Thắng, Trần Mạnh Cường. (2019), Thống kê cho Khoa học xã hội và Khoa học sự sống, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- Trần Văn Long, Hoàng Việt Long, Phí Thị Vân Anh (2016), Xác suất thống kê tập 1, NXB Giao thông vận tải.
- Trần Văn Long, Nguyễn Mạnh Hùng, Phí Thị Vân Anh (2017), Xác suất thống kê tập 2, NXB Giao thông vận tải.

Chương 1

Đại cương về xác suất thống kê

Nội dung của chương

1. Biến cố ngẫu nhiên và xác suất
2. Các quy tắc tính xác suất
3. Xác suất điều kiện, công thức nhân xác suất
4. Tính độc lập
5. Công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes
6. Công thức xác suất nhị thức

Chương 1

1. Biến cố ngẫu nhiên và xác suất

Phép thử ngẫu nhiên

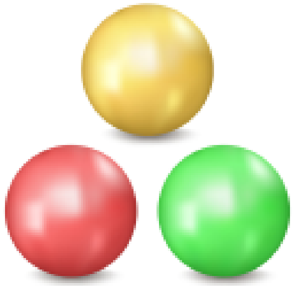
- Phép thử: việc thực hiện một tổ hợp các hành động nào đó.
- Phép thử ngẫu nhiên: phép thử mà ta không biết trước được kết quả của nó.
- Kí hiệu phép thử ngẫu nhiên là: $\mathcal{C}$.

Không gian mẫu và biến cố sơ cấp

- **Không gian mẫu** là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử ngẫu nhiên. Kí hiệu là Ω.
- **Biến cố sơ cấp** là một phần tử của không gian mẫu, kí hiệu là ω.

Ví dụ

Trong hộp có 1 bi xanh, 1 bi đỏ và 1 bi vàng.
Hãy xác định không gian mẫu và số biến cố sơ cấp của các phép thử sau:
a) Lấy ra ngẫu nhiên 1 bi từ hộp.
b) Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 bi từ hộp.
c) Lấy ra lần lượt 2 bi từ hộp.
d) Lấy ra ngẫu nhiên 1 bi từ hộp, xem màu, trả lại hộp rồi lại lấy ra ngẫu nhiên 1 bi nữa.



Ví dụ

a) Lấy ra ngẫu nhiên 1 bi từ hộp

$$\Omega = \left\{X, Đ, V\right\}.$$

b) Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 bi từ hộp

$$\Omega = \left\{\{X, Đ\}, \{X, V\}, \{Đ, V\}\right\}.$$

Ví dụ

c) Lấy ra lần lượt 2 bi từ hộp

$$\Omega = \left\{X\text{Đ}, XV, \text{Đ}X, \text{Đ}V, VX, V\text{Đ}\right\}$$
$$= \left\{(X, \text{Đ}), (X, V), (\text{Đ}, X), (\text{Đ}, V), (V, X), (V, \text{Đ})\right\}$$

d) Lấy ra ngẫu nhiên 1 bi từ hộp, xem màu, trả lại hộp rồi lại lấy ra ngẫu nhiên 1 bi nữa

$$\Omega = \left\{XX, X\text{Đ}, XV, \text{Đ}X, \text{Đ}V, \text{ĐĐ}, VX, V\text{Đ}, VV\right\}$$
$$= \left\{(X, X), (X, \text{Đ}), (X, V), (\text{Đ}, X), (\text{Đ}, \text{Đ}), (\text{Đ}, V), (V, X), (V, \text{Đ}), (V, V)\right\}.$$

Ví dụ

Trong hộp có 1 bi xanh, 1 bi đỏ và 1 bi vàng.
Hãy liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra của các phép thử sau:
a) Lấy ra ngẫu nhiên 1 bi từ hộp.
b) Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 bi từ hộp.
c) Lấy ra lần lượt 2 bi từ hộp.
d) Lấy ra ngẫu nhiên 1 bi từ hộp, xem màu, trả lại hộp rồi lại lấy ra ngẫu nhiên 1 bi nữa.

Biến cố

- Biến cố là một sự kiện có liên quan đến phép thử. Một biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra sau khi phép thử được thực hiện. Kí hiệu: A,B,C,...
- Một kết quả ω được gọi là kết quả thuận lợi cho biến cố A nếu A xảy ra khi kết quả của phép thử $\mathcal{C}$ là ω. Do đó, mỗi biến cố được đồng nhất với một tập con của không gian mẫu.
- Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra, tương ứng với tập Ω.
- Biến cố không thể là biến cố luôn không xảy ra, tương ứng với tập $\emptyset$.

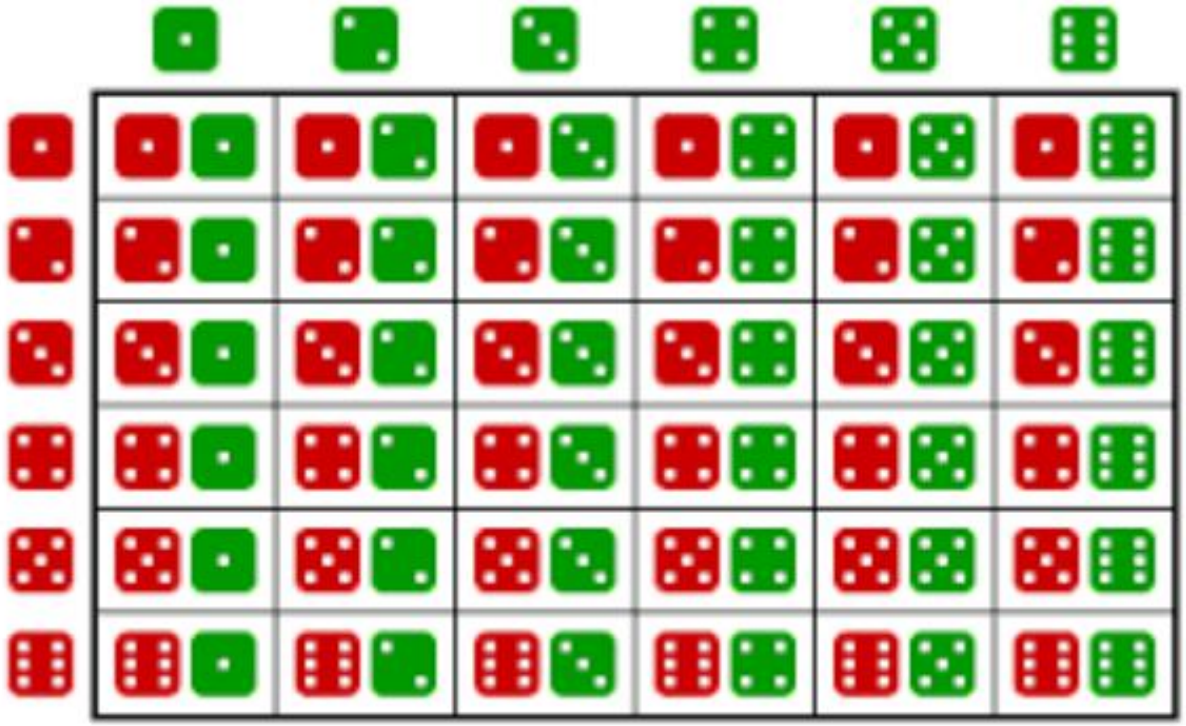
CMC UNIVERSITY

Ví dụ

Xét phép thử gieo hai con
xúc xắc cân đối, đồng chất. Hãy xác định không gian mẫu và biểu diễn các biến cố sau dưới dạng tập hợp.

- A là b/c xuất hiện hai mặt 1 chấm.
- B là b/c xuất hiện hai mặt 4 chấm.
- C là b/c xuất hiện hai mặt cùng chấm.
- D là b/c tổng số chấm bằng 8.
- E là b/c tích số chấm xuất hiện là số lẻ.

Ví dụ



$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$$
$$= \{(i,j) : 1 \le i,j \le 6\}$$

Ví dụ

- $A = \{(1,1)\}$.
- $B = \{(4,4)\}$.
- C là b/c xuất hiện hai mặt cùng chấm

$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}.$$

- D là b/c tổng số chấm bằng 8

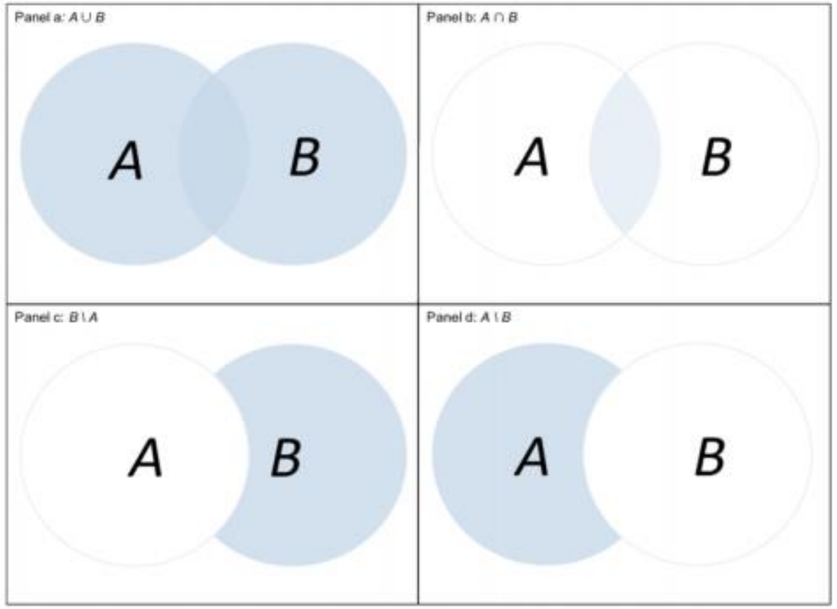
$$D = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}.$$

- E là b/c tích số chấm xuất hiện là số lẻ

$$E = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}.$$

Các phép toán của biến cố

- $A \cup B$: Hợp của hai biến cố A và B.
- $A \cap B = AB$: Giao của hai biến cố A và B.
- $A \setminus B$: Hiệu của hai biến cố A và B.

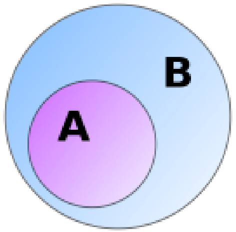


Ví dụ

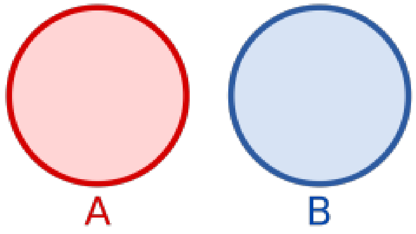
Trong phép thử gieo hai con xúc xắc, hãy xác định biến cố hợp, giao và hiệu của các biến cố C và D.

Mối quan hệ giữa hai biến cố

- Biến cố A được gọi là kéo theo biến cố B nếu khi A xảy ra thì B cũng xảy ra, tức là: $A \subset B$.



- Biến cố A được gọi là xung khắc với biến cố B nếu khi A xảy ra thì B không xảy ra và ngược lại. Hai biến cố xung khắc không thể đồng thời cùng xảy ra, tức là: $A \cap B = \emptyset$.



Ví dụ

Trong các biến cố A, B, C, D, E ở phép thử gieo hai con xúc xắc,

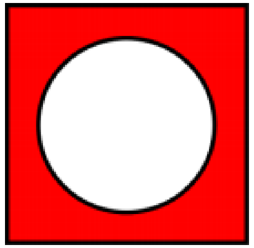
- hãy chỉ ra biến cố nào thuận lợi cho biến cố nào;
- hãy chỉ ra các cặp biến cố xung khắc.

Mối quan hệ giữa các biến cố

Biến cố B được gọi là biến cố đối của biến cố A nếu nó xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra, tức là

$$\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = \Omega \end{cases} \Leftrightarrow A = \Omega \setminus B.$$

Kí hiệu biến cố đối của biến cố A là $\overline{A}$.



Ví dụ

Trong phép thử gieo hai con xúc xắc,
hãy xác định biến cố đối của các biến cố C, D, E.

Ví dụ

Gieo 2 đồng xu cân đối và đồng chất.

- Không gian mẫu

$$\Omega = \{(S,S),(S,N),(N,S),(N,N)\}$$

- A là biến cố: "Có ít nhất một mặt ngửa xuất hiện".

$$A = \{(S,N),(N,S),(N,N)\}$$

- Biến cố đối của A là $\bar{A}$: "Cả hai xuất hiện mặt sấp".

$$\bar{A} = (S,S)$$

Công Thức DeMorgan

- Với hai biến cố A và B bất kỳ, ta có

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ và } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Công thức DeMorgan

- Với hai biến cố A và B bất kỳ, ta có

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ và } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

- Với ba biến cố A, B, và C bất kỳ ta có

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ and } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Định nghĩa xác suất

- Xét một phép thử với không gian mẫu $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, độ đo xác suất $\mathbb{P}(A_i)$ của các biến cố sơ cấp A_i thỏa mãn các điều kiện sau:
  1. $0 \leq \mathbb{P}(A_i) \leq 1$ for each i.
  2. $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$

Định nghĩa xác suất

- Xét một phép thử với không gian mẫu $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, độ đo xác suất $\mathbb{P}(A_i)$ của các biến cố sơ cấp A_i thỏa mãn các điều kiện sau:
  1. $0 \leq \mathbb{P}(A_i) \leq 1$ for each i.
  2. $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$
- Xác xuất của một biến cố: Xác suất của biến cố A là $\mathbb{P}(A)$ bằng tổng các xác suất của các biến cố sơ cấp thuận lợi cho A.

CMC UNIVERSITY

Tiên đề xác suất

1. Với biến cố A bất kì, thì $\mathbb{P}(A) \geq 0$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Với mọi dãy $\{A_i\}$ thỏa mãn $A_iA_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ thì

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Ví dụ

Tung một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xét các biến cố sau:

- A: Số chấm xuất hiện không quá 2.
- B : Số chấm xuất hiện là số chẵn.
- C: Mặt 4 chấm xuất hiện.

Hãy trả lời các câu hỏi sau

1. Tính $\mathbb{P}(A)$.
2. Tính $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right)$.
3. Các biến cố A và C có xung khắc không.
4. Tính $\mathbb{P}(A \cup C)$.
5. Tính $\mathbb{P}(A \cap B)$.
6. Tính $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Ví dụ

Lời giải:

Ta có: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. $A = \{1, 2\}$ nên $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} \approx 0.33$.

Ví dụ

Lời giải:

Ta có: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. $A = \{1, 2\}$ nên $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} \approx 0.33$.
2. $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$ nên $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{4}{6} \approx 0.67$.

Ví dụ

Lời giải:

Ta có: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. $A = \{1, 2\}$ nên $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} \approx 0.33$.
2. $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$ nên $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{4}{6} \approx 0.67$.
3. $A = \{1, 2\}, C = \{4\}$. Biến cố A và C là xung khắc.

Ví dụ

Lời giải:

Ta có: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. $A = \{1, 2\}$ nên $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} \approx 0.33$.
2. $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$ nên $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{4}{6} \approx 0.67$.
3. $A = \{1, 2\}, C = \{4\}$. Biến cố A và C là xung khắc.
4. $A \cup C = \{1, 2, 4\}$ nên $\mathbb{P}(A \cup C) = \dfrac{1}{2} = 0.5$

Ví dụ

Lời giải:

Ta có: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. $A = \{1, 2\}$ nên $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} \approx 0.33$.
2. $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$ nên $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{4}{6} \approx 0.67$.
3. $A = \{1, 2\}, C = \{4\}$. Biến cố A và C là xung khắc.
4. $A \cup C = \{1, 2, 4\}$ nên $\mathbb{P}(A \cup C) = \dfrac{1}{2} = 0.5$
5. $A = \{1, 2\}, B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow A \cap B = \{2\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} \approx 0.167$

Ví dụ

<u>*Lời giải:*</u>

Ta có: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. $A = \{1, 2\}$ nên $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} \approx 0.33$.
2. $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$ nên $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{4}{6} \approx 0.67$.
3. $A = \{1, 2\}, C = \{4\}$. Biến cố A và C là xung khắc.
4. $A \cup C = \{1, 2, 4\}$ nên $\mathbb{P}(A \cup C) = \dfrac{1}{2} = 0.5$
5. $A = \{1, 2\}, B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow A \cap B = \{2\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} \approx 0.167$
6. $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$ nên $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{4}{6} \approx 0.67$

Ví dụ

Gieo đồng thời ba con xúc xắc được chế tạo cân đối đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên ba con xúc xắc bằng 9.

Lời giải:

Không gian mẫu:

$$\Omega = \{(a,b,c) : 1 \le a,b,c \le 6\} \Rightarrow |\Omega| = 6.6.6 = 216.$$

Liệt kê bộ ba số (a,b,c) có tổng bằng 9 là:

- $(1,2,6)$ và 5 hoán vị của nó;
- $(1,3,5)$ và 5 hoán vị của nó;
- $(1,4,4)$ và 2 hoán vị của nó;
- $(2,2,5)$ và 2 hoán vị của nó;
- $(2,3,4)$ và 5 hoán vị của nó;
- $(3,3,3)$

Suy ra:

$$|A| = 6+6+3+6+3+1 = 25 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{25}{216}.$$

Ví dụ

Một công ty cần tuyển hai nhân viên. Có 6 người nộp đơn, trong đó có 4 nữ và 2 nam. Giả sử khả năng trúng tuyển của 6 người là như nhau.

1. Tính xác suất để hai người trúng tuyển đều là nam.
2. Tính xác suất để hai người trúng tuyển đều là nữ.
3. Tính xác suất để ít nhất một người trúng tuyển là nữ.

Ví dụ

Lời giải:

Không gian mẫu: $|\Omega| = C_6^2 = 15$.

1. Gọi A là biến cố hai người trúng tuyển đều là nam.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}.$$

2. Gọi B là biến cố hai người trúng tuyển đều là nữ.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

3. Gọi C là biến cố ít nhất một người trúng tuyển là nữ.

$$\mathbb{P}(C) = \frac{C_4^1 C_2^1 + C_4^2}{C_6^2} = \frac{14}{15}.$$

2. Các quy tắc tính xác suất

Quy tắc tính xác suất

Quy tắc cộng

- Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Đặc biệt, với mọi biến cố A:

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

- Nếu A và B là hai biến cố bất kì thì:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB).$$

- Nếu A, B, C là ba biến cố bất kì thì:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(BC) - \mathbb{P}(CA) + \mathbb{P}(ABC).$$

Ví dụ

Ví dụ 1

Có 30% sinh viên tại trường đại học A học chuyên ngành Công nghệ thông tin và 60% sinh viên được kiểm tra đạt trình độ về Tiếng Anh. Ngoài ra, 25% sinh viên vừa học chuyên ngành Công nghệ thông tin vừa đạt trình độ về Tiếng Anh. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên của trường đại học A.

1. Tính xác suất để sinh viên đó học chuyên ngành Công nghệ thông tin và không đạt trình độ Tiếng Anh.
2. Tính xác suất sinh viên không học chuyên ngành Công nghệ thông tin và đạt trình độ Tiếng Anh.

Ví dụ

Ví dụ 2

Giả sử A, B, C là ba biến cố thỏa mãn:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbb{P}(A) = 0,5 & \mathbb{P}(B) = 0,7 & \mathbb{P}(C) = 0,6 \\
\mathbb{P}(AB) = 0,3 & \mathbb{P}(BC) = 0,4 & \mathbb{P}(CA) = 0,2 \\
\mathbb{P}(ABC) = 0,1 & &
\end{array}
$$

1. Tính xác suất để có ít nhất một biến cố xảy ra.
2. Tính xác suất để cả ba biến cố đều không xảy ra.
3. Tính xác suất để chỉ có đúng hai biến cố xảy ra.
4. Tính xác suất để chỉ có đúng một biến cố xảy ra.

Ví dụ

Ví dụ 3

Tại một vùng nông thôn, có 40% hộ gia đình có nuôi chó, 60% hộ gia đình có nuôi mèo, và 20% hộ gia đình không nuôi chó và mèo. Chọn ngẫu nhiên một hộ gia đình, tính xác suất để hộ đó nuôi cả chó và mèo.

Quy tắc nhân

3. Xác suất điều kiện, công thức nhân xác suất

Xác suất điều kiện

Định nghĩa

Cho A và B là hai biến cố, $\mathbb{P}(B) > 0$. Xác suất để biến cố A xảy ra biết rằng biến cố B đã xảy ra là

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Xác suất này được gọi là xác suất của A với điều kiện B.

Xác suất điều kiện

Ví dụ 1

Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Hai mặt cùng chấm xuất hiện", B là biến cố "tổng số chấm bằng 8". Hãy tính

1. $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$.
2. Giả sử rằng biến cố A đã xảy ra, tính xác suất để B xảy ra.
3. Giả sử rằng biến cố B đã xảy ra, tính xác suất để A xảy ra.

Xác suất điều kiện

Ví dụ 2

Một trường đại học thống kê rằng có 40% sinh viên khoa CNTT làm bài tập về nhà đầy đủ, 45% sinh viên khoa CNTT tốt nghiệp với GPA trên 3.5, và 55% sinh viên khoa CNTT làm bài tập về nhà đầy đủ hoặc tốt nghiệp với GPA trên 3.5. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên khoa CNTT. Tính xác suất để sinh viên tốt nghiệp với GPA trên 3.5, biết rằng sinh viên đó làm bài tập về nhà đầy đủ.

Quy tắc nhân tổng quát

Quy tắc nhân

- Giả sử A và B là hai biến cố và $\mathbb{P}(B) > 0$. Khi đó

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B).$$

- Giả sử $A_1, \ldots, A_n$ là các biến cố và $\mathbb{P}(A_1A_2\ldots A_{n-1}) > 0$. Khi đó

$$\mathbb{P}(A_1\ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1\ldots A_{n-1}).$$

Ví dụ

Ví dụ 1

Một hộp có 30 lá thăm trong đó có một lá trúng thưởng. Một người bốc một cách ngẫu nhiên từng lá thăm ra khỏi hộp (không hoàn lại) cho tới khi gặp thăm trúng thưởng thì dừng lại.

1. Tính xác suất của biến cố
   a. lần bốc thứ nhất được thăm trúng thưởng;
   b. lần bốc thứ hai được thăm trúng thưởng;
   c. lần bốc thứ ba được thăm trúng thưởng.
2. Tính lại xác suất của các biến cố trên khi trong hộp có đúng 2 thăm trúng thưởng.

Tính độc lập

4.Tính độc lập

Sự độc lập

Sự độc lập

Tung một đồng xu hai lần. Nếu biết được kết quả lần gieo thứ nhất thì có đoán được kết quả lần gieo thứ hai hay không?

Tính độc lập

Định nghĩa

- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia.

Tính độc lập

Định nghĩa

- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia.
- Nếu hai biến cố A và B độc lập thì

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Biến cố độc lập

Định lý

Nếu A và B độc lập thì các cặp biến cố sau cũng độc lập:

- $\overline{A}$ và B;
- A và $\overline{B}$;
- $\overline{A}$ và $\overline{B}$.

Tính độc lập

Ví dụ

Giả sử có 70% nhân viên bán hàng tại một cửa hàng máy tính là nữ. Năm trước, 20% nhân viên bán hàng được thưởng, và có 24% nhân viên bán hàng là nam giới không được thưởng. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên bán hàng. Gọi A là biến cố "nhân viên bán hàng là nữ", và B là biến cố "nhân viên không được thưởng". Hỏi A, B có độc lập không?

Dãy biến cố độc lập

Định nghĩa

- Dãy biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của một nhóm bất kì gồm k biến cố A_i nào đó trong dãy không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của các biến cố còn lại.
- Nếu dãy biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ độc lập thì

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}),$$

với mọi $2 \leq k \leq n$, với mọi $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

Dãy biến cố độc lập

Ví dụ 1

Ba xạ thủ A, B, C độc lập với nhau cùng nổ súng bắn vào một mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của ba xạ thủ A, B, C tương ứng là $0,4$, $0,5$ và $0,7$.

- Tính xác suất để chỉ có duy nhất một xạ thủ bắn trúng.
- Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

5. Công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes

Định nghĩa

Định nghĩa

Cho một phép thử $\mathcal{C}$ có không gian mẫu Ω. Các biến cố $B_1, B_2, \ldots, B_n$ được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu chúng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

1. $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$;
2. $B_i B_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$.

Ví dụ

Ví dụ

- Hai biến cố $A, \bar{A}$ tạo nên một hệ đầy đủ.
- Một hộp bút có một số bút xanh và bút đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó ra 2 bút. Gọi H_k là biến cố có k bút xanh trong 2 bút đã lấy ra. Khi đó H_0, H_1, H_2 tạo nên một hệ đầy đủ.

Xác suất toàn phần

- Công thức xác suất toàn phần
  Giả sử có $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ đầy đủ các biến cố với $\mathbb{P}(A_i) > 0$, với mọi i, và B là biến cố bất kỳ. Ta có:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B \mid A_2)\mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(B \mid A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

Xác suất toàn phần

- Công thức xác suất toàn phần

  Giả sử có $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ đầy đủ các biến cố với $\mathbb{P}(A_i) > 0$, với mọi i, và B là biến cố bất kỳ. Ta có:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B \mid A_2)\mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(B \mid A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

- Công thức Bayes

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(B \mid A_n)\mathbb{P}(A_n)}.$$

Ví dụ

Ví dụ 1

Có 3 chiếc hộp giống hệt nhau đựng bi xanh và bi đỏ. Hộp A có 1 bi đỏ và 1 bi xanh, hộp B có hai bi đỏ và 1 bi xanh và hộp C có 9 bi đỏ và 1 bi xanh. Chọn ngẫu nhiên một hộp và từ đó chọn ngẫu nhiên một bi. Tính xác suất để lấy được viên bi xanh?

Lời giải

Gọi G là biến cố lấy được bi xanh, và A, B, C là biến cố lấy được hộp A, B, C tương ứng. Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(G \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(G \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(G \mid C)\mathbb{P}(C) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{45}.\end{aligned}$$

Ví dụ

Ví dụ 2

Tại một vùng A có 15.14% người trưởng thành hút thuốc lá, 0.86% người hút thuốc lá bị viêm phổi, và 0.24% người không hút thuốc bị viêm phổi. Chọn ngẫu nhiên một người ở vùng A.

1. Tính xác suất để người đó bị viêm phổi?
2. Giả sử người đó hút thuốc, tính xác suất để người đó bị viêm phổi?
3. Giả sử người đó không hút thuốc, tính xác suất để người đó bị viêm phổi?
4. Biến cố "một người hút thuốc" và biến cố "một người bị viêm phổi" có độc lập không. Tại sao?

Ví dụ

Ví dụ 3

Giả sử một công ty máy tính nhập 60% chip từ công ty A, 30% từ công ty B, và 10% từ công ty C. Trong số chip của công ty A có 2% bị lỗi, công ty B có 1% bị lỗi, và công ty C có 5% bị lỗi. Chọn ngẫu nhiên một chip.

1. Tính xác suất để chip đó bị lỗi.
2. Giả sử chip bị lỗi, tính xác suất để chip đó do công ty C sản xuất?

Ví dụ

Ví dụ 4

Maxine và Susan là những người thợ làm gốm, cùng làm một loại bình hoa cho một cửa hàng. Maxine rất cẩn thận và có 60% bình hoa của cô ấy không có lỗi, 30% có một lỗi, và 10% có hai lỗi. Susan làm nhanh nhưng kém cẩn thận nên có 30% bình hoa của cô ấy không có lỗi, 50% có 1 lỗi, và 20% có hai lỗi. Trong cửa hàng có, 70% bình hoa là do Susan làm và chỉ 30% do Maxine làm.

1. Chọn ngẫu nhiên một bình hoa của cửa hàng. Tính xác suất để bình hoa đó có hai lỗi.
2. Chọn ngẫu nhiên một bình hoa của cửa hàng. Tính xác suất để bình hoa đó không có.
3. Chọn ngẫu nhiên một bình hoa của cửa hàng và thấy không có lỗi. Tính xác suất để bình hoa đó do Susan làm.

6. Công thức xác suất nhị thức

CMC UNIVERSITY

Định nghĩa

Một dãy phép thử được gọi là dãy phép thử Bernoulli nếu:

- Không gian mẫu của mỗi phép thử Bernoulli chỉ có hai khả năng là "thành công" và "thất bại".
- Xác suất thành công của mỗi phép thử là $p \in (0; 1)$.
- Kết quả của mỗi phép thử là một dãy các biến cố độc lập.

Định nghĩa

Công thức xác suất nhị thức Tiến hành n lần liên tiếp phép thử $\mathcal{C}$ một cách độc lập. Trong mỗi phép thử $\mathcal{C}$, xác suất xảy ra của biến cố A là $\mathbb{P}(A) = p$, với $0 < p < 1$. Ký hiệu $\mathbb{P}(n; k)$ là xác suất trong n lần đó, biến cố A xuất hiện k lần.

$$\mathbb{P}(n; k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

CMC UNIVERSITY

Ví dụ

Ví dụ 1

Có 60% cử tri của thành phố ủng hộ ứng cử viên A trong một cuộc tranh cử. Chọn ngẫu nhiên 10 cử tri của thành phố.

1. Tính xác suất để có 8 người ủng hộ ứng viên A.
2. Tính xác suất để có ít nhất 8 người ủng hộ ứng viên A.

Lời giải

1. Sử dụng công thức xác suất nhị thức với $n = 10; k = 8; p = 0,6$. Ta có:

$$C_{10}^{8} \cdot 0,6^{8} \cdot 0,4^{2} = 0,121$$

2. Xác suất để có ít nhất 8 người ủng hộ ứng viên A là:

$$C_{10}^{8} \cdot 0,6^{8} \cdot 0,4^{2} + C_{10}^{9} \cdot 0,6^{9} \cdot 0,4^{1} + C_{10}^{10} \cdot 0,6^{10} \cdot 0,4^{0} = 0,167$$

Ví dụ

Ví dụ

Một lớp học có 6 bóng đèn hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để một bóng bị hỏng là 5%. Lớp học đủ ánh sáng nếu có ít nhất 4 bóng hoạt động. Tính xác suất lớp học đủ ánh sáng.

Lời giải

Gọi $\mathbb{P}(6;k)$ là xác suất lớp học có k bóng sáng. Áp dụng công thức Bernoulli ta có

$$\mathbb{P}(6;k) = C_6^k \times 0,95^k \times 0,05^{6-k}.$$

Xác suất lớp học đủ ánh sáng là

$$\mathbb{P}(6;4) + \mathbb{P}(6;5) + \mathbb{P}(6;6) = 0,9978.$$

CMC UNIVERSITY

THANK YOU