初三数学在线学习学案（1）——浅谈含参问题解题思路参考答案

一、自主探究---熟悉的味道：

问题 1：解关于 x 的一元一次方程：

(1)$2x=4$　　(2) $ax=4$　　(3) $ax=b$（a, b 为常数）

【解析】 (1)$x=2$

(2) 1°当$a\neq 0$时，$x=\dfrac{4}{a}$；

2°当$a=0$时，$0=4$，显然无解.

(3) 1°当$a\neq 0$时，$x=\dfrac{b}{a}$；有唯一解；

2°当$a=0$，$b=0$时，恒成立，x可以为任意实数；

3°当$a=0$，$b\neq 0$时，$0=b$，显然无解.

问题 2： 已知方程组$\begin{cases}2x+y=5k+6\\x-2y=-17\end{cases}$的解 x，y 都是负数，求 k 的取值范围.

【解析】由题意得：

$\begin{cases}x=2k-1\\y=k+8\end{cases}$, $\because\begin{cases}x<0\\y<0\end{cases}$, $\therefore\begin{cases}2k-1<0\\k+8<0\end{cases}$, $\therefore k<-8$

二、合作探究：

例题.已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a,b,c为常数，且$a\neq 0$）与 x 轴的两个交点分别为 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

（1）若 $a=1,b=-3,c=2$，求$|x_1-x_2|$的值；

【解析】 (1) 由题，得$y=x^2-3x+2$，令$y=0$，

$\therefore 0=x^2-3x+2$, $\therefore x_1=1,x_2=2$；或$x_1=2,x_2=1$,

所以$|x_1-x_2|=1$

（2）若 A为(1,0), B为(-3 ,0)，且过点 C（0,3)，求二次函数解析式；

【解析】由交点式，易得二次函数解析式为 $y=-x^2-2x+3$.

（3）若 A为(1,0), B为(-3 ,0)，用含 a 的式子表示 b 和 c；

【解析】(3)由题，得设$y=a(x-1)(x+3)$，$\therefore y=ax^2+2ax-3a$, $\therefore b=2a,c=-3a$.

（4）若 A为$(1,0)$, B为$(-3\ \ ,0)$，且 $c+6<2b-1<a+8$，求 a 的范围；

【解析】

由（2），得$\because b=2a, c=-3a, \therefore -3a+6<2\cdot 2a-1<a+8 \therefore 1<a<3;$

（5）若 $x_1=1$，且 $a>b>c$，求$|x_1-x_2|$的范围；

【解析】

(5)$\because x_1=1$ $\therefore$a+b+c=0 $\therefore$b=-a-c $\because$a>b>c

$\therefore$a>-a-c>c 且 a>0 $\therefore -2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$

$\because |x_1-x_2|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}$

$\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{\frac{(-a-c)^2-4ac}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-2ac+c^2}{a^2}}$

$\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{(\frac{c}{a})^2-2\left(\frac{c}{a}\right)+1}$ 令$\frac{c}{a}=t$

且 $w=t^2-2t+1(-2<t<-\frac{1}{2})$ $\therefore \frac{9}{4}<w<9$

$\therefore \frac{3}{2}<\sqrt{w}<3$ $\therefore \frac{3}{2}<|x_1-x_2|<3$

（6）（2017 年长沙中考第 25 题第 3 小问）

若 $x_1=1$，且 $a>2b>3c$，求点 P（$\frac{c}{a},\frac{b}{a}$）与原点 O 的距离 OP 的取值范围；

【解析】**(6)$\because$a+b+c=0 $\therefore$b=-a-c，$\therefore$a>2(-a-c)>3c 且 a>0**

$\therefore -\frac{3}{2}<\frac{c}{a}<-\frac{2}{5}$，$OP^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{c^2+(-a-c)^2}{a^2}$

$\because op^2=2(\frac{c}{a})^2+2\left(\frac{c}{a}\right)+1$ 令$\frac{c}{a}=t$, $\therefore op^2=2t^2+2t+1\ (-\frac{3}{2}<t<-\frac{2}{5})$

$\therefore \frac{1}{2}\leqslant op^2<\frac{2}{5}$ $\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant op<\frac{\sqrt{10}}{2}$

变式：（2020 年长沙中考第 25 题第 3 小问改编）

（7）若关于 x 的二次函数 $y=ax^2+2bx+3c$（a，b，c 是常数,$ac<0$）同时满足下列两个条件：①$a+b+c=0$，②（$2c+b-a$）（$2c+b+3a$）<0，求该二次函数截 x 轴得到的线段长度的取值范围．

【解析】

解：由第一个方程，得 $b=-a-c$,

带入第2个不等式，

$\therefore (2c-a-c-a)(2c-a-c+3a)<0,$

$\therefore c^2<4a^2, \therefore \left(\frac{c}{a}\right)^2<4, \therefore -2<\frac{c}{a}<2.$

得到 $\frac{c}{a}$ 的范围，问题便解决.

$\because d=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{(2b)^2-4a\cdot 3c}}{|a|}$

$\therefore d=\sqrt{\frac{4(-a-c)^2-12ac}{a^2}}=2\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{c}{a}+1}$

$\therefore$ 令 $t=\frac{c}{a}$, 且 $w=t^2-t+1(-2<t<0)$

$\therefore 1<w<7, \therefore 1<\sqrt{w}<\sqrt{7}$, 又 $d=2\sqrt{w}$,

$\therefore 2<d<2\sqrt{7}.$

三、课后作业

1. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}2+x>0,\\2x-m\le 0\end{cases}$ 无解，则 m 的取值范围是 $\underline{m\le -4}$.

2. 若关于 x 的方程 $\frac{ax+1}{x-1}-1=0$ 的解为正数，则 a 的取值范围是 $\underline{a<1 \text{且} a\ne -1}$.

3. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}1+x>a,\\2x-4\ge 0\end{cases}$ 的解集是 $x\ge 2$，则实数 a 的取值范围是 $\underline{a<3}$.

4. 已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}5x+2y=11a+18\\2x-3y=12a-8\end{cases}$ 的解满足 x>0，y>0，求实数 a 的取值范围.

【解析】由方程组，得 $\begin{cases}x=3a+2\\y=-2a+4\end{cases}$，$\because x>0$，$y>0$，$\therefore \begin{cases}3a+2>0①\\-2a+4>0②\end{cases}$，

所以，a 的取值范围是 $-\frac{2}{3}<a<2$.

5．若三个非零实数 x,y,z 满足：只要其中一个数的倒数等于另外两个数的倒数的和，则称这三个实数 x,y,z 构成“和谐三数组”.

（1）实数 1，2，3 可以构成“和谐三数组”吗？请说明理由.

（2）若直线 $y=2bx+2c(bc\neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(x_1,0)$，与抛物线 $y=ax^2+3bx+3c(a\neq 0)$ 交于 $B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 两点.

①求证：A，B，C 三点的横坐标 x_1，x_2，x_3 构成“和谐三数组”；

②若 $a>2b>3c,x_2=1$，求点 P（$\frac{c}{a},\frac{b}{a}$）与原点 O 的距离 OP 的取值范围.

【解析】（1）不能，理由如下：∵1、2、3 的倒数分别为 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$，

∴$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\neq 1$，$1+\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}$，$1+\frac{1}{3}\neq\frac{1}{2}$∴实数 1，2，3 不可以构成“和谐三组数”；

（2）①∵a、b、c 均不为 0，∴x_1，x_2，x_3 都不为 0，

∵直线 $y=2bx+2c$（$bc\neq 0$）与 x 轴交于点 A（x_1，0），∴$0=2bx_1+2c$，解得 $x_1=-\frac{c}{b}$，

联立直线与抛物线解析式，消去 y 可得 $2bx+2c=ax^2+3bx+3c$，即 $ax^2+bx+c=0$，

∵直线与抛物线交与 B（x_2，y_2），C（x_3，y_3）两点，

∴x_2、x_3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，∴$x_2+x_3=-\frac{b}{a}$，$x_2x_3=\frac{c}{a}$，

∴$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2+x_3}{x_2x_3}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}=\frac{1}{x_1}$，∴$x_1$，$x_2$，$x_3$ 构成“和谐三组数”；

②∵$x_2=1$，∴$a+b+c=0$，∴$c=-a-b$，∵$a>2b>3c$，

∴$a>2b>3(-a-b)$，且 $a>0$，整理可得 $\begin{cases}a>2b\\5b>-3a\end{cases}$，解得 $-\frac{3}{5}<\frac{b}{a}<\frac{1}{2}$，∵$P$（$\frac{c}{a}$，$\frac{b}{a}$）

∴$OP^2=(\frac{c}{a})^2+(\frac{b}{a})^2=(\frac{-a-b}{a})^2+(\frac{b}{a})^2=2(\frac{b}{a})^2+2\frac{b}{a}+1=2(\frac{b}{a}+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$，

令 $m=\frac{b}{a}$，则 $-\frac{3}{5}<m<\frac{1}{2}$ 且 $m\neq 0$，且 $OP^2=2(m+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$，∵$2>0$，

∴当 $-\frac{3}{5}<m<-\frac{1}{2}$ 时，OP^2 随 m 的增大而减小，当 $m=-\frac{3}{5}$ 时，OP^2 有最大临界值 $\frac{26}{50}$，

当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，OP^2 有最小临界值 $\frac{1}{2}$，

当 $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$ 时，OP^2 随 m 的增大而增大，当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，OP^2 有最小临界值 $\frac{1}{2}$，当 $m=\frac{1}{2}$ 时，OP^2 有最大临界值 $\frac{5}{2}$，∴$\frac{1}{2}\leqslant OP^2<\frac{5}{2}$ 且 $OP^2\neq 1$，∵P 到原点的距离为非负数，

∴$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant OP<\frac{\sqrt{10}}{2}$ 且 $OP\neq 1$.