前言

简介

本题卷为 **数学-1** 题卷。

本题卷分为两个题组，从思维难度上而言，题组一整体较简单，题组二整体较难。

本题卷整体难度较高。

本题卷出题人：方梓轩、舒熙皓、郑晓阳。以下是各个题目的出题人及分数。出题人有题意解释权，并且负责题目的讲解（包括题解和答疑）。

题号	出题人	分数
A	方梓轩	4
B	方梓轩	2+2+2=6
C	舒熙皓	8
D	方梓轩	8
E	郑晓阳	6
F	方梓轩	8
G	舒熙皓	6
H	舒熙皓	6
I	舒熙皓	8
J	方梓轩	2+3+5=10
K	舒熙皓	10
L	方梓轩	3+3+4=10
M	舒熙皓	2+2+3+3=10

评价通道

可以在下方评论区留言反馈。

我们希望听取关于 **题目难度**、**题目质量**、**作答用时**、**作答分数** 等方面的反馈。

题解

题解将在一周以内放出。

出题人对所有题目有题意解释权，如果有任何题意和作答上的疑惑，欢迎咨询出题人。

题组一

A / 在平面直角坐标系 xOy 中有两点 $A(0,4),B(2,0)$，现在作线段 AB 垂直平分线 l_1 交 AB 于点 D，记 l_1 上一点 C 使得 $CD=BD$，然后将 l_1 绕点 C 顺时针旋转 90°，记作 l_2，求 l_2 的解析式。

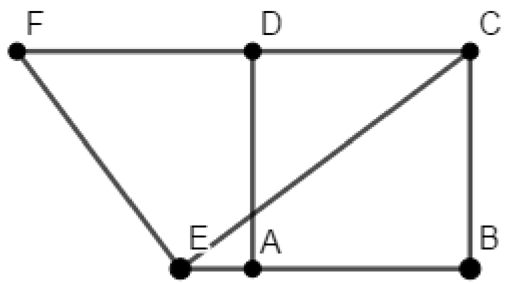
B / 东京奥运会的中国首金诞生于女子十米气步枪项目中，由杨倩选手摘得。凯凯的工厂迎来了第一届全厂射击大赛，以下是决赛表现优异，可以进入市级决赛角逐冠军的三位选手的成绩：

选手	第一枪	第二枪	第三枪	第四枪	第五枪	第六枪
张三	7.4	7.7	7.9	8.3	8.1	10.1
陆仁甲	8.5	8.5	8.6	8.8	9.1	8.4
马冬梅	9.3	10.2	7.5	8.4	8.2	7.7

市级决赛有三项赛事：争霸赛、娱乐赛和炸鱼赛。争霸赛中，平均分高者优胜；娱乐赛中，分数稳定者优胜；炸鱼赛中，分数波动大者优胜。

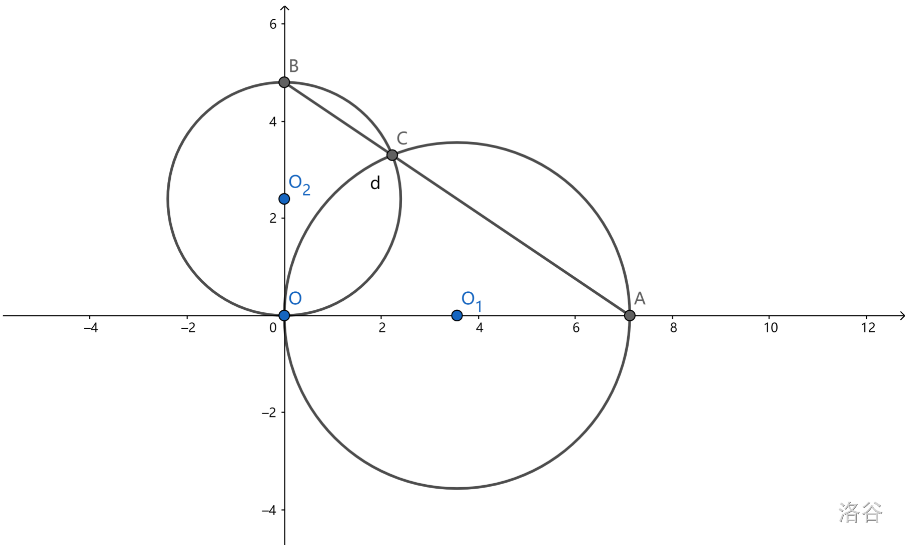
现在凯凯希望在这三项奖项上都要斩获佳绩。但是他更希望在争霸赛中获得好成绩，其次是娱乐赛，再次是炸鱼赛。每位选手只能报名一项赛事。请你告诉凯凯，对于每项赛事，他该让哪位选手报名。

C / 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$CE=5$，$EC \perp EF$，C, D, F 三点共线，设 $BC=a$，请用含 a 的式子表示 EF。



D / 轩轩随手写了一个关于x 的一元二次方程 $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$，现在请你告诉轩轩 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值和最小值存不存在。如果存在，请告诉他分别是多少。

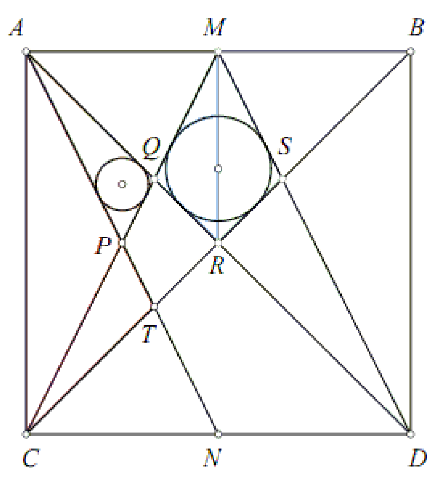
E / 如图，动点 O_1, O_2 分别在 x, y 轴上。分别以 O_1, O_2 为圆心，O_1O, O_2O 为半径作圆交 x, y 轴与点 A, B。两圆交于 C, O 两点。请证明：A, B, C 三点在同一直线上。



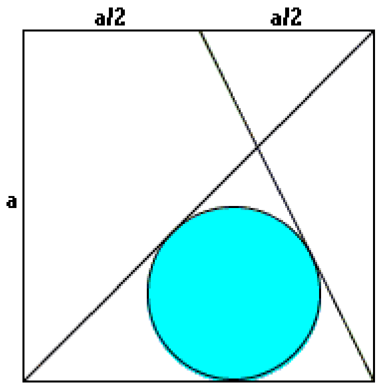
F / 同学聚会，每个参与者都会给其他所有参与者赠送一份礼物，其中某人财大气粗，给一些同学多准备了一份礼物，整场同学聚会下来有 77 件礼物被赠送。问有多少件礼物是第二件礼物，由于参与同学聚会的人都是各个学校的巨佬，他们要求你不能枚举这个问题的答案。

G / 在平面直角坐标系 xOy 中，设一道光线的解析式为 $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$，以及三面镜子 AB, CD, EF，其中 $A(2,8), B(3,6), C(9,8), D(11,6), E(4,1), F(8,1)$，求光线经过反射后的解析式。

H / 如图，给定正方形 $ABCD$，M 为 AB 中点，N 为 CD 中点。连接 AD, BC, MC, MD, AN，请猜测并证明小圆与大圆的面积关系。



I / 如图，给定一个正方形，设它的边长为 a，请求出蓝色内接圆的半径。



题组二

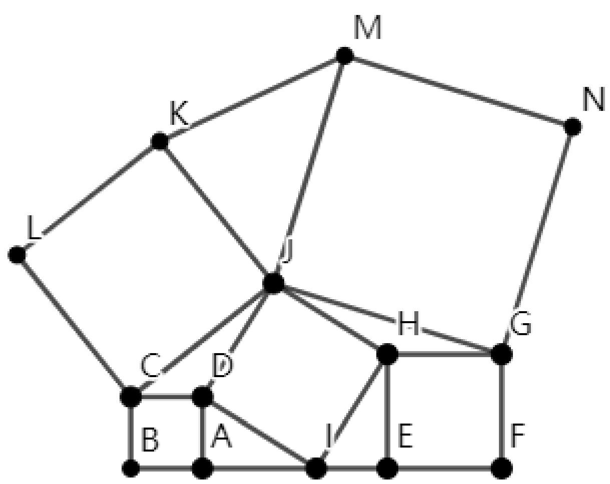
J / 我们定义两个函数的横坐标同为 x 时纵坐标差的绝对值 $|y_1-y_2|$ 为这两个函数横坐标是 x 时的 **高度差**。在点与点、点与函数中，这个定义也适用。

a /试求当函数 $y=2x+5, y=4x+3$ 的高度差为 4 时 x 的值。

b / 现有一动点 $P(x_0, y_0)$ 其坐标满足 $-\dfrac{3x_0}{5}+\dfrac{y_0}{5}=1$，记其与抛物线 $y=2x^2+(k-1)x+5$ 的高度差为 z，若 z 与常函数 $y=1$ 的高度差总是不小于 1，求 k 的取值范围。

c / 如果一条直线与一个函数有且仅有一个交点，那么我们说这条直线是这个函数的切线。现有一点 $M(3,5)$，一个动点 $P(x_0, y_0)$ 满足 $x_0^2+y_0^2-10x_0-6y_0+32=0$，作一条 P 的轨迹的切线 l_1 使得 MP 和 l_1 的高度差恒为 d，求当 d 取最大值时 MP 的解析式。

K / 如图，给定五个正方形，请猜测并证明三角形 JMK 和正方形 $IDJH$ 的面积关系。



L / 阅读材料，回答问题：

> 对于一个一次函数 $y=kx+b$，如果我们知道两点 $(x_0,kx_0+b),(x_0+\Delta x,kx_0+k\Delta x+b)$，则我们可以将其纵坐标作差，得到 $\Delta y=k\Delta x$，其中 Δ 意为增量，即差值，则我们能够得到 $k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。
>
> 对二次函数如法炮制。对于一个二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,
>
> $$\begin{aligned} f(x)&=ax^2+bx+c;\\ f(x+\Delta x)&=ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2+bx+b\Delta x+c.\\ \frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{2ax\Delta x+a\Delta x^2+b\Delta x}{\Delta x}.\\ &=2ax+a\Delta x+b. \end{aligned}$$
>
> 如果我们将 Δx 看成一个无限接近 0 但不是 0 的实数，则我们可以将 $a\Delta x$ 看成一个无限接近 0 但不是 0 的实数。
>
> 我们记一个函数的函数值与自变量值的商为这个函数的导数，记做 $f'(x)$，例如 $f(x)=kx+b$，则 $f'(x)=k$，$f(x)=ax^2+bx+c$，则 $f'(x)=2ax+b$。导数的几何意义是过函数上某一点作该函数的切线、代数意义是函数瞬时的增长率，所以当一个函数的导数大于零时，其函数值随自变量值的增大而增大，称作单调递增，反之则亦然，称为单调递减。

a / 对于一个过原点的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，我们有$f'(2)=4,f'(7)=19$，试确定该二次函数的解析式。

b / 对于一个三次函数，其有两个极值点，每一个极值点的两侧单调性不同。试确定 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{k-3}{2}x^2+(k-4)x+t$，当 $-5\le t\le 14,-14\le k\le 5$ 时，请求出 $f(x)$ 极值点的横坐标的取值范围。

c / 定义 $\sum_{i=a}^{b}c$ 为 i 取大于等于 a 小于等于 b 的整数时对应的 c 的值之和，设 $f(x)=x^3-3x^2$，求 $\sum_{i=1}^{4033}f(\dfrac{i}{2017})$ 的值。

M / 阅读以下材料，回答问题。

> 相信大家都知道 “勾股数” 这个东西。$(3,4,5)$ 是一组勾股数，因为 $3^2+4^2=5^2$。同样的，我们定义 “本原勾股数” 为一组数 (a,b,c)，满足 $a^2+b^2=c^2$ 且 $\gcd(a,b,c)=1$，即 a,b,c 只存在 1 这个公因数。
>
> ---
>
> 下面是关于本题可能用到的一些记号：
>
> $a\mid b$：a 是 b 的因数。
>
> $a\perp b$：a 与 b 互质。

> $\gcd(a,b)$：a 和 b 的最大公因数，即能够整除 a 和 b 的最大数。
>
> $\bmod$：取余符号，$a \bmod b$ 的值就是 a 除以 b 剩下的余数。
>
> $a \equiv b \pmod p$：同余符号，表示 a 除以 p 的余数是 b。
>
> ---
>
> 引理：$\gcd(a,b)=\gcd(b,a \bmod b)$，在解答中可以直接使用，以下是证明：
>
> 先证：$\gcd(a,b)|b$，而且 $\gcd(a,b)|(a \bmod b)$。
> 我们设 $a \bmod b = r$，则有 $a=kb+r$（k 为非负整数）。同时设 g 为 a,b 的最大公因数。
> $\because g \mid a, g \mid b, \quad \therefore g \mid kb+r, \quad \therefore g \mid r$
> 所以，g 既是 a,b 的公因数，也是 b,r 的公因数。
> 再证：不存在任意一个大于 $\gcd(a,b)$ 的数 c 满足 $c \mid b$ 且 $c \mid (a \bmod b)$。
> 使用反证法：如果存在 $c>\gcd(a,b)$ 且满足 $c \mid b$ 且 $c \mid r$。
> $\because a=kb+r$ 且 $c \mid b,\ c \mid r, \quad \therefore c \mid a, \quad$ 又 $\because c \mid b, \quad \therefore c$ 是 a,b 的公因数。
> 但又因为 $c>\gcd(a,b)$，矛盾，所以不存在任何大于 $\gcd(a,b)$ 的数满足条件。
>
> 综上，$\gcd(a,b)=\gcd(b,a \bmod b)$。

a / 请证明：对于本原勾股数 (a,b,c)，a 和 b 的奇偶性必然不同。

由于 (1) 中证明，我们接下来规定：对于本原勾股数 (a,b,c)，a 为奇数，b 为偶数。

b / 请证明：对于本原勾股数 (a,b,c)，$\gcd(c+b,c-b)=1$。

c / 请证明：对于本原勾股数 (a,b,c)，$c+b$ 和 $c-b$ 均为完全平方数。

根据 (2) (3) 的证明，我们就可以得出 **勾股数组定理**：

d / 请证明：对于所有三元数对 (a,b,c)，当且仅当其满足以下条件时，才构成一个本原勾股数：

$$a=st,\ b=\frac{s^2-t^2}{2},\ c=\frac{s^2+t^2}{2}$$

其中 $s>t>0$ 是互质的奇数。

> PS：如果你有耐心或者会一点点编程，可以用这个定理求出许多组本原勾股数。