数学系统精讲

平面几何与立体几何

MBA大师 — 数学董璞

出题趋势及考点分布

	三角形性质	三角形（相似Δ）	四边形	圆	阴影面积	立体几何 面积或体积
2018		20	7	4		14
2017		2			9，14	21
2016		8	17			15
2015			8		4	6，24
2014	21	3，20			5	12,14
2013	18	7				11
2012		15	24		14	3
2011	20		18		9	4

8.1平面几何·套路

三角形
- 【1】三角形基本性质（三边结合方程、不等式等考点）
- 【2】三角形面积 ☆
- 【3】特殊三角形：直角三角形，等腰三角形
- 【4】特殊三角形：等腰直角Δ，$30^0+60^0+90^0$，等边三角形 ☆
- 【5】相似三角形：判定，相关计算 ☆

四边形

圆形

阴影

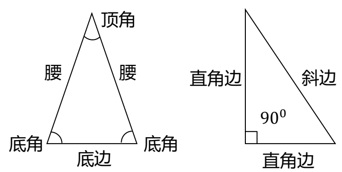
8.1.1三角形分类和性质

三角形

1.三角形两边和大于第三边
两边差小于第三边；
2.内角和等于180度；

按边分
- 普通三角形：三边都不相等
- 等腰三角形：只有两边相等
- 等边三角形：三个边都相等

按角分
- 锐角三角形：三个内角都小于90^0
- 直角三角形：三个内角中有一个角等于90^0
  $a^2=b^2+c^2$
- 钝角三角形：三个内角中有一个角大于90^0



8.1.1三角形基本性质

【词汇】以a、b、c为边构成三角形⇔ $|a-b|<c<a+b$

相当于给定关于a、b、c的一组关系式

$|a-c|<b<a+c$

$|b-c|<a<b+c$

【例】三条线段$a=5$，$b=3$，c的值为整数，以a,b,c为边的三角形有多少个。（ C ）

A.1　B.3　C.5　D.7　E.无数

$a-b<c<a+b$

$2<c<8$

c的可能取值：3、4、5、6、7

8.1.1三角形基本性质

【2014.10.20】三条长度分别为a，b，c的线段能构成一个三角形。（ E ）

（1）$a+b>c$　（2）$b-c<a$

任意两边之和大于第三边⇒三角形

任意两边之差小于第三边⇒三角形

即同时满足：$\begin{cases}a+b>c\\a+c>b\\b+c>a\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|a-b|<c\\|a-c|<b\\|b-c|<a\end{cases}$

仅固定两边之和大于第三边不构成三角形，故条件（1）不充分

仅固定两边之差小于第三边不构成三角形，故条件（2）不充分

联合有$\begin{cases}a+b>c\\a+c>b\end{cases}$，不充分。

8.1.1三角形基本性质

【2014.1.21】方程$x^2+2(a+b)x+c^2=0$有实根.（ D ）

（1）a,b,c是一个三角形的三边长.

（2）实数a,c,b成等差数列.

题干要求：$x^2+2(a+b)x+c^2=0$有实根，$\Delta=4(a+b)^2-4c^2\geq 0$

$(a+b)^2\geq c^2$

条件（1）a,b,c是一个三角形的三边长，则任意两边长大于第三边

$a+b>c$，$(a+b)^2>c^2$

条件（2）实数a,c,b成等差数列

$a+b=2c$，$(a+b)^2=4c^2\geq c^2$

8.1平面几何•套路

三角形

- 【1】三角形基本性质（三边结合方程、不等式等考点）
- 【2】三角形面积 ☆
- 【3】特殊三角形：直角三角形，等腰三角形
- 【4】特殊三角形：等腰直角Δ，$30^0+60^0+90^0$，等边三角形 ☆
- 【5】相似三角形：判定，相关计算 ☆

四边形

圆形

阴影

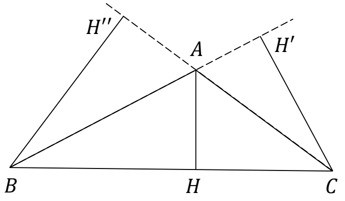
8.1.2三角形面积

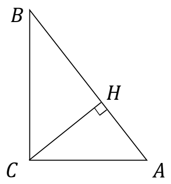
（1）三角形面积公式：$\frac{1}{2}$×底×高

$S=\frac{1}{2}$×任意一个底边×相对应的高　$S=\frac{1}{2}AH\cdot BC=\frac{1}{2}CH'\cdot AB=\frac{1}{2}BH''\cdot AC$

$S=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CH$

直角三角形斜边上的高×斜边=两直角边之积

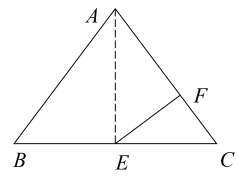




8.1.2三角形面积 三角形面积等于$\frac{1}{2}$任意一个底边乘以相对应的高

【2013.10.7】如图，$AB=AC=5$，$BC=6$，E是BC的中点，$EF\perp FC$。则EF=（D）.

(A) 1.2　(B) 2　(C) 2.2　(D) 2.4　(E) 2.5



【等腰三角形三线合一】顶角的角平分线、底边的中线，底边的高互相重合

$AC=5$，$EC=3$，勾股定理：$AE=4$

$S_{\Delta AEC}=\frac{1}{2}AE\times EC=\frac{1}{2}\times4\times3=6$

$=\frac{1}{2}AC\times EF=\frac{5}{2}EF$

$EF=2.4$

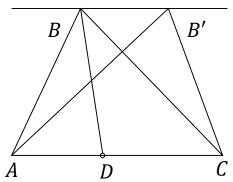
8.1.2三角形面积

（2）底边在同一条直线，共用一个顶点的两个三角形，$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{AD}{CD}$

高相等，面积比等于底边比

（3）顶点在与底边平行线上三角形，高相等，

面积比等于底边比，面积和 $=\frac{1}{2}$(底边和) ×高



$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta B'AC}}=\frac{AD}{AC}$，$\frac{S_{\Delta BAC}}{S_{\Delta B'AC}}=\frac{AC}{AC}=1$

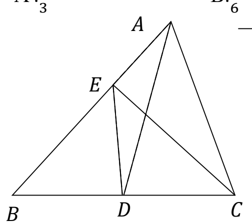
$S_{\Delta BAD}+S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}(AD+CD)h=AC\cdot h$

$S_{\Delta BAc}+S_{\Delta B'AC}=\frac{1}{2}(AC+AC)h$

8.1.2三角形面积

【2008.10.5】若ΔABC的面积为1，$\Delta AEC,\Delta DEC,\Delta BED$的面积相等，则$\Delta AED$的面积（$B$）

A .$\frac{1}{3}$　B.$\frac{1}{6}$　C.$\frac{1}{5}$　D.$\frac{1}{4}$　E.$\frac{2}{5}$



ΔAEC，ΔBEC底边都在AB上，共用顶点C，面积比等于底边比

$AE:BE=\frac{S_{\Delta AEC}}{S_{\Delta BEC}}=\frac{S_{\Delta AEC}}{S_{\Delta BED}+S_{\Delta DEC}}=1:2$

ΔAED，ΔBED底边都在AB上，共用顶点D，边长比等于面积比

$\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BED}}=\frac{AE}{BE}=\frac{1}{2}$，所以$S_{\Delta AED}=\frac{1}{2}\cdot S_{\Delta BED}=\frac{1}{6}$

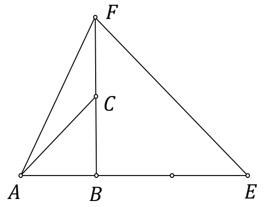
$\Delta AEC=\Delta DEC=\Delta BED=\frac{1}{3}$

底边在同一条直线，共用一个顶点的两个三角形，面积比等于底边比。

8.1.2三角形面积

【2014.1.3】已知$AE=3AB$，$BF=2BC$。若ΔABC的面积是2，则ΔFAE的面积为（ B ）

(A) 14　(B) 12　(C) 10　(D) 8　(E) 6



ΔABF，ΔABC底边在BF上，共用顶点A，面积比等于边长比

$S_{\Delta ABF}:S_{\Delta ABC}=BF:BC=2:1$

ΔFAE，ΔABF底边在AE上，共用顶点F，面积比等于边长比

$S_{\Delta ABF}:S_{\Delta FAE}=AB:AE=1:3=2:6$

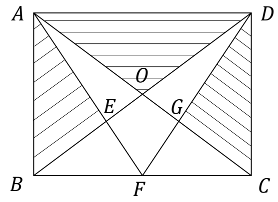
$S_{\Delta FAE}=3\times S_{\Delta FAB}=3\times 2\times S_{\Delta ABC}=12$

底边在同一条直线，共用一个顶点的两个三角形，面积比等于底边比。

8.1.2三角形面积

【2010.1.14】如图，长方形$ABCD$的两条边长分别为$8m$和$6m$，四边形$OEFG$的面积是$4m^2$，则阴影部分的面积为（ B ）

A. $32m^2$　B. $28m^2$　C. $24m^2$　D. $20m^2$　E. $16m^2$



阴影部分的面积 $=S_{ABCD}-$空白面积S

空白面积 $=S_{\Delta AFC}+S_{\Delta BFD}-S_{OEGF}$

空白面积 $=\frac{1}{2}FC\times AB+\frac{1}{2}BF\times AB-S_{OEGF}$

$=\frac{1}{2}(FC+BF)\times AB-S_{OEGF}$

$=\frac{1}{2}\times 48-4=20$

顶点在与底边平行线上两个三角形，高相等，面积比等于底边比，面积和等于$\frac{1}{2}$底边和乘以高

8.1平面几何•套路

三角形
- 【1】三角形基本性质（三边结合方程、不等式等考点）
- 【2】三角形面积 ☆
- 【3】特殊三角形：直角三角形，等腰三角形
- 【4】特殊三角形：等腰直角Δ，$30^0+60^0+90^0$，等边三角形 ☆
- 【5】相似三角形：判定，相关计算 ☆

四边形

圆形

阴影

8.1.3等腰三角形 直角三角形判定

直角三角形的判定：

1：一个角为90度

2：$S=1/2\ ab$

3：三角形底边为圆的直径，顶点在圆周上（直径所对的圆周角为直角）

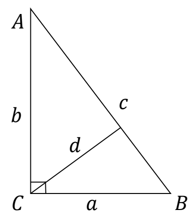
4：$a^2+b^2=c^2$

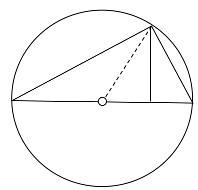
直角三角形的重要性质

1.勾股定理 $a^2+b^2=c^2$

2.直角三角形面积 $=\frac{1}{2}a\times b=\frac{1}{2}c\times d$

3.直角三角形斜边中线等于斜边的一半



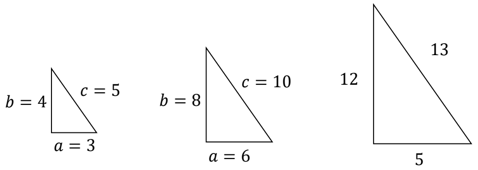


8.1.3等腰三角形 直角三角形

【1997.10.7】在直角三角形中，若斜边与一直角边的和为8，差为2，则另一直角边的长度是（ B ）

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 10　(E) 9

$$\begin{cases}a+c=8\\c-a=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=5\\a=3\end{cases}\Rightarrow b=4$$



8.1.3等腰三角形 直角三角形判定

等腰三角形的判定：
1. 两个角相等
2. 两条边相等
3. 三线任两个重合
顶角的角平分线/底边中线/底边的高

等边三角形的判定：
1. 1个角为60度的等腰三角形
2. 三条边相等
3. 两个角为60度

① 如果三角形中有一角的角平分线和它所对边的高重合，那么这个三角形是等腰三角形。
② 如果三角形中有一边的中线和这条边上的高重合，那么这个三角形是等腰三角形。
③ 如果三角形中有一角的角平分线和它所对边的中线重合，那么这个三角形是等腰三角形

【等腰三角三线合一】顶角平分线，底边的中线，底边的高互相重合

8.1.3等腰三角形 直角三角形

【1999.1.13】在等腰三角形ABC中，$AB=AC$，$BC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，且AB，AC的长分别是方程$x^2-\sqrt{2}mx+\frac{3m-1}{4}=0$的两个根，则$\Delta ABC$的面积为（ A ）

A. $\frac{\sqrt{5}}{9}$　B. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$　C. $\frac{5\sqrt{5}}{9}$　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　E. $\frac{\sqrt{5}}{18}$

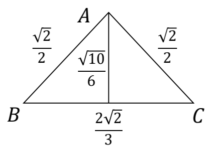
$AB=AC$，方程有两相等实根。

$\Delta=2m^2-3m+1=0=(m-1)(2m-1)$，$m=1$或$m=\frac{1}{2}$

$AB=AC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}m=\frac{\sqrt{2}}{4}$或$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$AB+AC=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{2\sqrt{2}}{3}$（舍）

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{6}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{9}$



8.1.3等腰三角形 直角三角形

【2000.10.5】已知a,b,c是ΔABC的三条边长，并且$a=c=1$，若$(b-x)^2-4(a-x)(c-x)=0$有相同实根，则ΔABC为（ A ）

A. 等边三角形　(B) 等腰三角形　(C) 直角三角形　(D) 钝角三角形

代入$a=c=1$可得，$(b-x)^2-4(1-x)(1-x)=0$

$3x^2-(8-2b)x+4-b^2=0$有相同实根

$\Delta=(8-2b)^2-4\cdot3\cdot(4-b^2)=0$

$b=1$

ΔABC为等边三角形

8.1.3等腰三角形 直角三角形

【例】三角形的三条边长分别为a，b，c。ΔABC为直角三角形. 选D

（1）ΔABC的三边长之比为$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

（2）ΔABC的面积为：$S=\frac{1}{2}ab$

条件（1）$a:b:c=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

设$a=k$，$b=\sqrt{2}k$，$c=\sqrt{3}k$

满足$a^2+b^2=k^2+\left(\sqrt{2}k\right)^2=3k^3=c^2$

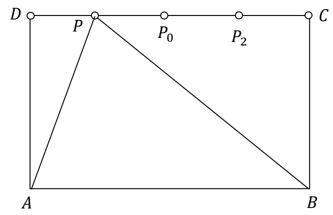
条件（1）充分.

条件（2）充分.

8.1.3等腰三角形 直角三角形

【2014.10.25改】在矩形$ABCD$的边CD上，P_0是DC的中点，并且$PP_0=P_0P_2$，$PB=AB$，$PP_2=\frac{1}{2}DC$，求$\frac{AD}{AB}=$（ A ）

(A) $\frac{\sqrt{7}}{4}$.　(B) $\frac{\sqrt{5}}{4}$　(C) $\frac{\sqrt{7}}{8}$　(D) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$　(E) $\frac{5}{4}$



$PB=AB$，$BC^2+PC^2=PB^2=AB^2$

$PC=\frac{3}{4}AB$，$BC=AD$

$AD^2=BC^2=PB^2-PC^2$

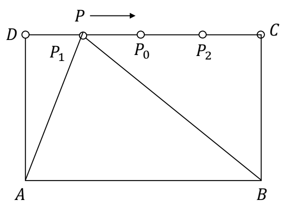
$=AB^2-\left(\frac{3}{4}AB\right)^2$

$=(1-\frac{9}{16})AB^2$　　$\frac{AD}{AB}=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

8.1.3等腰三角形 直角三角形

【2014.10.25】在矩形$ABCD$的边CD上随机取一点P,使得AB是ΔAPB的最大边的概率大于$\frac{1}{2}$.

（1）$\frac{AD}{AB}<\frac{\sqrt{7}}{4}$.　　（2）$\frac{AD}{AB}>\frac{1}{2}$.



$$P=\boxed{\frac{\text{满足要求的结果}}{\text{总可能结果}}}$$

【古典概型】如果一次实验可能出现结果有有限的n个，
而且所有结果出现的可能性都相等。
（有限性、等可能性）

【古典概型的概率】样本空间Ω是由n个不同的基本事件组成，事件A中包含m个不同的基本事件，则$P(A)=\frac{m}{n}$

总可能结果：P在CD上

满足要求的结果：P的运动范围为P_1P_2

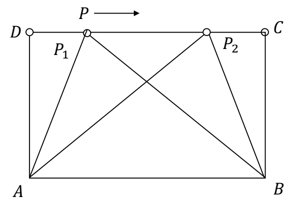
概率$P=\frac{P_1P_2}{CD}$　题干要求：$P_1P_2>\frac{1}{2}CD$

8.1.3等腰三角形 直角三角形

【2014.10.25】在矩形$ABCD$的边CD上随机取一点P,使得AB是ΔAPB的最大边的概率大于$\frac{1}{2}$.

（1）$\frac{AD}{AB}<\frac{\sqrt{7}}{4}$.　　（2）$\frac{AD}{AB}>\frac{1}{2}$.

题干要求：$P_1P_2>\frac{1}{2}CD$，先考虑临界情况：



$P_1D=P_2C$，$P_1D+P_2C=CD-P_1P_2=\frac{1}{2}CD$

$P_1D=P_2C=\frac{1}{4}CD$

$AB=PB=P_1B$，$PC=P_1C=\frac{3}{4}AB$，$BC=AD$

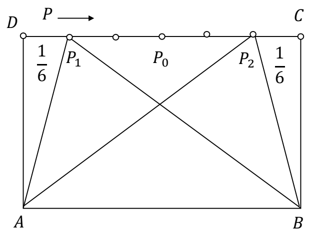
$BC^2+PC^2=PB^2=AB^2$

选A　$AD^2=BC^2=PB^2-PC^2=AB^2-\left(\frac{3}{4}AB\right)^2=\frac{7}{16}AB^2$　　$\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

8.1.3等腰三角形 直角三角形

【2014.10.25改】在矩形$ABCD$的边CD上随机取一点P，使得AB是ΔAPB的最大边的概率大于$\frac{2}{3}$.

(1) $\frac{AD}{AB}>\frac{\sqrt{7}}{4}$.　　　　(2) $\frac{AD}{AB}<\frac{\sqrt{11}}{6}$.



题干要求：$P_1P_2>\frac{2}{3}DC$

$PC=\frac{5}{6}AB$，$BC=AD$

$AD^2=BC^2=PB^2-PC^2=AB^2-\left(\frac{5}{6}AB\right)^2=\frac{11}{36}AB^2$

$AD^2=\frac{11}{36}AB^2$

选B

8.1平面几何•套路

三角形
- 【1】三角形基本性质（三边结合方程、不等式等考点）
- 【2】三角形面积 ☆
- 【3】特殊三角形：直角三角形，等腰三角形
- 【4】特殊三角形：等腰直角Δ，$30^0+60^0+90^0$，等边三角形 ☆
- 【5】相似三角形：判定，相关计算 ☆

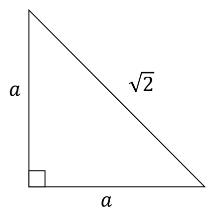
四边形

圆形

阴影

8.1.4 等腰直角Δ/$30^0+60^0+90^0$/等边Δ

等腰直角三角形的一条斜边为$\sqrt{2}$，试求其他两条边和三角形的周长、面积



$a^2+a^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$，$a=1$

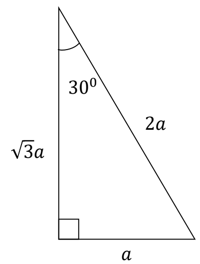
周长$=a+a+\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$

面积$=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}$

等腰直角三角形的三边之比为$1:1:\sqrt{2}$

8.1.4 等腰直角Δ/$30^0+60^0+90^0$/等边Δ

一个顶角为30°的直角三角形，面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，试求其他两条边和三角形的周长



$S_\Delta=\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{3}a=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$a=\sqrt{3}$

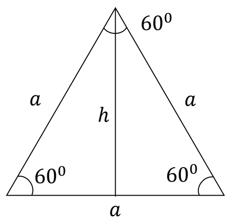
三边长分别为：$\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}$，3

周长$=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3=3+3\sqrt{3}$

内角为$30^0+60^0+90^0$的三角形的三边之比为$1:\sqrt{3}:2$

8.1.4 等腰直角Δ/$30^0+60^0+90^0$/等边Δ

等边三角形的周长为$3\sqrt{3}$，试求它的面积、高



$3a=3\sqrt{3}$，$a=\sqrt{3}$

$h=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

$s=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

等边三角形的高与边长的比为$\sqrt{3}:2=\frac{\sqrt{3}}{2}:1$

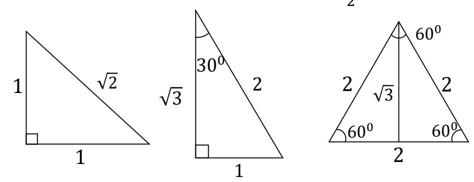
边长为a的等边三角形面积$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

8.1.4 等腰直角Δ /$30^0+60^0+90^0$/等边Δ

等腰直角三角形的三边之比为$1:1:\sqrt{2}$

内角为$30^0+60^0+90^0$的三角形的三边之比为$1:\sqrt{3}:2$

等边三角形的高与边长的比为$\sqrt{3}:2=\frac{\sqrt{3}}{2}:1$　　边长为a的等边三角形面积$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



【考点】等腰直角Δ /$30^0+60^0+90^0$/等边Δ

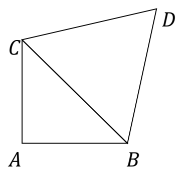
三条边 a、b、c、$S_{\Delta ABC}$，这四个条件中

只需要任何一个条件，就可以确定其他的所有条件

8.1.4 等腰直角Δ /$30^0+60^0+90^0$/等边Δ

【1998.10.9】已知等腰直角三角形ΔABC和等边三角形ΔBDC，设ΔABC的周长为$2\sqrt{2}+4$，则△ BDC的面积是（ D ）

(A) $3\sqrt{2}$　(B) $6\sqrt{2}$　(C) 12　(D) $2\sqrt{3}$　(E) $4\sqrt{3}$



等腰直角三角形的三边之比为$1:1:\sqrt{2}$

设等腰直角三角形ΔABC的边长为a，a，$\sqrt{2}a$

则有：$a+a+\sqrt{2}a=(2+\sqrt{2})a=2\sqrt{2}+4$

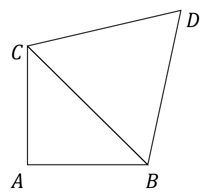
得：$a=2$，$BC=\sqrt{2}a=2\sqrt{2}=CD=BD$

边长为a的等边三角形面积$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　$S_{\Delta BCD}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$

8.1.4 等腰直角Δ /$30^0+60^0+90^0$/等边Δ

【1998.10.9改】已知等腰直角三角形ΔABC和等边三角形ΔBDC，若ΔBDC的面积为$2\sqrt{3}$，则四边形$ABDC$的周长为（ B ）

A. $4+2\sqrt{2}$　B. $4+4\sqrt{2}$　C.12　D. $3+2\sqrt{3}$　E. $3+4\sqrt{3}$



$S_{ABDC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=2\sqrt{3}$

$a^2=8$，$a=2\sqrt{2}=BC=BD=CD$

等腰直角三角形三边比为$1:1:\sqrt{2}$

故$AB=AC=2$

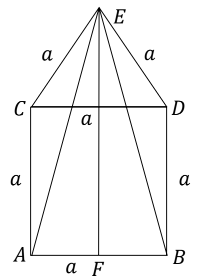
周长为$2+2+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4+4\sqrt{2}$

边长为a的等边三角形面积$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　等腰直角三角形的三边之比为$1:1:\sqrt{2}$

8.1.4 等腰直角Δ /$30^0+60^0+90^0$/等边Δ

【例】如图所示，若四边形$ABCD$是边长为a的正方形，ΔCDE是等边三角形，$EF\perp AB$.

则$\angle AEB$的度数为（　　）则EF的长度为（　　）则ΔAEB的面积为（　）



$\angle ECA=90^0+60^0=150^0$

$CE=CA$，ΔECA为等腰三角形

$\angle CEA=\angle CAE=\frac{1}{2}(180^0-150^0)=15^0$

$\angle AEB=30^0$

$EF=a+\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$S_{\Delta AEB}=\frac{1}{2}a\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}a^2$

8.1平面几何•套路

三角形
- 【1】三角形基本性质（三边结合方程、不等式等考点）
- 【2】三角形面积 ☆
- 【3】特殊三角形：直角三角形，等腰三角形
- 【4】特殊三角形：等腰直角Δ，$30^0+60^0+90^0$，等边三角形 ☆
- 【5】相似三角形：判定，相关计算 ☆

四边形

圆形

阴影

8.1.5 相似三角形

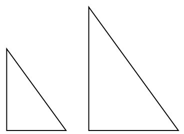
【判定】满足下列条件之一的两个三角形相似：

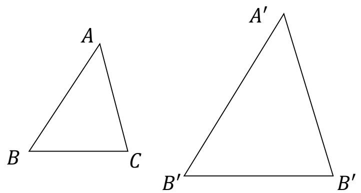
（1）有两角对应相等.

（2）三角边对应成比例

（3）有一角相等，且夹这等角的两边对应成比例

（4）一条直角边与一条斜边对应成比例的两个直角三角形相似





8.1.5 相似三角形

【相似三角形性质】

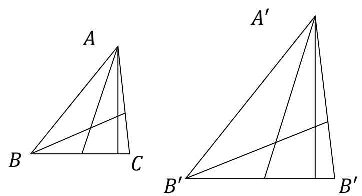
（1）对应角相等

（2）对应边成比例（相似比）

（3）对应一切线段成比例

对应高、对应中线、对应角平分线、外接圆半径、内切圆半径以及周长的比等于相似比。

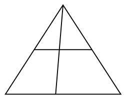
（4）面积比= 相似比^2



8.1.5 相似三角形•考察套路

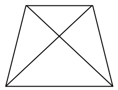
1）两三角形共顶角，底平行

【题目特征】有与三角形底边平行的线



2）两条平行线构建的对顶角三角形（对顶角相等）

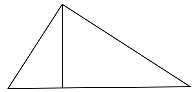
【题目特征】梯形，矩形或做平行线



8.1.5 相似三角形•考察套路

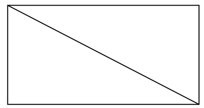
3）直角三角形斜边上的高，将直角三角形分割成两个相似三角形，它们和原三角形均相似。

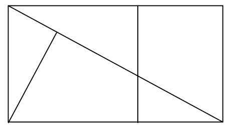
【题目特征】出现直角三角形的高



4）矩形对角线将矩形分成两个相似三角形

【题目特征：矩形或者正方形，对角线分割出三角形】





8.1.5 相似三角形

找相似三角形解题信号

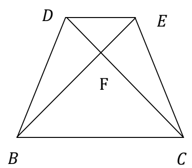
1.有两条平行线，或者出现梯形、矩形的同时也有三角形时

2. 有多个直角三角形时

3.求面积，求边长或的求比例时

8.1.5 相似三角形

【例题】已知如图：$DE//BC$， $\mathrm{DF:FC}=1:3$，求$S_{\Delta \mathrm{DEF}}:S_{\Delta \mathrm{EFC}}$和$S_{\Delta DEF}:S_{\Delta BFC}$



$\boxed{\text{底边在同一条直线，共用一个顶点的两个三角形，面积比等于底边比。}}$

ΔDEF和ΔEFC，底边都在DC上，共用定点E，它们的面积比等于底边之比。

$S_{\Delta \mathrm{DEF}}:S_{\Delta \mathrm{EFC}}=\mathrm{DF:FC}=1:3$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{两条平行线构建的对顶角三角形相似}\\ \text{相似三角形面积比=相似比}^2\end{array}}$

$\Delta DEF\sim \Delta BFC$

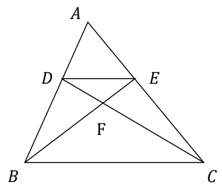
$S_{\Delta DEF}:S_{\Delta BFC}=DF^2:FC^2=1:9$

注意区分【底边共线共顶点的三角形面积比】和【相似三角形面积比】

8.1.5 相似三角形

【例】如图所示，在ΔABC中，$DE//BC,BE$和CD交于点F，且$S_{\Delta EFC}=3S_{\Delta DEF}$，那么$S_{\Delta ADE}:S_{\Delta ABC}=$（ A ）

A.1:9　　B.1:8　　C.1:7　　D.1:6　　E.1:5



$DF:\ FC=S_{\Delta EFC}:S_{\Delta DEF}=1:3$

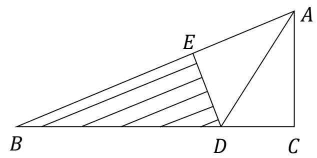
$DE:BC=DF:FC=1:3$

$S_{\Delta ADE}:S_{\Delta ABC}=DE^2:BC^2=1:9$

8.1.5 相似三角形

【2009.1.12】直角三角形ABC的斜边$AB=13$厘米，直角边$AC=5$厘米，把AC对折到AB上去与斜边相重合，点C与点E重合，折痕为AD（如图），则图中阴影部分的面积为（ B ）

(A) 20　　(B) $\frac{40}{3}$　　(C) $\frac{38}{3}$　　(D) 14　　(E) 12



ΔABC与ΔDBE相似

$\frac{S_{\Delta BED}}{S_{\Delta ABC}}=(\frac{BE}{BC})^2=(\frac{8}{12})^2=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 12\times 5=30$

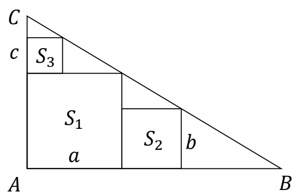
$S_{\Delta BED}=\frac{4}{9}\times 30=\frac{40}{3}$

8.1.5 相似三角形

【2012.1.15】如图，ΔABC是直角三角形，S_1,S_2,S_3为正方形，已知a,b,c分别是S_1,S_2,S_3的边长，则（ A ）

(A) $a=b+c$　　(B) $a^2=b^2+c^2$　　(C) $a^2=2b^2+2c^2$

(D) $a^3=b^3+c^3$　　(E) $a^3=2b^3+2c^3$



$\frac{c}{a-b}=\frac{a-c}{b}$

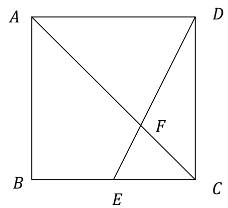
$bc=a^2-ac-ab+bc$

$a=b+c$

8.1.5 相似三角形

【例题】如图所示，正方形$ABCD$，AC是对角线，E是BC的中点，DE交AC于点F，若$DE=15$，则EF等于（ ）　C

A.3　　B.4　　C.5　　D.6　　E.7



$\Delta EFC\sim\Delta AFD$

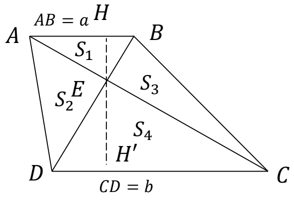
$EF:FD=EC:AD=1:2$

$EF=5$

8.1.5 相似三角形

【2016.8】如图，在四边形$ABCD$中，$AB//CD$，与AB与CD的边长分别为4和8。若ΔABE的面积为4，则四边形$ABCD$的面积为（ D ）

(A) 24　(B) 30　(C) 32　(D) 36　(E) 40



$S_1:S_2:S_3:S_4=a^2:ab:ab:b^2$
$=4:8:8:16$

$AB//CD$，$\triangle ABE\sim\triangle CDE$

$\frac{EH}{EH'}=\frac{AB}{CD}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$S_{\Delta ABE}=4=\frac{1}{2}AB\cdot EH=2EH$

$EH=2$，$EH'=4$，$HH'=2+4=6$

梯形$ABCD$面积$=\frac{1}{2}$(上底+下底)×高

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(4+8)\times 6=36$

对应角相等
对应边成比例（相似比）
对应一切线段成比例
面积比= 相似比²

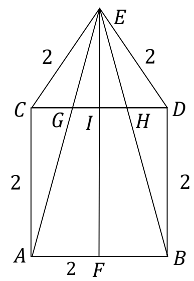
8.1.5 相似三角形

【例题扩展】如图，若四边形$ABCD$是边长为2的正方形，ΔCDE是等边三角形，$EF\perp AB$.

则EF的长度为<u>$2+\sqrt{3}$</u>；则$\angle AEB$的度数是<u>30^0</u>；则ΔBHD的面积为________；

则ΔAEB的面积为<u>$2+\sqrt{3}$</u>；则ΔEGH的面积为<u>$\frac{3}{2+\sqrt{3}}$</u>；则ΔEHD的面积为________；

则梯形$GHAB$的面积________；HD的长度为________；



$S_{\Delta AEB}=\frac{1}{2}AB\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2+\sqrt{3})=2+\sqrt{3}$

$\Delta EIH\sim\Delta EFB$，$EI=\sqrt{3}$，$EF=2+\sqrt{3}$，$BF=1$

$HI:BF=EI:EF=\sqrt{3}:(2+\sqrt{3})$，$HI=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$S_{\Delta EGH}=\frac{1}{2}GH\cdot EI=HI\cdot EI=\frac{3}{2+\sqrt{3}}$

8 平面几何•套路

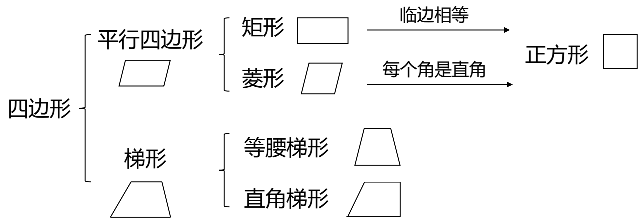
三角形
- 【1】三角形基本性质（三边结合方程、不等式等考点）
- 【2】三角形面积
- 【3】特殊三角形：直角三角形，等腰三角形
- 【5】相似三角形：判定，相关计算
- 【4】特殊三角形：等腰直角Δ，$30^0+60^0+90^0$，等边三角形

四边形
- 【1】正方形、长方形
- 【2】菱形
- 【3】梯形

圆形

阴影

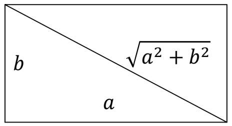
8.2.1 正方形、长方形



8.2.1 正方形、长方形

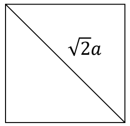
【矩形】一个角是直角的平行四边形称为矩形，矩形的四个角均是直角，对角线相等。

【基础概念】面积、周长、对角线等



面积$S=ab$，周长$C=2(a+b)$

$a^2+b^2=$对角线l^2



$1:1:\sqrt{2}$，面积$S=a^2$

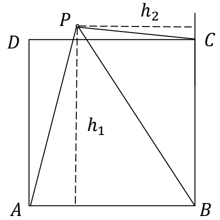
两组对边分别平行且相等；四个角都是直角

两条对角线相等且互相平分

8.2.1 正方形、长方形

【2003.1.3】设P是正方形$ABCD$外的一点，$PB=10$厘米，ΔAPB的面积是80平方厘米，ΔCPB的面积是90平方厘米，则正方形$ABCD$的面积为（ B ）

A. $720cm^2$ B. $580\ cm^2$ C. $640\ cm^2$ D. $600\ cm^2$ E. $560\ cm^2$



$S_{PAB}=\frac{1}{2}h_1\times a=80$ $h_1^2=(\frac{160}{a})^2$

$S_{PBC}=\frac{1}{2}h_2\times a=90$ $h_2^2=(\frac{180}{a})^2$

$h_1^2+h_2^2=PB^2=100$

$h_1^2+h_2^2=(\frac{160}{a})^2+(\frac{180}{a})^2=\frac{160^2+180^2}{a^2}=100$

$S_{ABCD}=a^2=16^2+18^2=256+4\times 81=580$

8.2.1 正方形、长方形

【2012.1.24】某户要建一个长方形的羊栏，则羊栏的面积大于$500m^2$ （ C ）

（1）羊栏的周长为120m.

（2）羊栏对角线的长不超过50 m.

设羊栏的长为a，宽为b，题干要求$ab>500$

条件（1）$2a+2b=120$，$a+b=60$

条件（2）$a^2+b^2\le 2500$

联合：$\begin{cases}a+b=60\\a^2+b^2\le 2500\end{cases}$

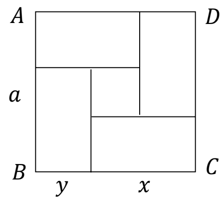
$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=3600$

$2ab\ge 3600-2500=1100$

8.2.1 正方形、长方形

【2016.17】如图6，正方形$ABCD$由四个相同的长方形和一个小正方形拼成，则能确定小正方形的面积（ C ）

（1）已知正方形$ABCD$的面积. （2）已知长方形的长宽之比.



单独不成立，考虑联立。

设大正方形边长为a，设长方形长为x，宽为y

题干要求确定$(x-y)^2$的值

条件（1）已知$a=x+y$，联合条件（2）$\frac{x}{y}=k$

$x=\frac{ka}{k+1}$，$y=\frac{a}{k+1}$

因此可以确定$(x-y)^2$的值，即联合充分。

8.2.2 菱形

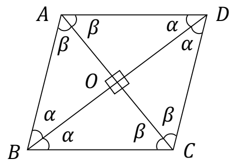
菱形

1.四条边都相等

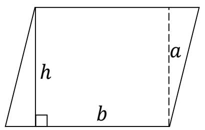
2.对角线互相垂直且平分

3.对角相等、邻角互补

4.每一条对角线平分一组对角



菱形面积：$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$



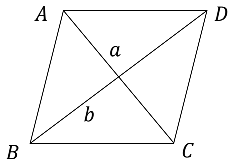
面积：$S=bh$

周长：$2(a+b)$

8.2.2 菱形

【1997.1.8】若菱形$ABCD$的两条对角线$AC=a$，$BD=b$，则它的面积是（ D ）

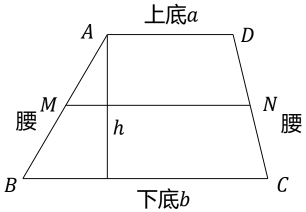
(A) ab　(B) $\frac{1}{3}ab$　(C) $\sqrt{2}ab$　(D) $\frac{1}{2}ab$　(E) $\frac{\sqrt{2}}{2}ab$



延伸：对角线相互垂直的任意四边形，面积都等于对角线之积的一半

8.2.3 梯形

梯形：只有一组对边平行的四边形。



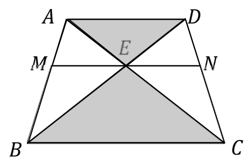
中位线：$MN=\frac{1}{2}(a+b)$

面积：$S=\frac{1}{2}(a+b)h$

8.2.3 梯形

【2015.8】如图，梯形$ABCD$的上底与下底分别为5、7，E为AC与BD的交点，MN过点E且平行于AD，则MN=（ C ）

(A) $\frac{26}{5}$　(B) $\frac{11}{2}$　(C) $\frac{35}{6}$　(D) $\frac{36}{7}$　(E) $\frac{40}{7}$



$\Delta ADE\sim\Delta CBE$

$$\begin{cases} DE:BE=AD:BC=5:7 \\ DE:BD=5:12 \\ AE:CE=AD:BC=5:7 \\ AE:AC=5:12 \end{cases}$$

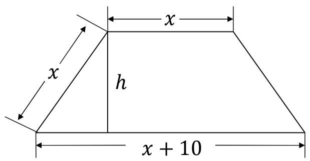
$\Delta AME\sim\Delta ABC\longrightarrow ME:BC=AE:AC=5:12$

$\Delta DNE\sim\Delta DBC\longrightarrow NE:BC=DE:BD=5:12$

8.2.3 梯形

【2011.1.18】如图，等腰梯形的上底与腰均为x，下底为$x+10$，则$x=13$.（ D ）

（1）该梯形的上底与下底之比为13:23.　　（2）该梯形的面积为216.



条件（1）$\frac{x}{x+10}=\frac{13}{23}$，充分

条件（2）该梯形的面积为216.

$(x+10+x)\times\frac{h}{2}=216$

$h^2=x^2-5^2$

$(x+5)\sqrt{x^2-25}=216$

8.1 平面几何•套路

三角形
- 【1】三角形基本性质（三边结合方程、不等式等考点）
- 【2】三角形面积 ☆
- 【3】特殊三角形：直角三角形，等腰三角形
- 【5】相似三角形：判定，相关计算☆
- 【4】特殊三角形：等腰直角Δ，$30^0+60^0+90^0$，等边三角形 ☆

四边形
- 【1】正方形、长方形
- 【2】菱形
- 【3】梯形

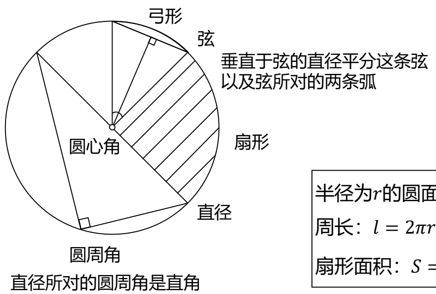
圆与扇形
- 【基础概念】面积、周长、弧、半径，扇形
- 【综合其他特殊图形】半径、直径，同时是其他的特殊图形的边、高 ☆

阴影

8.3.1 基础概念

圆：平面上到一定点距离相等的所有点的集合称之为一个圆。

这一定点为圆心，距离为圆的半径。



半径为r的圆面积：$S=\pi r^2$

周长：$l=2\pi r$

扇形面积：$S=\frac{圆心角度数}{360^0}\pi r^2$

8.3.2 圆与扇形结合其它图形

【例】若一圆与一正方形的面积相等，则（ C ）

A. 它们的周长相等　　B. 圆周长是正方形周长的π倍　　C. 正方形的周长长

D. 圆周长是正方形周长的$2\sqrt{\pi}$倍　　E. 以上结论均不正确

设圆与正方形面积均为S，圆的半径为r

正方形：边长为$\sqrt{S}$

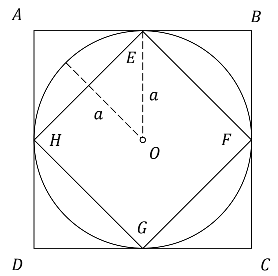
周长为：$\sqrt{16S}$

圆形：$S=\pi r^2$，$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

周长为：$2\pi r=2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}=\sqrt{4\pi S}$

$4\sqrt{S}>2\sqrt{\pi S}$

8.3.2 圆与扇形结合其它图形



圆：　　面积πr^2，周长$2\pi r$，直径$2r$，半径r

正方形：边长a，周长$4a$，面积a^2

正三角形：边长a，周长$3a$，高$\frac{\sqrt{3}}{2}a$，面积$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

只要一个条件就可以确定其它所有条件

通过直径、半径、内切、外切等建立起两个图形之间的关系

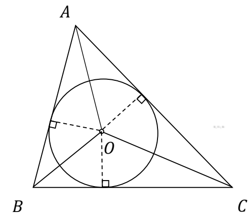
正方形$ABCD$的边长为$2a$，内切圆O的半径为a

圆O的半径为a，内接正方形$EFGH$边长$\sqrt{2}a$

8.3.2 圆与扇形结合其它图形

【2018.4】如图，圆O是三角形ABC的内切圆，若三角形ABC的面积与周长的大小之比为1:2，则圆O的面积为（ A ）

A.π　　B.2π　　C.3π　　D.4π　　E.5π



圆的半径同时是三个小三角形的高

内切圆：连接圆心和相切点的直线与三角形的边垂直

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot r$

$S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{2}BC\cdot r$

$S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}AC\cdot h=\frac{1}{2}AC\cdot r$

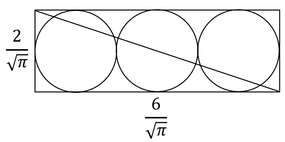
$S=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)\cdot r=\frac{r}{2}\cdot$周长

S:周长$=\frac{r}{2}=\frac{1}{2}$，$r=1$，$S_{圆}=\pi r^2=\pi$

8.3.2 圆与扇形结合其它图形

【例】如图所示，在一个矩形内紧紧放入三个等圆，每个圆的面积都是1，那么矩形的对角线长为（ E ）

(A) $10\sqrt{\pi}$　(B) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$　(C) $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$　(D) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$　(E) $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}}$



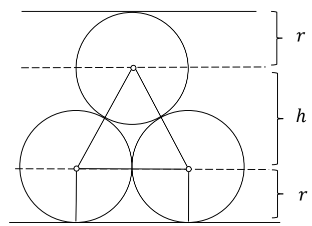
设圆的半径为r，则$S=\pi r^2=1$，$r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

从而矩形的长为$\frac{6}{\sqrt{\pi}}$，宽为$\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

矩形的对角线长为$\sqrt{(\frac{6}{\sqrt{\pi}})^2+(\frac{2}{\sqrt{\pi}})^2}=\sqrt{\frac{36}{\pi}+\frac{4}{\pi}}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}}$

8.3.2 圆与扇形结合其它图形

【例】如图所示，某 三个圆柱形的管子如下放置在水平地面上，管子直径为1m，则现在要做一个棚子来遮住这三个管子，问棚子最低要建多高（不计棚子本身的厚度）$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$



棚高包括三部分：半径+等边三角形的高+半径

边长为1的等边三角形的高为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

总高度为：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

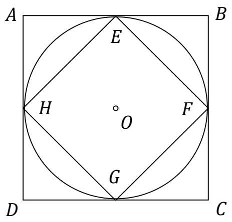
等边三角形的高与边长的比为$\sqrt{3}:2=\frac{\sqrt{3}}{2}:1$

边长为a的等边三角形面积$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

8.3.2 圆与扇形结合其它图形

【例】圆外切正方形和内接正方形的相似比是$\sqrt{2}$：1.（ D ）

（1）圆的半径为1.　　（2）圆的半径为2.



设$EH=a$，题干要求$AB=\sqrt{2}EH$

ΔAEH为等腰直角三角形

则：$AE=\frac{\sqrt{2}}{2}EH$

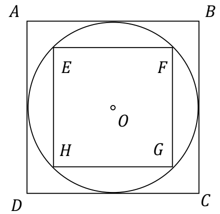
$AB=2AE$，$AB=\sqrt{2}EH$

$AB:EH=\sqrt{2}:1$

8.3.2 圆与扇形结合其它图形

【2007.10.15】如图所示，正方形$ABCD$四条边与圆O相切，而正方形$EFGH$是圆O的内接正方形。已知正方形$ABCD$面积为1，则正方形$EFGH$面积是（ B ）

(A) $\frac{2}{3}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　(E) $\frac{1}{4}$



$S_{ABCD}=1$，$AB=BC=CD=AD=1$

圆O的半径为$r=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$

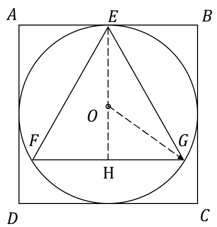
直径为：$2r=1$，圆O的直径同时为正方形$EFGH$的对角线

$EF=FG=GH=EH=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{EFGH}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

8.3.2 圆与扇形结合其它图形

【2007.10.15修改】如图所示，正方形$ABCD$四条边与圆O相切，而等边三角形ΔEFG是圆O的内接正三角形。已知正方形$ABCD$面积为4，则正三角形ΔEFG面积是$\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$



圆O的半径为$r=\frac{1}{2}AB=1$

正三角形的高$EH=EO+OH=r+\frac{r}{2}=\frac{3}{2}$

正三角形的底边$=2\cdot GH=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}OG=\sqrt{3}$

$S_{\Delta EFG}=\frac{1}{2}EH\cdot FG=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

等边三角形的高、边长、底边一半的比为$\sqrt{3}:2:1$

边长为a的等边三角形面积$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

8.4 平面几何•求阴影面积

三角形
- 【1】三角形基本性质（三边结合方程、不等式等考点）
- 【2】三角形面积 ☆
- 【3】特殊三角形：直角三角形，等腰三角形
- 【5】相似三角形：判定，相关计算 ☆
- 【4】特殊三角形：等腰直角Δ，$30^0+60^0+90^0$，等边三角形 ☆

四边形
- 【1】正方形、长方形
- 【2】菱形
- 【3】梯形

圆与扇形
- 【基础概念】面积、周长、弧、半径，扇形
- 【综合其他特殊图形】半径、直径，同时是其他的特殊图形的边、高 ☆

阴影
- 对称法
- 平移法/割补法
- 标号法

8.4.1 求阴影面积

【核心套路】通过规则图形的加和减，来计算不规则图形的面积

规则图形：

一个条件确定面积：	正方形	等边三角形	圆形
	a^2	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	πr^2

两个条件确定面积：	扇形	直角三角形	长方形
	$S=\frac{\text{圆心角度数}}{360^0}\pi r^2$	$\frac{1}{2}ab$	ab

8.4.1 求阴影面积•常用方法

对图形敏感

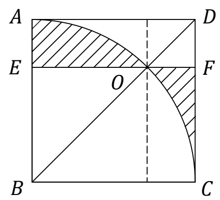
1. 【对称法】题干特征：对称图形
   画出对称轴以及补上与之对称的线
2. 【平移法/割补法】
   题干特征：图形中有多个面积相等的小块

对图形不敏感 【标号法】普适性的解题方法

8.4.2 求阴影面积-对称法

【2013.10.10】如图，在正方形$ABCD$中，弧AOC是四分之一圆周，$EF//AD$。若$DF=a$，$CF=b$，则阴影部分的面积为（ B ）

A. $\frac{1}{2}ab$　　B. ab　　C. $2ab$　　D. b^2-a^2　　E. $(b-a)^2$

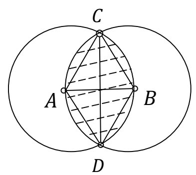


对称图形，画出对称轴以及补上与之对称的线

8.4.2 求阴影面积-对称法

【2014.1.5】如图，圆A与圆B的半径均为1，则阴影部分的面积为（ E ）

(A) $\frac{2\pi}{3}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(C) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　(D) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　(E) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$



等边三角形的高与边长的比为$\sqrt{3}:2$

边长为a的等边三角形面积$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

对称法：画出对称轴以及补上与之对称的线

不规则面积：分割为扇形与三角形

$$S_{\text{阴影}}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ABD}+4S_{\text{弓形}}$$
$$=2S_{\Delta ABC}+4(S_{\text{扇}ABC}-S_{\Delta ABC})$$
$$=4S_{\text{扇}ABC}-2S_{\Delta ABC}$$

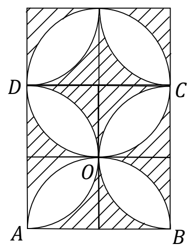
$S_{\text{扇}ABC}=\frac{1}{6}\pi r^2=\frac{\pi}{6}$，$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$S_{\text{阴影}}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

8.4.3 求阴影面积-割补法

【2011.1.9】如图，四边形$ABCD$是边长为1的正方形，弧AOB，BOC，COD，DOA均为半圆，则阴影部分的面积为（ E ）

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{\pi}{2}$　　(C) $1-\frac{\pi}{4}$　　(D) $\frac{\pi}{2}-1$　　(E) $2-\frac{\pi}{2}$



总阴影面积= 8个相等的小阴影面积

四个小的阴影面积= $S_{正方形}-S_{圆形}$

总阴影面积= $2(S_{正方形}-S_{圆形})$

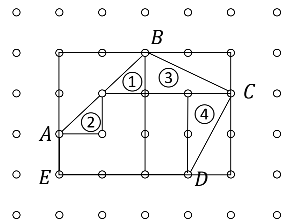
$= 2\left(1-\pi\cdot\frac{1}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}$

8.4.3 求阴影面积-割补法

【2011.10.13】如图，若相邻点的水平距离与竖直距离都是1，则多边形$ABCDE$的面积（ B ）

(A) 7　　(B) 8　　(C) 9　　(D) 10　　(E) 11

【平移法/割补法】题干特征：一般图形中有多个面积相等的小块



【方法1】①补到②的位置，③补到④的位置
凑成2×4的矩形，所以面积为8

【方法2】区域可以分为：1个2×2等腰直角三角形
2个2×1的矩形，2个2×1的直角三角形

【方法3】将图形补充成一个3×4长方形，$ABCDE$为
(长方形)−(2×2等腰直角三角形) − (2个2×1的直角三角形)

8.4.4 求阴影面积-标号法

1.按顺序把图中所有区域标上号

2.写出能确定面积的图形面积
（正方形、长方形、圆形、扇形、直角三角形、等边三角形等）
以标号图形表示

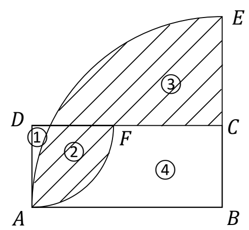
3.写出需要求的阴影面积图形，以标号图形表示

4.通过等式计算

8.4.4 求阴影面积-标号法

【2008.1.7】如图所示长方形$ABCD$中的$AB=10cm$，$BC=5cm$，设AB和AD分别为半径作$\frac{1}{4}$圆，则图中阴影部分的面积为（ D ）cm^2

A. $25-\frac{25}{2}\pi$　　B. $25+\frac{125}{2}\pi$　　C. $50+\frac{25}{4}\pi$　　D. $\frac{125}{4}\pi-50$　　E. 以上结论均不正确



【第1步】标号 【第2步】小扇形面积= ① + ②
大扇形面积= ② + ③ + ④
矩形面积= ① + ② + ④

【第3步】阴影面积= ② +③

【第4步】式2 − (式3 − 式1) = ② + ③

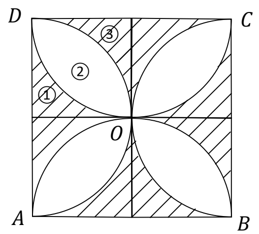
$=\frac{1}{4}\pi\times10^2-\left(5\times10-\frac{1}{4}\pi\times5^2\right)$

$=\frac{125}{4}\pi-50$

8.4.4 求阴影面积-标号法

【2011.1.9】如图，四边形$ABCD$是边长为1的正方形，弧AOB，BOC，COD，DOA均为半圆，则阴影部分的面积为（ E ）

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{\pi}{2}$　(C) $1-\frac{\pi}{4}$　(D) $\frac{\pi}{2}-1$　(E) $2-\frac{\pi}{2}$



【第1步】标号

【第2步】①=③

①+②+③ =小正方形面积

①+② =扇形面积

①= 小正方形面积 − 扇形面积

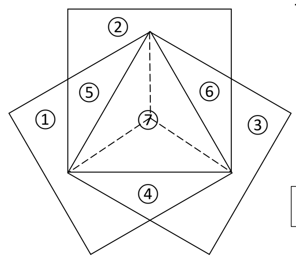
【第3步】$S_{阴影}=8\times$①

【第4步】$S_{阴影}=8\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4}\pi\frac{1}{2^2}\right)=2-\frac{\pi}{2}$

8.4.4 求阴影面积-标号法

【2012.1.14】如图，三个边长为1的正方形所覆盖区域（实线所围）的面积为(E)

A.$3-\sqrt{2}$　B. $3-\frac{3\sqrt{2}}{4}$　C. $3-\sqrt{3}$　D. $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$　E. $3-\frac{3\sqrt{3}}{4}$



三个正方形面积相加为：

(①+④+⑤+⑦)+(②+⑤+⑥+⑦)+(③+④+⑥+⑦)

所求区域面积为：①+②+③+④+⑤+⑥+⑦

区域④、⑤、⑥多加了1次

等边三角形区域⑦多加了2次

④+⑤+⑥ = ⑦，所以共多加= $3S_{⑦}$

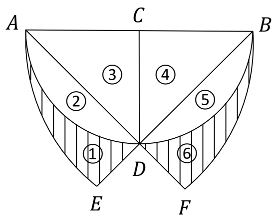
$\boxed{边长为a的正三角形面积为\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}$

所求面积 = $3S_{正方形}-3S_{⑦}=3-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

8.4.4 求阴影面积-标号法

【1999.10.10】半圆ADB以C为圆心，半径为1，且$CD\perp AB$，分别延长BD和AD至E和F，使得圆弧AE和BF分别以B和A为圆心，则图中阴影部分的面积为（ C ）

A. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$　B. $(1-\sqrt{2})\pi$　C. $\frac{\pi}{2}-1$　D. $\frac{3\pi}{2}-2$　E. $\pi-1$



(1) $S_{扇形ABE}$ = ①+②+③+④ = $\frac{1}{8}\pi(2^2)$

(2) $S_{扇形ADC}$ = ②+③ = $\frac{1}{4}\pi(1^2)$

(3) ③ = ④ =边长为1等腰直角三角形= $\frac{1}{2}$

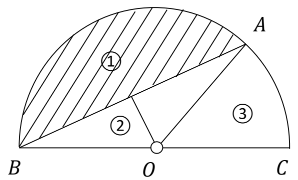
阴影面积= ①+⑥ = ①+①

① = 1式 − 2式 − 3式 = $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

8.4.4 求阴影面积-标号法

【2015.4】如图BC是半圆的直径，且$BC=4$，$\angle ABC=30^0$，则图中阴影部分的面积为（ A ）

A.$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$　B.$\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$　C.$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$　D.$\frac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}$　E. $2\pi-2\sqrt{3}$



设圆心为O，连接AO

$\angle ABC=30°$，$\angle BAO=30°$，$\angle AOB=120°$

(1) 半圆= ①+②+③

(2) ② = 2 ×斜边为2的$30^0-60^0-90^0$直角三角形

(3) ③ = $S_{扇形AOC}$

阴影 = ① = 式子1 − 式子2 − 式子3

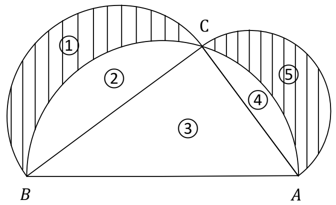
$=\frac{1}{2}\pi\cdot2^2-2\times\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot1-\frac{1}{6}\pi\cdot2^2$

$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

8.4.4 求阴影面积-标号法

【1997.10.9】如图，C是以AB为直径的半圆上一点，再分别以AC和BC为直径作为半圆，若$AB=5$，$AC=3$，则图中阴影部分的面积是（ D ）

(A) 3π　(B) 4π　(C) 6π　(D) 6　(E) 4



(1) $S_{半圆ACB}=②+③+④=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25\pi}{8}$

(2) $S_{左半圆}=①+②=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=2\pi$

(3) $S_{右半圆}=④+⑤=\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9\pi}{8}$

(4) $S_{\Delta ACB}=③=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$

$S_{阴影}=①+⑤$

$=2式+3式-1式+4式=6$

8 平面几何•总结

三角形
- 【1】三角形基本性质（三边结合方程、不等式等考点）
- 【2】三角形面积☆
- 【3】特殊三角形：直角三角形，等腰三角形
- 【5】相似三角形：判定，相关计算☆
- 【4】特殊三角形：等腰直角Δ，$30^0+60^0+90^0$，等边三角形☆

四边形
- 【1】正方形、长方形
- 【2】菱形
- 【3】梯形

圆与扇形
- 【基础概念】面积、周长、弧、半径，扇形
- 【综合其他特殊图形】半径、直径，同时是其他的特殊图形的边、高☆

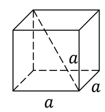
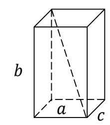
阴影
- 对称法
- 平移法/割补法
- 标号法

8.5 立体几何•套路

基础知识
- 【1】长方体、正方体
- 【2】圆柱体
- 【3】球体

进阶应用
- 【1】切割与打孔
- 【2】平移
- 【2】旋转

8.5 基础知识•正方体、长方体

	正方体	长方体
图像		
表面积	$6a^2$	$2(ab+bc+ac)$
体积	a^3	abc
体对角线	$\sqrt{3}a$	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

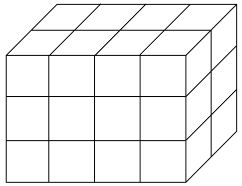
边长按比例改变（如边长变为原来的2倍），导致的体积，表面积的变化

	正方体	长方体
表面积	$24a^2$	$8(ab+bc+ac)$
体积	$8a^3$	$8abc$

8.5 基础知识•正方体、长方体

【2017.13】将长、宽、高分别为12、9、6的长方体切割成正方体，且切割后无剩余，则能切割成相同正方体的最少个数为（ C ）

(A) 3　(B) 6　(C) 24　(D) 96　(E) 64%

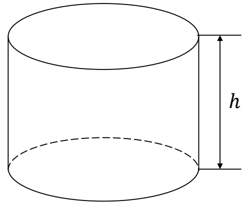


长，宽，高分别为12，9，6

最大公约数为3

正方体最少个数为：$\frac{12}{3}\times\frac{9}{3}\times\frac{6}{3}=24$

8.5 基础知识•圆柱



设圆柱体高为h，底面半径为r，则

上下底面积：πr^2

体积：$V=\pi r^2 h$

侧面积：$2\pi rh$

全表面积：$2\pi r^2+2\pi rh$

8.5.1 立体几何•圆柱体

【例】圆柱体积是正方体体积的$\frac{4}{\pi}$倍.（ C ）

（1）圆柱的高与正方体的高相等.　（2）圆柱的侧面积与正方体的侧面积相等.

设圆柱体底面半径为r，高为h，正方体棱长为a

圆柱体体积：$V_{柱}=\pi r^2 h$，正方体体积：$V_{正方体}=a^3$

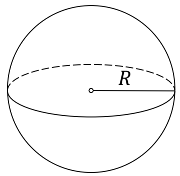
条件（1）$h=a$

条件（2）$S_{柱}=2\pi rh=S_{正方体}=4a^2$

联合条件（1）和条件（2），$S_{柱}=2\pi ra=S_{正方体}=4a^2$，$r=\frac{2a}{\pi}$

$\frac{V_{柱}}{V_{正方体}}=\frac{\pi(\frac{2a}{\pi})^2 a}{a^3}=\frac{4}{\pi}$

8.5.2 基础知识•球体



设球的半径是R，则

体积：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

表面积：$S=4\pi R^2$

8.5.2 基础知识•球体

【例】两个球形容器，若将大球中溶液的$\frac{2}{5}$倒入小球中，正好可装满小球，那么大球与小球的半径之比等于（ C ）

A. 5：3　　B. 8：3　　C. $\sqrt[3]{5}$：$\sqrt[3]{2}$　　D. $\sqrt[3]{20}$：$\sqrt[3]{5}$　　E. 以上结论均不正确

球体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

设大球半径为R，小球半径为r

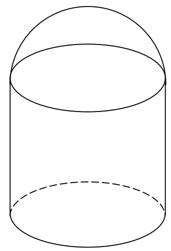
$$\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{R}{r}=\sqrt[3]{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}}$$

8.5.2 立体几何•球体

【2012.1.3】如图，一个储物罐的下半部分的底面直径与高均是$20m$的圆柱形，上半部分（顶部）是半球形，已知底面与顶部的造价是400元/m^2，侧面的造价是300元/m^2，该储物罐的造价是（ C ）（$\pi\approx3.14$）

A. 56.52万元　　B. 62.8万元　　C. 75.36万元　　D. 87.92万元　　E. 100.48万元



底面面积：$\pi R^2=100\pi$

顶部面积：$\frac{1}{2}\cdot4\pi R^2=200\pi$

侧面积：$\pi D\cdot h=400\pi$

球表面积：$S=4\pi R^2$
圆柱上下底面积：πr^2
圆柱侧面积：$2\pi rh$

造价：$(100\pi+200\pi)\times400+400\pi\times300$
$=24\pi\times10^4$
$=75.36$万元

8.5.2 基础知识•球体

【例】三个球中，最大球的体积是另外两个球体积和的3倍（ A ）

（1）三个球的半径之比为$1:2:3$　　（2）大球的半径是另外两个球的半径之和

设三个球的体积依次为V_1，V_2，V_3，假设$V_3>V_1$且$V_3>V_2$　　球体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

题目要求推出：$V_3=3(V_1+V_2)$.

条件（1）：设三个球的半径依次为r，$2r$，$3r$

$V_3=\frac{4}{3}\pi(3r)^3=36\pi r^3$

$3(V_1+V_2)=3\left[\frac{4}{3}\pi r^3+\frac{4}{3}\pi(2r)^3\right]=36\pi r^3$，条件（1）充分

条件（2）：设三个球的半径依次为r，r，$2r$

$V_3=\frac{4}{3}\pi(2r)^3=\frac{32}{3}\pi r^3$，$3(V_1+V_2)=6\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{24}{3}\pi r^3$

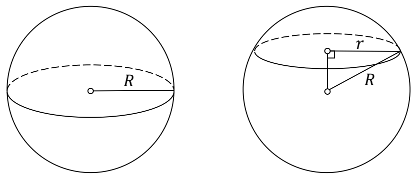
8.6 立体几何•进阶应用

基础知识
- 【1】长方体、正方体
- 【2】圆柱体
- 【3】球体

进阶应用
- 【1】切割与打孔
- 【2】平移
- 【2】旋转

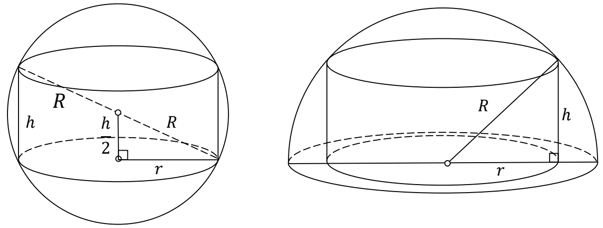
8.6.1 进阶-切割/打孔

【截面积】化为平面几何问题　切割球体截面为圆形



8.6.1 进阶-切割/打孔

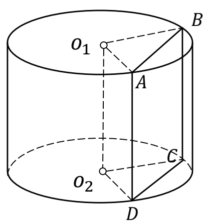
【切割出的体积】　【打孔切割的面积（洞的截面积）】



8.6.1 进阶-切割/打孔

【2018.14】如图，圆柱体的底面半径为2，高为3，垂直于底面的平面截圆柱体所得截面为矩形$ABCD$。若弦AB所对的圆心角是$\frac{\pi}{3}$，则截掉部分（较小部分）的体积为（ D ）

A.$\pi-3$　　B.$2\pi-6$　　C.$\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D.$2\pi-3\sqrt{3}$　　E.$\pi-\sqrt{3}$



设圆柱高为h，底面半径为$r=2$，ΔAO_1B为等边三角形

$\boxed{\text{边长为}a\text{的等边三角形面积}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}$

以扇形CO_2D为底面的柱体体积，设为V_1

以ΔCO_2D为底面的柱体体积，设为V_2

$V_1=S_{扇}\times h=\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}\pi r^2\times h=\frac{1}{6}\pi\times 2^2\times 3=2\pi$

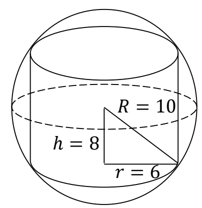
$V_2=S_{\Delta CO_2D}\times h=3\sqrt{3}$

$V_1-V_2=2\pi-3\sqrt{3}$

8.6.1 进阶-切割/打孔

【2016.15】如图，在半径为10厘米的球体上开一个底面半径是6厘米的圆柱形洞，则洞的内壁面积为（单位:平方厘米）（ E ）

(A) 48π　　(B) 288π　　(C) 96π　　(D) 576π　　(E) 192π



洞的内壁面积=圆柱的侧表面积=底面周长×高

设圆柱高为$2h$，由题意可得：

$R^2=r^2+h^2$，$100=36+h^2$

$h=8$

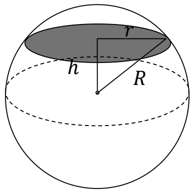
圆柱高$2h=16$

$S=2\pi r\cdot 2h=2\pi\times 6\times 16=192\pi$

8.6.1 进阶-切割/打孔

【2017.21修改】如图一个球，沿水平方向切了一刀，则可以确定球体体积（ C ）

（1）已知圆心到平面的垂直距离h　　（2）已知截面的面积$S_{截面}$



题干要求$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，即确定R

条件（1）已知h

条件（2）已知$S_{截面}=\pi r^2$，即已知r

$R^2=h^2+r^2$

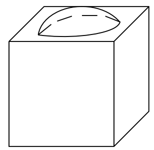
给出r：
- 截面的面积$S_{阴影}$
- 截面的周长
- 截面的半径

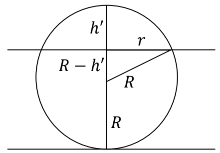
8.6.1 进阶-切割/打孔

【2017.21】如图，一个铁球沉入水池中，则能确定铁球的体积.（ B ）

（1）已知铁球露出水面的高度.

（2）已知水深及铁球与水面交线的周长.





题干要求确定$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，即铁球半径R

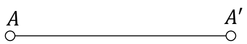
设铁球露出水面高度为h'，水深h，球与水面交线周长为C，半径为r

$R^2=r^2+(R-h')^2$，$R=\frac{h'^2+r^2}{2h'}$

条件（1）：仅知道h'，无法确定R

条件（2）：已知$h=2R-h'$和$C=2\pi r$，可确定R

8.6.2 进阶-平移

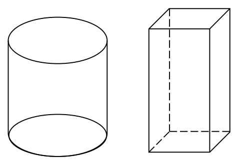


【点平移后形成线段】

线段的长度就是平移的距离

【线段平移后形成矩形】

矩形的面积= 线段长度 × 平移距离



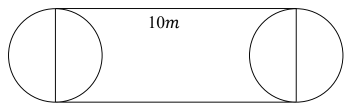
【平面平移（沿垂直于平面方向方向）形成柱体】

柱体的体积=平面面积×平移的距离

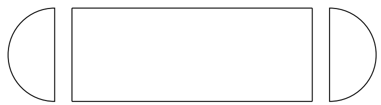
8.6.2 进阶-平移

【2017.5】某种机器人可搜索到的区域是半径为1米的圆，若该机器人沿直线行走10米，则其搜索出的区域的面积（单位:平方米）为（ D ）

(A) 10　　(B) $10+\pi$　　(C) $20+\frac{\pi}{2}$　　(D) $20+\pi$　　(E) 10π



【线段平移后形成矩形】矩形的面积= 线段长度 × 平移距离



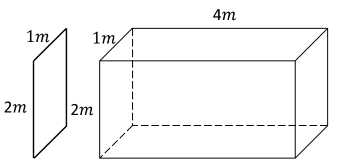
$S=$ 矩形 $+\,2\times$ 半圆

$=10\times(1+1)+\pi\times1^2=20+\pi$

8.6.2 进阶-平移

【例】一块高为$2m$，宽为$1m$的木板垂直于地面放置，沿着水平方向移动$4m$后，形成的体积为：（木板厚度忽略不计）（ D ）

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D.8　　E. 10



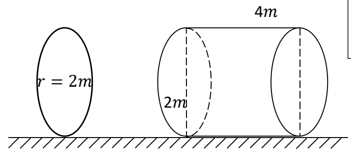
【平面平移（沿垂直于平面方向方向）形成柱体】
柱体的体积=平面面积×平移的距离

$V = abc = 1\times2\times4 = 8$

8.6.2 进阶-平移

【例】一块半径为$2m$的圆形木板垂直于地面放置，沿着水平方向移动$4m$后，形成的体积为（木板厚度忽略不计）（ C ）

A. 6π　　B. 8π　　C. 16π　　D. 18π　　E. 32π

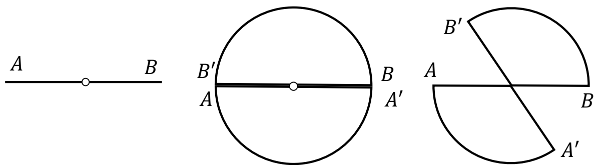


【平面平移（沿垂直于平面方向方向）形成柱体】
柱体的体积=平面面积×平移的距离

$$V = \pi r^2\cdot s = \pi\cdot 2^2\cdot 4 = 16\pi$$

8.6.3 进阶-旋转

线段旋转1：以线段AB中点为圆心旋转180^0→圆

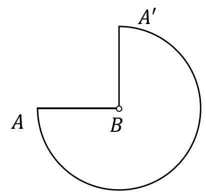


两个扇形总面积$=2\times\pi r^2\times\frac{\text{旋转的角度}}{360^0}$，$r=\frac{AB}{2}$

8.6.3 进阶-旋转

线段旋转2：以线段AB一端点B为圆心旋转

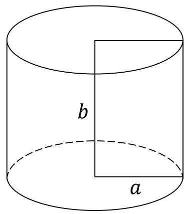
→$r = AB$，圆心角为旋转所经过角度的扇形



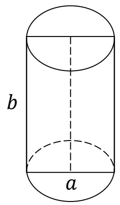
扇形的面积$=\pi r^2\times\frac{\text{旋转的角度}}{360^0}$，$r = AB$，旋转$360°$形成圆

8.6.3 进阶-旋转

矩形沿一条边/沿中心线旋转一周→圆柱体



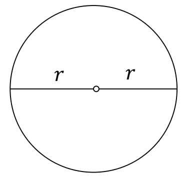
底面半径为a
高为b的圆柱体



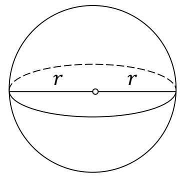
底面半径为$\frac{1}{2}a$
高为b的圆柱体

8.6.3 进阶-旋转

圆形以直径为轴旋转180度→球体



半径为r的圆

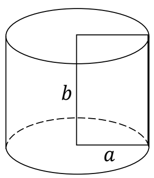


半径为r的球

8.6.3 进阶-旋转

【2004.1.4】矩形周长2，将它绕其一边旋转一周，所得圆柱体体积最大时的矩形面积是（ C ）

(A) $\frac{4\pi}{27}$　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $\frac{2}{9}$　(D) $\frac{27}{4}$　(E) 以上都不对



$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$

$2a+2b=2$，$a+b=1$

所得底面半径为a，高为b的圆柱体

要求$V=\pi a^2 b$最大时$S=ab$的值

均值不等式：$\boxed{\text{求积的最大值→令和为定值}}$

$V=\pi a^2(1-a)=\frac{1}{2}\pi\cdot a\cdot a\cdot(2-2a)\leq\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3$

当$a=a=2-2a$，$a=\frac{2}{3}$时，取“=”号

此时矩形面积为$S=ab=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

8 立体几何•套路

基础知识
- 【1】长方体、正方体
- 【2】圆柱体
- 【3】球体

进阶应用
- 【1】切割与打孔
- 【2】平移
- 【2】旋转


THANK YOU FOR WATCHING