数学系统精讲

概率

MBA大师 — 数学董璞

11.1 概率基础

随机试验

扔硬币　　掷骰子　　彩票开奖　　抽奖券

(1) 【可重复性】

试验在相同条件下可重复进行；

(2) 【可知性】

每次试验的可能结果不止一个，并且事先能明确试验所有可能的结果；

(3) 【不确定性】

进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，但必然会出现结果中的一个。

11.1 概率基础

随机试验每一种可能的结果称为一个基本事件；

从数字1，2，3，4中任意取出两个不同数字的试验中，有哪些基本事件？

基本事件为：$A=\{1,2\}$

$B=\{1,3\}$

$C=\{1,4\}$

$D=\{2,3\}$

$E=\{2,4\}$

$F=\{3,4\}$

由这个试验中所有基本事件构成的总集合称为样本空间，记为Ω。

对题干给出的条件A，往往有多个基本事件可以满足，解题重点是找出这些基本事件。

做一个试验，满足条件A出现的可能性的大小，称为A发生的概率，记为$P(A)$

11.1 概率基础

做一个试验，事件A出现的可能性的大小，称为事件A的概率，记为$P(A)$

误区：有些人认为所有事情只有两种可能，“发生”和“不发生”，

所以任何事情结果出现的概率都是50%。

【例】掷出一颗骰子，出现1点和没有出现1点

样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

11.1 概率基础

独立事件：各个事件在发生的时候，不会产生相互影响。

扔第一次骰子，不管扔出多少点，都不影响第二次扔骰子的点数。

【需掌握知识点1】两个独立事件均发生的概率，为两者概率之积。

如A事件发生的概率为$P(A)$， B事件发生的概率为$P(\mathrm{B})$，

那么A和B均发生的概率为$P(A)\times P(\mathrm{B})$

相互独立事件：概率乘法公式

扔A骰子，扔出1点的概率为$\frac{1}{6}$，扔B骰子，扔出1点的概率为$\frac{1}{6}$

扔出A、B两个骰子都是1点的概率为$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

11.1 概率基础

【互斥事件】不可能同时发生的两个事件，就叫做互斥事件。

【需掌握知识点2】对于互斥事件，如果事件A发生的概率为$P(A)$，事件B发生的概率为$P(B)$，那么事件$A+B$发生（即A，B中有一个发生）的概率等于A，B分别发生的概率的和，即：

$$P(A)+P(\mathrm{B})$$

互斥事件：概率加法公式

【例】扔骰子掷出1点的概率为$P(A)=\frac{1}{6}$，扔骰子掷出2点的概率为$P(B)=\frac{1}{6}$

那么扔骰子掷出的点数小于等于2（1点和2点中有一个发生）的概率是：

$$P(A)+P(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$$

11.1 概率基础

【对立事件】如果一件事情发生的概率为P

那么这件事情不发生就叫做与之对立的事件

不发生的概率为$1-P$

【需掌握知识点3】对立事件概率和等于1：$P(A)+P(\bar{A})=P(A+\bar{A})=1$

一个骰子，扔出1点的概率为$\frac{1}{6}$

那么扔出2点及以上的概率为 $1-\frac{1}{6}$ 正难则反【对立事件法】

投掷一个均质骰子

扔出【1点】与扔出【2点】为互斥事件

扔出【1点】与扔出【2点及以上】为对立事件

11.2 古典概型

概率基础知识

古典概型 $P(A)=\dfrac{\text{满足要求方法数}}{\text{所有方法数}}$

独立事件

11.2 古典概型

古典概型

（1）【有限性】试验中所有可能出现的基本事件数量为有限个

（2）【等可能性】每个基本事件出现的可能性相同。

求下列事件的概率，总结古典概型计算某个事件概率公式：

（1）投掷一枚质地均匀的硬币，正面向上的概率。

（2）掷一枚骰子，出现偶数点的概率。

$\boxed{P(A)=\frac{\text{满足要求方法数}}{\text{所有方法数}}}$

11.2 古典概型

概率基础知识
- 随机试验、基本事件、样本空间
- 独立事件、互斥事件、对立事件

古典概型
- ☆【1】$P(A)=$满足要求方法数/所有方法数
- ☆【2】抽奖、尝试密码
- ☆【3】不放回取球
- 【4】取出后放回、分房模型【本质为排列组合可重复分配套路】
- ☆【5】词汇：至少有1个，至少有2个，至多有1个

独立事件

11.2.1 $P=$满足要求方法数/所有方法数

每一道排列组合题目都可以改成概率题

【例】李明的讲义夹里放了大小相同的试卷共12页，其中语文5页、数学4页、英语3页，他随机地从讲义夹中抽出1页数学卷子的方法有多少种？__4种__

【2014.10.2】李明的讲义夹里放了大小相同的试卷共12页，其中语文5页、数学4页、英语3页，他随机地从讲义夹中抽出1页，抽出的是数学试卷的概率等于（ E ）

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{3}$

$$P(A)=\frac{\text{满足要求方法数}}{\text{所有方法数}}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

【2014.10.2扩展】李明的讲义夹里放了大小相同的试卷共12页，其中语文5页、数学4页、英语3页，他随机地从讲义夹中抽出2页，一页是数学，一页是英语的概率等于__$\frac{2}{11}$__

$$P(A)=\frac{\text{满足要求方法数}}{\text{所有方法数}}=\frac{C_4^1\cdot C_3^1}{C_{12}^2}=\frac{12}{66}=\frac{2}{11}$$

11.2.1 $P=$满足要求方法数/所有方法数

【例】在分别标记了数字1、2、3、4、5、6的6张卡片中随机取3张，其上数字之和等于10的方式有多少种__3种__

①　②　③　④　⑤　⑥　　(1,3,6)、(1,4,5)、(2,3,5)

【2016.4】在分别标记了数字1、2、3、4、5、6的6张卡片中随机取3张，其上数字之和等于10的概率（ C ）

(A) 0.05 (B) 0.1 (C) 0.15 (D) 0.2 (E) 0.25

穷举法　所有方法数：6张中随机抽取3张：C_6^3

满足3张和为10要求的方法数：(1,3,6)、(1,4,5)、(2,3,5)共3种

$$P=\frac{3}{C_6^3}=\frac{3}{20}=0.15$$

11.2.1 $P=$满足要求方法数/所有方法数

【例】从标号为1到10的10张卡片中随机抽取2张，它们的标号之和能被5整除的方式有<u>9种</u>

和能被5整除：和可能为5、10、15

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

和为5：(1,4)，(2,3)

穷举法 和为10：(1,9)，(2,8)，(3,7)，(4,6)

和为15：(10,5)，(9,6)，(8,7)

【2018.12】从标号为1到10的10张卡片中随机抽取2张，它们的标号之和能被5整除的概率为（ A ）

A.$\frac{1}{5}$　B.$\frac{1}{9}$　C.$\frac{2}{9}$　D.$\frac{2}{15}$　E.$\frac{7}{45}$

满足要求方法数：9

所有方法数：$C_{10}^{2}=45$

11.2.1 $P=$满足要求方法数/所有方法数

【例】在一次商品促销活动中，主持人出示一个9位数，让顾客猜测商品的价格，商品的价格是该9位数中从左到右相邻的3个数字组成的3位数，若主持人出示的是513535319，一共有多少种价格可能<u>6种</u>

5 1 3 5 3 5 3 1 9

从左到右相邻三个数字组成的三位数有：513、135、$\boxed{353}$、535、$\boxed{353}$、531、319

【2012.1.4】在一次商品促销活动中，主持人出示一个9位数，让顾客猜测商品的价格，商品的价格是该9位数中从左到右相邻的3个数字组成的3位数，若主持人出示的是513535319，则顾客一次猜中价格的概率是（ B ）

(A) $\frac{1}{7}$　(B) $\frac{1}{6}$　(C) $\frac{1}{5}$　(D) $\frac{2}{7}$　(E) $\frac{1}{3}$

正确价格只有一个，故满足要求方法数：1

所有方法数：6

11.2.1 $P=$满足要求方法数/所有方法数

【例1】从1到100的整数中同时能被5和7整除的数字有多少个？<u>2个</u>

既能被5整除又能被7整除的数共有2个（$35k$，$k=1,2$）

【例2】从1到100的整数中任取一个数，则该数同时能被5和7整除的概率为（ A ）

(A) 0.02　(B) 0.14　(C) 0.2　(D) 0.32　(E) 0.34

【例3】从1到100的整数中能被5或7整除的数有多少个？<u>$20+14-2=32$</u>

能被5整除的数共有20个（$5k$，$k=1,2,\dots,20$）

能被7整除的数共有14个（$7k$，$k=1,2,\dots,14$）

既能被5整除又能被7整除的数共有2个（$35k$，$k=1,2$）

【2016.7】从1到100的整数中任取一个数，则该数能被5或7整除的概率为（ D ）

(A) 0.02　(B) 0.14　(C) 0.2　(D) 0.32　(E) 0.34

11.2.1 $P=$满足要求方法数/所有方法数

部分题目中含有下面词汇：

【至少有m个】至少有1个

【至多有m个】至多有3个

逆向思维，正难则反

【对立事件法】

11.2 古典概型

概率基础知识
- 随机试验、基本事件、样本空间
- 独立事件、互斥事件、对立事件

古典概型
- ☆【1】$P(A)=$满足要求方法数/所有方法数
- ☆【2】尝试密码、抽奖 秒杀技巧1 秒杀技巧2
- ☆【3】不放回取球
- 【4】取出后放回、分房模型【本质为排列组合可重复分配套路】
- ☆【5】词汇：至少有1个，至少有2个，至多有1个

独立事件

11.2.2 尝试密码、抽奖

【2010.1.12】某装置的启动密码是0到9中3个不同的数字组成，连续3次输入错误密码，就会导致该装置永久关闭，一个仅记得密码是由3个不同的数字组成的人，能够启动此装置的概率为（ ）

随着每次抽取，样本数量会减少，抽过数字、球等不会再次抽到

解题信号词汇【尝试密码】

【选不相同的数字】

【抽取后不放回】

【秒杀技巧1】第k次成功概率=第1次成功概率

【秒杀技巧2】多个人抽奖：一起抽和依次抽，概率相同

11.2.2 尝试密码、抽奖

【例】某装置的启动密码是0到9中的一个数字，连续3次输入错误密码，就会导致该装置永久关闭，试计算：

输入1次就猜中的概率：$\frac{1}{10}$

输入第2次猜中（第一次失败）的概率：$\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$

输入第3次猜中（前两次次失败）的概率：$\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$

3次内猜中的概率：$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$

11.2.2 尝试密码、抽奖

【例】某装置的启动密码是0到9中的3数字组成，连续3次输入错误密码，就会导致该装置永久关闭，试计算：

输入1次就猜中的概率：$\frac{1}{1000}$

输入第2次猜中（第一次失败）的概率：$\frac{999}{1000}\times\frac{1}{999}=\frac{1}{1000}$

输入第3次猜中（前两次次失败）的概率：$\frac{999}{1000}\times\frac{998}{999}\times\frac{1}{998}=\frac{1}{1000}$

3次内猜中的概率：$\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{3}{1000}$

【总结】恰好第k次才猜中的概率，与第一次就猜中的概率相等

前k次之内猜中的概率，等于一次猜中概率乘以k

无放回取样

11.2.2 尝试密码、抽奖

【2000.1.10】某人忘记三位号码锁（每位均有0~9十个数码）的最后一个号码，因此在正确拨出前两个号码后，只能随机地试拨最后一个号码，每拨一次算做一次试开，则他在第4次试开时才将锁打开的概率是（ D ）

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{10}$

第4次试开时才将锁打开的概率 = 第一次打开的概率 $= \frac{1}{10}$

$$\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{10}$$

11.2.2 尝试密码、抽奖

【2010.1.12】某装置的启动密码是0到9中3个不同的数字组成，连续3次输入错误密码，就会导致该装置永久关闭：

问1：一个仅记得密码是由3个不同的数字组成的人恰好第1次输入就启动装置的概率为（ D ）

问2：一个仅记得密码是由3个不同的数字组成的人恰好第3次输入后启动装置的概率为（ D ）

问3：一个仅记得密码是由3个不同的数字组成的人能够启动此装置的概率为（ C ）

(A) $\frac{1}{120}$ (B) $\frac{1}{168}$ (C) $\frac{1}{240}$ (D) $\frac{1}{720}$ (E) $\frac{3}{1000}$

恰好第1次输入就启动装置的概率 $= \frac{1}{10\times 9\times 8} = \frac{1}{720}$

恰好第3次输入后启动装置的概率 = 一次输入对的概率 $= \frac{1}{10\times 9\times 8} = \frac{1}{720}$

3次内成功启动概率 $= \frac{1}{720}\times 3 = \frac{1}{240}$

11.2.2 尝试密码、抽奖

【2010.1.12扩展】某装置的启动密码是0到9中三个任意数字组成，连续3次输入错误密码，就会导致该装置永久关闭。

问1.：一个不知道密码的人恰好第3次输入后启动装置的概率为（ D ）

问2：一个不知道密码的人能够启动此装置的概率为（ E ）

(A) $\frac{1}{120}$ (B) $\frac{1}{168}$ (C) $\frac{1}{240}$ (D) $\frac{1}{1000}$ (E) $\frac{3}{1000}$

恰好第3次输入后启动装置的概率 $= \frac{1}{10\times 10\times 10} = \frac{1}{1000}$

3次内成功启动装置的概率 $= \frac{1}{1000}\times 3 = \frac{3}{1000}$

11.2.2 尝试密码、抽奖

【2012.1.4】在一次商品促销活动中，主持人出示一个9位数，让顾客猜测商品的价格，商品的价格是该9位数中从左到右相邻的3个数字组成的3位数，若主持人出示的是513535319：

问1：顾客第一次猜中价格的概率是（ B ）

问2：顾客第二次猜中价格的概率是（ B ） 5 1 3 5 3 5 3 1 9

问3：顾客二次之内猜中价格的概率是（ E ）

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{7}$ (E) $\frac{1}{3}$

从左到右相邻三个数字组成的三位数有：513、135、$\boxed{353}$、535、$\boxed{353}$、531、319

去掉重复，共有6种，只有商品价格为其中一种：第一次猜中 $P=\frac{1}{6}$

恰第二次猜中 = 第一次猜中 $= \frac{1}{6}$

二次之内猜中 $= \frac{1}{6}\times 2 = \frac{1}{3}$

11.2.2 尝试密码、抽奖

【例】一共有2张奖券，其中有1张有奖，另1张无奖。甲、乙两人一次抽取，则他们中奖的概率分别为多少？

甲第一个抽：一共2张奖券，则甲中奖概率：$\frac{1}{2}$

乙第二个抽：若甲已经中奖，那么乙的中奖几率为0

若甲未中奖，则剩余1张奖券即为有奖券，乙中奖几率为1

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{甲中奖}}\times 0+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{甲未中奖}}\times \overbrace{1}^{\text{乙中奖}}=\frac{1}{2}$$

11.2.2 尝试密码、抽奖

【例】一共有10张奖券，其中有1张有奖，其余9张均无奖。甲、乙、丙依次抽取，则他们中奖的概率分别为多少？

甲第一个抽：一共10张奖券，中奖概率$\frac{1}{10}$

乙第二个抽：若甲已经中奖，那么乙的中奖几率为0

若甲没中奖，剩余9张奖券，中奖几率为$\frac{1}{9}$

乙中奖概率：$\frac{1}{10}\times 0+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$

丙第三个抽：若甲或者乙已经中奖，那么丙的中奖几率为0

甲或者乙中奖的概率为：$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{10}$

如果甲乙均没有中奖，剩余8张奖券，丙中奖几率：$\frac{1}{8}$

丙中奖概率：$\frac{2}{10}\times 0+\frac{8}{10}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$

11.2.2 尝试密码、抽奖

【例】一共有10张奖券，其中有1张有奖，其余9张均无奖。甲、乙、丙依次抽取，则他们中奖的概率分别为多少？

丙第三个抽：若甲或者乙已经中奖，那么丙的中奖几率为0

甲或者乙中奖的概率为：$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{10}$

如果甲乙均没有中奖，剩余8张奖券，丙中奖几率：$\frac{1}{8}$

丙中奖概率：$\frac{2}{10}\times 0+\frac{8}{10}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$

【常见误区】为什么甲、乙均没有抽到的概率不是$\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{81}{100}$，而是$\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}$

两个抽奖箱各有10张奖券，分别有1张有奖，9张无奖
甲、乙分别在两个抽奖箱中抽取一张，均未中奖的概率

11.2.2 尝试密码、抽奖

【例】一共有10张奖券，其中有1张有奖，其余9张均无奖。甲、乙、丙依次抽取，则他们中奖的概率分别为多少？

依次抽：甲中奖概率$\frac{1}{10}$

乙中奖概率$\frac{1}{10}$

丙中奖概率$\frac{1}{10}$

一起抽：甲中奖概率$\frac{1}{10}$ = 乙中奖概率$\frac{1}{10}$ = 丙中奖概率$\frac{1}{10}$

【先抽后抽都一样】n中抽1，依次抽，每人抽中的概率都是$\frac{1}{n}$

恰好第k次抽中的概率，与第一次就抽中的概率相等

有k次抽奖机会，中奖概率等于一次成功概率乘以k

【一起抽和依次抽都一样】“同时抽k张“和”依次抽k张“，每人抽中概率相同

11.2.2 尝试密码、抽奖

【2010.10.14】某公司有9名工程师，张三是其中之一，从中任意抽调4人组成攻关小组，包括张三的概率是（ D ）

(A) $\frac{2}{9}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{1}{3}$　(D) $\frac{4}{9}$　(E) $\frac{5}{9}$

①排列组合：9人中任意抽调4人：C_9^4

攻关小组包括张三，其余3人从8人中选取：$1\cdot C_8^3$

$$P=\frac{C_8^3}{C_9^4}=\frac{4}{9}$$

②不放回抽取，抽中张三：任意抽一个人有张三：$\frac{1}{9}$

任意抽四人等于抽4次：$\frac{4}{9}$

11.2 古典概型

概率基础知识
- 随机试验、基本事件、样本空间
- 独立事件、互斥事件、对立事件

古典概型
- ☆【1】$P(A)=$ 满足要求方法数/所有方法数
- ☆【2】抽奖、尝试密码
- ☆【3】不放回取球 $\boxed{\text{秒杀技巧3}}$
- 【4】取出后放回、分房模型【本质为排列组合可重复分配套路】
- ☆【5】词汇：至少有1个，至少有2个，至多有1个

独立事件

11.2.3 不放回取球

【例】5个不同的球里，有3个白球，2个红球，甲先抽一个球，后再抽一个球，抽出的球不放回。抽出一红一白球的概率为?

○○○●●

① 先抽出白球 $\frac{3}{5}$，再抽出红球 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

可能性①发生概率为：$\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

② 先抽出红球 $\frac{2}{5}$，再抽出白球 $\frac{3}{4}$

可能性②发生概率为：$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$

$$P=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$$

11.2.3 不放回取球

【例】5个不同的球里，有3个白球，2个红球，甲一次抽取两个球，抽到一红一白球的概率为?

○○○●●

一次抽两个球，一红一白有：$C_2^1C_3^1=6$种

一次抽两个球，一共有：$C_5^2=10$种

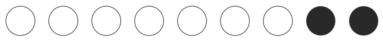
$$P=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

【秒杀技巧3】如果抽到的球不放回，那么对于相同抽取结果：

分次抽取和一次抽取的最终概率是相同的

11.2.3 不放回取球

【例】9只不同的产品，有2只次品，从中间随机取出3只中恰好有一只是次品方式有__42__种



$C_2^1 \cdot C_7^2 = 42$

【例】9只产品里，有2只次品，从中间随机取出3只，恰好有一只是次品的概率是__0.5__

$\frac{C_2^1 \cdot C_7^2}{C_9^3} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$

11.2.3 不放回取球

【例】袋中装有8个白球及5个黑球

(1) 从袋中任取6个球，求所取的球恰好含4个白球，2个黑球的概率。

(2) 从袋中任意地接连取出5个球，如果每球被取出后不放回，求最后取出的球是白球的概率。

---

(1) 从$8+5$个球中任取6个球，总取法：C_{13}^6

取出恰好4白2黑，取法有：$C_8^4 \cdot C_5^2$

$P = \frac{C_8^4 \cdot C_5^2}{C_{13}^6}$

(2) $P_{最后取出的球是白球} = P_{第一次取出的球是白球} = \frac{8}{8+5} = \frac{8}{13}$

【不放回取样：抽奖】恰好第k次抽中的概率，与第一次就抽中的概率相等

11.2.3 不放回取球

【例】某项活动中，将3男3女6名志愿者随机地分成甲、乙、丙三组，每组2人，则每组志愿者都是异性的方法有多少种__36种__

$C_3^1 C_3^1 C_2^1 C_2^1 C_1^1 C_1^1 = 36$

【2014.1.13】某项活动中，将3男3女6名志愿者随机地分成甲、乙、丙三组，每组2人，则每组志愿者都是异性的概率为（ E ）

(A) $\frac{1}{90}$　(B) $\frac{1}{15}$　(C) $\frac{1}{10}$　(D) $\frac{1}{5}$　(E) $\frac{2}{5}$

$C_3^1 C_3^1 C_2^1 C_2^1 C_1^1 C_1^1 = 36$

6人分为甲乙丙三组共有：$\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} \times A_3^3 = 15 \times 6 = 90$

$P = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$

11.2.3 不放回取球

【例】分配5名老师到三所学校任教，则每所学校至少分配一名老师的概率为（ B ）

A. $\frac{49}{81}$　B. $\frac{50}{81}$　C. $\frac{25}{27}$　D. $\frac{4}{27}$　E. $\frac{1}{27}$

总方案数为3^5——可重复分配

满足要求方案数：5名老师，分到3个学校，组不为空——未指定分配问题

5名老师分为$2+2+1$三组，再分配给3个学校，有

$\frac{C_5^2 C_3^2 C_1^1}{2!} \times A_3^3 = 90$

5名老师分为$3+1+1$三组，再分配给3个学校，有

$\frac{C_5^3 C_2^1 C_1^1}{2!} \times A_3^3 = 60$

11.2 古典概型

概率基础知识：
- 随机试验、基本事件、样本空间
- 独立事件、互斥事件、对立事件

古典概型：
- ☆【1】$P(A)=$ 满足要求方法数/所有方法数
- ☆【2】抽奖、尝试密码
- ☆【3】不放回取球
- 【4】取出后放回（分房模型） 排列组合：可重复分配套路
- ☆【5】词汇：至少有1个，至少有2个，至多有1个

独立事件

11.2.4 取出后放回、分房模型

【例1】1~9中可重复的选取6个数组成6位数，求这6个数完全不相同的概率。

9个数中可重复地选取6个方案数：$9\times9\times9\times9\times9\times9=9^6$

选定6不相同的数方案数：$9\times8\times7\times6\times5\times4=A_9^6$

$P=\frac{A_9^6}{9^6}$

【例2】1~9中选取6个不相同的数组成六位数，求这个六位数是偶数的概率。

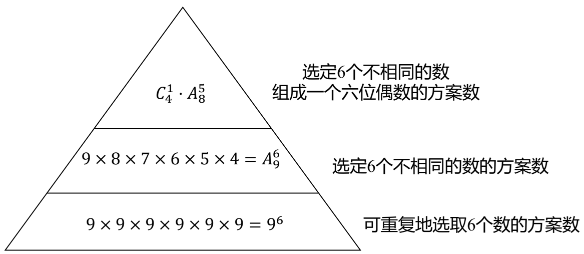
1~9中共有2、4、6、8这四个偶数，作为这个六位数的末位

其余五位有顺序地从剩余数字中选择：$C_4^1\cdot A_8^5$

选定6个不相同的数的方案数：$9\times8\times7\times6\times5\times4=A_9^6$

$P=\frac{C_4^1\cdot A_8^5}{A_9^6}$

11.2.4 取出后放回、分房模型



9个数中选定6个组成一个6位数

11.2.4 取出后放回、分房模型

取出后放回 VS 取出后不放回

【取出后不放回】甲、乙两个会议室各能容纳4个人，6个同学来开会，每个同学只能选择去一个会议室，有多少种可能？

4人进甲会议室，2人进乙会议室 $C_6^4\cdot C_2^2$

3人进甲会议室，3人进乙会议室 $C_6^3\cdot C_3^3$

2人进甲会议室，4人进乙会议室 $C_6^2\cdot C_4^4$

【取出后放回】甲、乙两个会议室课容纳人数不限，6个同学来开会，每个同学只能选择去一个会议室，有多少种可能？

每个同学面临2种选择，去甲会议室或者去乙会议室，重复6次。

$2\times2\times2\times2\times2\times2=2^6$

11.2.4 取出后放回、分房模型

【2015.19】信封中装有10张奖券，只有一张有奖。从信封中同时抽取2张，中奖概率为P；从信封中每次抽取1张奖券后放回，如此重复抽取n次，中奖概率为Q，则$P<Q$.（ B ）

（1） $n=2$　　（2） $n=3$

从信封中同时抽取2张：取出后不放回

【一起抽和依次抽都一样】"同时抽k张"和"依次抽k张"，每人/每人抽中概率相同

从10张奖券中同时抽取2张奖券，中奖概率$P=\frac{1}{10}\times 2=\frac{1}{5}=0.2$

从信封中每次抽取1张奖券后放回，如此重复n次：取出后放回

对于有放回抽样，不管重复抽取多少次，每次中奖概率恒定不变

中奖概率$Q=1-P_{全未中奖}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^n=1-0.9^n$

对于（1）$n=2$时，$Q=1-\left(\frac{9}{10}\right)^2=0.19$，$Q<P$，不充分

对于（2）$n=3$时，$Q=1-\left(\frac{9}{10}\right)^3=0.271$，$Q>P$，充分

11.2.4 取出后放回、分房模型

n个人住m间房	n个人过生日/星座	n个球放入m个盒子

1.每次分配面临的情况都相同，相互不影响，每次取都是独立随机事件

2.两种方法

1.每次行为单步计算，概率为每一步概率乘积（抽签法）

2.古典概型公式，计算分母时：

被分配个数（人数）$=n$，分配去向（房间数）$=m$，方案数$=m^n$

3.常见词汇：

【分房】、【分岗位】、【取出后放回】、【无限量/任意买】……

4.推荐使用秒杀技巧【抽签法】

11.2.4 取出后放回、分房模型

【1999.10】将3人以相同的概率分配到4间房的每一间中，恰有3间房中各有1人的概率是（ B ）

A．0.75　　B．0.375　　C．0.1875　　D．0.125　　E．0.105

【古典概型公式】3人分配到4间房，共有$4^3=64$种。

3个人分配给4个房间，各有一人共有$C_4^3A_3^3=24$种

$P=\frac{24}{64}=0.375$

【抽签法】每个人每次选房都是面临的同样的四个选择，互不影响，每次都是独立随机事件

第①个人：4间房中，任意房间都可以选，$P_1=\frac{4}{4}=1$

第②个人：4间房中，除了第一个人已选走的，剩下3间均可以选，$P_2=\frac{3}{4}$

第③个人：4间房中，除了前两个人已选走的，剩下2间均都可以选，$P_3=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$$P=P_1\cdot P_2\cdot P_3=1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}=0.375$$

11.2.4 取出后放回、分房模型

【1998.10】将3人分配到4间房的每一间中，若每人被分配到这4间房的每一间房中的概率都相同，则第一、二、三号房中各有1人的概率是（ D ）

(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{3}{8}$　　(C) $\frac{3}{16}$　　(D) $\frac{3}{32}$　　(E) $\frac{3}{64}$

【古典概型公式】3人分配到4间房，共有$4^3=64$种。

一，二，三号房间各有1人，共有$A_3^3=6$种

$P=\frac{满足要求}{全部可能}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$

【抽签法】每个人每次选房都是面临的同样的四个选择，互不影响，每次都是独立随机事件

第①个人：在4间房中，满足要求的一、二、三号任意选中一个，$P_1=\frac{3}{4}$

第②个人：在4间房中，除了第一个人已选的，剩下2个满足要求的，$P_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

第③个人：在4间房中，满足要求的3间只剩一间可选，他必须选到此间：$P_3=\frac{1}{4}$

$$P=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

11.2.4 取出后放回、分房模型

【例】1~9这九个中可重复的数字选取6个数，组成一个6位数，求下列事件的概率：

（1）6个数完全不相同　　（2）6个数不含奇数　　（3）6个数中5恰好出现4次

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

【古典概型公式】

（1）$\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{9^6}$

（2）$\frac{4^6}{9^6}$

（3）$\frac{C_6^4\times8^2}{9^6}$

【抽签法】有9张不同号码的签，可重复抽取，每次抽一张，共抽6次

（1）$\frac{9}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}$

（2）$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}$

（3）$C_6^4\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}$

11.2.4 取出后放回、分房模型

【2000.10.9】某剧院正在上演一部新歌剧，前座票价为50元，中座票价为35元，后座票价为20元，如果购到任何一种票是等可能的，现任意购买到2张票，则其值不超过70元的概率是（ D ）

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{3}{5}$　(D) $\frac{2}{3}$

【古典概型公式】

从前、中、后中任意购买2张票

共有3^2种选择

6种满足题干不超过70元要求

后前	前后	中中	中后	后中	后后
70	70	70	55	55	40

$P=\frac{6}{3^2}=\frac{2}{3}$

【抽签法】

前座+后座：$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

中座+中座/后座：$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

后座+任意：$\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

11.2.4 取出后放回、分房模型

【例】甲、乙、丙三名志愿者，分别被随机的分到A、B、C、D四个岗位工作，则：

（1）甲、乙同时参加A岗位的概率__$\frac{1}{16}$__

（2）甲、乙两个人不在同一岗位的概率__$\frac{3}{4}$__

【抽签法】A、B、C、D视为4种签，每种签可以被重复抽取，甲、乙、丙分别抽3次。

（1）甲必须抽到A，$P_{甲}=\frac{1}{4}$

乙必须抽到A，$P_{乙}=\frac{1}{4}$

丙随便抽都符合题干要求，$P_{丙}=\frac{4}{4}=1$

$P=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{16}$

（2）甲从4个岗位中任意抽取，均可满足题干要求，$P_{甲}=\frac{4}{4}=1$

乙从4个岗位中，除过甲已选的以外，剩余3个任选均满足题干要求，$P_{乙}=\frac{3}{4}$

丙随便抽都符合题干要求，$P_{丙}=\frac{4}{4}=1$

$P=1\times\frac{3}{4}\times1=\frac{3}{4}$

11.2.4 取出后放回、分房模型

【例】甲、乙、丙三名志愿者，分别被随机的分到A、B、C、D四个岗位工作，则：

（3）甲、乙两个人不在同一岗位，但是其中一人与丙在相同岗位的概率__$\frac{3}{8}$__

【抽签法】A、B、C、D视为4种签，每种签可以被重复抽取，甲、乙、丙分别抽3次。

（3）甲从4个岗位中任意抽取，均可满足题干要求，$P_{甲}=\frac{4}{4}=1$

乙从4个岗位中，除过甲已选的以外，剩余3个任选均满足题干要求，$P_{乙}=\frac{3}{4}$

丙只能从四个岗位中选取与甲相同或者与乙相同的岗位，$P_{丙}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$P=1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

11.2.4 取出后放回、分房模型 $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

【例】甲、乙、丙三名志愿者，分别被随机的分到A、B、C、D四个岗位工作，则：

(4) 甲不在D岗位，乙不在A岗位，丙与两者均不在在相同岗位的概率 【分情况讨论】 $\frac{3}{32}+\frac{3}{32}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$

①：甲抽到A，$P_{甲}=\frac{1}{4}$
乙在B、C、D任意抽取，$P_{乙}=\frac{3}{4}$
丙在4个岗位中抽取与甲、乙不同的一个$P_{丙}=\frac{1}{2}$
$P_{①}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{32}$

②：甲抽到B、C之一，$P_{甲}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
乙抽到与甲相同的岗位，$P_{乙}=\frac{1}{4}$
丙选取一个与甲乙不同的岗位（甲乙同岗位），$P_{丙}=\frac{3}{4}$
$P_{②}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{32}$

③：甲抽到B、C之一，$P_{甲}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
乙选取到与甲不同的岗位，同时不能在A岗位，$P_{乙}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
丙选取一个与甲乙不同的岗位，$P_{丙}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
$P_{③}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

11.2 古典概型

概率基础知识
- 随机试验、基本事件、样本空间
- 独立事件、互斥事件、对立事件

古典概型
- ☆【1】$P(A)=$满足要求方法数/所有方法数
- ☆【2】抽奖、尝试密码
- ☆【3】不放回取球
- 【4】取出后放回、分房模型【本质为排列组合可重复分配套路】
- ☆【5】词汇：至少有1个，至少有2个，至多有1个等

独立事件

11.2.5 词汇：至少和至多

【对立事件】如果一件事情发生的概率为P
那么这件事情不发生就叫做与之对立的事件
不发生的概率为$1-P$ 【正难则反】

至少
- 至少有一个（≥ 1个） 对立事件<1个，即一个也没有
- 至少有2个（≥ 2个） 对立事件<2个，即0个或1个 【分类讨论】

至多
- 至多有一个（≤ 1个） 即0个或1个 【分类讨论】
- 至多有2个（≤ 2个） 对立事件>2个
- 总数为3个时，对立事件>2个即为3个

11.2.5 词汇：至少和至多

【1998.10.13】甲、乙、丙三人进行定点投篮比赛，已知甲的命中概率为0.9，乙的命中概率为0.8，丙的命中概率为0.7，现每人各投一次，求：

(1) 三人中至少有两人投进的概率是（E）

(A) 0.802 (B) 0.812 (C) 0.832 (D) 0.842 (E) 0.902

(2) 三人中至多有两人投进的概率是（D）

(A) 0.396 (B) 0.416 (C) 0.426 (D) 0.496 (E) 0.506

(1) 至少2人（≥ 2人）投进包括恰有2人投进和3人均投进

$P=0.9\cdot0.8\cdot(1-0.7)+0.9\cdot(1-0.8)\cdot0.7+(1-0.9)\cdot0.8\cdot0.7+0.9\cdot0.8\cdot0.7=0.902$

(2) 至多2人（≤ 2人）投进

对立事件>2人投进，即3人全投进

$P_{至多两人投进}=1-P_{三人全投进}=1-0.9\cdot0.8\cdot0.7=0.496$

11.2.5 词汇：至少和至多 常见错误

【例】袋子中有5只红球，3只白球，任取4只，求取出的球至少有2个白球的概率有多少？

① ② ③ ① ② ③ ④ ⑤ 8只球中任取4只，共有方案数：$C_8^4 = 70$

至少有2个白球（≥ 2 个白球），即2白2红或者3白1红

对立事件：< 2个白球，即没有白球或只有1个白球

【方法1】2白 2红 $C_3^2 \cdot C_5^2 = 30$

3白 1红 $C_3^3 \cdot C_5^1 = 5$

$P = \frac{30+5}{70} = \frac{1}{2}$

【方法2】0白4红 $C_5^4 = C_5^1 = 5$

1白3红 $C_3^1 \cdot C_5^3 = 30$

$P = 1 - \frac{C_5^4 + C_5^3 C_3^1}{C_8^4} = \frac{1}{2}$

11.2.5 词汇：至少和至多 常见错误

【例】袋子中有5只红球，3只白球，任取4只，求取出的球至少有2个白球的概率有多少？

① ② ③ ① ② ③ ④ ⑤

8只球中任取4只，共有方案数：$C_8^4 = 70$

【错误方法】先选2个白球，剩下6个球随便选$C_3^2 C_6^2 = 45$，$P = \frac{45}{70} = \frac{9}{14}$

【错误类型】重复计算

①② + ③ ①

①③ + ② ① 共多计算了10种

②③ + ① ①

【总结】在“至少”问题中不能先取出最少量，之后剩余任取，此时会产生重复计算。

11.2.5 词汇：至少和至多

【1997.1.11】10件产品中有3件次品，从中随机抽出2件，至少抽到一件次品的概率是（ D ）

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{7}{15}$ D. $\frac{8}{15}$ E. $\frac{3}{5}$

至少抽到一件次品（≥ 1件）

对立事件：< 1件，即一件次品也没有抽到（抽到的全为正品）

$$P_{\text{至少抽到一件次品}} = 1 - P_{\text{抽到的全为正品}} = 1 - \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = 1 - \frac{21}{45} = \frac{8}{15}$$

11.2.5 词汇：至少和至多

【2011.1.8】将2只红球与1只白球随机地放入甲、乙、丙三个盒子中，则乙盒中至少有1只红球的概率为（ D ）

(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{8}{27}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$ (E) $\frac{17}{27}$

① ② ①

乙盒中至少有一只红球（≥ 1只） 对立事件：< 1件，即一只红球也没有

白球可以在3个盒子中任选

2个红球分别放入甲、丙两个盒子

$$\frac{C_3^1 \times 2^2}{3^3} = \frac{4}{9}$$

将3只球随机放入3个盒子中，总方法数为3^3

11.2.5 词汇：至少和至多

【例1】某公司有9名工程师，6男3女，从中任意抽调4人组成攻关小组，求恰好包含1个女生的概率。

$P=C_3^1C_6^3/C_9^4$

【例2】某公司有9名工程师，6男3女，从中任意抽调4人组成攻关小组，求至少包含1个女生的概率。

至少包含一名女生（≥ 1名） 对立事件：< 1名，一个女生也没有，即全为男生

$P=1-C_6^4/C_9^4$

【例3】某公司有9名工程师，6男3女，从中任意抽调4人组成攻关小组，至少包含2名女生的概率是 $\frac{51}{126}$

至少包含2名女生（≥ 2名），即2或3名女生

2女2男：$\frac{C_3^2\cdot C_6^2}{C_9^4}=\frac{45}{126}$

3女1男：$\frac{C_3^3\cdot C_6^1}{C_9^4}=\frac{6}{126}$

$P=\frac{51}{126}$

对立事件：< 2名，即没有女生或只有1名女生

0女4男：$\frac{C_6^4}{C_9^4}=\frac{15}{126}$

1女3男：$\frac{C_3^1\cdot C_6^3}{C_9^4}=\frac{60}{126}$

$P=1-\frac{75}{126}=\frac{51}{126}$

11.2.5 词汇：至少和至多

【例】甲乙二人参加普法知识大赛，一共有10道不同的题目，其中选择题6道，判断题4道，甲乙二人依次各抽一题，则至少有一个抽到选择题的概率是 $\frac{13}{15}$

甲乙两人至少有一个抽到选择题（≥ 1个人）

对立事件：< 1个人，没有人抽到选择题，即甲乙两人都抽到判断题

$$\frac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^1C_9^1}=\frac{4\times 3}{10\times 9}=\frac{2}{15}$$

$$P=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$$

11.2.5 词汇：至少和至多

独立事件同时发生的概率=每个发生的概率相乘

【2010.10.15】在10道备选试题中，甲能答对8道题，乙能答对6道题；若某次考试从这10道备选题中随机抽出3道作为考题，至少答对2题才算合格，则甲乙两人考试都合格的概率是（ A ）

(A) $\frac{28}{45}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{14}{15}$ (D) $\frac{26}{45}$ (E) $\frac{8}{15}$

甲至少对2题（≥ 2题） 对立事件： 答对< 2题，即对1错2，对0错3

甲最多错1道，合格概率$=1-\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}$

乙合格概率$=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}+\frac{C_6^2\cdot C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{2}{3}$

甲、乙都合格的概率$=P_{甲合格}\times P_{乙合格}$

$P=\frac{14}{15}\times\frac{2}{3}=\frac{28}{45}$

甲、乙都不合格的概率 $=P_{甲不合格}\times P_{乙不合格}$

甲、乙至少一个人合格概率 $=1-P_{甲不合格}\times P_{乙不合格}$

甲、乙至少一个人不合格概率 $=1-P_{甲合格}\times P_{乙合格}$

11.3 独立事件

- 概率基础知识
  - 随机试验、基本事件、样本空间
  - 独立事件、互斥事件、对立事件
- 古典概型
  - ☆【1】$P(A)=$满足要求方法数/所有方法数
  - ☆【2】抽奖、尝试密码
  - ☆【3】不放回取球
  - 【4】取出后放回、分房模型
  - ☆【5】词汇：至少有1个，至少有2个，至多有1个
- 独立事件
  - ☆【1】概率乘法公式
  - 【2】先分情况讨论，然后使用概率乘法公式
  - ☆【3】伯努利概型
  - ☆【4】可确定次数的伯努利概型扩展
  - 【5】不可确定次数伯努利概型扩展

11.3 独立事件

独立事件：各个事件在发生的时候，不会产生相互影响。

相互独立事件：概率乘法公式

$P(AB)=P(A)P(B)$

n个相互独立事件均发生的概率，为每个事件发生的概率的乘积

事件A_1，A_2，⋯，A_n相互独立，$P_{均发生}=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$

事件A_1，A_2，⋯，A_n相互独立，则$\overline{A_1}$，$\overline{A_2}$，⋯，$\overline{A_n}$也相互独立

相互独立VS两两独立

11.3.1 概率乘法公式

【例】设甲、乙两射手独立地对同一目标射击一次，他们的命中率分别是0.7与0.8，求：

（1）两人同时击中目标的概率 0.56

（2）恰好有一人击中目标的概率 0.38

（3）至少有一人击中目标的概率 0.94

$P_{甲击中}=0.7\quad P_{乙击中}=0.8$

（1）同时击中：$P_1=P_{甲击中}P_{乙击中}=0.7\times0.8=0.56$

（2）恰有一人击中：$P_2=P_{甲击中}P_{乙未击中}+P_{甲未击中}P_{乙击中}$

$=0.7\times(1-0.8)+(1-0.7)0.8=0.38$

（3）至少一人击中（≥ 1人），对立事件：< 1人，即没有人击中

$P_3=1-P_{全未击中}=1-P_{甲未击中}\cdot P_{乙未击中}=1-(1-0.7)(1-0.8)=0.94$

11.3 独立事件

概率基础知识
- 随机试验、基本事件、样本空间
- 独立事件、互斥事件、对立事件

古典概型
- ☆【1】$P(A)=$满足要求方法数/所有方法数
- ☆【2】抽奖、尝试密码
- ☆【3】不放回取球
- 【4】取出后放回、分房模型
- ☆【5】词汇：至少有1个，至少有2个，至多有1个

独立事件
- ☆【1】概率乘法公式
- 【2】先分情况讨论，然后使用概率乘法公式
- ☆【3】伯努利概型
- ☆【4】可确定次数的伯努利概型扩展
- 【5】不可确定次数伯努利概型扩展

11.3.2 分情况讨论

【1999.1.9】甲盒内有红球4只，黑球2只，白球2只，乙盒内有红球5只，黑球3只，丙盒内有黑球2只，白球2只，从这三个盒子的任意一个中任取一只球，它是红球的概率是（ D ）

（A）0.5625　（B）0.5　（C）0.45　（D）0.375　（E）0.225

甲	4红2黑2白	$\frac{1}{3}\times\frac{4}{4+2+2}$	$P=P_1+P_2+P_3=0.375$
乙	5红3黑	$\frac{1}{3}\times\frac{5}{5+3}$	
丙	2黑2白	$\frac{1}{3}\times\frac{0}{4}$	

分情况讨论：当完成事情需要2步，第1步有好几种可能

并且第1步所选的不同的结果会令第2步面临不同情况时

11.3.2 分情况讨论

【2015.14】某次网球比赛的四强对阵为甲对乙，丙对丁，两场比赛的胜者将争夺冠军，选手之间相互获胜的概率如下：则甲获得冠军的概率为（ A ）

(A) 0.165　(B) 0.245　(C) 0.275　(D) 0.315　(E) 0.330

	甲	乙	丙	丁
甲获胜概率		0.3	0.3	0.8
乙获胜概率	0.7		0.6	0.3
丙获胜概率	0.7	0.4		0.5
丁获胜概率	0.2	0.7	0.5	

甲VS乙　丙VS丁

甲胜

甲VS丙丁胜方

(1) 甲胜乙，丙胜丁，甲胜丙

$P_1 = 0.3 \times 0.5 \times 0.3$

(2) 甲胜乙，丁胜丙，甲胜丁

$P_2 = 0.3 \times 0.5 \times 0.8$

$P = P_1 + P_2 = 0.045 + 0.12 = 0.165$

11.3.2 分情况讨论

【2001.1.14】甲文具盒内有2支蓝色和3支黑色笔，乙文具盒内也有2支蓝色和3支黑色笔，现从甲文具盒中任取2支笔放入乙文具盒，然后再从乙文具盒中任取2支笔，则最后取出的2支笔都是黑色笔的概率是（ A ）

(A) $\frac{23}{70}$　(B) $\frac{27}{70}$　(C) $\frac{29}{70}$　(D) $\frac{3}{7}$

甲 2蓝3黑

乙 2蓝3黑

(1) 2黑0蓝　$\frac{C_3^2}{C_5^2}\times\frac{C_5^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$

(2) 1黑1蓝　$\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_5^2}\times\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{6}{35}$

(3) 0黑2蓝　$\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{70}$

$P=\frac{10}{70}+\frac{12}{70}+\frac{1}{70}=\frac{23}{70}$

11.3.2 分情况讨论

【例】甲、乙两人进行射击比赛，在议论比赛中，甲、乙各射击一发子弹。根据以往资料知，甲击中8环、9环、10环的概率分别为0.6，0.3，0.1，乙击中8环、9环、10环的概率分别为0.4，0.4，0.2。设甲、乙的射击相互独立。

(1) 在一轮比赛中甲击中的环数多于乙击中环数的概率为 0.2

(2) 在三轮独立的比赛中，至少有两轮甲击中的环数多于乙击中环数的概率为______

	8环	9环	10环
甲击中概率	0.6	0.3	0.1
乙击中概率	0.4	0.4	0.2

甲	乙
甲9环	乙8环
甲10环	乙9环 乙8环

$P = 0.6 \times 0 + 0.3 \times 0.4 + 0.1 \times (0.4 + 0.4) = 0.2$

11.3.2 分情况讨论

【例】甲、乙两人进行射击比赛，在一轮比赛中，甲、乙各射击一发子弹。根据以往资料知，甲击中8环、9环、10环的概率分别为0.6，0.3，0.1，乙击中8环、9环、10环的概率分别为0.4，0.4，0.2。设甲、乙的射击相互独立。

(1) 在一轮比赛中甲击中的环数多于乙击中环数的概率为 0.2

(2) 在三轮独立的比赛中，至少有两轮甲击中的环数多于乙击中环数的概率为 0.104

	8环	9环	10环
甲击中概率	0.6	0.3	0.1
乙击中概率	0.4	0.4	0.2

恰有2轮甲 > 乙　$P_{\text{恰有2轮}} = C_3^2 \cdot 0.2^2 \cdot (1-0.2) = 0.096$

恰有3轮甲 > 乙　$P_{\text{恰有3轮}} = 0.2^3 = 0.008$

$P = 0.096 + 0.008 = 0.104$

11.3 独立事件

概率基础知识
- 随机试验、基本事件、样本空间
- 独立事件、互斥事件、对立事件

古典概型
- ☆【1】$P(A)=$ 满足要求方法数/所有方法数
- ☆【2】抽奖、尝试密码
- ☆【3】不放回取球
- 【4】取出后放回、分房模型
- ☆【5】词汇：至少有1个，至少有2个，至多有1个

独立事件
- ☆【1】概率乘法公式
- 【2】先分情况讨论，然后使用概率乘法公式
- ☆【3】伯努利概型
- ☆【4】可确定次数的伯努利概型扩展
- 【5】不可确定次数伯努利概型扩展

11.3.3 伯努利概型

进行n次试验，如果每次试验的条件都相同，且各次试验相互独立（即每次试验的结果都不受其它各次试验结果发生情况的影响）则称为n次独立重复试验。

【伯努利公式】

如果在一次试验中，某事件发生的概率是p，那么在n次独立重复试验中这件事恰好发生k次的概率，即$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$ 其中$q=1-p$

二项式$(p+q)^n$展开式的第$k+1$项
二项分布/伯努利概型

特征：①每次试验条件都是一样的，是重复性的试验序列；

②每次试验相互独立，试验结果互不影响，即各次试验中发生（不发生）的概率保持不变；

③每次试验的结果只有某件事发生（A）与不发生（$\bar{A}$）两种

11.3.3 伯努利概型

如果在一次试验中，某事件发生的概率是p，那么在n次独立重复试验中这件事恰好发生k次的概率，即$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$ 其中$q=1-p$

（1）$k=n$，即在n重伯努利试验中事件A全部发生的概率：

$$P_n(n)=C_n^n p^n q^0=p^n$$

（2）$k=0$，即在n重伯努利试验中事件A没有发生的概率：

$$P_n(0)=C_n^0 p^0 q^n=q^n$$

将一枚质地均匀骰子投掷10次，观察6点出现次数——10重伯努利试验

在装有8个正品、2个次品的箱子中，有放回地取5次（每次1个）产品，观察取得次品次数——5重伯努利试验

向目标独立地射击n次，每次击中概率为p，观察击中目标次数——n重伯努利试验

11.3.3 伯努利概型

【例】一位出租司机从饭店到火车站途中会经过6个十字路口，假设他在各十字路口遇到红灯这一事件是相互独立的，并且概率均为$\frac{1}{3}$，那么这位司机遇到红灯前，已经通过了两个十字路口的概率为（ C ）

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{4}{27}$ (D) $\frac{1}{27}$ (E) $\frac{4}{25}$

第三个十字路口恰遇到红灯

$$P=\underbrace{\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{\text{已通过2个十字路口，前两个十字路口未遇到红灯}}\times\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{第三个十字路口恰遇到红灯}}=\frac{4}{27}$$

已通过2个十字路口
前两个十字路口未遇到红灯

11.3.3 伯努利概型

【例】若王先生驾车从家到单位必须经过三个有红绿灯的十字路口，则他没有遇到红灯的概率为0.125。（每个路口遇见红灯的事件相互独立。）（ A ）

（1）他在每一个路口遇到红灯的概率都是0.5

（2）他在每一个路口遇到红灯的概率都是0.6

$$(1-0.5)(1-0.5)(1-0.5)=0.125$$

【2007.10】若王先生驾车从家到单位必须经过三个有红绿灯的十字路口，则他没有遇到红灯的概率为0.125（ C ）

（1）他在每一个路口遇到红灯的概率都是0.5

（2）他在每一个路口遇到红灯的事件相互独立 必选

$$(1-0.5)(1-0.5)(1-0.5)=0.125$$

11.3.3 伯努利概型

【2008.10】张三以卧姿射击10次，命中靶子7次的概率为$\frac{15}{128}$（ B ）

（1）张三以卧姿打靶的命中率是0.2　　（2）张三以卧姿打靶的命中率是0.5

（1） $P_1=C_{10}^{7}(0.2)^7\cdot(1-0.2)^3\neq\frac{15}{128}$

（2） $P_2=C_{10}^{7}(0.5)^7\cdot(1-0.5)^3=\frac{15}{128}$

11.3 独立事件

概率基础知识
- 随机试验、基本事件、样本空间
- 独立事件、互斥事件、对立事件

古典概型
- ☆【1】$P(A)=$满足要求方法数/所有方法数
- ☆【2】抽奖、尝试密码
- ☆【3】不放回取球
- 【4】取出后放回、分房模型
- ☆【5】词汇：至少有1个，至少有2个，至多有1个

独立事件
- ☆【1】概率乘法公式
- 【2】先分情况讨论，然后使用概率乘法公式
- ☆【3】伯努利概型
- ☆【4】可确定次数的伯努利概型扩展
- 【5】不可确定次数伯努利概型扩展

11.3.4 伯努利概型扩展-可确定次数

1. 明确给出前n次试验成功与否的情况，问概率为多少。

   扔一枚不均匀的硬币，正面向上的概率为p，问前五次恰好3正2反的概率为多少?

   五重伯努利试验，$P_5(3)=C_5^3p^3(1-p)^2$

---

2. 明确给出结束条件，问恰在第几次结束的概率。

   扔一枚不均匀的硬币，正面向上的概率为p，如果正面数量超过反面次数，则视为成功，求恰好在第5次成功的概率。

   反 正 反 正
   反 反 正 正　正　$2(1-p)^2p^3$

11.3.4 伯努利概型扩展-可确定次数

3. 明确给出结束条件，求问多少次内结束的概率。

扔一枚不均匀的硬币，正面向上的概率为p，如果正面数量超过反面次数，则视为成功，求在5次内成功的概率。

第1次成功	正	p
第3次成功	反正正	$(1-p)p^2$
第5次成功	反正反正正	$(1-p)^2p^3$
	反反正正正	$(1-p)^2p^3$

11.3.4 伯努利概型扩展-可确定次数

【1999.1.11】进行一系列独立的试验，每次试验成功的概率为p，则在成功2次之前已经失败3次的概率为（ A ）

(A) $4p^2(1-p)^3$ (B) $4p(1-p)^3$ (C) $10p^2(1-p)^3$ (D) $p^2(1-p)^3$ (E) $(1-p)^3$

① ② ③ ④ ⑤

$$\underbrace{p}_{\text{第5次成功}}\times \overbrace{C_4^3(1-p)^3}^{\text{前4次选3次失败}}\times \underbrace{p}_{\text{1次成功}}$$

$$\underbrace{p}_{\text{第5次成功}}\times \overbrace{C_4^1 p}^{\text{前4次选1次成功}}\times \underbrace{(1-p)^3}_{\text{3次失败}}$$

11.3.4 伯努利概型扩展-可确定次数

【扩展】进行一系列独立的试验，每次试验成功的概率为p，则在失败3次之前已经成功5次的概率为（ A ）

(A) $21p^5(1-p)^3$ (B) $21p(1-p)^3$ (C) $10p^2(1-p)^3$ (D) $p^2(1-p)^3$ (E) $(1-p)^3$

$$\underbrace{(1-p)}_{\text{第8次失败}}\times \overbrace{C_7^2(1-p)^2}^{\text{前7次选2次失败}}\times \underbrace{p^5}_{\text{5次成功}}$$

$$\underbrace{(1-p)}_{\text{第8次失败}}\times \overbrace{C_7^5p^5}^{\text{前7次选5次成功}}\times \underbrace{(1-p)^2}_{\text{2次失败}}$$

- 一共进行了几次试验（几局）
- 最后一次试验是否成功（最后一局输赢）
- 前面几次试验成败（几局输赢）顺序有无特殊要求

11.3.4 伯努利概型扩展-可确定次数

【2008.1扩展】某乒乓球男子单打决赛在甲乙两选手间进行比赛用7局4胜制。已知每局比赛甲选手战胜乙选手的概率为0.7，则甲选手以3：4 输给乙的概率为 $20\times 0.7^3\times 0.3^4$

- 一共进行了几次试验（几局） 7局
- 最后一次试验是否成功（最后一局输赢）最后一局甲失败
- 前面几次试验成败（几局输赢）顺序有无特殊要求
  前6局中甲获胜3次、乙获胜3次，无顺序要求

$$\underbrace{0.3}_{\text{最后一局甲失败}}\times \overbrace{C_6^3\times 0.7^3}^{\text{前6次选3次甲获胜}}\times \underbrace{0.3^3}_{\text{3次乙获胜}}$$

11.3.4 伯努利概型扩展-可确定次数

【2008.1】某乒乓球男子单打决赛在甲乙两选手间进行比赛用7局4胜制。已知每局比赛甲选手战胜乙选手的概率为0.7，则甲选手以4：1战胜乙的概率为（ A ）

(A) 0.84×0.7^3 (B) 0.7×0.7^3 (C) 0.3×0.7^3 (D) 0.9×0.7^3 (E) 以上都不对

- 一共进行了几次试验（几局） 5局
- 最后一次试验是否成功（最后一局输赢）最后一局甲获胜
- 前面几次试验成败（几局输赢）顺序有无特殊要求

前4局中甲获胜3次、乙获胜1次，无顺序要求

$$\underbrace{0.7}_{\text{最后一局甲获胜}} \times \overbrace{C_4^3 \times 0.7^3}^{\text{前4次选3次甲获胜}} \times \underbrace{0.3}_{\text{1次乙获胜}}$$

11.3.4 伯努利概型扩展-可确定次数

【2014.1.9】掷一枚均匀的硬币若干次，当正面向上次数大于反面向上次数时停止，则在4次之内停止的概率为（ C ）

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{3}{16}$ (E) $\frac{5}{16}$

第1次	第2次	第3次	第4次
正			
反	正	正	

$P_1(\text{掷1次停止}) = P_1(\text{正}) = \frac{1}{2}$

$P_2(\text{掷3次停止}) = P_2(\text{反正正}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

11.3.4 伯努利概型扩展-可确定次数

【2014.1扩展】掷一枚不均匀的硬币若干次，正面朝上的概率为p，当正面向上次数大于反面向上次数时停止，恰好第5次停止的概率为 $2(1-p)^2p^3$

第1次	第2次	第3次	第4次	第5次
反	正	反	正	正
反	反	正	正	正

$$\overbrace{2}^{\text{两种顺序}} \times \underbrace{p}_{\text{第5次为正}} \times \overbrace{(1-p)^2 \times p^2}^{\text{两正两反}}$$

【思考】问前五次恰好3正2反的概率为多少？

$P_5(3) = C_5^3 p^3 (1-p)^2$

11.3.4 伯努利概型扩展-可确定次数

【2014.1扩展】掷一枚不均匀的硬币若干次，正面朝上的概率为p，当有3次正面朝上的时候停止，恰好第5次停止的概率为 $6p^3(1-p)^2$

- 一共进行了几次试验（几局） 5次
- 最后一次试验是否成功（最后一局输赢）最后一次正面
- 前面几次试验成败（几局输赢）顺序有无特殊要求

前4次中正面朝上2次、反面朝上2次，无顺序要求

$$\underbrace{p}_{\text{第5次正}} \times \overbrace{C_4^2 \times p^2}^{\text{前4次选2次正}} \times \underbrace{(1-p)^2}_{\text{剩下2次反}}$$

11.3 独立事件

概率基础知识
- 随机试验、基本事件、样本空间
- 独立事件、互斥事件、对立事件

古典概型
- ☆【1】$P(A)=$满足要求方法数/所有方法数
- ☆【2】抽奖、尝试密码
- ☆【3】不放回取球
- 【4】取出后放回、分房模型
- ☆【5】词汇：至少有1个，至多有2个，至多有1个

独立事件
- ☆【1】概率乘法公式
- 【2】先分情况讨论，然后使用概率乘法公式
- ☆【3】伯努利概型
- ☆【4】可确定次数的伯努利概型扩展
- 【5】不可确定次数伯努利概型扩展

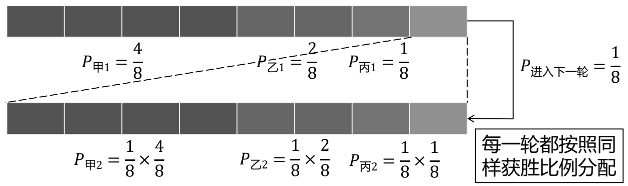
11.3.5 伯努利概型扩展-不可确定次数

【2003.10.6】甲、乙、丙依次轮流投掷一枚均匀的硬币，若先投出正面者为胜，则甲、乙、丙获胜的概率分别为（　）

A. $\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$　　B. $\frac{4}{8},\frac{2}{8},\frac{1}{8}$　　C. $\frac{4}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}$　　D. $\frac{4}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{7}$　　E. 以上结论均不正确

【第一步】求出第一轮3人分别获胜的概率

①甲获胜概率：$\frac{1}{2}$　②乙获胜概率：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$　③丙获胜概率：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$



11.3.5 伯努利概型扩展-不可确定次数

【2003.10.6】甲、乙、丙依次轮流投掷一枚均匀的硬币，若先投出正面者为胜，则甲、乙、丙获胜的概率分别为（ D ）

A. $\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$　　B. $\frac{4}{8},\frac{2}{8},\frac{1}{8}$　　C. $\frac{4}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}$　　D. $\frac{4}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{7}$　　E. 以上结论均不正确

【第一步】求出第一轮3人分别投出正面获胜的概率

①甲正面概率：$\frac{1}{2}$　②乙正面概率：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$　③丙正面概率：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

一轮中甲乙丙投出正面获胜的概率，$P_{甲1}:P_{乙1}:P_{丙1}=\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}=4:2:1$

【第二步】按比例设份数

总量设为1，一共分为7份，每份1/7；甲占4份，乙占2份，丙占1份

整个投硬币游戏中甲、乙、丙获胜的概率分别为：$\frac{4}{7}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{1}{7}$

【技巧】三个人获胜概率相加等于1，并且比为4:2:1，故D。

11.3.5 伯努利概型扩展-不可确定次数

【例】甲、乙、丙依次玩套圈游戏，第一个套中的人就算赢。其中甲套中概率为$\frac{1}{2}$，乙套中概率为$\frac{2}{3}$，丙套中概率为$\frac{3}{5}$。那么甲、乙、丙分别获胜的概率为多少？$P_甲=\frac{15}{28}$，$P_乙=\frac{10}{28}$，$P_丙=\frac{3}{28}$

【第一步】求出第一轮3人分别套中的概率

①甲套中概率$\frac{1}{2}$　②乙套中概率$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$　③丙获胜概率：$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$

一轮中甲乙丙分别套中的概率，$P_{甲1}:P_{乙1}:P_{丙1}=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{10}=15:10:3$

【第二步】按比例设份数

总量设为1，一共分为28份，每份1/28；甲占15份，乙占10份，丙占3份

$P_甲=\frac{15}{28}$，$P_乙=\frac{10}{28}$，$P_丙=\frac{3}{28}$

11.3.5 伯努利概型扩展-不可确定次数

【例】甲、乙、丙依次玩套圈游戏，第一个套中的人就算赢。其中甲套中概率为$\frac{1}{4}$，乙套中概率为$\frac{1}{3}$，丙套中概率为$\frac{1}{2}$。那么甲、乙、丙分别获胜的概率为多少？$P_{甲}=P_{乙}=P_{丙}=\frac{1}{3}$

【第一步】求出第一轮3人分别套中的概率

①甲获胜概率：$\frac{1}{4}$　②乙套中概率：$\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$　③丙套中概率：$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

一轮中甲乙丙分别套中的概率，$P_{甲1}:P_{乙1}:P_{丙1}=\frac{1}{4}:\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=1:1:1$

【第二步】按比例设份数

总量设为1，一共分为3份，每份1/3；甲占1份，乙占1份，丙占1份

$P_{甲}=P_{乙}=P_{丙}=\frac{1}{3}$

11 概率

- 概率基础知识
  - 随机试验、基本事件、样本空间
  - 独立事件、互斥事件、对立事件
- 古典概型
  - ☆【1】$P(A)=$满足要求方法数/所有方法数
  - ☆【2】抽奖、尝试密码
  - ☆【3】不放回取球
  - 【4】取出后放回、分房模型
  - ☆【5】词汇：至少有1个，至少有2个，至多有1个
- 独立事件
  - ☆【1】概率乘法公式
  - 【2】先分情况讨论，然后使用概率乘法公式
  - ☆【3】伯努利概型
  - ☆【4】可确定次数的伯努利概型扩展
  - 【5】不可确定次数伯努利概型扩展

THANK YOU FOR WATCHING