数学系统精讲

数列

MBA大师——董璞

本章概况

1. 每年2-3题
2. 知识点汇合
3. 技巧性强
4. 等差、等比数列性质和应用

- 等差/等比概念、性质、通项公式、前n项和公式等
- a_n和S_n之间相互推导计算
- 简单递推公式
- 数列思维的应用题

数列基础知识

【数列】依一定次序排成的一列数

有穷数列 1，2，3，4，5，6，7

无穷数列 1，2，3，4，5，6，7，…

单调性

【递增数列】第二项起，每一项都比前一项大。

7，6，5，4，3，2，1，…

【递减数列】第二项起，每一项都比前一项小。

1，-1，1，-1，1，-1，1，-1，… 公比为-1的等比数列

【摆动数列】从第二项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项。

2，2，2，2，2，2，2，…

【常数列】各项均为同一个常数 特值法

数列基础知识

【数列】依一定次序排成的一列数 $\{a_n\}$

1， 1， 2， 3， 5， 8， 13，……

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，……

【通项】数列的第n项a_n与其项数n之间的关系

【前n项和】$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

数列下标的概念

数列基础知识•等差数列

【等差数列】如果一个数列从第二项起，每一项减去它的前一项所得的差都等于同一常数，$a_{n+1}-a_n=d$，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差d。

2，4，6，8，10，……

$n+1$，$n+4$，$n+7$，……

等差数列通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$

若等差数列公差$d=0$，数列$\{a_n\}$为常数列

等差数列前n项和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

数列基础知识•等比数列

【等比数列】如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一常数，$a_{n+1}/a_n=q$，那么这个数列就叫做等比数列，这个常数就叫做等比数列的公比q（$q\neq 0$）

2，4，8，16，32，……

等比数列每一项a_n和公比q均不为0

$n+1$，$(n+1)^2$，$(n+1)^3$，……

等比数列通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$ （$q\neq 0$）

等比数列前n项和公式（$q\neq 0$）：

等比数列求和时：
若不能确定q取值
应分$q=1$和$q\neq 1$两种情况讨论

（1）当$q\neq 1$时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

（2）当$q=1$时，$S_n=na_1$（若等比数列公比$q=1$，数列$\{a_n\}$为常数列）

当$n\to\infty$，且$0<|q|<1$时，$S=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}$

数列出题趋势及考点分布

	基础词汇	等差数列		等比数列		其他数列
	a，b，c是等差/比数列	套路一	进阶词汇	等比求和	结合等差	
2018	19	17		7		
2017		11				
2016						24
2015		20	23			21
2014	18、21					
2013		13				25
2012				8	18	
2011	16	7	25			

数列出题套路

等差数列

★【套路一】求数列某项的值或者某几项的和 词汇1 词汇2 词汇3

★【进阶词汇】
1.两项之积在分母 $\sum\frac{1}{a_na_{n+1}}$?
2.等差数列过0点的项（$S_n\leq S_{具体数字}$）
3.等差数列片段和公式（$S_5=2,S_{10}=6$）

等比数列

秒杀技巧

其他数列

等差数列•套路一

求数列具体项的值或者某几项的和

【等差数列词汇1】a，b，c成等差数列$\Leftrightarrow 2b=a+c$

【等比数列词汇1】a，b，c成等比数列$\Leftrightarrow b^2=ac\ (b\neq 0)$

可以被用在任何知识点

等同于给出一个关于a，b，c的算式条件

【2010.10.21】一元二次方程$ax^2+bx+c=0$无实根。（ A ）

（1）a,b,c成等比数列，且$b\neq 0$.

（2）a,b,c成等差数列.

无实根：$\Delta=b^2-4ca<0$

条件（1）$b^2=ac\ (b\neq 0)$

条件（2）$2b=a+c$

等差数列•套路一

求数列具体项的值或者某几项的和

题干出现数列某几项的和【等差数列词汇2 】考察数列的下标：下标和相等的两项之和相等

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$

数列重要数学思维

$a_1+a_9\ =a_2+a_8=a_3+a_7$

$a_1+a_7\ =a_2+a_6=a_3+a_5=2a_4$

$a_2-a_5+a_8=$

等差数列•套路一

求数列具体项的值或者某几项的和

题干出现数列某几项的和【等差数列词汇2 】考察数列的下标：下标和相等的两项之和相等

【2013.1.13】已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，若a_2与a_{10}是方程$x^2-10x-9=0$的两个根，则

$a_5+a_7=$（ D ）

A. -10　　B. -9　　C. 9　　D. 10　　E. 12

$a_2+a_{10}=a_5+a_7$

【2010.10.13】等比数列 $\{a_n\}$ 中，a_3、a_8是方程 $3x^2+2x-18=0$ 的两个根，则

$a_4a_7=$（ C ）

A. -9　　B. -8　　C. -6　　D. 6　　E. 8

$a_3a_8=a_4a_7$

等差数列•套路一

求数列具体项的值或者某几项的和

题干出现数列某几项的和【等差数列词汇2 】考察数列的下标：下标和相等的两项之和相等

$a_1+a_6=a_3+a_4$　　　$a_1\quad a_2\quad a_4\quad a_4\quad a_5\quad a_6$

$a_1+a_7=2a_4$　　　$a_1\quad a_2\quad a_4\quad a_4\quad a_5\quad a_6\quad a_7$

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=\begin{cases}2a_{\frac{n+1}{2}} & \text{下标和}n+1\text{为偶数}\\ a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1} & \text{下标和}n+1\text{为奇数}\end{cases}$$

【扩展一】下标和为偶数，可以知道中间项

下标和为奇数，可以知道中间两项的和

等差数列•套路一 求数列具体项的值或者某几项的和

【等差数列词汇2 】下标和相等的两项之和相等

【扩展一】两项下标和为偶数，可以知道中间项；
两项下标和为奇数，可以知道它们中间两项的和。

$S_1=a_1$ $\quad S_3=a_1+a_2+a_3=3\,a_2$ $\quad S_7=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=7a_4$

$S_8=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=4(a_1+a_8)=\cdots=4(a_4+a_5)$

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\begin{cases} na_{\frac{n+1}{2}} & \text{下标和}n+1\text{为偶数/奇数个项的和} \\ \frac{n}{2}\left(a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}\right) & \text{下标和}n+1\text{为奇数/偶数个项的和} \end{cases}$$

【扩展二】已知奇数个项的中间项，可求出$S_n=na_{\frac{n+1}{2}}$；反之亦然

已知偶数个项的中间两项之和，可求出$S_n=\frac{n}{2}\left(a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}\right)$；反之亦然

等差数列•套路一

【2014.1.1.7】已知$a_8=11$和$a_{13}=21$，求S_{15}和S_{20}

方法1 $S_{15}=\dfrac{a_1+a_{15}}{2}\times 15$ $\qquad S_{20}=\dfrac{a_1+a_{20}}{2}\times 20$

方法2 $S_{15}=a_1+(a_1+d)+\cdots+(a_1+14d)=15a_1+\dfrac{14\times 15}{2}d$

$S_{20}=a_1+(a_1+d)+\cdots+(a_1+19d)=20a_1+\dfrac{19\times 20}{2}d$

$$\begin{cases} a_8=a+7d=11 \\ a_{13}=a_1+12d=21 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_1=-3 \\ d=2 \end{cases}$$

等差数列•套路一

【2014.1.1.7】已知$a_8=11$和$a_{13}=21$，求S_{15}和S_{20}

方法1	$S_{15}=\dfrac{a_1+a_{15}}{2}\times 15$	$S_{20}=\dfrac{a_1+a_{20}}{2}\times 20$
方法2	$S_{15}=15a_1+\dfrac{14\times 15}{2}d$	$S_{20}=20a_1+\dfrac{19\times 20}{2}d$

方法3 $S_{15}=15a_8=15\times 11=165$

$S_{20}=10(a_{10}+a_{11})=10(a_{13}+a_8)=10(11+21)=320$

等差数列•套路一

题干出现数列某几项的的和：

【词汇2】 下标和相等的两项之和相等

【词汇3】通过词汇2无法解决的问题→用a_1和d表示出数列的每一项（通项公式）

题干特征：往往没有给出a_1/下标数字不对称/项的系数不是1

$3a_3+2a_7=3(a_1+2d)+2(a_1+6d)=5a_1+18d$

$a_1+a_2+\cdots+a_{14}+a_{15}=15a_8=15a_1+105d$

$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=3(a_5+a_6)=3\times(2a_1+9d)=6a_1+27d$

$$\begin{aligned}3a_4+5a_5+7a_6+5a_7+3a_8&=3(a_4+a_8)+5(a_5+a_7)+7a_6\\&=6a_6+10a_6+7a_6=23a_6=23a_1+115d\end{aligned}$$

等差数列•套路一

【2014.1.1.7】已知$\{a_n\}$为等差数列，且$a_2-a_5+a_8=9$，则$a_1+a_2+\cdots a_9=$（D）

(A) 27　(B) 45　(C) 54　(D) 81　(E) 162

下标和相等的两项之和相等　已知奇数个项的中间项，可求出S_n

$a_2-a_5+a_8=a_2+a_8-a_5=2a_5-a_5=a_5=9$

$a_1+a_2+\cdots a_9=9a_5=81$

另解：常数列特值法

令$a_2=a_5=a_8=t$，则有$t-t+t=9$，$t=9$

$a_1+a_2+\cdots a_9=9t=81$

等差数列•套路一

【例】在等差数列$\{b_n\}$中，$b_1-b_4-b_8-b_{12}+b_{15}=2$，则$b_3+b_{13}=$（$D$）

(A) 16　(B) 4　(C) -16　(D) -4　(E) -2

$-b_4-b_{12}=-(b_4+b_{12})=-2b_8$

$b_1-b_4-b_8-b_{12}+b_{15}=2$　得：$2b_8-2b_8-b_8=-b_8=2$

$b_1+b_{15}=2b_8$

$b_3+b_{13}=2b_8=-4$

另解：常数列特值法（令$\{b_n\}$为公差$d=0$的常数列）

即$b_1=b_4=b_8=b_{12}=b_{15}=t$，则有$t-t-t-t+t=-t=2$，$t=-2$

$b_3+b_{13}=2t=-4$

等差数列•套路一

【2018.17】设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+\cdots+a_9$的值（B）

(1) 已知a_1的值

(2) 已知a_5的值

已知奇数个项的中间项，可求出S_n　$a_1+a_2+\cdots+a_9=9a_5$

【2018.17 修改】设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+\cdots+a_9$的值（C）

(1) 已知a_1的值

(2) 已知a_6的值　$a_1+a_2+\cdots+a_9=9a_5$

$$\begin{cases}a_1\\ a_6=a_1+5d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1\\ d\end{cases}\quad S_9=9a_1+\frac{8\times 9}{2}d$$

等差数列•套路一

【例】设$\{a_n\}$是等差数列，若$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=48$，求$S_{12}+3(a_6+a_7)$的值（B）

A：192　B：216　C：244　D：300　E：312

$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=2(a_6+a_7)=48$

$S_{12}=6(a_6+a_7)$

$S_{12}+3(a_6+a_7)=9(a_6+a_7)=216$

【改】设$\{a_n\}$是等差数列，若$a_2=3$，$a_4=7$，求$S_{12}+3(a_6+a_7)$的值

等差数列•套路一

【2009.10.22】等差数列$\{a_n\}$的前18项和$S_{18}=\frac{19}{2}$.（ A ）

（1）$a_3=\frac{1}{6}$，$a_6=\frac{1}{3}$.

（2）$a_3=\frac{1}{4}$，$a_6=\frac{1}{2}$.　　$S_{18}=(a_1+a_{18})+\cdots+(a_9+a_{10})=9(2a_1+17d)=\frac{19}{2}$

基本方法：等差数列求和公式

条件（1）$\begin{cases}a_3=\frac{1}{6}=a_1+2d\\ a_6=\frac{1}{3}=a_1+5d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\frac{1}{18}\\ d=\frac{1}{18}\end{cases}\Rightarrow S_{18}=18a_1+\frac{17\times18}{2}d=1+\frac{17}{2}=\frac{19}{2}$

条件（2）$\begin{cases}a_3=\frac{1}{4}=a_1+2d\\ a_6=\frac{1}{2}=a_1+5d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\frac{1}{12}\\ d=\frac{1}{12}\end{cases}\Rightarrow S_{18}=18a_1+\frac{17\times18}{2}d\neq\frac{19}{2}$

等差数列•套路一

【2009.10.23修改】等差数列$\{a_n\}$的前18项和$S_{18}=\frac{19}{2}$（ D ）

（1）$a_3=\frac{1}{6}$，$a_6=\frac{1}{3}$

（2）$a_9=\frac{1}{2}$，$a_{10}=\frac{5}{9}$　　已知偶数个项的中间两项之和，可求出S_n

$S_{18}=(a_1+a_{18})+(a_2+a_{17})\ldots+(a_9+a_{10})$

$=9(a_1+a_{18})=9(a_2+a_{17})=\cdots=9(a_9+a_{10})=\frac{19}{2}$

等差数列•套路一

【2009.1.25】$\{a_n\}$的前n项和S_n与$\{b_n\}$的前n项和T_n满足$S_{19}:T_{19}=3:2$.（ C ）

（1）$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是等差数列.

（2）$a_{10}:b_{10}=3:2$.

【词汇2扩展】已知奇数个项的中间项，可求出S_n等于中间项的n倍

知道S_{19}，可以求出$a_{10}=\frac{1}{19}S_{19}$

知道a_{10}，可以求出$S_{19}=19a_{10}$

$\frac{S_{19}}{T_{19}}=\frac{19a_{10}}{19b_{10}}=\frac{3}{2}$

等差数列•套路一

【例】等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，则$\frac{a_7}{b_7}$的值为（ B ）

A. $-\frac{13}{20}$　　B. $\frac{13}{20}$　　C. $\frac{13}{10}$　　D. $\frac{1}{3}$　　E. 以上都不对

【词汇2扩展】已知奇数个项的中间项，可求出S_n等于中间项的n倍

知道S_{13}，可以求出a_7

知道a_7，可以求出S_{13}

$\frac{a_7}{b_7}=\frac{13a_7}{13b_7}=\frac{S_{13}}{T_{13}}=\frac{2\times13}{3\times13+1}=\frac{26}{40}=\frac{13}{20}$

数列出题套路

- 等差数列
  - ★【套路一】求数列某项的值或者某几项的和
    - 【词汇1】a，b，c成等差数列$\Leftrightarrow 2b=a+c$
    - 【词汇2】下标和相等的两项之和相等
    - 【扩展一】两项下标和为偶数，可以知道中间项；奇数同理
    - 【扩展二】已知奇数个项的中间项，可求出S_n；偶数个同理
    - 【词汇3】通过词汇2无法解决的问题→用a_1和d表示出数列的每一项（通项公式）
  - ★【进阶词汇】
    - 1.等差数列两项之积在分母，求和$\sum\frac{1}{a_n a_{n+1}}$
    - 2.等差数列过0点的项（$S_n\le S_{具体数字}$）
    - 3.等差数列片段和公式（$S_5=2,S_{10}=6$）
- 等比数列
- 秒杀技巧
- 其他数列

等差数列•进阶词汇1

等差数列两项之积在分母→裂项相消

【题干特征】等差数列两项的乘积在分母上$\frac{1}{a_n a_{n+1}}$，求和

裂项相消基础知识回顾

通分$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{5-3}{3\times5}=\frac{2}{15}$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{98\times99}+\frac{1}{99\times100}=\frac{2-1}{1\times2}+\frac{3-2}{2\times3}+\cdots+\frac{99-98}{98\times99}+\frac{100-99}{99\times100}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{97\times99}+\frac{1}{99\times101}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3-1}{1\times3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5-3}{3\times5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7-5}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{101-99}{99\times101}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{97}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$$

等差数列•进阶词汇1

两项之积在分母→裂项相消【题干特征】等差数列两项的乘积在分母上$\frac{1}{a_n a_{n+1}}$，求和

对于等差数列$\{a_n\}$

$$\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{d}\cdot\frac{d}{a_1a_2}=\frac{1}{d}\times\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}=\frac{1}{d}\times(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2})$$

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\cdot\frac{d}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\times\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\times(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$$

$$\frac{1}{a_1a_3}=\frac{1}{2d}\cdot\frac{2d}{a_1a_3}=\frac{1}{2d}\times\frac{a_3-a_1}{a_1a_3}=\frac{1}{2d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3})$$

求：$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{99}a_{100}}=\frac{1}{d}\cdot\frac{d}{a_1a_2}+\frac{1}{d}\cdot\frac{d}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{d}\cdot\frac{d}{a_{99}a_{100}}$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{a_{10}-a_{99}}{a_{99}a_{100}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{99}}-\frac{1}{a_{100}}\right)$$

等差数列•进阶词汇1

【2012.10.5】在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=4$，$a_4=8$。若$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{5}{21}$，则$n=$（ D ）

(A) 16　　(B) 17　　(C) 19　　(D) 20　　(E) 21

由$a_2=4$，$a_4=8$，得：公差$d=2$，首项$a_1=2$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{5}{21}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_1}-\frac{10}{21}=\frac{1}{2}-\frac{10}{21}=\frac{1}{42}$$

$a_{n+1}=a_1+nd=42$，代入公差$d=2$，首项$a_1=2$，得$n=20$

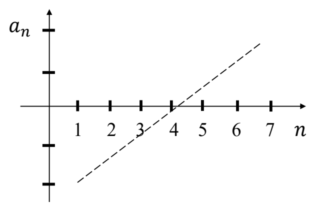
数列出题套路

- 等差数列
  - ★【套路一】求数列某项的值或者某几项的和
    - 【词汇1】a，b，c成等差数列$\Leftrightarrow 2b=a+c$
    - 【词汇2】下标和相等的两项之和相等
    - 【扩展一】两项下标和为偶数，可以知道中间项；奇数同理
    - 【扩展二】已知奇数个项的中间项，可求出S_n；偶数个同理
    - 【词汇3】通过词汇2无法解决的问题→用a_1和d表示出数列的每一项（通项公式）
  - ★【进阶词汇】
    - 1.等差数列两项之积在分母，求和$\sum\frac{1}{a_na_{n+1}}$→裂项相消
    - 2.等差数列过0点的项（$S_n\le S_{具体数字}$）
    - 3.等差数列片段和公式（$S_5=2,S_{10}=6$）
- 等比数列
- 秒杀技巧
- 其他数列

等差数列•数列过0点的项

【题干特征】出现形如$S_n\ge S_{具体数字}$，或求S_n的最大值/最小值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$a_6\ldots$	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}
-10	-7	-4	-1	2	5	$-10+3(n-2)$	$-10+3(n-1)$	$-10+3n$



$a_4<0$，$a_5>0$

a_5即为数列$\{a_n\}$“过零点的项”

从第5项开始，以后的每一项都是大于0。

S_n有最小值。

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$

等差数列•数列过0点的项

【题干特征】出现形如$S_n\ge S_{具体数字}$，或要求S_n的最大值/最小值

-10 -7 -4 -1 2 5 …

$S_1=a_1=-10$
$S_2=-10-7=-17$
$S_3=-10-7-4=-21$
$S_4=-10-7-4-1=-22$
$S_5=-10-7-4-1+2=-20$
$S_6=-10-7-4-1+2+5=-15$
……

$a_1<0$，$d>0$，S_n有最小值
$a_1>0$，$d<0$，S_n有最大值

（若过零点的项$a_n=0$，$S_{n-1}=S_n$，有两个相等的极值）

$S_1>S_2>S_3\ldots S_{n-2}>S_{n-1}<S_n<S_{n+1}$(当$a_n>0$时)

数列中a_n为过0点的项，S_n的最小值，只有一项，为S_{n-1}

$S_1>S_2>S_3\ldots S_{n-2}>S_{n-1}=S_n<S_{n+1}$(当$a_n=0$时)

数列中$a_n=0$，所以$S_n=S_{n-1}+a_n=S_{n-1}$，S_n的最小值，有2项，为S_n和S_{n-1}。

等差数列•数列过0点的项

【2015.23】已知$\{a_n\}$是公差大于零的等差数列，S_n是$\{a_n\}$的前n项和，则$S_n\ge S_{10}$，$n=1$，2⋯.（D）

(1) $a_{10}=0$.

(2) $a_{11}a_{10}<0$.

【题干特征】出现形如$S_n\ge S_{具体数字}$，或求S_n的最大值/最小值

$S_1>S_2>S_3\ldots S_{n-2}>S_{n-1}\le S_n<S_{n+1}$(当$a_n=0$的时候，等号成立)

条件1）$a_{10}=0$，a_{10}是过零点的项，所以$S_n\ge S_{10}$ ($S_9=S_{10}$)，条件（1）充分

条件2）$d>0$，$a_{11}a_{10}<0$，说明 $a_{10}<0,a_{11}>0$， a_{11}是过零点的项。

所以：$S_n>S_{10}$，条件（2）充分

等差数列·数列过0点的项

【例】等差数列$\{a_n\}$中，S_n是前n项之和，则$a_5<0$，$a_6>0$ （C）

1） $S_n \ge S_5$

2） $a_n \ne 0$

【题干特征】出现形如$S_n \ge S_{具体数字}$，或求S_n的最大值/最小值

$$S_n \ge S_5 \begin{cases} S_n > S_5,\quad S_6 > S_5,\quad S_4 > S_5 \\ 存在S_n = S_6 \begin{cases} a_5 = 0,\ S_4 = S_5 \\ a_6 = 0,\ S_5 = S_6 \end{cases} \end{cases}$$

等差数列·数列过0点的项

【例】已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1+a_3+a_5=105$，$a_2+a_4+a_6=99$，若S_n表示$\{a_n\}$的前n项和，使得S_n达到最大值时的$n=$（B）

A.21　　B.20　　C.19　　D.18　　E.22

【题干特征】出现形如$S_n \ge S_{具体数字}$，或求S_n的最大值/最小值

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_3+a_5=3a_3=105,\quad a_3=a_1+2d=35 \\ a_2+a_4+a_6=3a_4=99,\quad a_4=a_1+3d=33 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} d=-2 \\ a_1=39 \end{cases}$$

$\boxed{使S_n达到最大值时的n \to 过0点的项是第几项 \to 从哪一项开始a_n \le 0}$

$a_{20}=a_1+19d=39-38=1>0$

$a_{21}=a_1+20d=39-40=-1<0$

等差数列·数列过0点的项

【例】在等差数列$\{a_n\}$中，S_n表示前n项和，若$a_1=13$，$S_3=S_{11}$，则S_n的最大值是（B）

A.42　　B.49　　C.59　　D.133　　E.不存在

【题干特征】出现形如$S_n \ge S_{具体数字}$，或求S_n的最大值/最小值

$$\left.\begin{array}{l} S_3=3a_2=3a_1+3d \\ S_{11}=11a_6=11a_1+55d \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} d=-2 \\ a_1=13 \end{cases}$$

$\boxed{\begin{array}{l} a_1>0,\ d<0,\ S_n有最大值 \\ a_1<0,\ d>0,\ S_n有最小值 \end{array}}$

$a_7=a_1+6d=1$，$a_8=a_1+7d=-1$

S_n的最大值为，$S_7=\frac{(a_1+a_7)\times 7}{2}=\frac{(13+1)\times 7}{2}=49$

数列出题套路

- 等差数列
  - ★【套路一】求数列某项的值或者某几项的和
    - 【词汇1】a，b，c成等差数列$\Leftrightarrow 2b=a+c$
    - 【词汇2】下标和相等的两项之和相等
    - 【扩展一】两项下标和为偶数，可以知道中间项；奇数同理
    - 【扩展二】已知奇数个项的中间项，可求出S_n；偶数个同理
    - 【词汇3】通过词汇2无法解决的问题→用a_1和d表示出数列的每一项（通项公式）
  - ★【进阶词汇】
    - 1.等差数列两项之积在分母，求和$\sum\frac{1}{a_na_{n+1}}$→裂项相消
    - 2.等差数列过0点的项（$S_n \le S_{具体数字}$）
    - 3.等差数列片段和公式（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）
- 等比数列
- 秒杀技巧
- 其他数列

等差数列•片段和

首项$a_1 = 1$，公差$d = 2$的等差数列

1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，21，23……

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9，a_{10}，a_{11}，a_{12}……

$S_3 = 9$　　$S_6 - S_3 = 27$　　$S_9 - S_6 = 45$　　$S_{12} - S_9 = 63$

$27 - 9 = 18$　　$45 - 28 = 18$　　$63 - 45 = 18$

S_3，$S_6 - S_3$，，$S_9 - S_6$，$S_{12} - S_9$是公差为$9d$的等差数列。

【等差数列片段和定理】如果a_1，a_2，a_3，…，a_n为等差数列，那么这个数列连续的n项之和也是等差数列，并且公差为n^2d

等差数列•片段和

【等差数列片段和定理】如果a_1，a_2，a_3，…，a_n为等差数列，那么这个数列连续的n项之和，即S_n，$S_{2n} - S_n$，$S_{3n} - S_{2n}$……也是等差数列，并且公差为n^2d

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + (a_1+d) + (a_1 + 2d)$

$S_6 - S_3 = a_4 + a_5 + a_6 = (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1+5d)$

片段相减$= (a_4 + a_5 + a_6) - (a_1 + a_2 + a_3) = 3 \times 3d$

$n = 3$时，一共有3项，每一项相差$3d$，共相差$3 \times 3d = n^2d$（$n = 3$）

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1 + (a_1+d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d)$

$S_8 - S_4 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) + (a_1+6d) + (a_1+7d)$

片段相减$= (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 4 \times 4d$

$n = 4$时，一共有4项，每一项相差$4d$，共相差$4 \times 4d = n^2d$（$n = 4$）

等差数列•片段和

【等差数列片段和定理】如果a_1，a_2，a_3，…，a_n为等差数列，那么这个数列连续的n项之和，即S_n，$S_{2n} - S_n$，$S_{3n} - S_{2n}$……也是等差数列，并且公差为n^2d

【例】S_3，$S_6 - S_3$，和$S_9 - S_6$是公差为$3^2d = 9d$的等差数列。

【例】S_4，$S_8 - S_4$，和$S_{12} - S_8$是公差为$4^2d = 16d$的等差数列。

【题干特征】题目中出现S_3，S_6/S_5，S_{10}等具体值

注意

如$n = 3$时 是S_3，$S_6 - S_3$，和$S_9 - S_6$成等差数列 而非S_3，S_6，S_9成等差数列。

等差数列•片段和

【2014.10.7】等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_3 = 3$，$S_6 = 24$，则此等差数列的公差d等于（ B ）

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 1/2　　(E) 1/3

【题干特征】题目中出现S_3，S_6/S_5，S_{10}等具体值

$n = 3$，连续3项之和成等差数列

即S_3，$S_6 - S_3$，和$S_9 - S_6$……为等差数列

公差为$3^2d = 9d$

$(S_6 - S_3) - S_3 = n^2d = 9d = (24 - 3) - 3 = 18$

等差数列·片段和

【1998.10.7】若在等差数列前5项和$S_5=15$，前15项和$S_{15}=120$，则前10项和S_{10}为（D）

(A) 40 (B) 45 (C) 50 (D) 55 (E) 60

【题干特征】题目中出现S_3，S_6/S_5，S_{10}等具体值

$n=5$，连续5项之和成等差数列

S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$是公差为$n^2d=25d$的等差数列

【词汇1】a、b、c三个数成等差数列$\Leftrightarrow 2b=a+c$

$2(S_{10}-S_5)=S_5+(S_{15}-S_{10})$

$3S_{10}=3S_5+S_{15}=165$

等差数列·片段和公式

【例】在等差数列$\{a_n\}$中，已知$S_4=1$，$S_8=4$，设$S=a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}$，

【求1】$S=?$ 【求2】数列$\{a_n\}$的公差? 【求3】$a_3=?$

【题干特征】题目中出现S_3，S_6/S_5，S_{10}等具体值

【解1】$S_4=1$，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$，$S_{16}-S_{12}$，$S_{20}-S_{16}$…… 成等差数列

片段和等差数列首项为$S_4=1$，片段和等差数列第二项为$S_8-S_4=3$，公差为2

1 3 5 7 9…… 故$S=9$

【解2】片段和等差数列的公差为 $n^2d=16d=2$，故原数列$d=\frac{1}{8}$

【解3】$S_4=4a_1+6d=1$，$d=\frac{1}{8}$，故$a_1=\frac{1}{16}$，$a_3=a_1+2d=\frac{5}{16}$

等差数列·词汇总结

1）a,b,c三个数成等差/等比数列 $a+c=2b$ 等比：$ac=b^2$（$b\neq 0$）

2）任意个任意项的和，都能转换为a_1和d $3a_3+2a_7=3(a_1+2d)+2(a_1+6d)=5a_1+18d$

3）两项和，通过下标和做转换
- 下标和为奇数：$a_4+a_7=a_2+a_9=a_1+a_{10}=a_5+a_6$
- 下标和为偶数，有中间项：$a_4+a_6=a_3+a_7=a_2+a_8=2a_5$

4）前奇数项S_n等于中间项的n倍 $S_7=7a_4=7a_1+21d$ $S_{11}=11a_6=11a_1+55d$

$S_{10}=5(a_1+a_{10})=5(a_5+a_6)=5(2a_1+9d)$

5）$a_1<0$，$d>0$，S_n有最小值
$a_1>0$，$d<0$，S_n有最大值 $\Rightarrow$求过0点的项（若过零点的项 $a_n=0$，$S_{n-1}=S_n$，有两个相等的极值）

6）片段和定理：
$\{a_n\}$为公差为d的等差数列
- S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$ 为等差数列，公差为$4^2d=16d$
- S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 为等差数列，公差为$3^2d=9d$

等比数列

【等比数列】如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一常数，$a_{n+1}/a_n=q$，那么这个数列就叫做等比数列，这个常数就叫做等比数列的公比q（$q\neq 0$）

等比数列每一项a_n和公比q均不为0

通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$（$q\neq 0$）

前n项和公式（$q\neq 0$）：（1）当$q\neq 1$时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

（2）当$q=1$时，$S_n=na_1$

当$n\to\infty$，且$0<|q|<1$时，$S=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}$

若$\{a_n\}$为等比数列，则$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$，$\{|a_n|\}$，$\{a_n^2\}$均为等比数列，公比分别为：$\frac{1}{q}$、$|q|$、$q^2$

数列出题套路

等差数列
- ★【套路一】求数列某项的值或者某几项的和 词汇1 词汇2 词汇3
- ★【进阶词汇】
  - 1.两项之积在分母，求和$\sum \frac{1}{a_n a_{n+1}}$
  - 2.等差数列过0点的项（$S_n \le S_{具体数字}$）
  - 3.等差数列片段和公式（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）

等比数列
- 【基础词汇】a，b，c成等比数列$\Leftrightarrow b^2 = ac\ (b \neq 0)$

秒杀技巧

其他数列

等比数列•基础词汇

【等比数列基础词汇】a，b，c成等比数列$\Leftrightarrow b^2 = ac\ (b \neq 0)$

可以被用在任何知识点，等同于给出一个关于a，b，c的算式条件

【2001.1.10】若2，$2^x - 1$，$2^x + 3$成等比数列，则$x =$（ A ）

（A）$log_2 5$ （B）$log_2 6$ （C）$log_2 7$ （D）$log_2 8$

$(2^x-1)^2 = 2(2^x+3)$ 令$2^x = t$，注意$t > 0$

$(t-1)^2 = 2(t+3)$

$t^2 - 4t - 5 = 0$

$(t-5)(t+1) = 0$

$t = 5$，$t = -1$（舍） $t = 5 = 2^x$，$x = \log_2 5$

等比数列•基础词汇

【2013.10.21】设$\{a_n\}$是等比数列，则$a_2 = 2$.（ E ）

（1）$a_1 + a_3 = 5$.

（2）$a_1 a_3 = 4$.

$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = 4 \end{cases}$，$a_2 = \pm 2$

数列出题套路

等差数列
- ★【套路一】求数列某项的值或者某几项的和 词汇1 词汇2 词汇3
- ★【进阶词汇】
  - 1.两项之积在分母，求和$\sum \frac{1}{a_n a_{n+1}}$
  - 2.等差数列过0点的项（$S_n \le S_{具体数字}$）
  - 3.等差数列片段和公式（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）

等比数列
- 【基础词汇】a，b，c成等比数列$\Leftrightarrow b^2 = ac\ (b \neq 0)$
- ★【套路一】等比数列求和

秒杀技巧

其他数列

等比数列·求和公式

【2012.10.7】设$\{a_n\}$是非负等比数列，若$a_3=1$，$a_5=\frac{1}{4}$，$\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{a_n}=$（ B ）

(A) 255　　(B) $\frac{255}{4}$　　(C) $\frac{255}{8}$　　(D) $\frac{255}{16}$　　(E) $\frac{255}{32}$

$a_3=1, a_5=\frac{1}{4}\Rightarrow q^2=\frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{4}$，数列非负，故$q=\frac{1}{2}$，$a_1=4$

$a_1=4$，$a_2=2$，$a_3=1$，$a_4=\frac{1}{2}$，$a_5=\frac{1}{4}$，$a_6=\frac{1}{8}$，$a_7=\frac{1}{16}$，$a_8=\frac{1}{32}$

$\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+4+8+16+32$

$\left\{\frac{1}{an}\right\}$为首项为$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{4}$，公比为$\frac{1}{q}=2$的等比数列

$\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{a_n}$为其前8项和，即$S_8=\frac{\frac{1}{4}(1-2^8)}{1-2}=\frac{255}{4}$

数列出题套路

等差数列
- ★【套路一】求数列某项的值或者某几项的和 $\boxed{\text{词汇1　词汇2　词汇3}}$
- ★【进阶词汇】
  - 1.两项之积在分母，求和$\sum\frac{1}{a_na_{n+1}}$
  - 2.等差数列过0点的项（$S_n\le S_{具体数字}$）
  - 3.等差数列片段和公式（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）

等比数列
- 【基础词汇】a，b，c成等比数列$\Leftrightarrow b^2=ac\ (b\neq 0)$
- ★【套路一】等比数列求和
  等比数列片段和（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）

秒杀技巧

其他数列

等比数列·片段和

【等比数列片段和】如果a_1，a_2，a_3，…，a_n为等比数列，那么这个数列连续的n项之和若非零，即S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$……也是等比数列，并且公比为q^n

设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_6=3S_3$，则$S_9=$___7___S_3

$S_3=a_1+a_2+a_3$

$S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=a_1q^3+a_2q^3+a_3q^3=(a_1+a_2+a_3)q^3=S_3q^3$

$S_9-S_6=a_7+a_8+a_9=a_1q^6+a_2q^6+a_3q^6=(a_1+a_2+a_3)q^6=S_3q^6=(S_6-S_3)q^3$

$S_6=3S_3=(1+q^3)S_3$，两边约去S_3（$S_3\neq 0$），片段和等比数列公比为$q^3=2$

$S_9-S_6=(S_6-S_3)q^3=S_3q^6$，$S_9=3S_3+4S_3=7S_3$

数列出题套路

等差数列
- ★【套路一】求数列某项的值或者某几项的和 $\boxed{\text{词汇1　词汇2　词汇3}}$
- ★【进阶词汇】
  - 1.两项之积在分母，求和$\sum\frac{1}{a_na_{n+1}}$
  - 2.等差数列过0点的项（$S_n\le S_{具体数字}$）
  - 3.等差数列片段和公式（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）

等比数列
- 【基础词汇】a，b，c成等比数列$\Leftrightarrow b^2=ac\ (b\neq 0)$
- ★【套路一】等比数列求和
  等比数列片段和（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）
- 【套路二】结合等差数列

秒杀技巧

其他数列

等比数列•结合等差

【2007.10.1】$\dfrac{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^8}{0.1+0.2+0.3+0.4+\cdots+0.9}=$（ C ）

A. $\frac{85}{768}$　B. $\frac{85}{512}$　C. $\frac{85}{384}$　D. $\frac{255}{256}$　E. 以上结论都不正确

分子为首项为$\frac{1}{2}$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列 $\boxed{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

分母为首项为0.1，公差为0.1的等差数列

$S_{分子}=\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^8$

⇒原式=$\frac{85}{384}$

$S_{分母}=\frac{1+0.9}{2}\times 9=\frac{9}{2}$

等比数列•结合等差

【2000.10.6】已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为0，但是第三、四、七项构成等比数列，则$\frac{a_2+a_6}{a_3+a_7}$为（ A ）

(A) $\frac{3}{5}$　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{4}{5}$　(E) $\frac{5}{6}$

【等差数列词汇】a，b，c成等差数列⇔ $2b=a+c$

【等比数列词汇】a，b，c成等比数列⇔ $b^2=ac\ (b\neq 0)$

$a_4^2=a_3\cdot a_7=(a_4-d)(a_4+3d)$，$a_4=1.5d$

$\frac{a_2+a_6}{a_3+a_7}=\frac{2a_4}{2a_5}=\frac{a_4}{a_5}=\frac{1.5d}{2.5d}=\frac{3}{5}$

等比数列•结合等差

【2014.1.18】甲、乙、丙三人的年龄相同.（ C ）

(1) 甲、乙、丙的年龄成等差数列.

(2) 甲、乙、丙的年龄成等比数列.

既成等差数列，又成等比数列的数列，为非零常数列。

【等差数列词汇】a，b，c成等差数列⇔ $2b=a+c$

【等比数列词汇】a，b，c成等比数列⇔ $b^2=ac\ (b\neq 0)$

设甲、乙、丙年龄为a、b、c

条件（1）$2b=a+c$ （设公差为d）

条件（2）$b^2=ac\quad=(b-d)(b+d)=b^2-d^2$

$d=0$

等比数列•结合等差

【2000.1.6】若α^2，1，β^2成等比数列，而$\frac{1}{\alpha}$，1，$\frac{1}{\beta}$成等差数列，则$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}=$（$B$ ）

(A) $-\frac{1}{2}$或1　(B) $-\frac{1}{3}$或1　(C) $\frac{1}{2}$或1　(D) $\frac{1}{3}$或1　(E) $-\frac{1}{2}$

【等差数列词汇】a，b，c成等差数列⇔ $2b=a+c$

【等比数列词汇】a，b，c成等比数列⇔ $b^2=ac\ (b\neq 0)$

涉及到等比中项，一定要注意正负性讨论

α^2，1，β^2成等比数列：$\alpha^2\beta^2=1$，$\alpha\beta=\pm1$

$\frac{1}{\alpha}$，1，$\frac{1}{\beta}$成等差数列：$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=2\times1=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$，$\alpha+\beta=2\alpha\beta$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}=\frac{2\alpha\beta}{(2\alpha\beta)^2-2\alpha\beta}=\frac{1}{2\alpha\beta-1}=\begin{cases}1, & \alpha\beta=1\\ -\frac{1}{3}, & \alpha\beta=-1\end{cases}$$

数列出题套路

等差数列
- ★【套路一】求数列某项的值或者某几项的和 $\boxed{\text{词汇1 词汇2 词汇3}}$
- ★【进阶词汇】
  - 1.两项之积在分母，求和$\sum \frac{1}{a_n a_{n+1}}$
  - 2.等差数列过0点的项（$S_n \le S_{具体数字}$）
  - 3.等差数列片段和公式（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）

等比数列
- 【基础词汇】a，b，c成等比数列$\Leftrightarrow b^2 = ac\ (b \ne 0)$
- ★【套路一】等比数列求和
  等比数列片段和（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）
- 【套路二】结合等差数列

秒杀技巧 ★【特值法：常数列】

其他数列

数列秒杀技巧•特值法 常数列

【2014.1.1.7】已知$\{a_n\}$为等差数列，且$a_2 - a_5 + a_8 = 9$，则$a_1 + a_2 + \cdots a_9 =$（ D ）

(A) 27 (B) 45 (C) 54 (D) 81 (E) 162

【例】在等差数列$\{b_n\}$中，$b_1 - b_4 - b_8 - b_{12} + b_{15} = 2$，则$b_3 + b_{13} =$（ D ）

(A) 16 (B) 4 (C) -16 (D) -4 (E) -2

使用常数列特值法解题信号

多项的和（包括S_n）等于一个具体数字

不使用常数列特值法

1.数列某一项等于一个具体的数字

2.数列有多个限制条件

数列秒杀技巧•常数列特值法

【2007.10.11】已知等差数列$\{a_n\}$中$a_2 + a_3 + a_{10} + a_{11} = 64$，则$S_{12}=$（$D$）

(A) 64 (B) 81 (C) 128 (D) 192 (E) 188

设$\{a_n\}$为公差$d = 0$的常数列，每一项均为t

则：$a_2 = a_3 = a_{10} = a_{11} = t$

$a_2 + a_3 + a_{10} + a_{11} = 4t = 64$，$t = 16$

$S_{12} = 12 \times t = 12 \times 16 = 192$

数列秒杀技巧•常数列特值法

【例】设$\{a_n\}$为等差数列，且$a_2 + a_4 + a_9 + a_{14} + a_{16} = 150$，$S_{17}$的值为（$B$）

(A) 580 (B) 510 (C) 850 (D) 200 (E) 300

【解法一：下标和转换】

$a_2 + a_4 + a_9 + a_{14} + a_{16} = (a_2 + a_{16}) + (a_4 + a_{14}) + a_9 = 5a_9 = 150$

$a_9 = 30$

$S_{17} = 17a_9 = 510$

【解法二：常数列特值法】令$\{a_n\}$为常数列，每一项均为t，则有：

$a_2 + a_4 + a_9 + a_{14} + a_{16} = 5t = 150$，$t = 30$

$S_{17} = 17t = 510$

数列秒杀技巧•常数列特值法

【2011.10.9】若等差数列$\{a_n\}$满足$5a_7-a_3-12=0$，则$\sum_{k=1}^{15}a_k=$（D）

（A）15 （B）24 （C）30 （D）45 （E）60

【解法一：下标和转换】

$5a_7-a_3=4a_1+28d=12$，$a_1+7d=a_8=3$

$\sum_{k=1}^{15}a_k=S_{15}=a_1+a_2+\cdots+a_{14}+a_{15}=15a_8=45$

【解法二：常数列特值法】令$\{a_n\}$为常数列，每一项均为t，则有：

$5a_7-a_3-12=5t-t-12=4t-12=0$，$t=3$

$\sum_{k=1}^{15}a_k=15t=45$

数列秒杀技巧•常数列特值法

【例】若等差数列$\{a_n\}$满足$S_{13}=52$，则$2a_2-3a_7+2a_{12}=$（ C ）

（A）2 （B）3 （C）4 （D）5 （E）6

【解法一】下标和转换

$S_{13}=13a_7=52$，$a_7=4$

$2a_2+2a_{12}-3a_7=a_7=4$

【解法二】常数列特值法，令$\{a_n\}$为常数列，每一项均为t，则有：

所以$S_{13}=13t=52$，$t=4$

$2a_2-3a_7+2a_{12}=2t-3t+2t=t=4$

数列秒杀技巧•常数列特值法

【2011.10.6】若等比数列$\{a_n\}$满足$a_2a_4+2a_3a_5+a_2a_8=25$，且$a_1>0$，则$a_3+a_5=$（B）

（A）8 （B）5 （C）2 （D）-2 （E）-5

【解法一：下标和转换】

$a_2a_4+2a_3a_5+a_2a_8=a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=(a_3+a_5)^2=25$

$a_3+a_5=5$

【解法二：常数列特值法】令$\{a_n\}$为公比$q=1$的非零常数列，每一项均为t，则有：

$a_2a_4+2a_3a_5+a_2a_8=t^2+2t^2+t^2=4t^2=25$，$t=\frac{5}{2}$

$a_3+a_5=2t=5$

数列出题套路

- 等差数列
  - ★【套路一】求数列某项的值或者某几项的和 词汇1 词汇2 词汇3
  - ★【进阶词汇】
    - 1.两项之积在分母，求和$\sum\frac{1}{a_na_{n+1}}$
    - 2.等差数列过0点的项（$S_n\le S_{具体数字}$）
    - 3.等差数列片段和公式（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）
- 等比数列
  - 【基础词汇】a，b，c成等比数列$\Leftrightarrow b^2=ac\ (b\neq 0)$
  - ★【套路一】等比数列求和
    - 等比数列片段和（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）
  - 【套路二】结合等差数列
- 秒杀技巧
  - ★【特值法：常数列】
  - 下标和与韦达定理
- 其他数列
  - 已知S_n求a_n
  - 用a_n表示a_{n-1}

数列秒杀技巧•下标和与韦达定理

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$　两根之和对应等差数列下标和相等 $a_5+a_7=a_2+a_{10}$

$x_1x_2=\frac{c}{a}$　两根之乘积对应等比数列下标和相等 $a_4a_7=a_3a_8$

$\Delta=b^2-4ac$　$2a,b,2c$为等比数列，则 $b^2=4ac$，方程有两个相等的实数根

数列秒杀技巧•下标和与韦达定理

【2013.1.13】已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，若a_2与a_{10}是方程$x^2-10x-9=0$的两个根，则$a_5+a_7=$（ D ）

(A) -10　(B) -9　(C) 9　(D) 10　(E) 12

$a_5+a_7=a_2+a_{10}=-\frac{a}{b}=10$

【2010.10.13】等比数列$\{a_n\}$中，a_3,a_8是方程$3x^2+2x-18=0$的两个根，则$a_4a_7=$（C）

(A) -9　(B) -8　(C) -6　(D) 6　(E) 8

$a_4a_7=a_3a_8=\frac{c}{a}=\frac{-18}{3}=-6$

数列秒杀技巧•下标和与韦达定理

【例题】若方程$ax^2-2bx+c=0$（$a\neq 0$）有两个相等的实根，则（ A ）

(A) a,b,c成等比数列　(B) a,c,b成等比数列

(C) b,a,c成等比数列　(D) a,b,c成等差数列　(E) b,a,c成等差数列

方程有两个相等的实根，则$4b^2-4ac=0$，$ac=b^2$

a，b，c成等比数列

数列秒杀技巧•下标和与韦达定理

【1999.1.3】若方程$(a^2+c^2)x^2-2c(a+b)x+b^2+c^2=0$有实根，则（$B$）

(A) a,b,c成等比数列　(B) a,c,b成等比数列　(C) b,a,c成等比数列

(C) a,b,c成等差数列　(E) b,a,c成等差数列

方程有实根，则$\Delta=4c^2(a+b)^2-4(a^2+c^2)(b^2+c^2)\geq 0$

$a^2b^2-2abc^2+c^4\leq 0$

$(ab-c^2)^2\leq 0$

$ab-c^2=0\quad\therefore ab=c^2$

即a,c,b成等比数列

数列出题套路

等差数列
- 【套路一】求数列某项的值或者某几项的和 $\boxed{\text{词汇1 词汇2 词汇3}}$
- 【进阶词汇】
  1. 两项之积在分母，求和$\sum\frac{1}{a_na_{n+1}}$
  2. 等差数列过0点的项（$S_n\le S_{具体数字}$）
  3. 等差数列片段和公式（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）

等比数列
- 【基础词汇】a，b，c成等比数列$\Leftrightarrow b^2=ac\ (b\neq0)$
- 【套路一】等比数列求和
  等比数列片段和（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）
- 【套路二】结合等差数列

秒杀技巧
- 【特值法：常数列】
- 下标和与韦达定理

其他数列
- 【套路一】已知S_n求a_n $\boxed{a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)}$
- 【套路二】用a_n表示a_{n-1}

其他数列·已知S_n求a_n $\boxed{a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)}$

【例】数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=4n^2+n$，则下面正确的是（ A ）

A.$\{a_n\}$是等差数列　B.$a_n=2$　C.$a_n=2n+3$　D.$s_{10}=411$　E）以上均不正确

$a_1=S_1=4+1=5$

$a_2=S_2-S_1=4\times2^2+2-4\times1^2-1=13$

$a_3=S_3-S_2=4\times3^2+3-4\times2^2-2=21$

$a_n=S_n-S_{n-1}=4n^2+n-4(n-1)^2-n-1=8n-3$

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d=nd+(a_1-d)}$$

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n}$$

其他数列·已知S_n求a_n $\boxed{a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)}$

【2008.1.11】如果数列$\{a_n\}$的前n项的和$S_n=\frac{3}{2}a_n-3$，那么这个数列的通项公式是（D）

（A）$a_n=2(n^2+n+1)$　（B）$a_n=3\times2^n$　（C）$a_n=3n+1$

（D）$a_n=2\times3^n$　（E）以上都不是

$a_n=S_n-S_{n-1}=(\frac{3}{2}a_n-3)-(\frac{3}{2}a_{n-1}-3)$

$a_n=3a_{n-1}$，$q=\frac{a_n}{a_{n-1}}=3$

$a_1=S_1=\frac{3}{2}a_1-3$，$a_1=6$，$a_n=aq^{n-1}=6\times3^{n-1}=2\times3^n$

另解：$a_1=S_1=\frac{3}{2}a_1-3$，$a_1=6$

$S_2=\frac{3}{2}a_2-3=a_1+a_2=6+a_2$，$a_2=18$

其他数列·用a_n表示a_{n-1} $\boxed{\text{根据递推公式寻找数字变化规律}}$

【2013.10.8】设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\frac{n}{3}(n\ge1)$，则$a_{100}=$（ B ）

（A）1650　（B）1651　（C）$\frac{5050}{3}$　（D）3300　（E）3301

方法一　$a_1=1$，$a_2=1+\frac{1}{3}$，$a_3=1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$，$a_4=1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}$，$a_{100}=a_{99}+\frac{99}{3}$

$a_{100}=1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\cdots+\frac{98}{3}+\frac{99}{3}=1+\frac{1+2++\cdots+99}{3}=1+\frac{(1+99)\times99}{2\times3}=1651$

方法二
$$\begin{cases}a_2-a_1=\frac{1}{3}\\a_3-a_2=\frac{3}{3}\\\cdots\cdots\\a_{99}-a_{98}=\frac{98}{3}\\a_{100}-a_{99}=\frac{99}{3}\end{cases}$$

$a_{100}-a_{99}+a_{99}-a_{98}+a_{98}-a_{97}+\cdots+a_3-a_2+a_2-a_1$

$=a_{100}-a_1$

$=\frac{1+2++\cdots+99}{3}$

$=1651$

其他数列•用a_n表示a_{n-1} 根据递推公式寻找数字变化规律

【2010.10.17】$x_n=1-\frac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$.（ B ）

(1) $x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(1-x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$.

(2) $x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(1+x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$.

条件（1）$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}(1-x_1)=\frac{1}{4}$，$x_3=\frac{1}{2}(1-x_2)=\frac{3}{8}$，非单调递增，不充分。

条件（2）$x_{n+1}=\frac{1}{2}(1+x_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_n$，$x_{n+1}-1=\frac{1}{2}(x_n-1)$

$\{x_n-1\}$为首项为$-\frac{1}{2}$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列

$x_n-1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$x_n=1-\frac{1}{2^n}$

$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}(1+x_1)=\frac{3}{4}$，$x_3=\frac{1}{2}(1+x_2)=\frac{7}{8}$，$x_4=\frac{1}{2}(1+x_3)=\frac{15}{16}$

其它数列•用a_n表示a_{n-1} 根据递推公式寻找数字变化规律

【2013.1.25】设$a_1=1$，$a_2=k$，$\cdots$，$a_{n+1}=|a_n-a_{n-1}|$ $(n\geq 2)$，则$a_{100}+a_{101}+a_{102}=2$.（ D ）

(1) $k=2$.

(2) k是小于20的正整数.

条件（1）$k=2$，$a_3=1$，$a_4=1$，$a_5=|a_4-a_3|=0$，$a_6=1$，$a_7=1$，$a_8=0\ldots\ldots$

数列为1，2，1，1，0，1，1，0，1，1，0，$\cdots$

a_3以后的任意三项和为2.

条件（2）1，k，$k-1$，1，$k-2$，$k-3$，1，$k-4$，$k-5$,1，…，$k-k$，1,1,0,1,1,0……

后面的任意三项和为2.

数列出题套路

等差数列
- ★【套路一】求数列某项的值或者某几项的和 词汇1 词汇2 词汇3
- ★【进阶词汇】
  - 1.两项之积在分母，求和$\sum\frac{1}{a_n a_{n+1}}$
  - 2.等差数列过0点的项（$S_n\leq S_{具体数字}$）
  - 3.等差数列片段和公式（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）

等比数列
- 【基础词汇】a，b，c成等比数列$\Leftrightarrow b^2=ac\ (b\neq 0)$
- ★【套路一】等比数列求和
  等比数列片段和（S_3，S_6/S_5，S_{10}/S_n，S_{2n}等值）
- 【套路二】结合等差数列

秒杀技巧
- ★【特值法：常数列】
- 下标和与韦达定理

其他数列
- 【套路一】已知S_n求a_n $a_1=S_1$，$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$
- 【套路二】用a_n表示a_{n-1}

THANK YOU FOR WATCHING