数学系统精讲

排列组合

MBA大师 — 数学董璞

10.1.2 排列组合•套路

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

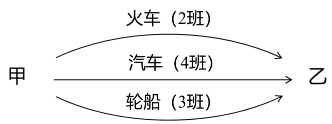
分组问题

排列问题

需分情况讨论类问题

10.2.1 基础知识•加法原理

【问题1】从甲地到乙地，可以乘火车、汽车或者轮船，一天中火车有2班，汽车有4班，轮船有3班，那么一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

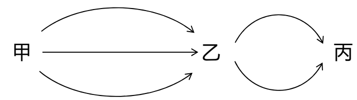


【分类计数原理/加法原理】如果完成一件事有n种不同方案，第1种方案中有m_1种不同方法，第2种方案中有m_2种不同方法，以此类推，第n种方案有m_n种不同方法。若不论用哪一种方案中的哪一种方法，都可以完成此事，则完成这件事共有：$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$种不同方法。

【说明】各类办法之间相互独立，都能独立完成这件事，要计算方法种数，只需将各类方法数相加，因此分类计数原理又称加法原理。

10.2.2 基础知识•乘法原理

【问题2】从甲地到乙地的道路有3条，从乙地到丙地的道路有2条。现在从甲地经过乙地去丙地，共有多少种不同的走法？



【分步计数原理/乘法原理】如果完成一件事需要经过n个步骤，做第1步有m_1种不同的方法，做第2步有m_2种不同的方法，以此类推，做第n步有m_n种不同的方法。则完成这件事共有：$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$种不同方法。

【说明】各个步骤相互依存，只有各个步骤都完成了，这件事才算完成，将各个步骤的方法数相乘得到完成这件事的方法总数，即为乘法原理。

10.2.2 基础知识•区别与联系

- 加法原理与乘法原理都是讨论【做一件事】时，确定【完成这件事所有的不同方案的种数】。

分类

- 做一件事时有几类不同的方法，而每一类方法中又有几种可能的做法，它们相互排斥，且均能独立完成这件事，要知道完成这件事一共有多少种方法，用分类计数原理/加法原理。

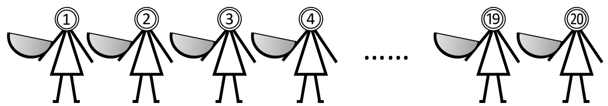
分步

- 在做一件事情时，要分几步完成， 各个步骤彼此相依不可分割，只有依次完成所有步骤才能完成这件事（而在完成每一步时又有几种不同的方法）。要知道完成这件事一共有多少种方法，就用分步计数原理/乘法原理。

10.2.2 基础知识•区别与联系

	加法原理	乘法原理
联系	加法原理和乘法原理回答的都是关于完成一件事情的不同方法的种数问题。	
区别一	完成一件事情共有n类方案【分类】	完成一件事情共分n个步骤【分步】
区别二	每类方案都能独立完成此事	每一步得到的只是中间结果，任何一步都不能独立完成此事，缺少任何一步也不能完成此事，只有依次完成所有步骤才能完成此事。
区别三	各类方案是互斥的、并列的、独立的	各步骤之间是相互关联的

10.2.3 基础知识•排列数



第一步：选出冠军：20种

第二步：选出亚军：19种　　选出冠亚季军共有：$20 \times 19 \times 18$种　$\boxed{A_{30}^{3}}$

第三步：选出季军：18种

第四步：选出第四名：17种　　选出前四名共有：$20 \times 19 \times 18 \times 17$种　$\boxed{A_{30}^{4}}$　排列数

第十步：选出第十名：11种　　选出前十名共有：$20 \times 19 \times \cdots \times 11$种　$\boxed{A_{30}^{10}}$

10.2.3 基础知识•排列数

从n个不同的元素中，任取m个元素（$m \le n$），按照一定的顺序排成一列，称为从n个不同元素中抽取m个元素的一个排列。所有这些排列的个数称为排列数，记为P_n^m或A_n^m。

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

规定$A_n^0 = 0! = 1$

10.2.4 基础知识·组合数

5盘菜，张三、李四各一盘

鸡　鸭　鱼　肉　菜

独自吃

$A_5^2=5\times4=20$

张三	李四
肉	菜
菜	肉

拼桌吃

$A_5^2\div2=10$

张三	李四
肉	菜
菜	肉

10.2.4 基础知识·组合数

5盘菜，张三、李四、王五各一盘

鸡　鸭　鱼　肉　菜

独自吃

$A_5^3=5\times4\times3=60$

排列

拼桌吃

$A_5^3\div A_3^3=10$

组合

张三	李四	王五
肉	菜	鱼
肉	鱼	菜
菜	肉	鱼
菜	鱼	肉
鱼	菜	肉
鱼	肉	菜

每种拼桌吃法在独自吃的算法中都被重复算了$A_3^3=6$

10.2.4 基础知识·组合数

从n个不同的元素中，任取m个元素（$m\le n$），不论顺序组成一组，称为从n个元素中取出m个元素的一个组合。所有这些组合的个数称为组合数，记为C_n^m。

5盘菜中选2盘：$C_5^2=A_5^2\div A_2^2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

5盘菜中选3盘：$C_5^3=A_5^3\div A_3^3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

20个人中选3个：$C_{20}^3=A_{20}^3\div A_3^3=\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}=1140$

$$\boxed{C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdots1}}$$

20个人中选17个：$C_{20}^{17}=A_{20}^{17}\div A_{17}^{17}=\frac{20\times19\times18\times17\times\cdots\times6\times5\times4}{17\times16\times\cdots\times4\times3\times2\times1}$

$\boxed{C_n^m=C_n^{n-m}}$　　$=\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}$

10.2.4 基础知识·组合数

从n个不同的元素中，任取m个元素（$m\le n$），不论顺序组成一组，称为从n个元素中取出m个元素的一个组合。所有这些组合的个数称为组合数，记为C_n^m。

$\boxed{C_n^m=C_n^{n-m}}$

求C_8^0的值?

$C_8^8=1$

从8个人中选8个

$C_8^0=C_8^8$

$C_8^0=1$

$\boxed{C_n^0=1}$　从8个人中选8个，是一种方法

一个也不选，也是一种方法

10.2.4 基础知识•组合数

从n个不同的元素中，任取m个元素（$m \le n$），不论顺序组成一组，称为从n个元素中取出m个元素的一个组合。所有这些组合的个数称为组合数，记为C_n^m。

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}{m \cdot (m-1) \cdots 1} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_n^0 = 1$$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$$

10.2.4 基础知识•组合数

从n个不同的元素中，任取m个元素（$m \le n$），不论顺序组成一组，称为从n个元素中取出m个元素的一个组合。所有这些组合的个数称为组合数，记为C_n^m。

排列数与组合数常用数值

$3! = 6$	$C_3^1 = C_3^2 = 3$	
$4! = 24$	$C_4^2 = 6$	
$5! = 120$	$C_5^2 = C_5^3 = 10$	
$6! = 720$	$C_6^2 = C_6^4 = 15$	$C_6^3 = 20$

10.2.5 基础知识•排列数与组合数

	排列	组合
共同点	从n个不同元素中，任取m个元素	
区别	有顺序的挑选	没有顺序的挑选

妈妈给大毛买两个冰激凌，分别有樱桃、蓝莓、香草、奶油四种口味可选

不用考虑顺序，组合数$C_4^2 = 6$

妈妈给大毛、小毛买两个冰激凌，分别有樱桃、蓝莓、香草、奶油四种口味可选

要考虑顺序，排列数$A_4^2 = 12$

10.2.5 基础知识•排列数与组合数

将A、B、C、D四个人分成两拨进行乒乓球双打，有多少种分法？ 正解：$\frac{C_4^2 \times 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

第一步　第二步

$C_4^2 \quad \times \quad 1 \quad = C_4^2 = 6$

A B　C D

A C　B D

A D　B C

B C　A D

B D　A C

C D　A B

10.2.6 排列组合•套路

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

分组问题

排列问题

需分情况讨论类问题

10.2.6 考察核心•5步思维法

【1】被分配的元素每个是否完全相同

【2】是否指定分配：
是否指定每个组分给谁，是否指定每个分组所含元素数（分配的数量）

【3】同组元素是否有“位置的概念”。
分组，还是排队

【4】有无特殊要求
相邻/不相邻
某元素必须/不能排在某位置
特殊功能的元素（偶数、0、5、双重功能元素）

【5】是否要都分配所有的元素（全排还是非全排）

10.2.6 考察核心•5步思维法

【1】被分配的元素每个是否完全相同

相同的元素：题干中带“相同”两字：相同的球，相同的书，相同的项目
空的位置或者东西，空车位，空座位
颜色相同的事物，颜色相同的旗子，（不带标号）

不同的元素：具体的实物人、书，车，项目，具体的东西
题干中未提及“相同”的实物，
带有标号的实物，标号的球，标号的盒子

【2】是否指定分配：
是否指定每个组分给谁，是否指定每个分组所含元素数（分配的数量）

六个球
- 指定分配：分配给甲一个球，乙两个球，丙三个球
- 未指定分配
  - 分给甲乙丙三人，其中一人1本，一人2本，一人3本
  - 分给甲、乙、丙三个人

10.2.6 考察核心•5步思维法

【3】同组元素是否有“位置的概念”。
分组，还是排队

没有顺序的区分：一起去，分组去，20个名额分配给

有顺序的区分：标号的先后
时间顺序的先后
位置顺序的先后
上场顺序的先后
座位顺序的先后

MBA大师

10.2.6 考察核心•5步思维法

【4】有无特殊要求
相邻/不相邻
某元素必须/不能排在某位置
特殊功能的元素（偶数、0、5、双重功能元素）

【1999.10.8】从0、1、2、3、5、7、11七个数字中每次取两个相乘，不同的积有（ ）
A.15种 B.16种 C.19种 D.23种 E.21种

【2011.10.12】在8名志愿者中,只能做英语翻译的有4人,只能做法语翻译的有3人,既能做英语翻译又能做法语翻译的有1人.现从这些志愿者中选取3人做翻译工作,确保英语和法语都有翻译的不同选法共有（ ）种.

10.2.6 考察核心•5步思维法

【5】是否要都分配所有的元素

【2011.10.12】在8名志愿者中,只能做英语翻译的有4人,只能做法语翻译的有3人,既能做英语翻译又能做法语翻译的有1人.现从这些志愿者中选取3人做翻译工作,确保英语和法语都有翻译的不同选法共有（ ）种.

10.3 排列组合•分组问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

分组问题
- 【1】不同元素分组，每组不能为空：先分组（再分配）☆

排列问题

需分情况讨论类问题

10.3.1 分组问题•不同元元素分组，组不为空

【2013.10.12】在某次比赛中有6名选手进入决赛。若决赛设有1个一等奖，2个二等奖，3个三等奖，则可能的结果共有（ *D* ）种。

(A) 16 (B) 30 (C) 45 (D) 60 (E) 120

第①步：6人中选1个一等奖 C_6^1	×	第②步：剩下5人中选2个二等奖 C_5^2	×	第③步：剩下3人中选3个三等奖 C_3^3	$= 6 \times 10 \times 1 = 60$

选3个三等奖 选1个一等奖 选2个二等奖

$C_6^3 \times C_3^1 \times C_2^2 = 20 \times 3 \times 1 = 60$

10.3.1 分组问题•不同元元素分组，组不为空

【2017.15】将6人分成3组，每组2人，则不同的分组方式共有（ B ）

A. 12　　B. 15　　C. 30　　D. 45　　E. 90

第①步：6人中选2人组成一组 C_6^2	×	第②步：剩下4人中选2人组成一组 C_4^2	×	第③步：剩下2人中选2人组成一组 C_2^2	$=15\times6\times1=90$

①+②	③+④	⑤+⑥
①+②	⑤+⑥	③+④
③+④	①+②	⑤+⑥
③+④	⑤+⑥	①+②
⑤+⑥	①+②	③+④
⑤+⑥	③+④	①+②

$$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15\text{种}$$

10.3.1 分组问题•不同元元素分组，组不为空

【2017.3修改】将6人分成3组，一组3人，一组2人，1组1人，则不同的分组方式共有（ E ）

(A) 12　　(B) 15　　(C) 30　　(D) 45　　(E) 60

第①步：6人中选3人组成一组 C_6^3	×	第②步：剩下3人中选2人组成一组 C_3^2	×	第③步：剩下1人中选1人组成一组 C_1^1	$=20\times3\times1=60$

【分组问题消序】分组时，如果有几组含有元素个数相同，则会因为分步选取顺序不同而产生重复计算。此时需要进行消序，有几个组含元素个数相同，就除以几的阶乘（$A_m^m=m!$）。

若有2组含元素个数相同，则除以$A_2^2=2$

若有3组含元素个数相同，则除以$A_3^3=6$

10.3.1 分组问题•不同元元素分组，组不为空

【例题】将A、B、C、D四个人分为2人、1人、1人三个组，则不同的分组方式共有（ A ）

(A) 6　　(B) 12　　(C) 30　　(D) 45　　(E) 90

第①步：4人中选2人组成一组 C_4^2	×	第②步：剩下2人中选1人组成一组 C_2^1	×	第③步：剩下1人中选1人组成一组 C_1^1

由于2个1人组内所含元素个数均为1，需要进行分组问题消序

$$\frac{C_4^2\times C_2^1\times C_1^1}{A_2^2}=\frac{6\times2\times1}{2}=6$$

10.3.2 分组•指定分配与未指定分配

☆① 指定分配：既指定分配给谁，也指定每个人每个人分配的数量

【例1】6本不同的书分给甲乙丙三人，其中甲1本，乙2本，丙3本，共有多少种分法?

$$C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_3^3$$

【例2】6本不同的书分给甲乙丙三人，其中甲2本，乙2本，丙2本，共有多少种分法?

$$\frac{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3$$

10.3.2 分组问题•指定分配与未指定分配

【例题】甲、乙、丙三位教师分配到5个班级任教，若其中甲教一个班，乙教两个班，丙教两个班，则共有分配方法__30种__ 指定分配

思路1：指定了每个元素分配的数字直接分

2、2、1三组分配给三个人，有：$C_5^2 \times C_3^2 \times C_1^1 = 30$种。

思路2：先分组再分配

5个班级分为2、2、1三组，有：$\frac{C_5^2 \times C_3^2 \times C_1^1}{A_2^2} = \frac{30}{2} = 15$种分配方法

因为分配时有两个人可以教两个班，可以互换，故要乘以A_2^2

最终一共有，$\frac{30}{A_2^2} \times A_2^2 = 30$种

10.3.2 分组•指定分配与未指定分配

☆☆ ②未指定分配：未指定分配给谁，仅指定每个分组包含元素个数

（某几组所含元素数量可能相等）

【例3】6本不同的书分给甲乙丙三人，其中一人拿1本，一人拿2本，一人拿3本，有多少种分法？

$C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 \times A_3^3$

【例4】6本不同的书分为1本，2本，3本三堆，然后分给甲乙丙三个人。有多少种分法？

$C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 \times A_3^3$

【例5】6本不同的书分为2本，2本，2本三堆，然后分给甲乙丙三个人。有多少种分法？

$\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_3^3} \times A_3^3 = C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$

10.3.2 分组问题•指定分配与未指定分配

【例】三位教师分配到6个班级任教，若每人各教2个班，则共有分配方法（ B ）

（A）20种 （B）90种 （C）120种 （D）60种

先分组 6个班级分为2、2、2三组，有$\frac{C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2}{A_3^3} = 15$种选法

再分配：未指定 未指定人，仅指定每个分组包含元素个数：全排列分配

共有分配方法： $15 \times A_3^3 = 90$种

【例】三位教师分配到6个班级任教，若其中一人教4个班，一人教1个班，一人教1个班，则共有分配方法（ B ）

（A）20种 （B）90种 （C）120种 （D）60种

先分组 6个班级分为4、1、1三组，有$\frac{C_6^4 \times C_2^1 \times C_1^1}{A_2^2} = 15$种选法

再分配：未指定 未指定人，仅指定每个分组包含元素个数：全排列分配

共有分配方法： $15 \times A_3^3 = 90$种

10.3.2 分组•指定分配与未指定分配

☆☆☆ ③未指定分配给谁，也未指定分组内包含元素个数：分情况讨论后全排列分配

【例6】6本不同的书分给甲乙丙三个人，有多少种分法？

第①步：先分组 将6本书分为3组，每组包含书本数量组合有以下三种情况：

$1+1+4$ $\frac{C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^4}{A_2^2}$

$1+2+3$ $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3$

$2+2+2$ $\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_3^3}$

第②步：再分配

$\frac{C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^4}{A_2^2} \times A_3^3$

$C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 \times A_3^3$

$\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_3^3} \times A_3^3$

10.3.2 分组•指定分配与未指定分配

【例题】有五项不同的工程，要发包给三个工程队，要求每个工程队至少要得到一项工程。共有多少种不同的发包方式？ 150种

①先分组 将5项工程分为三组，每组不为空，数量组合有2种可能

$$\begin{cases} 1+2+2\text{三组：}\dfrac{C_5^1\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{A_2^2} \\ 1+1+3\text{三组：}\dfrac{C_5^1\cdot C_4^1\cdot C_3^3}{A_2^2} \end{cases}$$

②再分配 未指定分配

全排列分配，共有：$\frac{C_5^1\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{A_2^2}\times A_3^3+\frac{C_5^1\times C_4^1\times C_3^3}{A_2^2}\times A_3^3=150$种方法

10.3.2 分组•指定分配与未指定分配

☆① 指定分配：既指定分配给谁，也指定每个人每个人分配的数量

6本不同的书分给甲乙丙三人，其中甲1本，乙2本，丙3本 $C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_3^3$

6本不同的书分给甲乙丙三人，其中甲2本，乙2本，丙2本 $\frac{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3$

6本不同的书分给甲乙丙三人，其中甲1本，乙1本，丙4本 $\frac{C_6^1\cdot C_5^1\cdot C_4^4}{A_2^2}\cdot A_2^2$

☆☆ ②未指定分配：未指定分配给谁，仅指定每个分组包含元素个数

6本不同的书分给甲乙丙三人，其中一人1本，一人拿2本，一人拿3本 $C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_3^3\times A_3^3$

6本不同的书分给甲乙丙三人，其中一人1本，一人拿1本，一人拿4本 $\frac{C_6^1\cdot C_5^1\cdot C_4^4}{A_2^2}\times A_3^3$

☆☆☆ ③未指定分配：未指定给谁，也未指定分组内包含元素个数：分情况讨论

6本书分给甲、乙、丙三个人

10.3.2 分组•指定分配与未指定分配

【2000.10.8】三位教师分配到6个班级任教，若其中一人教一个班，一人教两个班，一人教三个班，则共有分配方法（ *B* ）

（A）20种 （B）360种 （C）120种 （D）60种

先分组 6个班级分为3、2、1三组，有：$C_6^3\times C_3^2\times C_1^1=60$种。

再分配 三组分配给三个老师，有A_3^3种。

共有$A_3^3\times 60=360$种方法

【2000.10.8改】甲、乙、丙三位教师分配到6个班级任教，若其中甲教一个班，乙教两个班，丙教三个班，则共有分配方法（ *D* ）

（A）20种 （B）360种 （C）120种 （D）60种

6个班级，分为3、2、1三组，分别确定给丙、乙、甲

共有：$C_6^3\times C_3^2\times C_1^1=60$种。

10.3.2 分组•指定分配与未指定分配

【2010.1.11】某大学派出5名志愿者到西部4所中学支教，若每所中学至少有一名志愿者，则不同的分配方案共有（ *A* ）

A. 240种 B. 144种 C. 120种 D. 60种 E. 24种

先分组 5名志愿者，分为2人、1人、1人、1人共四组

有三组数量相同，分组共有：$\frac{C_5^2\times C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{A_3^3}=10$种。

再分配 未指定分配 四组分配给四个中学，共有A_4^4种分配

共有：$\frac{C_5^2\times C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{A_3^3}\times A_4^4=240$种方法

10.3.3 分组问题•套路1总结

不同元素分组，每组不能为空

不确定每组数量先分情况讨论，然后每种情况相加

确定每组数量后先分组

- m个组所含元素个数相同 → 除以$m!$
- 每组所含元素个数均不相同 → 无需处理

再分配

- 指定分配
  - 有m组含元素个数相同 甲1本、乙1本、丙4本 → 乘以$m!$
  - 每组所含元素个数均不同 甲1本、乙2本、丙3本 → 无需处理
- 未指定分配 分配给甲乙丙三人 → 全排列分配

10.3 排列组合•分组问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

分组问题
- 【1】不同元素分组，每组不能为空：先分组（后分配）☆
- 【2】不同元素分组，可以重复分配

排列问题

需分情况讨论类问题

10.3.4 分组问题•不同元素分组，可重复分配

【例题1】5人参加7个比赛项目，每个项目只有1个冠军，并且每个项目的冠军一定在这5个人之中产生。（可以重复得冠军），每项冠军只有一个，不同项目冠军可以由相同的人获得，有人可以不得冠军。共有多少种方法 $C_5^1\times C_5^1\times C_5^1\times C_5^1\times C_5^1\times C_5^1\times C_5^1=5^7$

⑦个比赛项目
- 从5人中选出一人作为第①个项目冠军C_5^1
- ×
- 从5人中选出一人作为第②个项目冠军C_5^1
- ×
- ⋮
- ×
- 从5人中选出一人作为第⑦个项目冠军C_5^1

10.3.4 分组问题•不同元素分组，可重复分配

【例题2】5人参加7个比赛项目，每个人只参加一个项目，不同人可以参加相同项目，有项目可以没人参加。一共有多少种参加的方法 $C_7^1\times C_7^1\times C_7^1\times C_7^1\times C_7^1=7^5$

⑤个人
- 第①个人从7个比赛项目中选择一个参加C_7^1
- ×
- 第②个人从7个比赛项目中选择一个参加C_7^1
- ×
- ⋮
- ×
- 第⑤个人从7个比赛项目中选择一个参加C_7^1

10.3.4 分组问题•不同元素分组，可重复分配

方法数 $=m^n$，其中$m=$可以重复使用的元素数量，$n=$不能重复使用的元素数量

【例题1】5人参加7个比赛项目，每个项目只有一个冠军，并且每个项目的冠军一定在这5个人之中产生。（可以重复得冠军），每项冠军只有一个，不同项目冠军可以由相同的人获得，有人可以不得冠军。共有多少种方法 $C_5^1\times C_5^1\times C_5^1\times C_5^1\times C_5^1\times C_5^1\times C_5^1=5^7$　方法数 $=m^n=$人数^{比赛数}

5人可以重复获得冠军，可重复使用的元素$m=5$

7个比赛项目每项只能产生一个冠军，不能重复使用的元素$n=7$

【例题2】5人参加7个比赛项目，每个人只参加一个项目，不同人可以参加相同项目，有项目可以没人参加。一共有多少种参加的方法 $C_7^1\times C_7^1\times C_7^1\times C_7^1\times C_7^1=7^5$　方法数 $=m^n=$比赛数^{人数}

7个比赛项目可以重复让人选择参加，可以重复使用的元素$m=7$

5人每人只能参加一个比赛，不能重复使用的元素$n=5$

10.3.4 分组问题•不同元素分组，可重复分配

【2007.10.7】有5人报名参加3项不同的培训，每人都只报一项， 则不同的报法有（ A ）

A.243种　B.125种　C.81种　D.60种　E. 以上结论均不正确

方法数 $=m^n$，其中$m=$可以重复使用的元素数量，$n=$不能重复使用的元素数量

3项培训可重复让人参加：可以重复使用的元素$m=3$

5人每人只能报一项：不能重复使用的元素$n=5$

方法数 $=C_3^1\times C_3^1\times C_3^1\times C_3^1\times C_3^1=$培训数$^{人数}=3^5=243$

【2007.10.7改】有5人参加3项不同的比赛，每项比赛冠军只有一人， 则不同的报法有（ B ）

A.243种 B.125种　C.81种　D.60种　E. 以上结论均不正确

5人可以重复获得冠军$m=5$

3项比赛每项只产生一个冠军$n=3$

方法数 $=m^n=5^3=$人数^{比赛数}

10.3.4 分组问题•不同元素分组，可重复分配

【2007.10.7】有5人报名参加3项不同的培训，每人都只报一项， 则不同的报法有（ A ）

A.243种　B.125种　C.81种　D.60种　E. 以上结论均不正确

【2007.10.7修改】有5人报名参加3项不同的培训，每人都只报一项，每个培训都至少有1人报名，则不同的报法有（ D ）

A.243种　B.125种　C.81种　D.150种　E. 以上结论均不正确

方案①：3人+1人+1人分组

$$\frac{C_5^3\times C_2^1\times C_1^1}{A_2^2}\times A_3^3$$

方案②：1人+2人+2人分组

$$\frac{C_5^1\times C_4^2\times C_2^2}{A_2^2}\times A_3^3$$

$$\frac{C_5^3\times C_2^1\times C_1^1}{A_2^2}\times A_3^3+\frac{C_5^1\times C_4^2\times C_2^2}{A_2^2}\times A_3^3=60+90=150$$

10.3 排列组合•分组问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

分组问题
- 【1】不同元素分组，每组不能为空：先分组（后分配）☆
- 【2】不同元素分组，可以重复分配
- 【3】隔板法：所有元素完全相同，只看数量 ☆

排列问题

需分情况讨论类问题

10.3.5 分组问题•隔板法

【2009.10.14】若将10只相同的球随机放入编号为1、2、3、4的四个盒子中，则每个盒子不空的投放方法有（ B ）

(A) 72 (B) 84 (C) 96 (D) 108 (E) 120

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

$$C_{10-1}^{4-1}=C_9^3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

【隔板法】：有n个完全相同的元素，投放到m个地方/分配给m个人，每个地方/每个人至少分得一个元素，则可投放的数量为C_{n-1}^{m-1}

10.3.5 分组问题•隔板法

隔板法使用条件：

(1) n个待分配元素完全相同，只看数量

(2) m个分配地方不同

(3) 每个地方至少分得一个元素

(4) 每次分配所有元素

○↓ ○↓ ○↓ ○↓ ○↓ ○↓ ○↓ ○↓ ○↓ ○

↓○ ↓↓○ ↓↓○ ↓↓○ ↓↓○ ↓↓○ ↓↓○ ↓↓○ ↓↓○ ↓↓○ ↓

10.3.6 分组问题•隔板法进阶

【例】10个相同的排球分给3个班级，允许有些班级没有分到排球的分法有多少（ C ）

(A) 72 (B) 84 (C) 66 (D) 108 (E) 120

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

$C_{13-1}^{3-1}=C_{12}^2=66$

【隔板法进阶·可以为空】：有n个完全相同的元素，投放到m个地方/ 给m个人，允许有地方/人没有分到，可能的方法数为C_{n+m-1}^{m-1}（添加球数隔板法）

10.3.6 分组问题•隔板法进阶

【2009.10.14改】若将10只相同的球随机放入编号为1、2、3、4的四个盒子中，允许有些盒子没分到球的不同的投放方法有__286种__

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

$C_{10+4-1}^{4-1}=C_{13}^3=286$

【隔板法进阶·可以为空】：有m个完全相同的元素，投放到n个地方/ 给n个人，允许有地方/人没有分到，可能的方法数为C_{n+m-1}^{m-1}（添加球数隔板法）

10.3.6 分组问题•隔板法进阶

【例】若将10只相同的球随机放入编号为1、2、3、4的四个盒子中，每个盒子先放入一个球，再将剩下的6只球放入盒中，每个盒中至少分得这6只中的一只，不同的投放方法有__10种__

○ ○ ○ ○ ○ ○

$C_{6-1}^{4-1}=C_5^3=10$

【隔板法进阶·每组大于一】：有n个完全相同的元素，投放到m个地方/ 给m个人，每个人/地方至少分得两个元素，则可能的方法数为C_{n-m-1}^{m-1}（减少球数隔板法）

10.3.6 分组问题•隔板法进阶

【例】某校准备参加今年高中数学联赛，把20个参赛名额分配到高三年级的1-4 个教学班，每班的人数大于等于该班的序号数，则不同的分配方案共有多少种？

【例】将20个相同的小球放入编号分别为1，2，3，4的四个盒子中，要求每个盒子中的球数不少于它的编号数，则不同放法总数有多少种？

减少球数隔板法

第1步 ① ② ③ ④

第2步

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

$1\times C_{13}^3=286$

10.3.6 分组问题•隔板法进阶

【2009.10.14改】若将10只相同的球随机放入编号为1、2、3、4的四个盒子中，恰好有一个有盒子没有球，投放方法有多少种__144种__

第①步：4个盒子中选一个盒子不放球$C_4^1=4$

第②步：10个球放到3个盒子里，每个盒子至少分得一球，C_{10-1}^{3-1}种

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

$C_4^1\times C_{10-1}^{3-1}=144$

10.3.6 分组问题•隔板法进阶

【例】方程$x+y+z=10$的正整数解的组数有（ C ）

(A) 72 (B) 66 (C) 36 (D) 108 (E) 120

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

$C_{10-1}^{3-1}=C_9^2=\frac{9\times 8}{2}=36$

【例】方程$x+y+z=10$的非负整数解的组数有（ B ）

(A) 72 (B) 66 (C) 36 (D) 108 (E) 120

求$(x+1)+(y+1)+(z+1)=t_1+t_2+t_3=13$的正整数解

$C_{13-1}^{3-1}=\frac{12\times 11}{2}=66$ 添加球数用隔板法

10.3.6 分组问题•相同和不同元素分组

元素相同 n个元素分为m组
- 【隔板法】每组不为空，只分组 C_{n-1}^{m-1}
- 【隔板法进阶】每组可为空 C_{n+m-1}^{m-1}

元素不同 如6个元素分三组
- 每组元素数量不同，如分为3、2、1三组 $C_6^3C_3^2C_1^1$
- 有元素数量相同的组
  - 分为4、1、1三组 $C_6^4C_2^1C_1^1/A_2^2$
  - 分为2、2、2三组 $C_6^2C_4^2C_2^2/A_3^3$

分组后再分配

10.3 排列组合•分组问题

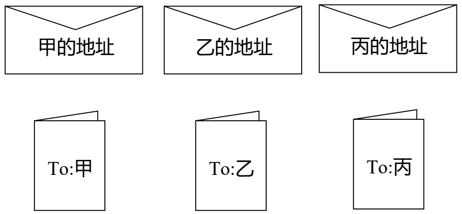
基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

分组问题
- 【1】不同元素分组，每组不能为空：先分组（后分配）
- 【2】不同元素分组，可以重复分配
- 【3】所有元素完全相同，只看数量，【隔板法】
- 【4】错位重排

排列问题

需分情况讨论类问题

10.3.7 分组问题•错位重排



错位重排/不对号入座/装错信封/元素不对应

$D_1=0\quad D_2=1\quad D_3=2\quad D_4=9\quad D_5=44$

递推公式$D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$

10.3.7 分组问题•错位重排

$\boxed{D_1=0\quad D_2=1\quad D_3=2\quad D_4=9\quad D_5=44}$

【2014.1.15】某单位决定对4个部门的经理进行轮岗，要求每位经理必须轮换到4个部门中的其他部门任职，则不同的轮岗方案有（ D ）

A. 3种　　B. 6种　　C. 8种　　D. 9种　　E. 10种

【2018.13简化】某单位3个部门主任检查3个部门的工作，规定本部门主任不能检查本部门，则不同的安排方式有（ A ）

A. 2种　　B. 3种　　C. 8种　　D. 18种　　E. 36种

10.3.7 分组问题•错位重排

【2018.13】某单位为检查3个部门的工作，由这3个部门的主任和外聘的3名人员组成检查组，分2人一组检查工作，每组有1名外聘成员，规定本部门主任不能检查本部门，则不同的安排方式有（C）

A.6种　B.8种　C.12种　D.18种　E.36种

$D_1=0\quad D_2=1\quad D_3=2\quad D_4=9\quad D_5=44$

第①步：将3名主任分配到3个部门

3个元素错位重排：2种可能

第②步：将3名外聘人员分配到3个部门：A_3^3

$2\times A_3^3=12$

10.3.7 分组问题•错位重排

【2018.13扩展】某单位为检查3个部门的工作，由这3个部门的主任和外聘的4名人员组成检查组，分为至少2人一组检查工作，每组至少有1名外聘成员，规定本部门主任不能检查本部门，则不同的安排方式有（D）

A. 12种　B. 24种　C. 36种　D. 72种　E. 144种

$D_1=0\quad D_2=1\quad D_3=2\quad D_4=9\quad D_5=44$

第①步：将3名主任分配到3个部门

3个元素错位重排：2种可能

第②步：将4名外聘人员分配到3个部门$\frac{C_4^2\cdot C_2^1\cdot C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3$

$2\times\frac{C_4^2\cdot C_2^1\cdot C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=72$

10.3.7 分组问题•错位重排

【例】设有编号为1、2、3、4、5的五个小球和编号为1、2、3、4、5的五个盒子，现将这五个小球放入这5个盒子内，要求每个盒子内放一个小球，且恰好有一个球的编号与盒子的编号相同，则这样的投放方法总数为（C）种。

A. 20　B. 30　C. 45　D. 60　E. 135

$D_1=0\quad D_2=1\quad D_3=2\quad D_4=9\quad D_5=44$

第①步：从5个球中选出一个，放入编号相同的盒子C_5^1

第②步：剩下4个球要求都与盒子编号不同

4个元素的错位重排：9种可能

$C_5^1\cdot 9=45$

10.3.7 分组问题•错位重排

【例】设有编号为1、2、3、4、5、6的六个小球和编号为1、2、3、4、5、6的六个盒子，现将这六个小球放入这6个盒子内，要求每个盒子内放一个小球，且恰好有两个球的编号与盒子的编号相同，则这样的投放方法总数为（E）种。

A. 20　B. 30　C. 45　D. 60　E. 135

$D_1=0\quad D_2=1\quad D_3=2\quad D_4=9\quad D_5=44$

第①步：从6个球中选出两个，放入编号相同的盒子C_6^2

第②步：剩下4个球要求都与盒子编号不同

4个元素的错位重排：9种可能

$C_6^2\cdot 9=135$

10.3 排列组合•分组问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

分组问题
- 【1】不同元素分组，每组不能为空：先分组（后分配）☆
- 【2】不同元素分组，可以重复分配
- 【3】所有元素完全相同，只看数量，【隔板法】☆
- 【4】错位重排 ☆
- 【5】成双配对问题（手套鞋子是否成双等）

排列问题

需分情况讨论类问题

10.3.8 分组问题•成双配对

【例】从10双鞋中，任选4只

（1） 4只全部恰好成双的情况有多少种 $C_{10}^{2}=45$

（2）4只都不成对的可能情况有多少种 $C_{10}^{4}\cdot C_{2}^{1}\cdot C_{2}^{1}\cdot C_{2}^{1}\cdot C_{2}^{1}=C_{10}^{4}\cdot 2^{4}=3360$

（3）4只中恰仅有2只成双的情况有多少种 $C_{10}^{1}\cdot C_{9}^{2}\cdot C_{2}^{1}\cdot C_{2}^{1}=C_{10}^{1}\cdot C_{9}^{2}\cdot 2^{2}=1140$

① 左 右　② 左 右　③ 左 右　④ 左 右

① 左 右　② 左 右

10.3.8 分组问题•成双配对

成双：直接选取整双

不成双：①选取整双

m只不成双的鞋来源于m双鞋

故需要几只不成双的就先选取几双

②从选出的每双中分别取出左/右单只

10.3 排列组合•分组问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

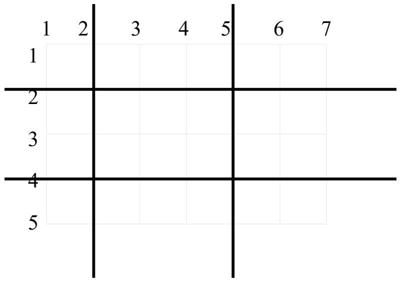
分组问题
- 【1】不同元素分组，每组不能为空：先分组（后分配）☆
- 【2】不同元素分组，可以重复分配
- 【3】所有元素完全相同，只看数量，【隔板法】☆
- 【4】错位重排 ☆
- 【5】成双配对问题（手套鞋子是否成双等）
- 【6】数矩形，数正方形，数线段交点

排列问题

需分情况讨论类问题

10.3.9 排列组合•数矩形

【例】如图所示6×4网格，沿着网格线可以数出多少个矩形？



第①步：选出2条竖线 C_7^2

$\times$

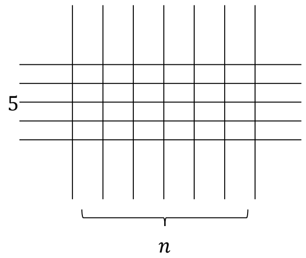
第②步：选出2条横线 C_5^2

$C_7^2\cdot C_5^2=210$

10.3.9 排列组合•数矩形

【2015.15】平面上有5条平行直线，与另一组n条平行直线垂直，若两组平行线共构成280个矩形，则n=（ D ）

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8　　(E) 9



第①步：5条平行横线中任选2条

第②步：在n条平行竖线中任取2条

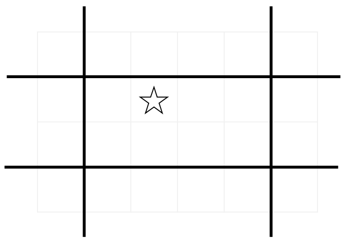
即可组成矩形

$C_5^2C_n^2=10\times\frac{n(n-1)}{2}=280$

可得：$n=8$

10.3.9 排列组合•数矩形

【例】如图所示6×4网格，沿着网格线可以数出多少个将图中五角星包裹在内的矩形？



第①步：选出一条左侧的边 C_3^1

$\times$

第②步：选出一条右侧的边 C_4^1

$\times$

第③步：选出一条上方的边 C_2^1

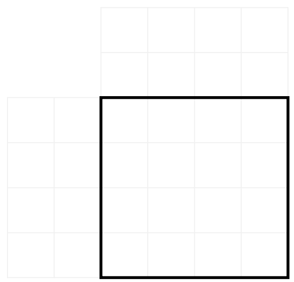
$\times$

第④步：选出一条下方的边 C_3^1

$3\times4\times2\times3=72$

10.3.9 排列组合•有重叠网格数矩形

【例】如图所示网格，沿着网格线可以数出多少矩形？



横向6×4网格中可以选出矩形$C_7^2\cdot C_5^2=210$

纵向4×6网格中可以选出矩形$C_7^2\cdot C_5^2=210$

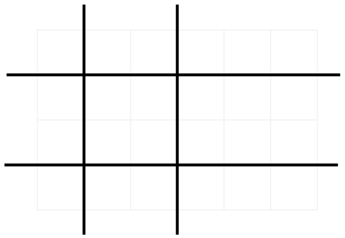
公共部分4×4网格中可以选出矩形$C_5^2\cdot C_5^2=100$

$210+210-100=320$

不规则网格拆成规则网格，分别数减去重叠部分可数出的矩形

10.3.9 排列组合•数正方形 根据边长的大小分类讨论

【例】如图所示4 × 6网格，沿着网格线可以数出多少个正方形？



选出2条竖线×选出2条横线

边长为1时：$6 \times 4 = 24$

边长为2时：$5 \times 3 = 15$

边长为3时：$4 \times 2 = 8$

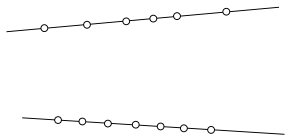
边长为4时：$3 \times 1 = 3$

$24 + 15 + 8 + 3 = 50$

10.3.9 排列组合•数线段交点

【2002.1.11】两线段MN与PQ不相交，线段MN上有6个点A_1，A_2，…，A_6，线段PQ上有7个点$B_1, B_2, \dots B_7$，若将每一个A_i和每一个B_j连成不作延长的线A_iB_j ($i = 1$，2，…，6；$j = 1$，2，…，7)，则由这些线段A_iB_j相交而得到的交点最多有（ A ）

A. 315个　B. 316个　C. 317个　D. 318个　E. 319个



$C_6^2 \times C_7^2 = 15 \times 21 = 315$

10.4 排列组合•排列问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

分组问题

排列问题
- 【1】某元素必须/不能处于某个位置，全部分配

需分情况讨论类问题

10.4.1 排列•必须/不能处于某位置 优先处理特殊元素

【1997.10.11】某公司的电话号码有5位，若第一位数字必须是5，其余各位可以是0到9的任意一个，则由完全不同的数字组成的电话号码的个数是（ C ）

(A) 126　(B) 1260　(C) 3024　(D) 5040　(E) 30240

$\boxed{5}\ \underbrace{\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}}$

$A_9^4 = C_9^4 \cdot 4! = 3024$

某元素放入指定位置：不参与选取和排序

其余元素没有指定位置：按要求选取元素后进行排序

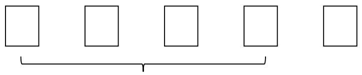
思考：若其余各位不要求完全不同，则有$\underline{\ 10^4\ }$种。

关注MBA大师公众号
支持了解备考咨询资源及更多学习干货

10.4.1 排列•必须/不能处于某位置

【1999.1.4】加工某产品需要经过5个工种，其中某一工种不能最后加工，试问可安排（ A ）种工序.

(A) 96　　(B) 102　　(C) 112　　(D) 92　　(E) 86



有特殊要求的工种在前4工序中任选一C_4^1

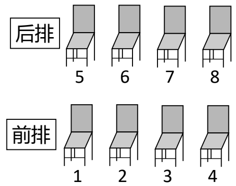
$C_4^1 \cdot A_4^4 = 96$

所有情况数减去某一工种在最后的情况数$A_5^5 - A_4^4 = 96$

优先处理特殊元素

10.4.1 排列•必须/不能处于某位置

【例】一共有8个座位，每排4个分为两排，安排甲乙丙丁4个人入座，甲必须坐在前排，并且不能坐在1号座位，乙必须坐在后排，并且不能坐在偶数座位。一共有多少种座位的排法?



第①步 确定甲	第②步 确定乙	第③步 确定丙和丁
C_3^1	C_2^1	$C_6^2 \times A_2^2$

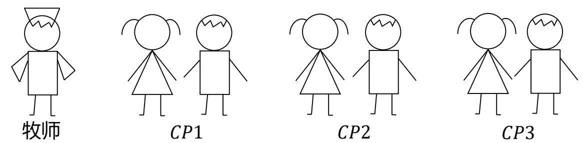
$C_3^1 \times C_2^1 \times C_6^2 \times A_4^4$

10.4 排列组合•排列问题

- 基础知识
  - 【1】加法原理与乘法原理
  - 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
  - 【3】5步思维法
- 分组问题
- 排列问题
  - 【1】某个元素能/不能处于某个位置，全部分配
  - 【2】捆绑法：几个元素必须在一起 ☆
- 需分情况讨论类问题

10.4.2 排列问题•捆绑法

有3对夫妇和1个牧师站成一排照相，要求每对夫妻必须相邻站立，一共有多少种排列方法?



先将夫妻捆绑作为一个整体，与牧师进行排列$A_4^4 \cdot A_2^2 \cdot A_2^2 \cdot A_2^2$

【捆绑法】在解决某几个元素要求相邻的问题时

①先整体考虑，将要求相邻的特殊元素捆绑视为一个“大元素”与其余“普通元素”进行排列

②然后“松绑”，按题目要求对每个捆绑整体内的元素进行组内排列。

10.4.2 排列问题•捆绑法

【2011.1.10】3个三口之家一起观看演出，他们购买了同一排的9张连坐票，则每一家的人都坐在一起的不同坐法有（ D ）

(A) $(3!)^2$种　(B) $(3!)^3$种　(C) $3(3!)^3$种　(D) $(3!)^4$种　(E) $9!$种

第①步：$\boxed{\text{家庭间排序}}$

将3个三口之家分别用捆绑法捆在一起，作为3个“大元素 ”

进行排列：$A_3^3=3!$

第②步：$\boxed{\text{家庭内部排序}}$

将3个捆绑的 “大元素”内部的家人进行排列

$A_3^3\cdot A_3^3\cdot A_3^3=(3!)^3$

10.4.2 排列问题•捆绑法

【2011.1.10变形1】3个三口之家和一对情侣一起观看演出，他们购买了同一排的11张连坐票，则每一家人或者情侣的座位都连在一起的不同坐法有 $A_4^4\cdot(A_3^3)^3\cdot A_2^2$

第①步：将3个家庭和1对情侣分别用捆绑法捆在一起，作为4个“大元素 “进行排列：A_4^4

第②步：3个家庭和1对情侣的“大元素”内部分别排列$A_3^3\cdot A_3^3\cdot A_3^3\cdot A_2^2$

$$\underbrace{A_4^4}_{\boxed{\text{4组全排}}}\times\overbrace{A_3^3}^{\boxed{\text{第1家组内全排}}}\times\underbrace{A_3^3}_{\boxed{\text{第2家组内全排}}}\times\overbrace{A_3^3}^{\boxed{\text{第3家组内全排}}}\times\underbrace{A_2^2}_{\boxed{\text{情侣组内全排}}}$$

10.4.2 排列问题•捆绑法

【2011.1.10变形2】3个三口之家和两个单身青年一起观看演出，他们购买了同一排的11张连坐票，则每一家人座位都连在一起的不同坐法有 $A_5^5\cdot(A_3^3)^3$

第①步：将3个家庭分别用捆绑法捆在一起，作为3个“大元素 ”

与2个单身青年这5个元素一起进行排列：A_5^5

第②步：3个家庭组内部分别排列$A_3^3\cdot A_3^3\cdot A_3^3\times A_2^2$

$A_5^5\times A_3^3\cdot A_3^3\cdot A_3^3\times A_2^2$

【捆绑法】在解决某几个元素要求相邻的问题时

①先整体考虑，将要求相邻的特殊元素捆绑视为一个“大元素”与其余“普通元素”进行排列

②然后“松绑”，按题目要求对每个捆绑整体内的元素进行组内排列。

10.4 排列组合•排列问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

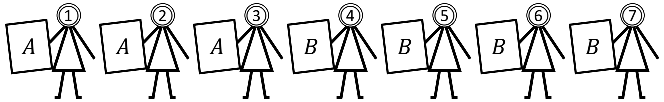
分组问题

排列问题
- 【1】某个元素能/不能处于某个位置，全部分配
- 【2】捆绑法：几个元素绑定位置排序☆
- 【3】插空法：几个元素不能相邻☆

$\boxed{\text{相邻问题捆绑法}}$
$\boxed{\text{不邻问题插空法}}$

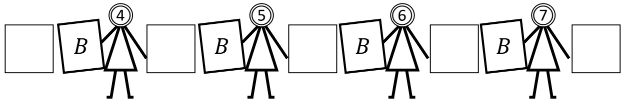
需分情况讨论类问题

10.4.3 排列问题•插空法



七个考生全排列，一共有A_7^7种排列方法

若拿A卷的同学不能挨在一起，共有多少种排列方法？



拿B卷的4位同学中间及两端共有5个空隙

拿A卷的3位同学从5个空隙中选3个插入：C_5^3

总方法$C_5^3 \cdot A_4^4 \cdot A_3^3$

10.4.3 排列问题•插空法

【插空法】解决某几个元素不能相邻时采用

①先插空：将不能相邻的元素插入没有要求的元素中间及两端空隙中

②再排列：视题干需求分别全排列

【插空法】一共有$m+n$个元素，其中有n个有特殊要求的元素，每个都不能相邻。剩下有m个没有不相邻要求的元素，包括两端有$m+1$个空位。把n个不能相邻的元素插入到$m+1$个空位里，有方法C_{m+1}^n种

n个不能相邻的元素不同

若元素不同，需要对不同的元素分别排序，$C_{m+1}^n \times A_m^m \times A_n^n$

m个能相邻的元素不同

10.4.3 排列问题•插空法

【例】节日到了，学校组织文艺演出，总共有8个节目，这当中有3个不同舞蹈类节目，他们不能安排在一起，求一共有多少种排法？ $C_6^3 \cdot A_5^5 \cdot A_3^3$

第①步：将3个不能相邻的舞蹈节目插入剩余5个没有要求的节目中间及两端的6个空隙中：C_6^3

第②步：3个不同的舞蹈节目和5个其余节目分别全排列：$A_5^5 \cdot A_3^3$

$C_6^3 \cdot A_5^5 \cdot A_3^3$

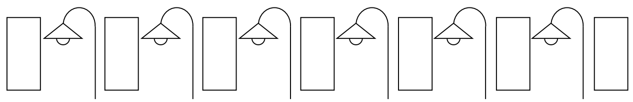
【插空法】解决某几个元素不能相邻时采用

①先插空：将不能相邻的元素插入没有要求的元素中间及两端空隙中

②再排列：视题干需求分别全排列

10.4.3 排列问题•插空法

【例】马路上有九盏路灯排成一排，现要关掉其中的3盏，但不能关掉相邻的灯，求满足条件的关灯方法有多少种？（C_7^3）

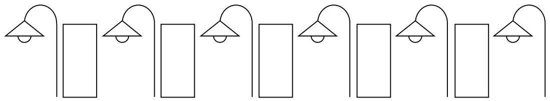


在6盏亮灯中间及两端的7个空隙中插入3个不亮的灯：C_7^3

关注MBA大师公众号

10.4.3 排列问题•插空法

【例】马路上有九盏路灯排成一排，现要关掉其中的3盏，但不能关掉相邻的灯，也不能关掉两端的2盏，求满足条件的关灯方法有多少种？（C_5^3）

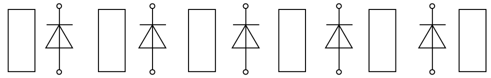


不能关掉两端，因此插空不可在两端插入

在6盏亮灯中间的5个空隙中插入3个不亮的灯：C_5^3

10.4.3 排列问题•插空法

【例】有一排8个发光二极管，每个二极管点亮时可发出红光或绿光，若每次恰有3个二极管点亮，但相邻的两个二极管不能同时点亮，根据这三个点亮的二极管的不同位置和不同颜色来表示不同的信息，求这排二极管能表示的信息种数共有多少种？（160种 ）



第①步：把3个点亮的二极管插放在未点亮的5个二极管之间及两端的6个空上：C_6^3种

第②步：分别确定每个二极管发光颜色：$2\times2\times2=8$种

$C_6^3\times8=160$

10.4.3 隔板法VS插空法

【隔板法】：有n个完全相同的元素，投放到m个地方/分配给m个人，每个地方/每个人至少分得一个元素，则可投放的数量为C_{n-1}^{m-1}

【2009.10.14】若将10只相同的球随机放入编号为1、2、3、4的四个盒子中，则每个盒子不空的投放方法有$C_{10-1}^{4-1}=C_9^3=84$ $\boxed{\text{相同元素永远不排列}}$

【插空法】一共有$m+n$个元素，其中有n个有特殊要求的元素，每个都不能相邻。剩下有m个没有不相邻要求的元素，中间及两端共有$m+1$个空位。

把n个不能相邻的元素，插入到$m+1$个空位里，有方法C_{m+1}^n种

10.4.3 隔板法VS插空法

【隔板法】

① 元素必须相同，每个元素只能被用1次。

② 把n个相同元素，分配到m个不同地方/给m 个人，且不能为空。

③ n个相同的元素排成一排，间隙插入$m-1$个隔板，把n个元素恰好分成了不为空的m组。

因为隔板左右都必须有元素不能为空，所以n个元素，只有中间的$n-1$个空位可以插隔板。

共有C_{n-1}^{m-1}种方法。

【插空法】

①所有元素共有$m+n$个，分为两类，一类n个彼此不能相邻，另一类m个没有要求。

② m个没有要求的元素排成一排，中间及两端共有$m+1$个位置，插入不能相邻元素。

共有 C_{m+1}^n种方法.

③元素可以相同，可以不相同，每个元素只能使用1次。

如果元素相同，不用排列，如果元素不同，将不同的元素排列，$C_{m+1}^n\times A_m^m\times A_n^n$

10.4 排列组合•排列问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

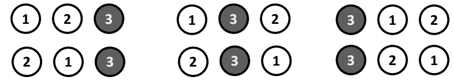
分组问题

排列问题
- 【1】某个元素能/不能处于某个位置，全部分配
- 【2】捆绑法：几个元素绑定位置排序☆
- 【3】插空法：几个元素不能相邻☆
- 【4】消序：局部定序/局部元素相同

需分情况讨论类问题

10.4.4 局部定序/局部元素相同消序

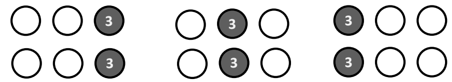
【例1】三个球分别标号为1、2、3。其中1、2号为白球，3号为蓝球，一共有多少种排法__6__



$A_3^3=6$种

其中白球序号从小到大排列，一共有多少种排法__3__

【例2】三个球分别标号为1、2、3。其中1和2号白球字迹看不清了，视为相同白球，3号为蓝球，一共有多少种排法__3__



$\frac{A_3^3}{A_2^2}=3$种

局部定序/局部元素相同，都会减少排列的方法总数
减少的倍数为定序数/元素相同数的全排列（阶乘）

10.4.4 局部$\boxed{\text{定序}}$/局部元素$\boxed{\text{相同}}$消序

【例1】5面旗子，其中3面白旗，2面红旗，一共有多少种排序方法

$A_5^5/(A_3^3A_2^2)$

【例2】5面旗子，三面标有1、2、3号的白旗，和两面红旗，一共有多少种排序方法

A_5^5/A_2^2

【例3】5面旗子，三面白旗，和标有4、5号的两面红旗，一共有多少种排序方法

A_5^5/A_3^3

【例4】5人排队，其中三个男生，两个女生，男生按身高从高到低排序，一共有多少种排序方法

A_5^5/A_3^3

【例5】5人排队，其中三个男生，两个女生，女生按身高从高到低排序，一共有多少种排序方法

A_5^5/A_2^2

【例6】5人排队，其中三个男生，两个女生，男女均按身高从高到低排序，一共有多少种排序方法

$A_5^5/(A_3^3A_2^2)$

10.4.4 局部定序/局部元素相同消序

【例7】1~7号停车位，停入4辆不同的车，和3辆相同的车，有多少不同的停放方法

A_7^7/A_3^3

【例8】1~7号停车位，停入4辆不同的车，一定有多少不同的停放方法

A_7^7/A_3^3

【例9】1~7号停车位，停入3辆不同的车，一定有多少不同的停放方法

A_7^7/A_4^4

【例10】1~7号停车位，停入3辆不同的车，和2辆相同的车，一共有多少不同的停放方法

$A_7^7/$（$A_2^2\times A_2^2$）

【例11】1~7号停车位，停入3辆不同的车，和2辆相同的车，三辆不同的车位置顺序固定。一共有多少不同的停放方法?

$A_7^7/$（$A_2^2\times A_2^2\times A_3^3$）

10.4.4 局部定序/局部元素相同消序

【例】将A，B，C，D，E排成一列，要求A，B，C在排列中顺序为“A，B，C”（不必须相邻），这样的排列方法有（ B ）

A．12种　B．20种　C 24种　D．40种　E．60种

没有特殊要求全排列共有= $A_5^5=120$种

确定了三个位置的顺序：除以$A_3^3=6$

$$\frac{A_5^5}{A_3^3}=\frac{120}{6}=20$$

10.4.4 局部定序/局部元素相同消序

【例题扩展】将A，B，C，D，E排成一列，要求A，B，C在排列中顺序为“A，B，C”或“C，B，A”(不必须相邻)，这样的排列方案有__40种__

没有特殊要求全排列共有= $A_5^5=120$种

A、B、C三个字母位置顺序由$A_3^3=6$种，变为“A，B，C”或“C，B，A”2种。

共有$\frac{120}{3}=40$种

另解：“A、B、C”，“C、B、A”，分别定序计算

$\frac{120}{A_3^3}\times 2=40$种

10.4.4 局部定序/局部元素相同消序

【2014.10.12】用0、1、2、3、4、5组成没有重复数字的四位数，其中千位数字大于百位数字且百位数字大于十位数字的四位数的个数是（ D ）

（A）36　（B）40　（C）48　（D）60　（E）72

千位	百位	十位	个位

第①步：个位数随便取：共有6种可能

第②步：千百十任取三个

因为从大到小排列（定序），故0不可能排在首位

$A_5^3/A_3^3=C_5^3=10$

共$6\times 10=60$种可能

10.4.4 局部定序/局部元素相同消序

【2014.10.12修改】用0、1、2、3、4、5组成没有重复数字的四位数，其中千位数字小于百位数字，且百位数字小于十位数字的四位数的个数是（ A ）

（A）30　（B）40　（C）48　（D）60　（E）72

有特殊功能元素：分情况讨论

【个位数取0】5个数随便取3个，而且位置固定，有：$A_5^3/A_3^3=C_5^3=10$

【个位数没取到0】千百十都不能取0，共有：$C_5^1\times C_4^3=20$

共有$10+20=30$种方法

10.4 排列组合•排列问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

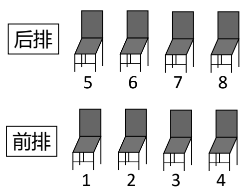
分组问题

排列问题
- 【1】某个元素能/不能处于某个位置，全部分配
- 【2】捆绑法：几个元素绑定位置排序☆
- 【3】插空法：几个元素不能相邻☆
- 【4】消序：局部定序/局部元素相同
- 【5】分成两排排列

需分情况讨论类问题

10.4.5 排列问题•两排排列，无相邻要求

【例题】前后两排共有8个座位，每排4个，其中甲、乙在前排，丙在后排，共有多少排法？ 48



第①步：甲、乙在前排有次序地选定两个座位

$C_4^2\times A_2^2=A_4^2$

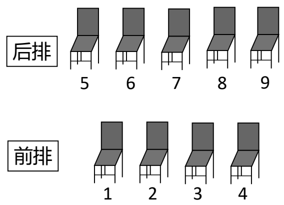
第②步：丙在后排中选定一个座位

C_4^1

$C_4^2\times A_2^2\times C_4^1=48$

10.4.5 排列问题•两排排列，无相邻要求

【例题】9人排成前后两排，第一排站4人，其中甲、乙在前排，丙在后排，共有多少排法



第①步：甲、乙在前排有次序地选定两个座位

$C_4^2\times A_2^2=A_4^2$

第②步：丙在后排中选定一个座位

C_5^1

第③步：剩余6人分别选定剩余6个座位

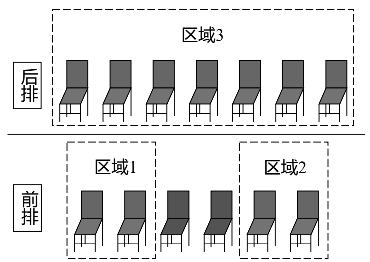
A_6^6

$C_4^2\times A_2^2\times C_5^1\times A_6^6$

10.4.5 排列问题•两排排列，有相邻要求

【2008.1.13】有两排座位，前排6个座，后排7个座，若安排2人就坐。规定前排中间2个座位不能坐，且此2人始终不能相邻而坐，则不同的坐法种数为（ C ）

(A) 92　(B) 93　(C) 94　(D) 95　(E) 96



区域1+区域3= $C_2^1\cdot C_7^1\cdot A_2^2=28$

区域2+区域3= $C_2^1\cdot C_7^1\cdot A_2^2=28$

区域1+区域2= $C_2^1\cdot C_2^1\cdot A_2^2=8$

区域3+区域3【不相邻问题插空法】

2个不能相邻的座位插在5个座位中间及两端

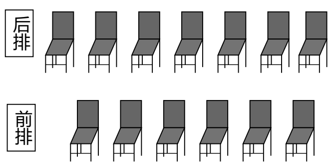
$C_6^2\times A_2^2=30$

$28+28+8+30=94$

10.4.5 排列问题•两排排列，有相邻要求

【2008.1.13修改】有两排座位，前排6个座，后排7个座。若安排2人就坐。此2人始终不能相邻而坐，则不同的坐法种数为（ C ）

(A) 92　　(B) 124　　(C) 134　　(D) 119　　(E) 109



$C_6^1\cdot C_7^1\cdot A_2^2+C_5^2\cdot A_2^2+C_6^2\cdot A_2^2=134$

方案①：二人分别落座前排与后排

则自动满足不相邻

前排+后排= $C_6^1\times C_7^1\times A_2^2$

方案②：两人同时落座前排，不相邻问题【插空法】

2个不能相邻的座位分别插在4个座位中间及两端

$C_5^2\cdot A_2^2$

方案③：两人同时落座后排，不相邻问题【插空法】

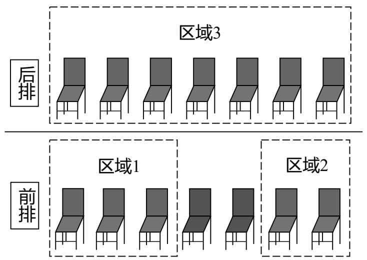
2个不能相邻的座位分别插在5个座位中间及两端

$C_6^2\cdot A_2^2$

10.4.5 排列问题•两排排列，有相邻要求

【2008.1.13修改】有两排座位，每排7个座。若安排2人就坐，规定前排第4个和第5个位置不能坐，且此2人始终不能相邻而坐，则不同的坐法种数为（ D ）

(A) 93　　(B) 100　　(C) 108　　(D) 114　　(E) 112



①：区域1+区域3 $=C_3^1\cdot C_7^1\cdot A_2^2=42$

②：区域2+区域3 $=C_2^1\cdot C_7^1\cdot A_2^2=28$

③：区域1+区域2 $=C_3^1\cdot C_2^1\cdot A_2^2=12$

④：区域3+区域3：不相邻问题插空法

2个不能相邻的座位插在5个座位中间及两端

$=C_6^2\times A_2^2=30$

⑤：区域1+区域1 $=1\times A_2^2=2$

$42+28+12+30+2=114$

10.5 排列组合•需分情况讨论的问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

分组问题

排列问题

需分情况讨论的问题
- 【1】双重功能元素(某元素具有双重功能) ☆

10.5.1 分情况讨论•双重功能元素

【例题】7位同学朗诵比赛，有3个同学可以表演法语节目，3个同学可以表演英语节目，有1个同学既可以朗诵法语，也可以朗诵英语。若7个节目，没有两个法语节目相邻，也没有两个英语节目相邻，请问上场顺序一共有多少种可能性 $A_3^3\times A_4^4+A_4^4\times A_3^3$

根据法语朗诵是否选中双重功能元素进行分类讨论

方案①：法语朗诵选中双重功能元素：$A_3^3\times A_4^4$

法	英	法	英	法	英	法

方案②：法语朗诵未选中双重功能元素

则双重功能元素朗诵英语：$A_4^4\times A_3^3$

英	法	英	法	英	法	英

10.5.1 分情况讨论•双重功能元素

有A、B两件事，其中有m个元素只能做A，n个元素只能做B，1个元素A、B均可以做，具有双重功能

有双重功能元素 → 选取做A事的人时，是否选中双重功能元素

YES → 双重功能元素等同于只做A的元素
双重功能占1个A组名额
剩下按要求分别在A、B两组中选取

NO → A组在只能做A事的元素中选取
B组事在双重功能元素和只能做B事的元素中任意选取
双重功能元素等同于只做B的元素

多个双重功能元素
按选取做A事的人时：
选中了0个双重功能
选中了1个双重功能
选中了2个双重功能
……………
分情况讨论

10.5.1 分情况讨论•双重功能元素

【例】现安排甲、乙、丙、丁、戊5名同学参加上海世博会志愿者服务活动，每人从事翻译、导游、礼仪、司机四项工作之一，每项工作至少有一人参加。甲、乙、丙不会开车但能从事其他三项工作，丁、戊都能胜四项工作，则不同安排方案的总数是__78__

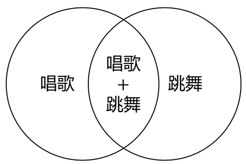
第①类：翻译、导游、礼仪所有人都能做
第②类：开车
双重功能元素：丁、戊

方案①：第②类开车的人选了两个双重功能元素：丁、戊均开车
甲、乙、丙三人刚好分别进行第①类翻译、导游、礼仪
$1\times A_3^3=6$种

方案②：第②类开车选了一个双重功能元素：丁、戊中选一人开车，
剩下一人等同于甲、乙、丙功能。这四人分为3组，这三组分别进行翻译、导游、礼仪
$C_2^1\cdot\frac{C_4^2\cdot C_2^1\cdot C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=72$种

10.5.1 分情况讨论•双重功能元素

【例】在一次演唱会上共10名演员，其中8人能能唱歌，5人会跳舞，现要演出一个2人唱歌2人伴舞的节目，有多少选派方法？__199种__



10个演员中有：5人只会唱歌
2人只会跳舞
3人既会唱歌又会跳舞

以唱歌组选中几个双重功能元素为分类标准

方案①：唱歌的选中0个双重功能元素
3个双重功能元素等同于只会跳舞的
$C_5^2\cdot C_{2+3}^2=100$

方案②：唱歌的选中1个双重功能元素
剩下的2个双重功能元素等同于只会跳舞的
$C_3^1\cdot C_5^1\cdot C_{2+2}^2=90$

方案③：唱歌的选中2个双重功能元素
剩下的1个双重功能元素等同于只会跳舞的
$C_3^2\cdot C_{2+1}^2=C_3^2\cdot C_3^2=9$

10.5 排列组合•需分情况讨论的问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

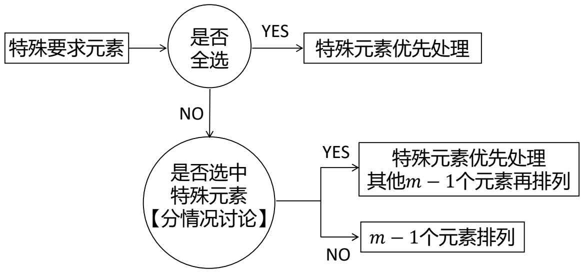
分组问题

排列问题

需分情况讨论的问题
- 【1】双重功能元素(某元素具有双重功能) ☆
- 【2】元素处于/不能处于某个位置（不全选时） ☆

10.5.2 必须/不能处于某位置（不全选）

在n个元素中，选取m个进行排列，其中有一个是有特殊位置要求的元素。



10.5.2 必须/不能处于某位置（全选）

【例1】7个不同的文艺节目编成一个节目单，如果某女演员的独唱节目一定不能排在第二个节目的位置上，则共有（ B ）种不同的排法。

A. 720　B. 4320　C. 2160　D. 144　E.1440

① $\cancel{②}$ ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦

$C_6^1\cdot A_6^6=4320$

10.5.2 必须/不能处于某位置（不全选）

【例2】从7个不同的文艺节目中选5个编成一个节目单，如果某女演员的独唱节目一定不能排在第二个节目的位置上，则共有（ D ）种不同的排法。

A. 2060　B. 2080　C. 2120　D. 2160　E. 2180

① $\cancel{②}$ ③ ④ ⑤

解法一：

占位法：$C_6^1\cdot C_6^4\cdot A_4^4=2160$

解法二

方案①：选中女演员独唱节目：$C_4^1\cdot C_6^4\cdot A_4^4$

方案②：未选女演员独唱节目：$C_6^5\cdot A_5^5$

$$C_4^1\cdot C_6^4\cdot A_4^4+C_6^5\cdot A_5^5=2160$$

10.5.2 必须/不能处于某位置（不全选）

【例】有9张卡片，分别写着0~8这九个阿拉伯数字，现从中任取3张排成一个三位数，其中6既可以当6用，也可以当9用，则一共可以组成多少个不同的3位数（ A ）

A. 602　B. 604　C. 606　D. 608　E. 610

题目分析：含有双重功能元素6（可以作为6和9使用） 0 1 2 3 4 5 6 7 8

含有不能处于首位元素0

是否有6	是否有0	百位　十位　个位
√	√	$C_7^1\cdot C_2^1\cdot A_2^2\cdot 2=56$
√	×	$C_7^2\cdot A_3^3\cdot 2=252$
×	√	$C_7^2\cdot C_2^1\cdot A_2^2=84$
×	×	$C_7^3\cdot A_3^3=210$

10.5 排列组合•需分情况讨论的问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

分组问题

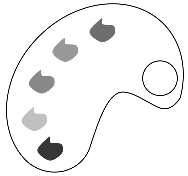
排列问题

需分情况讨论的问题
- 【1】双重功能元素(某元素具有双重功能) ☆
- 【2】元素处于/不能处于某个位置（不全选） ☆
- 【3】多色涂色问题

附加考点：二项式定理

10.5.3 多色涂色问题

5块板子，用5种颜色来涂，要求相邻的两块颜色不能相同，则不同的涂色方案共有多少种？ 1280



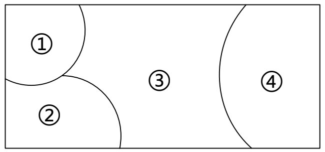
5	$5-1$	$5-1$	$5-1$	$5-1$

$5\times4\times4\times4\times4=1280$

从左到右分步染色

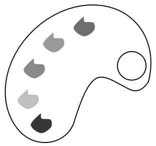
10.5.3 多色涂色问题

用5种不同的颜色给图中①、②、③、④各部分涂色，每部分只涂一种颜色，要求相邻的两部分颜色不能相同，则不同的涂色方案共有多少种？ 240



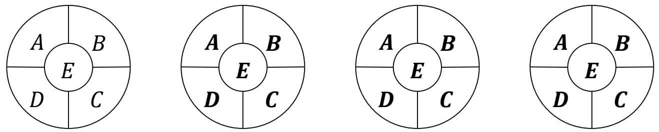
从左到右分步染色

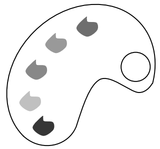
$5\times4\times3\times4=240$



10.5.3 多色涂色问题

用5种颜色来涂如下图形，要求相邻的两块颜色不能相同，则不同的涂色方案共有多少种？





3种颜色：C_5^3

3种不同类色块：A_3^3

$C_5^3\times A_3^3=60$

4种颜色：C_5^4

4种不同类色块：A_4^4

$C_5^4\times A_4^4\times2=240$

5种颜色：C_5^5

5种不同类色块：A_5^5

$C_5^5\times A_5^5=120$

$60+240+120=420$

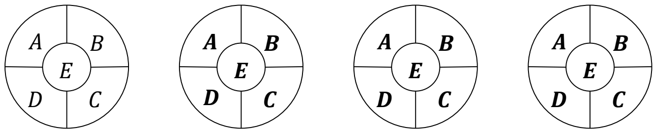
10.5.3 多色涂色问题

多色涂色问题：

①：根据所需颜色数目进行分类

②：每种情况下先挑颜色，再排列

（条形：从左到右分步涂色即可）



10.5 排列组合•需分情况讨论的问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

分组问题

排列问题

需分情况讨论的问题
- 【1】双重功能元素(某元素具有双重功能) ☆
- 【2】元素处于/不能处于某个位置（不全选） ☆
- 【3】多色涂色问题
- 【4】2个元素有位置限制

附加考点：二项式定理

10.5.4 两个元素有位置限制

【例1】7位同学站成一排，共有多少种不同的排法？ 5040

7个元素全排列：$A_7^7=5040$

【例2】7位同学站成一排，其中甲站在正中间的位置，共有多少种不同的排法？ 720

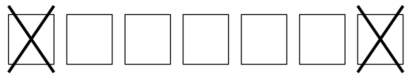
余下6个元素全排列：$A_6^6=720$

【例3】7位同学站成一排，甲、乙只能站在两端，共有多少种不同的排法？ 240

$A_2^2\cdot A_5^5=240$

10.5.4 两个元素有位置限制

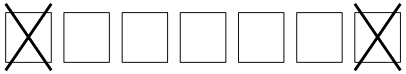
【例4】7位同学站成一排，甲、乙不能站在排头和排尾，共有多少种不同的排法？ 2400



$A_5^2\cdot A_5^5=2400$

10.5.4 两个元素有位置限制

【例4】7位同学站成一排，若甲不在排头、乙不在排尾，共有多少种不同的排法？ 3720



甲不在排头　　　　　　　　　　乙不在排尾

解法一：直接法：以甲的位置作为分类标准，安排方案分为2类

方案①：甲恰好在排尾时，乙及其他人可以在前6个位置任意排列

$A_6^6=720$

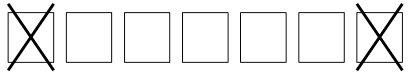
方案②：先安排甲：甲在中间（既不在排头也不在排尾）

再安排乙：乙在除排尾及甲站位外5个位置任选；最后安排其余人

$A_5^1\cdot A_5^1\cdot A_5^5=3000$

10.5.4 两个元素有位置限制

【例4】7位同学站成一排，若甲不在排头、乙不在排尾，共有多少种不同的排法？ 3720



甲不在排头　　　　　　　　　　乙不在排尾

解法二：间接法：所有排法中除去不符合的

所有排法：A_7^7

甲在排头：A_6^6

乙在排尾：A_6^6

甲在排头且乙在排尾：A_5^5

$A_7^7-2A_6^6+A_5^5=3720$

10.5.4 两个元素有位置限制

【例】将5列车停在5条不同的轨道上，要求A列车不能停在第一轨道上，B列车不能停在第二轨道上，那么不同的停放方法有（ C ）

A. 120　　B. 96　　C. 78　　D. 72　　E. 60

①
②
③
④
⑤

$A_5^5-2\cdot A_4^4+A_3^3=78$

方案①：A列车恰好停在第二轨道时

B列车及其余列车可以随意停放

$A_4^4=24$

方案②：A列车停在除第一、第二轨道以外的轨道

B列车停在除第二、A列车所停轨道

其余列车无限制，全排列

$C_3^1\cdot C_3^1\cdot A_3^3=54$

10.5 排列组合•需分情况讨论的问题

基础知识
- 【1】加法原理与乘法原理
- 【2】排列数与组合数的计算及基本性质
- 【3】5步思维法

分组问题

排列问题

需分情况讨论的问题
- 【1】双重功能元素(某元素具有双重功能) ☆
- 【2】元素处于/不能处于某个位置（不全选） ☆
- 【3】多色涂色问题
- 【4】2个元素有位置限制

附加考点：二项式定理

10.6 附加：二项式定理

完全平方公式：$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}$

n个$(a+b)$相乘　每一项都是n次式

$\boxed{a^nb^0}$　$\boxed{a^{n-1}b}$　$\cdots$　$\boxed{a^{n-r}b^r}$　$\cdots$　$\boxed{a^0b^n}\rightarrow\boxed{C_n^n\cdot b^n}$

$\boxed{C_n^0\cdot a^n}$

$\boxed{C_n^r\cdot C_{n-r}^{n-r}\cdot a^{n-r}b^r=C_n^r\cdot a^{n-r}b^r}$

$\boxed{C_n^1\cdot C_{n-1}^{n-1}\cdot a^{n-1}b=C_n^1\cdot a^{n-1}b}$

二项式系数

通项：$C_n^ra^{n-r}b^r$

$(a+b)^n=\boxed{C_n^0}a^n+\boxed{C_n^1}a^{n-1}b+\cdots+\boxed{\boxed{C_n^r}a^{n-r}b^r}+\cdots+\boxed{C_n^n}b^n$

二项展开式

10.6 附加：二项式定理

二项展开式：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$

第1项　第2项　第$r+1$项　第$n+1$项

通项公式：$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$

$\boxed{\text{二项式系数为从}n\text{个}(a+b)\text{中拿出}r\text{个}b\text{的组合数}}$

求二项式定理中的特定项：$(x+2y)^5$的展开式第4项是什么？

$T_{3+1}=\boxed{C_5^3}x^{5-3}(2y)^3=10x^2(2y)^3=\boxed{80}x^2y^3$

第4项的二项式系数　第4项的系数

10.6 附加：二项式定理

二项展开式：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$

二项式系数的性质：

①：对称性：与首末两端“等距离”两项的二项式系数相等，即：

$C_n^0=C_n^n$，$C_n^1=C_n^{n-1}$，……，$C_n^k=C_n^{n-k}$

②：最大值：

当n为偶数时，中间的一项的二项式系数取得最大值

当n为奇时，中间的两项的二项式系数相等，且同时取得最大值

③：二项式系数的和：

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n$

$C_n^0+C_n^2+\cdots+C_n^{2r}+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots+C_n^{2r+1}+\cdots=2^{n-1}$

THANK YOU FOR WATCHING