# 数学系统精讲

## 解析几何

MBA大师 — 数学董璞

## 9 解析几何套路分类

1.基础知识
- 【1】平面直角坐标系
- 【2】点与直线
- 【3】圆

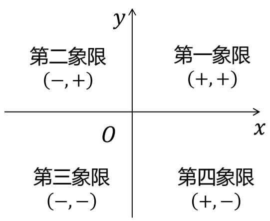
2.秒杀词汇【对称】

3.直线与圆

4.直线与抛物线

5.直线与圆的不等式

## 9.1.1 平面直角坐标系

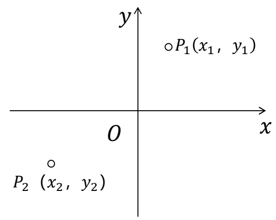



1.坐标平面内的点与有序实数对一一对应
2.坐标轴上的点不属于任何象限
3.$y$轴上的点，横坐标都为0
4.$x$轴上的点，纵坐标都为0
5.一点上下平移，横坐标不变，即平行于$y$轴的直线上的点横坐标相同
6.一点左右平移，纵坐标不变，即平行于$x$轴的直线上的点纵坐标相同
7.一个关于$x$轴对称的点横坐标不变，纵坐标变为原坐标的相反数
8.一个关于$y$轴对称的点纵坐标不变，横坐标变为原坐标的相反数

## 9.1.2 点与直线

【两点间距离公式】设$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，点$P_1$和$P_2$之间的距离记为$P_1P_2$，则：

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



## 9.1.2 点与直线

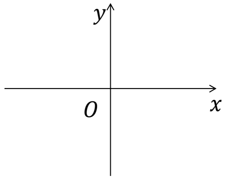
1.一般式：$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$ $\boxed{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$

2.点斜式：已知直线上的点$P(x_0, y_0)$和斜率$k$，方程为$y-y_0=k(x-x_0)$

3.斜截式：已知斜率$k$和直线在$y$轴上的截距$b$，方程为$y=kx+b$

4.两点式：已知直线上两点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2$（$x_2$，$y_2$），方程为$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

5.截距式：已知直线在$x$轴上的截距为$a$，$y$轴上的截距$b$，方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$




## 9.1.2 点与直线

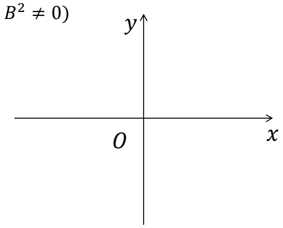
1.一般式：$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$

2.点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$

3.斜截式：$y=kx+b$

4.两点式：$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

5.截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$




确定一条直线：两点坐标　　斜率+一点坐标

已知两点，画出直线 $P_1(1,2)$，$P_2(-2,-3)$

已知斜率+一点，画出直线 $P(1,2)$，$k=1$

## 9.1.2 点与直线

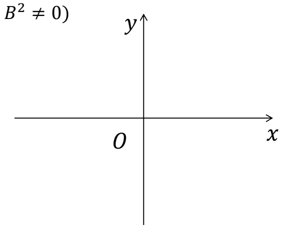
1.一般式：$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$

2.点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$

3.斜截式：$y=kx+b$

4.两点式：$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

5.截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$




【必备重要知识点1】寻找直线在$x$轴和$y$轴的截距

代入$x=0$，得$y$轴截距

代入$y=0$，得$x$轴截距

如果$C=0$，那么直线过原点（0,0）

## 9.1.2 点与直线

【两直线位置关系】设两条直线方程为：$l_1$：$A_1x+B_1y+C_1=0$，　$l_2$：$A_2x+B_2y+C_2=0$.

| | 相交 | 平行 | 重合 |
|---|---|---|---|
| 交点个数 | 一个 | 无 | 两个以上 |
| 方程组解 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ | 有唯一解$(x_0, y_0)$ 它就是$l_1$和$l_2$的交点 | 无解 | |
| 斜率 | $k_1\neq k_2$ 垂直：$A_1A_2+B_1B_2=0$ $k_1\times k_2=-1$ | $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ $k_1=k_2$ | $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ $k_1=k_2$ |

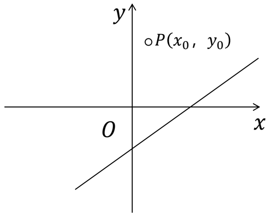
词汇 【两条直线垂直】两条直线的斜率$k_1\times k_2=-1$

【两条直线平行】两条直线的斜率$k_1=k_2$

## 9.1.2 点与直线

【点到直线距离公式】点$P(x_0, y_0)$到直线$Ax+By+C=0$的距离为：

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$ 必备重要知识点2



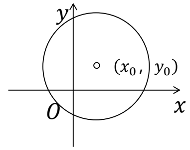

## 9.1.3 圆

1.标准方程：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，其中，$(x_0, y_0)$为圆心，$r$为半径.

2.一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中，系数满足$D^2+E^2-4F>0$.

一般方程用配方法可化为标准方程：$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$

即圆心为$(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$，半径$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$




考点1：配方找圆心和半径

考点2：找圆与$x$轴和$y$轴的交点：代入$y=0$或者$x=0$，解方程

## 9.1.3 圆

圆与圆的位置关系

圆$C_1$：$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$，圆$C_2$：$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2$

两圆的圆心距$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

则有1. $C_1$与$C_2$外离$\Leftrightarrow d>r_1+r_2$

2.$C_1$与$C_2$外切$\Leftrightarrow d=r_1+r_2$

3.$C_1$与$C_2$内切$\Leftrightarrow d=|r_1-r_2|$

4.$C_1$与$C_2$相交于两点$\Leftrightarrow |r_1-r_2|<d<r_1+r_2$

5.$C_1$与$C_2$为包含关系$\Leftrightarrow 0\le d<|r_1-r_2|$

考点3：点、直线、圆与圆的位置关系

## 9.1.3 圆

【2014.10.9】圆$x^2+y^2+2x-3=0$与圆$x^2+y^2-6y+6=0$（ $C$ ）.

(A) 外离　(B) 外切　(C) 相交　(D) 内切　(E) 内含

---

$x^2+y^2+2x-3=0$配方得：$(x+1)^2+y^2=4$

圆心为：$(-1,0)$，半径为2

$x^2+y^2-6y+6=0$配方得：$x^2+(y-3)^2=3$

圆心为：$(0,3)$，半径为$\sqrt{3}$

两圆的圆心距$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(-1-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$

$2-\sqrt{3}<\sqrt{10}<2+\sqrt{3}$

## 9.1.3 圆

【2008.1.28】圆$C_1:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=r^2$与圆 $C_2:x^2-6x+y^2-8y=0$有交点( $E$ )

（1）$0<r<\frac{5}{2}$.　　（2）$r>\frac{15}{2}$.

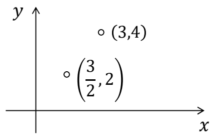
---

圆$C_1:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=r^2$，圆心为$\left(\frac{3}{2},2\right)$，半径为$r$

圆 $C_2:x^2-6x+y^2-8y=0$，配方得：$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

圆心为(3,4)，半径为5

两圆的圆心距$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$




$C_1$与$C_2$有交点$\Leftrightarrow |r_1-r_2|\le d\le r_1+r_2$

$5-\frac{5}{2}\le r\le 5+\frac{5}{2}$

【技巧】极端情况分析法

## 9 解析几何套路分类

1.基础知识
- 【1】平面直角坐标系
- 【2】点与直线
- 【3】圆

2.秒杀词汇【对称】
- 【1】关于$y=x$对称
- 【2】求关于$y$轴对称
- 【3】求关于$x$轴对称
- 【4】求某点关于某直线的对称点

3.直线与圆

4.直线与抛物线

5.直线与圆的不等式

## 9.2 秒杀词汇【对称】

1）求关于$y$轴对称的新函数（横坐标对称），将原函数中的$x$用$-x$替换

2）求关于$x$轴对称的新函数（纵坐标对称），将原函数中的$y$用$-y$替换

3）求关于$y=x$对称的新函数，把原函数方程中的$x$和$y$互换

4）求关于$y=-x$对称的新函数，把原函数方程中的$x$变$-y$，$y$变$-x$

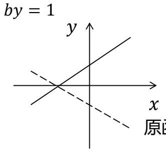
5）求关于原点(0,0)对称的新函数，把原函数方程中的$x$变$-x$，$y$变$-y$

6）求关于某直线的对称点

## 9.2 秒杀词汇【对称】【直线关于直线对称】

$ax+by=1$关于$x$轴对称的直线为

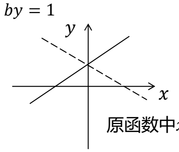
$ax-by=1$




原函数中$y$变$-y$

$ax+by=1$关于$y$轴对称的直线为

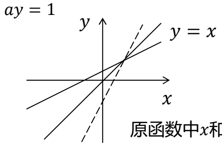
$-ax+by=1$




原函数中$x$变$-x$

$ax+by=1$关于$y=x$对称的直线为

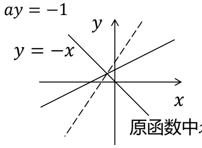
$bx+ay=1$




原函数中$x$和$y$互换

$ax+by=1$关于$y=-x$对称的直线为

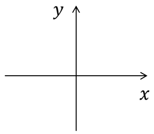
$bx+ay=-1$




原函数中$x$变$-y$，$y$变$-x$

## 9.2 秒杀词汇【对称】

【圆关于直线对称】




求圆：$x^2+y^2+2x-6y-14=0$

关于直线 $y=x$的对称圆：

原函数中$x$和$y$互换：$x^2+y^2+2y-6x-14=0$

关于$y$轴的对称圆：

原函数中$x$变$-x$：$x^2+y^2-2x-6y-14=0$

关于$x$轴的对称圆：

原函数中$y$变$-y$：$x^2+y^2+2x+6y-14=0$

## 9.2 秒杀词汇【对称】

【2008.1.12】以直线$y+x=0$为对称轴且与直线$y-3x=2$对称的直线方程为（ $A$ ）

（A）$y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$　（B）$y=\frac{x}{-3}+\frac{2}{3}$　（C）$y=-3x-2$

（D）$y=-3x+2$　（E）以上都不是

---

原函数中$x$变$-y$，$y$变$-x$

得到：$-x+3y=2$

整理得：$y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$

## 9.2 秒杀词汇【对称】

【2010.10.22】圆$C_1$是圆$C_2$：$x^2+y^2+2x-6y-14=0$关于直线$y=x$的对称圆.（ $B$ ）

（1）圆$C_1$：$x^2+y^2-2x-6y-14=0$

（2）圆$C_1$：$x^2+y^2+2y-6x-14=0$

---

圆$C_2$函数中$x$和$y$互换：$x^2+y^2+2y-6x-14=0$

## 9.2 秒杀词汇【对称】

【2012.10.19】直线$L$与直线$2x+3y=1$关于$x$轴对称.（ $A$ ）

（1）$L$: $2x-3y=1$.

（2）$L$: $3x+2y=1$.

---

求关于$x$轴对称的函数（纵坐标对称），将原函数中的$y$用$-y$替换
求关于$y=x$对称的函数，把原函数方程中的$x$和$y$互换

与$2x+3y=1$关于$x$轴对称的直线为：$2x-3y=1$

条件（1）充分

条件（2）：与$2x+3y=1$关于$y=x$轴对称的直线为：$2y+3x=1$

## 9 解析几何套路分类

1.基础知识
- 【1】平面直角坐标系
- 【2】点与直线
- 【3】圆

2.秒杀词汇【对称】
- 【1】关于$y=x$对称
- 【2】求关于$y$轴对称
- 【3】求关于$x$轴对称

点到直线距离公式

3.直线与圆
- 判断直线与圆位置关系→找圆心，直线与圆心（点）的距离
- 找过圆上一点的切线→找圆心，找斜率→垂直

4.直线与抛物线

5.直线与圆的不等式

## 9.3 直线与圆

【1997.10.10】若圆的方程是$y^2+4y+x^2-2x+1=0$，直线方程是$3y+2x=1$，则过已知圆的圆心并与已知直线平行的直线方程是（$C$）

(A) $2y+3x+1=0$　(B) $2y+3x-7=0$　(C) $3y+2x+4=0$　(D) $3y+2x-8=0$　(E) $2y+3x-6=0$

---

圆方程$y^2+4y+x^2-2x+1=0$配方得：$(x-1)^2+(y+2)^2=4$

圆心为：$(1,-2)$，半径为2

所求直线与$3y+2x=1$斜率相等且过点$(1,-2)$

设为$3y+2x=C$，代入$x=1$，$y=-2$得：$C=-4$

故所求直线方程为：$3y+2x+4=0$

## 9.3 直线与圆

【2018.24】设$a,b$为实数，则圆$x^2+y^2=2y$与直线$x+ay=b$不相交.（A）

(1) $|a-b|>\sqrt{1+a^2}$　(2) $|a+b|>\sqrt{1+a^2}$

---

判断直线与圆位置关系→找圆心，直线与圆心（点）的距离

圆$x^2+y^2=2y$配方得：$x^2+(y-1)^2=1$

圆心为：$(0,1)$，半径为1

点到直线距离公式$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

不相交即相切或相离

圆心$(0,1)$到直线$x+ay-b=0$的距离$d\geq r$

$d=\frac{|a-b|}{\sqrt{1+a^2}}\geq 1$，$|a-b|\geq\sqrt{1+a^2}$

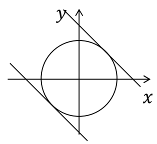
## 9.3 直线与圆

【2011.1.11】设$P$是圆$x^2+y^2=2$上的一点，该圆在点$P$的切线平行于直线$x+y+2=0$，则点$P$的坐标为（$E$）

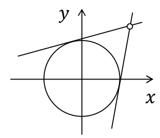
(A) $(-1,1)$　(B) $(1,-1)$　(C) $(0,\sqrt{2})$　(D) $(\sqrt{2},0)$　(E) $(1,1)$

---

给定一个圆确定切线




给出切线斜率⇒2条平行切线




给出过圆外一点⇒2条相交切线

$x+y+2=0$斜率为-1

切点与圆心连线垂直于切线$k_1\times k_2=-1$ 设切点坐标为$P(x_0,x_0)$

代入圆方程得：$x_0=\pm1$，切点为：$(1,1)$或$(-1,-1)$

## 9.3 直线与圆

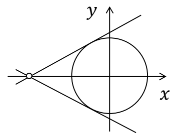
【2010.10.23】直线$y=k(x+2)$是圆$x^2+y^2=1$的一条切线（$D$）

（1）$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　　　（2）$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

---

点斜式直线方程：已知直线上的点$P(x_0, y_0)$和斜率$k$，方程为$y-y_0=k(x-x_0)$

直线$y=k(x+2)$为过定点$(-2,0)$，斜率为$k$的直线




$$d=\frac{|0-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=r=1,\ k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

给出过圆外一点⇒ 2条相交切线

且这两条切线关于圆外一点与圆心连线对称

## 9.3 直线与圆

【2014.10.17】直线$y=k(x+2)$圆$x^2+y^2=1$相切（$B$）

（1）$k=\frac{1}{2}$.　　　　（2）$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

---

判断直线与圆位置关系→找圆心，直线与圆心（点）的距离

圆$x^2+y^2=1$为圆心在原点，半径为1的圆

直线$y=k(x+2)$写为一般式为：$kx-y+2k=0$

直线到圆心（原点）的距离为

$$d=\frac{|0-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=r=1,\ k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

## 9 解析几何套路分类

1.基础知识
- 【1】平面直角坐标系
- 【2】点与直线
- 【3】圆

2.秒杀词汇【对称】
- 【1】关于$y=x$对称
- 【2】求关于$y$轴对称
- 【3】求关于$x$轴对称

3.直线与圆
- 判断直线与圆位置关系→找圆心，直线与圆心（点）的距离
- 找过圆上一点的切线→找圆心，找斜率→垂直

4.直线与抛物线　方程联立看Δ
- 有两个交点：相交⇔ $\Delta>0$
- 有一个交点：相切⇔ $\Delta=0$
- 没有交点：$\Delta<0$

（与$x$轴相交/相切，联立$y=0$）

前提：直线不与$y$轴平行

5.直线与圆的不等式

## 9.4 直线与抛物线

【2017.19】直线$y=ax+b$与抛物线$y=x^2$有两个交点.（$B$）

（1）$a^2>4b$.　　　　（2）$b>0$.

---

- 直线与圆：通过直线与圆心距离判断$d>r$，$d=r$，$d<r$
- 直线与抛物线：联立方程，化为一元二次方程→根的判别式

联立直线与抛物线方程，得：$x^2=ax+b$，即$x^2-ax-b=0$

题干要求$\Delta=a^2+4b>0$，即$a^2>-4b$

条件（1）当$b<0$时，$a^2>4b$不能充分推出$a^2>-4b$

条件（2）$b>0$，$-4b<0$，而$a^2\ge 0$，故$a^2>-4b$

## 9.4 直线与抛物线

【2012.1.25】直线$y=x+b$是抛物线$y=x^2+a$的切线.（ $A$ ）

（1） $y=x+b$与$y=x^2+a$有且仅有一个交点.

（2） $x^2-x\ge b-a(x\in R)$.

---

条件（1）充分

条件（2） $x^2-x\ge b-a$，即$x^2+a\ge x+b$

抛物线在直线上方

条件（2）不充分

## 9.4 直线与抛物线

【2011.10.17】抛物线$y=x^2+(a+2)x+2a$与$x$轴相切.（ $C$ ）

（1） $a>0$.　　　（2） $a^2+a-6=0$.

---

与$x$轴相切，即顶点在$x$轴上，$\Delta=0$

$(a+2)^2-4\times 2a=0$，$a=2$

条件（1）和条件（2）单独均不充分，联合充分

## 9 解析几何套路分类

1.基础知识
- 【1】平面直角坐标系
- 【2】点与直线
- 【3】圆

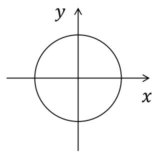
2.秒杀词汇【对称】
- 【1】关于$y=x$对称
- 【2】求关于$y$轴对称
- 【3】求关于$x$轴对称

3.直线与圆
- 判断直线与圆位置关系→找圆心，直线与圆心（点）的距离
- 找过圆上一点的切线→找圆心，找斜率→垂直

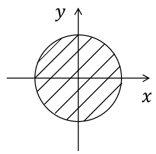
4.直线与抛物线　方程联立看Δ
- 有两个交点：相交⇔ $\Delta>0$
- 有一个交点：相切⇔ $\Delta=0$
- 没有交点： $\Delta<0$

5.直线与圆的不等式

## 9.5 直线与圆的不等式

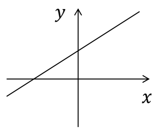



$x^2+y^2=r^2$

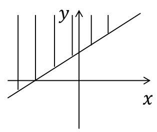



$x^2+y^2<r^2$

圆内的区域




$ax+by=c$




$ax+by>c$

## 9.5 直线与圆的不等式

【2015.16】圆盘$x^2+y^2\le 2(x+y)$被直线$L$分成面积相等的两部分（ $D$ ）

（1） $L: x+y=2$　　（2） $L: 2x-y=1$

圆方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，圆心为：(1,1)

【词汇】直线过圆心⟺直线平分圆/直线将圆分成面积（周长）相等的两部分

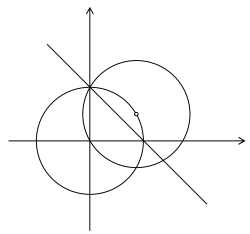
条件（1）$L$：$x+y=2$，过圆心(1,1)，条件（1）充分

条件（2）$L$：$2x-y=1$，过圆心(1,1)，条件（2）充分

## 9.5 直线与圆的不等式

【2013.1.16】已知平面区域$D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le 9\}$和$D_2=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le 9\}$，则$D_1, D_2$覆盖区域的边界长度为8π.（ $A$ ）

（1）${x_0}^2+{y_0}^2=9$　　（2）$x_0+y_0=3$



条件（1）：$\frac{360^0-120^0}{360^0}\cdot 2\pi\cdot 3=4\pi$

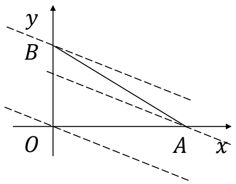
覆盖区域的边界长度为8π

条件（2）：无法确定圆心距，不成立

## 9.5 直线与圆的不等式

【2016.11】如图4，点$A$、$B$、$O$的坐标分别为(4,0)，(0,3)，(0,0)，若$(x,y)$是$\Delta AOB$中的点，则$2x+3y$的最大值为（ D ）

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9　(E) 12




令：$2x+3y=b$，$y=-\frac{2}{3}x+\frac{b}{3}$

斜率为$-\frac{2}{3}$，在$y$轴截距为$\frac{b}{3}$的直线

求$b$的最大值即求直线在$y$轴截距的最大值

直线$y=-\frac{2}{3}x+\frac{b}{3}$过$B(0,3)$时截距最大

代入$x=0$，$y=3$可得：$2x+3y=9$

$2x+3y$的最值一定在(4,0)，(0,3)，(0,0)三点中取到

分别代入取最大可得：$2\times 0+3\times 3=9$最大

**THANK YOU FOR WATCHING**