# 数学系统精讲

## 第四章 平均值、绝对值

MBA大师——董璞



### 考点解析

- 要么最难，要么最简单

  平均值不等式

  绝对值不等式

- 结合应用题、几何、数据分析等



### 基础知识 算术平均值与几何平均值

3　　1

$$\frac{3+1}{2}=2$$

3和1的算术平均值

面积不变　1　3

面积不变　$\sqrt{3}$

$$\sqrt{3\times 1}=\sqrt{3}$$

3和1的几何平均值



### 基础知识 算术平均值与几何平均值

**算术平均值**　设$x_1$，$x_2$，……，$x_n$为$n$个实数，这$n$个数的算术平均值为：

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

累加后除以个数

**几何平均值**　设$x_1$，$x_2$，……，$x_n$为$n$个**正**实数，这$n$个**正**实数的几何平均值为：

$$x_g=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$$

累乘后开个数次方

## 考点一 基本计算

算术平均值$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

几何平均值$x_g=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$

- 直接计算
- 改变元素个数计算
- 改变元素大小计算



## 考点一 基本计算

【例题1】求3，8，9这三个数的算术平均值和几何平均值（　）.

A. 3和6　　B. 20和6　　C. $\frac{20}{3}$和5　　D. $\frac{20}{3}$和6　　E. 7和8

【答案】D



## 考点一 基本计算

【例题2】三个实数1, $x-2$和$x$的几何平均值等于4,5和$-3$的算术平均值，则$x$的值为（　）.

A. $-2$　　B. 4　　C. 2　　D. $-2$或4　　E. $-2$或4

【答案】B



## 考点一 基本计算

算术平均值$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

- 直接计算
- 改变元素个数计算　算术平均值与总和　总和 = 平均值$\bar{x}$ × 元素数量$n$
- 改变元素大小计算　个体改变量与算术平均值改变量　$\bar{x}$的改变量 = $\dfrac{\text{个体改变量之和}}{\text{元素数量}n}$

【举例】若$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$的算术平均值为$\bar{x}$，求$x_1+1,x_2-2,x_3+3,x_4-4,x_5+5$的算术平均值.

【答案】$\bar{x}+\frac{3}{5}$

## 考点一 基本计算

【例题3】如果$x_1, x_2, x_3$三个数的算术平均值为5，则$x_1+2, x_2-3, x_3+6$与8这四个数的算术平均值为（　）.

A. $3\frac{1}{4}$　　B. 6　　C. 7　　D. $9\frac{1}{5}$　　E. $7\frac{1}{2}$

【答案】C



## 考点一 基本计算

【例题5】（条件充分性判断）三个实数$x_1$，$x_2$，$x_3$的算术平均值为4（　）.

（1）$x_1+6$，$x_2-2$，$x_3+5$的算术平均值为4.

（2）$x_2$为$x_1$，$x_3$的等差中项，且$x_2=4$.

【答案】B



## 考点一 基本计算

$\bar{x}$的改变量 $=\frac{\text{个体改变量之和}}{\text{元素数量}n}$

【例题4】（条件充分性判断）$x_1$，$x_2+1$，$x_3+2$，$x_4+3$，$x_5+4$的算术平均值是$\bar{x}+2$（　）.

（1）$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，$x_5$的算术平均值是$\bar{x}$.

（2）$x_1+1$，$x_2+2$，$x_3-3$，$x_4-4$，$x_5-1$的算术平均值是$\bar{x}-1$.

【答案】D



## 考点一 基本计算

【例题6】已知$x_1$，$x_2$，⋯，$x_n$的几何平均值为3，前$n-1$个数的几何平均值为2，则$x_n$的值为（D）.

A. $\frac{9}{2}$　　B. $(\frac{3}{2})^n$　　C. $2(\frac{3}{2})^{n-1}$　　D. $3(\frac{3}{2})^{n-1}$　　E. $(\frac{3}{2})^{n-1}$

【答案】D

## 考点一 基本计算

$$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_1x_2\dots x_{n-1}} = x_n = \boxed{\frac{3^n}{2^{n-1}} = 3\times\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} = 3(\frac{3}{2})^{n-1}}$$

幂的处理方法

- 化为同指数
  - $a^nb^n = (ab)^n$
  - $2^{n+1}\times 3^n = 2\times 2^n\times 3^n = 2\times(2\times 3)^n = 2\times 6^n$
  - $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- 化为同底数
  - $a^m\times a^n = a^{m+n}$
  - $2^5\times 4^7 = 2^5\times(2^2)^7 = 2^5\times 2^{2\times 7} = 2^{5+14} = 2^{19}$
  - $a^m\div a^n = a^{m-n}$
  - $9^5\div 3^3 = (3^2)^5\div 3^3 = 3^{2\times 5}\div 3^3 = 3^{10-3} = 3^7$



## 基础知识 代数式大小比较/不等式证明

算术平均值 $\boxed{\frac{a+b}{2}}$ 代数式①　　　几何平均值 $\boxed{\sqrt{ab}}$ 代数式②

| 方法 | 比较/证明 | 算式 | 推导过程 | 适用范围 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 作差法 | 比较代数式①与②的大小<br>证明① > ②或① < ② | ① − ② > 0<br>① − ② < 0 | 作差<br>⇒因式分解/配方<br>⇒与0比大小 | 多项式结构 |
| 作商法 | 证明① > ② > 0 | $\frac{①}{②} > 1$ | 作商<br>⇒恒等变形<br>⇒与1比大小 | 积、商、幂、根式、对数 |
| | 证明② > ① > 0 | $\frac{①}{②} < 1$ | | |
| 中间量法 | 比较代数式①与②的大小 | ① > $C$　② < $C$ | | |



## 基础知识 均值定理

算术平均值$\frac{a+b}{2}$ ≥ 几何平均值$\sqrt{ab}$　**均值不等式/基本不等式**

作差法 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$$= \frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}{2}$$

完全平方式≥ 0⇨ $= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$



## 基础知识 均值定理

**均值定理**　对于任意$n$个正实数$x_1$，$x_2$，……，$x_n$，有：

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$时，等号成立.（$x_i > 0$，$i = 1,\dots,n$）

多个正数的算术平均值总大于等于它们的几何平均值

- 两项的均值定理
- 三项的均值定理
- 均值定理的逆应用

## 基础知识 均值定理

$a+b\ge 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

① $a$，$b$可以代表任何正代数式.

② 使用范围：$a$，$b>0$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立. $a+a=2a\ge 2\sqrt{a\cdot a}=2a\ (a,b>0)$

均值不等式$(a,b>0)$

| | |
|---|---|
| $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ | 恒成立 |
| $a+b>2\sqrt{ab}$ | $a\ne b$ |
| $a+b=2\sqrt{ab}$ | $a=b$ |



## 基础知识 均值定理

$a+b\ge 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

$$\underbrace{\boxed{x^2+1}}_{a}+\underbrace{\boxed{\frac{4}{x^2+1}}}_{b}\ge 2\sqrt{\cancel{(x^2+1)}\cdot\frac{4}{\cancel{x^2+1}}}=4$$

① $a$，$b$可以代表任何正代数式.

② 使用范围：$a$，$b>0$　　$x^2+1>0$　　$\frac{4}{x^2+1}>0$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　$x^2+1=\frac{4}{x^2+1}$　　$(x^2+1)^2=4$　　$x^2+1=2$　　$x=\pm1$

$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}\ge 4$，即它的最小值为4，当$x=\pm1$时取得最小值.

两个正代数式**乘积为定值**，则它们的**和有最小值**

当两代数式相等时可取得此最小值.



## 基础知识 均值定理

$a+b\ge 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

$$\underbrace{\boxed{x}}_{a}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{b}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

① $a$，$b$可以代表任何正代数式.

② $\boxed{\text{使用范围：}a\text{，}b>0}$　**注意天然为正的讨论范围**

**如：几何问题、概率问题**

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　$x=\frac{1}{x}$　　$x^2=1$　　$x=1$



## 基础知识 均值定理

$a+b\ge 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

$$\underbrace{\boxed{x^2+5}}_{a}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2+5}}}_{b}\ge 2\sqrt{\cancel{(x^2+5)}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2+5}}}=2$$

① $a$，$b$可以代表任何正代数式.

② 使用范围：$a$，$b>0$　　$x^2+5>0$　　$\frac{1}{x^2+5}>0$

③ $\boxed{\text{当且仅当}a=b\text{时，等号成立.}}$　$x^2+5=\frac{1}{x^2+5}$

$(x^2+5)^2=1$

$x^2+5=\pm1$　不可能成立

## 基础知识 均值定理求$a+b$的最小值

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ （$a,b$可以代表任何正代数式）

**一正** ① $a,b$均为正.

**二定** ② $ab$为定值

**三相等** ③ 当且仅当$a=b$时，可取到最值.

$a+b+c\ge 3\cdot\sqrt[3]{abc}$ （$a,b,c$可以代表任何正代数式）

**一正** ① $a,b,c$均为正.

**二定** ② $abc$为定值

**三相等** ③ 当且仅当$a=b=c$时，可取到最值.

**【标志词汇】**求几正项之和的最小值

若它们的乘积为常数，则直接使用均值定理求最小值



## 考点二 均值定理

【例题1】已知$x,y\in R$，且$x+y=4$，则$3^x+3^y$的最小值是（ ）.

A. $\sqrt{2}$　　B. 18　　C. 9　　D. $2\sqrt{2}$　　E. $\sqrt{6}$

---

【答案】B



## 基础知识 求最值问题

| 方法 | 二次函数 | 均值定理 |
|---|---|---|
| 描述 | $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\ne 0)$<br>$x=-\frac{b}{2a}$时，可取得最值$\frac{4ac-b^2}{4a}$ | $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ $(a,b>0)$<br>$ab$为定值，$a=b$时可取得$a+b$的最小值 |
| 比较 | 不限制变量的取值范围 | 参与运算的每项必须为正 |
| | 只能处理二次函数形式的算式 | 不限制算式形式 |

- （可化为）二次函数$ax^2+bx+c$形式的均优先使用二次函数求最值
- 不可化为二次函数形式的使用均值定理求最值
  - 分式方程，如$x+\frac{1}{x}$
  - 高次方程，如$x^2(1-x)$



## 基础知识 凑配定值

**【标志词汇】**求几正项之和的最小值，若它们的乘积为常数，则直接使用均值定理求最小值

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$　　$a+b+c\ge 3\cdot\sqrt[3]{abc}$　　（$a,b,c$可以代表任何正代数式）

$\boxed{x^2+1}+\boxed{\frac{4}{x^2+1}}\ge 2\cdot\sqrt{\cancel{(x^2+1)}\cdot\frac{4}{\cancel{x^2+1}}}=4$　　当$x=\pm 1$时取得最小值4.

$\boxed{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}\ge 2\cdot\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2$　$(x,y>0)$　　当$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$，$x=y$时取得最小值2.

## 基础知识 凑配定值

**【标志词汇】**求几正项之和的最小值，若它们的乘积为常数，则直接使用均值定理求最小值

若乘积非常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

【举例1】求$x+\frac{1}{2x^2}$的最小值（$x>0$）



## 基础知识 凑配定值

**【标志词汇】**求几正项之和的最小值，若它们的乘积为常数，则直接使用均值定理求最小值

若乘积非常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

次数不同时，将较低次项**平均**拆分（拆分后注意参与运算的项数发生变化）

【举例1】求$x+\frac{1}{2x^2}$的最小值（$x>0$）



## 基础知识 凑配定值

**【标志词汇】**求几正项之和的最小值，若它们的乘积为常数，则直接使用均值定理求最小值

若乘积非常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

次数不同时，将较低次项**平均**拆分（拆分后注意参与运算的项数发生变化）

【举例2】求$x+\frac{1}{3x^3}$的最小值（$x>0$）



## 基础知识 凑配定值

**【标志词汇】**求几正项之和的最小值，若它们的乘积为常数，则直接使用均值定理求最小值

若乘积非常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

次数不同时，将较低次项平均拆分（拆分后注意参与运算的项数发生变化）

【举例3】求$4x^2+\frac{1}{x}$的最小值（$x>0$）

## 基础知识 凑配定值

【标志词汇】求几正项之和的最小值，若它们的乘积为常数，则直接使用均值定理求最小值

若乘积非常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

次数不同时，将较低次项平均拆分（拆分后注意参与运算的项数变化）

形式不同时，将整式部分与分式部分分母凑成相同形式.

【举例4】求$x+\frac{1}{x-2}$的最小值（$x>2$）



## 基础知识 凑配定值

凑配：
- 次数不同时，将较低次项平均拆分（拆分后注意参与运算的项数变化），如$x+\frac{1}{2x^2}$.
- 形式不同时，将整式部分与分式部分分母凑成相同形式，如$x+\frac{1}{x-2}$.

【举例5】求$x+\frac{1}{3(x-2)^3}$的最小值（$x>2$）



## 考点二 均值定理

【例题2】设函数$f(x)=2x+\frac{a}{x^2}$（$a>0$）在$(0,+\infty)$内的最小值为$f(x_0)=12$，则$x_0=$（　）.

A.5　　B.4　　C.3　　D.2　　E.1

【答案】B



## 基础知识 均值定理求最值

积定和最小，和定积最大

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\ (a,b>0)$　　$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq ab$　　$\boxed{ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad a+b\geq 2\sqrt{ab}}$

**求积最大，凑合定**

**求和最小，凑积定**

① $a$，$b$可以代表任何正代数式.　　$x(1-x)\leq\left[\frac{x+(1-x)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$

$\Downarrow$ $a$　$\Downarrow$ $b$

② 使用范围：$a$，$b>0$　　$x>0$　$1-x>0$　$0<x<1$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立. 当且仅当$x=1-x$，$x=\frac{1}{2}$时"="成立，取得最大值.

两个正代数式之**和为定值**，则它们的**乘积有最大值**

当两代数式相等时可取得此最大值.

## 基础知识 均值定理求$ab$的最大值

$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$（$a,b$可以代表任何正代数式）

一正 ① $a,b$均为正.

二定 ② $a+b$为定值

三相等 ③ 当且仅当$a=b$时，可取到最值.

$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$（$a,b,c$可以代表任何正代数式）

一正 ① $a,b,c$均为正.

二定 ② $a+b+c$为定值

三相等 ③ 当且仅当$a=b=c$时，可取到最值.

【标志词汇】求几正项之积的最大值

若它们的和为常数，则直接使用均值定理求最大值



## 基础知识 凑配定值 $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

【标志词汇】求几正项之积的最大值，若它们的和为常数，则直接使用均值定理求最大值.

若和非常数，则**凑配**使参与运算的项和为常数. 先平均拆至同次数，再按需乘系数

【举例6】求$x^2(1-2x)$的最大值（$0<x<\frac{1}{2}$）



## 考点二 均值定理

【例题3】矩形周长为2，将它绕其一边旋转一周，所得圆柱体体积最大时的矩形面积是（ ）.

A. $\frac{4\pi}{27}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{27}{4}$ E. 以上都不对

【答案】C



## 考点二 均值定理

【例题3】矩形周长为2，将它绕其一边旋转一周，所得圆柱体体积最大时的矩形面积是（ ）.

A. $\frac{4\pi}{27}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{27}{4}$ E. 以上都不对

【答案】C

基础知识 **均值定理•拓展**

【举例7】已知$x,y>0$，且$x+2y=1$，则$\frac{1}{x}+\frac{8}{y}$的最小值为______.

【答案】25



基础知识 **均值定理•拓展**

【举例7】已知$x,y>0$，且$x+2y=5$，则$\frac{1}{x}+\frac{8}{y}$的最小值为______.

【答案】5



基础知识 **均值定理•拓展**

【举例8】已知$a,b,c>0$，且$a+b+c=1$，则$m=\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$的最小值为______.

【答案】8



考点二 **均值定理**

【例题4】（条件充分性判断）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.（　）

（1）$abc=1$.　　　　（2）$a,b,c$为不全相等的正数.

【答案】C

PAGE 40

基础知识 **均值定理·拓展**

【举例9】已知$a>2$，$b>0$，且$ab=4+2b$，则$a+b$的最小值为______.

【答案】6

PAGE 41

基础知识 **均值定理·拓展**

【举例9】已知$a>2$，$b>8$，且$ab=8a+2b$，则$a+b$的最小值为______.

【答案】18

PAGE 42

基础知识 **均值定理·拓展**

【标志词汇】有**带常数**的一次/对称等式条件限制，用均值定理求最值，入手方向：

- **乘1法**：待求式乘以1，利用均值不等式求最值.
- **换1法**：用限制等式替换常数1，利用均值不等式求最值.

【标志词汇】有**二次不对称/不带常数**的等式条件限制，用均值定理求最值，入手方向：

**消元法**：先消元，再用均值定理求最值.

PAGE 43

考点二 **均值定理**

【例题5】$a,b$的算数平均值为3，几何平均值也为3，则$a-1$和$b^2+9$（$a>1$，$b>0$）的算术平均值和几何平均值分别为（ A ）.

A. 10和6　B. 9和6　C . 8和8　D. 3和6　E. 6和8

【答案】A

## 基础知识 均值定理总结

| 应用 | 和的最小值 | 积的最大值 |
|---|---|---|
| 两项时 | $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ | $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ |
| | 【不等式链】$2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2\geq 4ab$ | |
| 三项时 | $a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}$ | $abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ |
| 互为倒数 | $a+\frac{1}{a}\geq 2$ | — |
| 逆应用 | 如果几个正数的算术平均值和它们的几何平均值相等，那么这几个正数相等. | |

$$2(a^2+b^2)=a^2+b^2+(a^2+b^2)\geq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2\geq\left(2\sqrt{ab}\right)^2=4ab$$

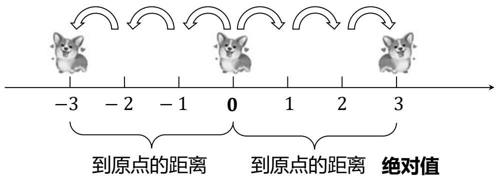


## 基础知识 绝对值

- 绝对值的定义（代数、几何）
- 绝对值的性质
- 去掉绝对值
- 绝对值的几何意义
- 绝对值三角不等式



## 基础知识 绝对值的定义




$|3|=3$　$|1.2|=1.2$　$|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$　正数的绝对值是它本身

$|-3|=3$　$|-1.2|=1.2$　$|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$　负数的绝对值是它的相反数

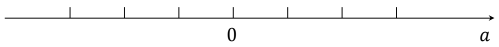
$|0|=0$　零的绝对值是零



## 基础知识 绝对值的性质

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases}a>0 & |a|=a\\ a=0 & |a|=0\\ a<0 & |a|=-a\end{cases}$ 负号表示“相反”

分情况讨论：先判断符号，再求绝对值.




（1）$|a|\geq a$，即一个数的绝对值大于等于它本身.

## 考点一 绝对值的性质

【例题1】（条件充分性判断）实数$a,b$满足$|a|(a+b)>a|a+b|$（　）.

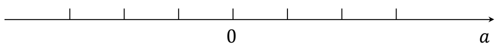
（1）$a<0$.　　　　　　（2）$b>-a$.

【答案】C



## 基础知识 绝对值的性质

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & （当a>0时） \\ 0 & （当a=0时） \\ -a & （当a<0时） \end{cases}$



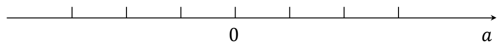

（2）$\sqrt{a^2}=|a|$　　$\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2=|2|$　　$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2=|-2|$

（3）$|a|^2=|a^2|=a^2$　　$|2|^2=|2^2|=2^2=4$　　$|-2|^2=|(-2)^2|=(-2)^2=4$



## 基础知识 绝对值的性质

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & （当a>0时） \\ 0 & （当a=0时） \\ -a & （当a<0时） \end{cases}$




（4）$|a|=|-a|$：对称性，即互为相反数的两个数的绝对值相等.

（5）若$|a|=3$，则$a$的可能取值有两个，为$a=3$或$a=-3$，即$a=\pm 3$

⇧

可换为任意正实数

（6）逆应用：若已知$|a|=a$，则一定有$a\geq 0$

若已知$|a|=-a$，则一定有$a\leq 0$



## 考点一 绝对值的性质

$\sqrt{\ }$具有双重非负性

【例题2】已知$\sqrt{x^3+2x^2}=-x\sqrt{2+x}$，则$x$的取值范围是（　）.

A. $x<0$　　B. $x\geq -2$　　C. $-2\leq x\leq 0$　　D. $-2<x<0$　　E. 以上均不正确

【答案】C

PAGE 52

## 基础知识 绝对值的性质

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases}a & (当a>0时)\\ 0 & (当a=0时)\\ -a & (当a<0时)\end{cases}$

（7）自比性：$\frac{|a|}{a}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases}1 & (a>0)\\ -1 & (a<0)\end{cases}$任一非零代数式与其绝对值的比值为$+1$或$-1$

| | | |
|---|---|---|
| $a>0$ | $\|a\|=a$ | $\frac{\|a\|}{a}=\frac{a}{\|a\|}=1$ |
| $a<0$ | $\|a\|=-a$ | $\frac{\|a\|}{a}=\frac{a}{\|a\|}=-1$ |

PAGE 53

## 考点一 绝对值的性质

【例题3】已知$\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{|c|}{c}=1$，则$\frac{|ab|}{ab}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{|ac|}{ac}+\frac{abc}{|abc|}=$（　　）.

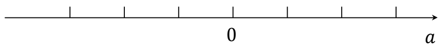
A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. $-1$　　E. $-2$

【答案】E

PAGE 54

## 基础知识 绝对值的性质

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases}a & (当a>0时)\\ 0 & (当a=0时)\\ -a & (当a<0时)\end{cases}$




条件等式数量少，形式复杂，未知量多，无法向待求式转化.

【标志词汇】$|(\ \ )|+\sqrt{(\ \ )}+(\ \ )^2=0$

每一个算式分别为零，进而得到关于未知字母的方程组，解方程.

（8）非负性：$|a|\geq 0$.　$|a|\geq 0$，$\sqrt{a}\geq 0$（$a\geq 0$），$a^2\geq 0$.　$\sqrt{a^2}=|a|$

$|a-3|=0$　　　$|x-2|+|y-3|=0$

$|x-1|+\sqrt{y+2}+(z-3)^2=0$　　　$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{y+2}+(z-3)^2=0$

$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

PAGE 55

## 考点一 绝对值的性质

【例题4】已知$|x-y+1|+(2x-y)^2=0$，则$2^x+y^3=$（　　）.

A.4　　B.6　　C.8　　D.10　　E.12

【答案】D

PAGE 56

## 考点一 绝对值的性质

【例题5】设$x,y,z$满足$|3x+y-z-2|+(2x+y-z)^2=\sqrt{x+y-2002}+\sqrt{2002-x-y}$，则$(y-z)^x$的值为（　）.

A. 0　　B. 1　　C. 16　　D. 20　　E. 24

【答案】C

PAGE 57

## 考点一 绝对值的性质

【例题6】已知实数$a,b,x,y$满足$y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|=1-a^2$和$|x-2|=y-1-b^2$，则$3^{x+y}+3^{a+b}=$（　）.

A. 25　　B. 26　　C. 27　　D.28　　E.29

【答案】D

PAGE 58

## 考点一 绝对值的性质

【例题7】设$x,y,z$满足条件$|x^2+4xy+5y^2|+\sqrt{z+\frac{1}{2}}=-2y-1$，则$(4x-10y)^z$等于（　）

A.1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　D. 2　　E. $\frac{1}{2}$

【答案】C

PAGE 59

## 基础知识 拓展•常见方程整理方法

**普通方程**：将所有项全部移至等号左边，等号右边为零.

**无理方程**：将无理部分移至等号一边，有理部分移至另一边.

**多变量方程**：将变量分离，如将包含$x$的移项至方程一边，包含$y$的移项至另一边.

**含参方程**：将带参数的部分移至等号一边，其余部分移至另一边，如

$kx-y+8-6k=0$移项为$k(x-6)=y-8$，此即参变分离.

**通用整理**：向能提取出待求式方向整理.

$x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=0$，求$x+y$最值.

$(x-2y)^2+\sqrt{3}(x+y)-6=0$　　$x+y=\dfrac{6-(x-2y)^2}{\sqrt{3}}\le\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

**多个方程**：全部相加.

## 基础知识 绝对值性质总结

(1) $|a| \geq a$

(2) $\sqrt{a^2} = |a|$.

(3) $|a|^2 = |a^2| = a^2$.

(4) $|a| = |-a|$

(5) 若$|a| = 3$，则$a = \pm 3$.

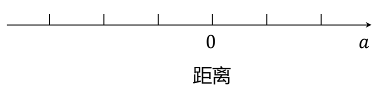
(6) 若已知$|a| = a$，则一定有$a \geq 0$

若已知$|a| = -a$，则一定有$a \leq 0$

(7) 自比性：$\dfrac{|a|}{a} = \dfrac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & (a > 0) \\ -1 & (a < 0) \end{cases}$

(8) 非负性：$|a| \geq 0$

任意实数$a$的绝对值，$|a| = \begin{cases} a & (当a > 0时) \\ 0 & (当a = 0时) \\ -a & (当a < 0时) \end{cases}$ 代数




几何

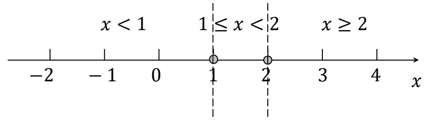


## 基础知识 去掉绝对值 遇到绝对值，去掉绝对值

任意实数$a$的绝对值，$|a| = \begin{cases} a & (当a > 0时) \\ 0 & (当a = 0时) \\ -a & (当a < 0时) \end{cases}$

(1) 根据定义去掉绝对值，如$\boxed{零点}$分段法.使绝对值为零的点

$$|x-1| + |x-2| = \begin{cases} x < 1时 & 1 - x + 2 - x = 3 - 2x \\ 1 \leq x < 2时 & x - 1 + 2 - x = 3 \\ x \geq 2时 & x - 1 + x - 2 = 2x - 3 \end{cases}$$






## 考点二 去掉绝对值

【例题1】$|x-3| = a$（$a > 0$），则$x$的值为（ ）.

A. $a+3$ B. $3-a$ C.3 D.$3-a$或$3+a$ E.$a$

【答案】D



## 考点二 去掉绝对值

【例题2】（条件充分性判断）$|b-a| + |c-b| - |c| = a$（ ）.

（1）实数$a,b,c$在数轴上的位置为

（2）实数$a,b,c$在数轴上的位置为

【答案】A

## 基础知识 去掉绝对值 遇到绝对值，去掉绝对值

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases} a\ （当a>0时） \\ 0\ （当a=0时） \\ -a\ （当a<0时） \end{cases}$

（1）根据定义去掉绝对值

零点（使绝对值为零的点）分段法.

给出算式去掉绝对值后的形式，求绝对值内未知量取值范围



## 考点二 去掉绝对值

【例题3】若$|x-3|=3-x$，则$x$的取值范围是（　）.

A. $x>0$　B. $x=3$　C. $x<3$　D. $x\le 3$　E. $x>3$

【答案】D



## 考点二 去掉绝对值

【例题4】已知$\left|\frac{5x-3}{2x+5}\right|=\frac{3-5x}{2x+5}$，则实数$x$的取值范围是（　）.

A. $x<-\frac{5}{2}$或$x\ge\frac{3}{5}$　B. $-\frac{5}{2}\le x\le\frac{3}{5}$　C. $-\frac{5}{2}<x\le\frac{3}{5}$　D. $-\frac{3}{5}\le x<\frac{5}{2}$　E.均不正确

【答案】C



## 考点二 去掉绝对值

【例题4】已知$\left|\frac{5x-3}{2x+5}\right|=\frac{3-5x}{2x+5}$，则实数$x$的取值范围是（　）.

A. $x<-\frac{5}{2}$或$x\ge\frac{3}{5}$　B. $\frac{-5}{2}\le x\le\frac{3}{5}$　C. $\frac{-5}{2}<x\le\frac{3}{5}$　D. $\frac{-3}{5}\le x<\frac{5}{2}$　E.均不正确

【答案】C

## 基础知识 去掉绝对值 遇到绝对值，去掉绝对值

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases}a & （当a>0时）\\ 0 & （当a=0时）\\ -a & （当a<0时）\end{cases}$

（1）根据定义去掉绝对值，如零点分段法.

（2）平方法去掉绝对值：$|a|^2=a^2$



## 考点二 去掉绝对值

【例题4】解方程$|x-1|=|x-3|$

【答案】$x=2$



## 考点二 去掉绝对值

【例题5】解方程$|x-1|=2x+1$

【答案】$x=0$



## 基础知识 去掉绝对值 遇到绝对值，去掉绝对值

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases}a & （当a>0时）\\ 0 & （当a=0时）\\ -a & （当a<0时）\end{cases}$

（1）根据定义去掉绝对值，如零点分段法.

（2）平方法去掉绝对值：$|a|^2=a^2$

- 等号/不等号两侧为一次算式
- 可能产生增根，注意验根

$|x-1|=|x-3|$　　$|x-1|=2x+1$

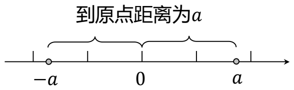
$|x-1|=-1$　　$(|x-1|)^2=x^2-2x+1=(-1)^2=1$

$x^2-2x=x(x-2)=0$

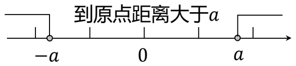
## 基础知识 去掉绝对值

(3) 利用不等式的性质转化去掉绝对值$(a, b > 0)$

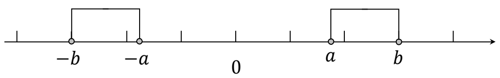
$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$




$|x| > a \Leftrightarrow x < -a$或$x > a$



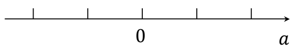

$0 < a \le |x| \le b \Leftrightarrow 0 < a \le x \le b$或$-b \le x \le -a < 0$






## 基础知识 去掉绝对值·总结

任意实数$x$的绝对值，$|x| = \begin{cases} x & (\text{当}x > 0\text{时}) \\ 0 & (\text{当}x = 0\text{时}) \\ -x & (\text{当}x < 0\text{时}) \end{cases}$




(1) 根据定义去掉绝对值（正应用、逆应用）

若已知$|x| = x$，则一定有$x \ge 0$

若已知$|x| = -x$，则一定有$x \le 0$

(2) 平方法去掉绝对值：$|x|^2 = x^2$

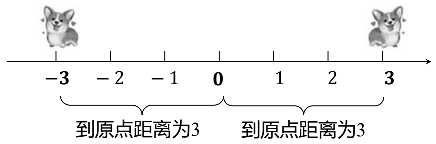
(3) 利用不等式的性质转化去掉绝对值$(a, b > 0)$

- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$或$x > a (a > 0)$
- $0 < a \le |x| \le b \Leftrightarrow 0 < a \le x \le b$或$-b \le x \le -a < 0$

(4) 利用绝对值的几何意义去掉绝对值.



## 基础知识 绝对值的几何意义

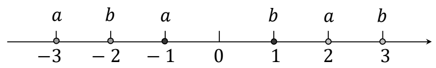



$|3| = 3 = |3 - 0|$

$|-3| = 3 = |-3 - 0|$

$|a - b|$为数轴上$a, b$两点之间的距离.

几何




代数

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ $|a - b| = |2 - 3| = |-1| = 1$

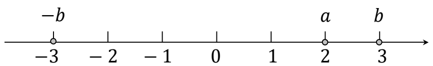
$\begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$ $|a - b| = |-3 + 2| = |-1| = 1$

$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ $|a - b| = |-1 - 1| = |-2| = 2$



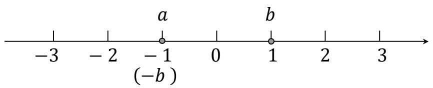
## 基础知识 绝对值的几何意义 距离

$|a + b| = |a - (-b)|$，为数轴上$a, -b$两点之间的距离.




$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ 代数：$|a + b| = |2 + 3| = |5| = 5$

几何：$-b = -3$




$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ 代数：$|a + b| = |-1 + 1| = |0| = 0$

几何：$-b = -1$

## 考点三 绝对值的几何意义

【例题1】$|x-3|=a$（$a>0$），则$x$的值为（　）.

A. $a+3$　　B. $3-a$　　C.3　　D.$3-a$或$3+a$　　E.$a$

【答案】D



## 考点三 绝对值的几何意义

【例题2】（条件充分性判断）已知$a,b,c$为三个实数，则$min\{|a-b|,|b-c|,|a-c|\}\le 5$（　）

（1）$|a|\le 5,|b|\le 5,|c|\le 5$　　（2）$a+b+c=15$

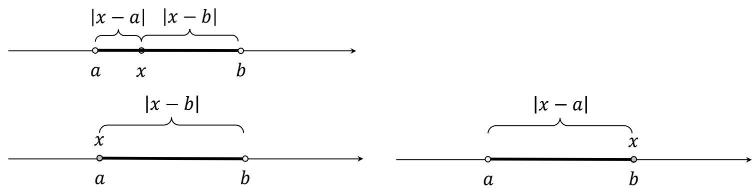
【答案】A



## 基础知识 两个绝对值之和

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|$的两绝对值之和.

($x$到$a$点的距离) + ($x$到$b$点的距离)




当$x$在$[a,b]$之内的任意位置时

$|x-a|+|x-b|=|a-b|$恒成立

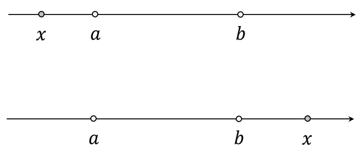
这也是两绝对值之和能取到的最小值.



## 基础知识 两个绝对值之和

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|$的两绝对值之和.

($x$到$a$点的距离) + ($x$到$b$点的距离)




$x$在$[a,b]$之外时，随着$x$远离$a,b$点，$|x-a|+|x-b|$的取值也随之增加，且没有上限.

【注意】无穷大不可以作为最大值.

## 基础知识 两个绝对值之和

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|$的两绝对值之和.

- $x$在$[a,b]$内取得最小值　　$|x-a|+|x-b|\geq|a-b|$
- 最小值为$|a-b|$　　当$x\in[a,b]$时$|x-a|+|x-b|=|a-b|$
- 无最大值

适用几何意义求解题目特征：

（1）几个绝对值式子加或者减，不能有乘除；

（2）只有一个变量$x$；

（3）$x$系数为1（或可统一化为1），且只在绝对值内出现.



## 考点三 两个绝对值之和

【例题3】设$y=|x-2|+|x+2|$，则下列结论正确的是（　）.

A. $y$没有最小值　　B. 只有一个$x$使$y$取到最小值

C. 有无穷多个$x$使$y$取到最大值　　D. 有无穷多个$x$使$y$取到最小值　　E. 以上结论均不正确

【答案】D



## 考点三 两个绝对值之和

【例题3】设$y=|x-2|+|x+2|$，则下列结论正确的是（　）.

A. $y$没有最小值　　B. 只有一个$x$使$y$取到最小值

C. 有无穷多个$x$使$y$取到最大值　　D. 有无穷多个$x$使$y$取到最小值　　E. 以上结论均不正确

【答案】D



## 考点三 两个绝对值之和

【例题4】（条件充分性判断）$f(x)$有最小值2（　）.

（1）$f(x)=|x-\frac{5}{12}|+|x-\frac{1}{12}|$　　（2）$f(x)=|x-2|+|4-x|$

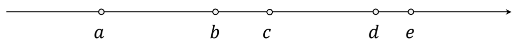
【答案】B

PAGE 84

## 基础知识 多个绝对值之和

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|+|x-c|+\cdots$的多个绝对值之和.

$(x$到$a$点的距离$)+(x$到$b$点的距离$)+(x$到$c$点的距离$)+\cdots$




PAGE 85

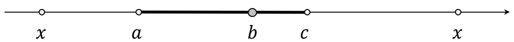
## 基础知识 多个绝对值之和

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|+|x-c|+\cdots$的多个绝对值之和.

$(x$到$a$点的距离$)+(x$到$b$点的距离$)+(x$到$c$点的距离$)+\cdots$

零点排序，由外向内，层层分析

➢ 奇数个绝对值之和 当$x=$最中间的零点时，奇数个绝对值之和取到最小值.




$|x-a|+|x-b|+|x-c|$的最小值为：$\boxed{|a-c|}$ → 零点由外向内，两两距离之和

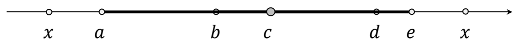
PAGE 86

## 基础知识 多个绝对值之和

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|+|x-c|+\cdots$的多个绝对值之和.

$(x$到$a$点的距离$)+(x$到$b$点的距离$)+(x$到$c$点的距离$)+\cdots$

零点排序，由外向内，层层分析




$|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|+|x-e|$的最小值为：$\boxed{|a-e|+|b-d|}$

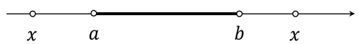
零点由外向内，两两距离之和

PAGE 87

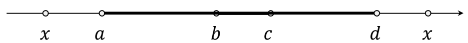
## 基础知识 多个绝对值之和

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|+|x-c|+\cdots$的多个绝对值之和.

➢ 偶数个绝对值之和 $x$在最中间两零点之间时，偶数个绝对值之和取到最小值.




当$a\le x\le b$时，$|x-a|+|x-b|$可取到最小值$\boxed{|a-b|}$ → 零点由外向内，两两距离之和




当$b\le x\le c$时，$|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$可取到最小值为：$\boxed{|a-d|+|b-c|}$.

## 考点三 多个绝对值之和

【例题5】设$y=|x-a|+|x-20|+|x-a-20|$，其中$0<a<20$，则对于满足$a\le x\le 20$的$x$值，$y$的最小值是（　）.

A.10　　B.15　　C.20　　D.25　　E.30

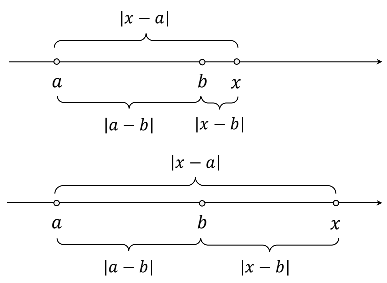
【答案】C



## 基础知识 两个绝对值之差

【标志词汇】形如$|x-a|-|x-b|$的两个绝对值之差.

($x$到$a$点的距离) − ($x$到$b$点的距离)




当$x$在$[a,b]$之外时，部分距离相互抵消

当$x\ge b$时，$|x-a|-|x-b|=|a-b|$

⇩

$|x-a|-|x-b|$的最大值



## 考点三 多个绝对值之和

【例题6】（条件充分性判断）方程$|x+1|+|x+3|+|x-5|=9$存在唯一解（　）.

（1）$|x-2|\le 3$.　　（2）$|x-2|\ge 2$.

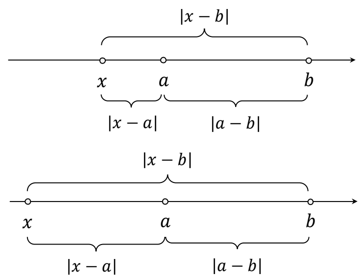
【答案】A



## 基础知识 两个绝对值之差

【标志词汇】形如$|x-a|-|x-b|$的两个绝对值之差.

($x$到$a$点的距离) − ($x$到$b$点的距离)




当$x$在$[a,b]$之外时，部分距离相互抵消

当$x\le a$时，$|x-a|-|x-b|=-|a-b|$

⇩

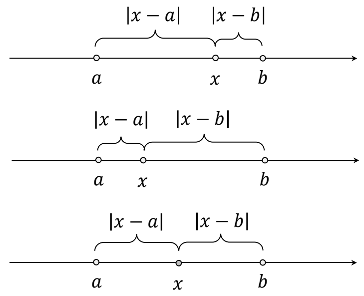
$|x-a|-|x-b|$的最小值

PAGE 92

## 基础知识 两个绝对值之差

【标志词汇】形如$|x-a|-|x-b|$的两个绝对值之差.

($x$到$a$点的距离) − ($x$到$b$点的距离)




当$x$在$[a,b]$中移动时

两绝对值之差在

最大值$|a-b|$与最小值$-|a-b|$之间变化

当$x=\frac{a+b}{2}$，即$x$在$a,b$的中点时，绝对值之差为零.

PAGE 93

## 考点三 两个绝对值之差

【例题7】已知$\frac{8x+1}{12}-1\le x-\frac{x+1}{2}$，关于$|x-1|-|x-3|$的最值，下列说法正确的是的（ ）.

A.最大值为1，最小值为−1　　B.最大值为2，最小值为−1

C.最大值为2，最小值为−2　　D.最大值为1，最小值为 − 2　　E.无最大值和最小值

【答案】D

PAGE 94

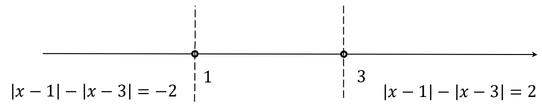
## 考点三 两个绝对值之差

【例题7】已知$\frac{8x+1}{12}-1\le x-\frac{x+1}{2}$，关于$|x-1|-|x-3|$的最值，下列说法正确的是的（ ）.

A.最大值为1，最小值为−1　　B.最大值为2，最小值为−1

C.最大值为2，最小值为−2　　D.最大值为1，最小值为 − 2　　E.无最大值和最小值

【标志词汇】形如$|x-a|-|x-b|$的两个绝对值之差.




①如果题干条件中$x$的范围变为$x\le 5$，那么应该选（ C ）.

②如果题干条件中$x$的范围变为$x\ge 3$

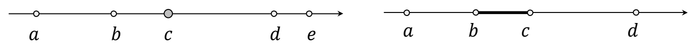
PAGE 95

## 基础知识 总结•绝对值的几何意义

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|$的两绝对值之和.

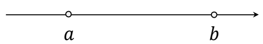
【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|+|x-c|+\cdots$的多个绝对值之和.

- 奇数个绝对值之和 取最值条件：$x$ =最中间的零点
- 偶数个绝对值之和 取最值条件：$x$在最中间两零点之间




绝对值之和最小值：由外向内，两两零点距离之和

【标志词汇】形如$|x-a|-|x-b|$的两个绝对值之差.




【助记】**“和”**有地板没天花板　　**“差”**有地板也有有天花板

关注MBA大师公众号
及时了解备考咨询掌握更多学习干货

## 基础知识 绝对值的和、差、积、商的性质

【绝对值的和】与【和的绝对值】

$|1|+|2|=1+2=3$　　$|1+2|=|3|=3$

$|1|+|-2|=1+2=3$　　$|1+(-2)|=|-1|=1$

两个数的绝对值的和大于等于这两个数的和的绝对值，即$|a|+|b|\geq|a+b|$.

【绝对值的差】与【和的绝对值】

$|2|-|1|=2-1=1$　　$|2+1|=|3|=3$

$|2|-|-1|=2-1=1$　　$|2+(-1)|=|1|=1$

两个数的绝对值的差小于等于这两个数的和的绝对值，即$|a|-|b|\leq|a+b|$.



## 基础知识 绝对值的和、差、积、商的性质

（1）两个数的绝对值的和大于等于这两个数的和的绝对值，即$|a|+|b|\geq|a+b|$.

（2）两个数的绝对值的差小于等于这两个数的和的绝对值，即$|a|-|b|\leq|a+b|$.

（3）两个数的绝对值的积等于这两个数的积的绝对值，即$|a|\cdot|b|=|a\cdot b|$.

（4）两个数的绝对值的商等于这两个数的商的绝对值，即$\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|$（$b\neq 0$）.



## 基础知识 绝对值三角不等式

- 单绝对值不等式
- 双（多）绝对值不等式
- 绝对值三角不等式



## 基础知识 绝对值三角不等式

| 绝对值三角不等式 | $a,b$取值情况 | $\lvert a+b\rvert$与$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$的大小关系 |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{\lvert a+b\rvert\leq\lvert a\rvert+\lvert b\rvert}$ 恒成立 | $a=1,b=-2$ | $\lvert 1-2\rvert=1<\lvert 1\rvert+\lvert -2\rvert=3$ |
| | $ab<0$ | $\lvert a+b\rvert<\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ |
| | $a=1,b=0$ | $\lvert 1+0\rvert=1=\lvert 1\rvert+\lvert 0\rvert$ |
| | $a=1,b=2$ | $\lvert 1+2\rvert=3=\lvert 1\rvert+\lvert 2\rvert$ |
| | ☆ $ab\geq 0$ | $\lvert a+b\rvert=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ |

## 基础知识 绝对值三角不等式

| 绝对值三角不等式 | $a,b$取值情况 | | $\lvert a+b\rvert$与$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$的大小关系 |
|---|---|---|---|
| $\lvert \boldsymbol{a}\rvert-\lvert \boldsymbol{b}\rvert\le\lvert \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rvert$ 恒成立 | $\lvert a\rvert<\lvert b\rvert$ | | $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert<\lvert a+b\rvert$ |
| | $\lvert a\rvert\ge\lvert b\rvert$ | $a=2,b=1$ | $\lvert 2\rvert-\lvert 1\rvert=1<\lvert 2+1\rvert=3$ |
| | | $ab>0$ | $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert<\lvert a+b\rvert$ |
| | | $a=2,b=0$ | $\lvert 2\rvert-\lvert 0\rvert=2=\lvert 2+0\rvert$ |
| | | $a=2,b=-1$ | $\lvert 2\rvert-\lvert -1\rvert=1=\lvert 2-1\rvert$ |
| | | ☆ $ab\le 0$ | $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert=\lvert a+b\rvert$ |



## 基础知识 绝对值三角不等式

$|a|\ge|b|$且$ab\le 0$时取等号

⇩

$|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$

⇧

$ab\ge 0$时取等号

- $a,b$取值为零
- 代入特值
  - 同号 $a=1,b=2$ $\quad |1+2|=3=|1|+|2|$
  - 异号 $a=2,b=-1$ $\quad |2|-|-1|=1=|2-1|$



## 基础知识 绝对值三角不等式

$|a|\ge|b|$且$ab\le 0$时取等号

⇩

$|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b| \xRightarrow{\text{将}b\text{写为}-b} |a|-|-b|\le|a+(-b)|\le|a|+|-b|$

⇧

$ab\ge 0$时取等号

$|a|-|b|\le|a-b|\le|a|+|b|$

⇗ ⇘

$|a|\ge|-b|$且$a\cdot(-b)\le 0$时取等号 $\qquad a\cdot(-b)\ge 0$时取等号

$|a|\ge|b|$且$ab\ge 0$时取等号 $\qquad ab\le 0$时取等号



## 基础知识 恒成立的绝对值三角不等式

恒成立的绝对值三角不等式（连等式/连不等式拆分看）

$\boldsymbol{|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|}$ “≤”即“<”或“=”

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert a+b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ | $\lvert a+b\rvert<\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ | $ab<0$ |
| | $\lvert a+b\rvert=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ | $ab\ge 0$ |
| $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\le\lvert a+b\rvert$ | $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert<\lvert a+b\rvert$ | $\lvert a\rvert<\lvert b\rvert$或$ab>0$ |
| | $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert=\lvert a+b\rvert$ | $\lvert a\rvert\ge\lvert b\rvert$且$ab\le 0$ |

$\boldsymbol{|a|-|b|\le|a-b|\le|a|+|b|}$

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert a-b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ | $\lvert a-b\rvert<\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ | $ab>0$ |
| | $\lvert a-b\rvert=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ | $ab\le 0$ |
| $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\le\lvert a-b\rvert$ | $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert<\lvert a-b\rvert$ | $ab<0$或$\lvert a\rvert<\lvert b\rvert$ |
| | $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert=\lvert a-b\rvert$ | $\lvert a\rvert\ge\lvert b\rvert$且$ab\ge 0$ |

PAGE 104

## 考点四 绝对值三角不等式

【例题1】（条件充分性判断）$x,y$是实数，$|x|+|y|=|x-y|$（　）.

（1）$x>0,y<0$.　　（2）$x<0,y>0$.

【答案】D

PAGE 105

## 考点四 绝对值三角不等式

【例题1】（条件充分性判断）$x,y$是实数，$|x|+|y|=|x-y|$（　）.

（1）$x>0,y<0$.　　（2）$x<0,y>0$.

【答案】D

PAGE 106

## 考点四 绝对值三角不等式

【例题2】已知$|2x-a|\le 1$，$|2x-y|\le 1$，则$|y-a|$的最大值为（C）.

A. 1　B. 3　C. 2　D. 4　E. 5

【答案】C

PAGE 107

## 考点四 绝对值三角不等式

【例题3】（条件充分性判断）已知$a,b$是实数，则$|a|\le 1,|b|\le 1$.（　）

（1）$|a+b|\le 1$.　　（2）$|a-b|\le 1$.

【答案】C

PAGE 108

## 考点四 绝对值三角不等式

【例题4】已知$|a| \neq |b|$, $m=\frac{|a|-|b|}{|a-b|}$, $n=\frac{|a|+|b|}{|a+b|}$，则$m,n$之间的大小关系为（ ）.

A. $m>n$　　B. $m<n$　　C. $m=n$　　D. $m \leq n$　　E. 无法确定

【答案】D

THANK YOU FOR WATCHING