数学系统精讲

第三章 整式、分式

MBA大师——董璞

考点解析

- 由数字运算进阶为符号运算
- 本章特点：公式多，表达式多变
- 逆向思维、整体思维
- 对典型数字和固定表达式要有一定敏感度

基础知识 整式与分式

数字
表示数字的字母 → 有限次加、减、乘、除、乘方和开方 → **代数式**

$40 \quad a+b \quad a-b \quad vt \quad \dfrac{x}{y} \quad 7x^2y^3zabc$ $\quad \boxed{\sqrt[3]{3a^2}\ \text{无理式}}$

有理式
- **整式**
  - **单项式** 数字与字母的乘积 $2x^2y^3 \quad \dfrac{1}{2}x^3$
  - **多项式** 几个单项式的和 $2x^2+xy-y^2+5$
- **分式** $\dfrac{A}{B}$（B中含有字母且$B \neq 0$） $\dfrac{1}{x-2}\,(x \neq 2) \quad \dfrac{x}{y}(y \neq 0)$

基础知识 整式与分式

整数
正整数，0，负整数 —四则运算→
- 加减法
- 乘法
- 除法
  - 整除 因数，倍数，质数，合数
  - 带余除法 奇数，偶数，分数，小数

整式
单项式：数字与字母的乘积
多项式：几个单项式的和 —四则运算→
- 加减法 合并同类项
- 乘法 分别相乘再相加
- 除法
  - 整除
  - 带余除法
  - 分式

基础知识 整式的元与次数

元 一个多项式，含有多少个变量，就叫做几元多项式

单项式的次数 系数不为零的单项式所有字母的指数和.

$-\frac{1}{3}x^2$ $2^3x^2y^3$

纯数字单项式 $\begin{cases}\text{非零数字：零次} \\ \text{数字“0”：无次数}\end{cases}$

多项式的次数 以标准形式给出的多项式里，各个单项式中次数最高的项的次数.

$x^2y - x + y^2 - x^2y - 2$

基础知识 整式的元与次数

【举例】分析元与次数.

(1) $x + y$

二元一次多项式

(2) $x^2y + 3xy + y^2$

二元三次多项式

(3) $3^4xy^3 + y^2 + x^2y$

二元四次多项式

基础知识 同类项与整式的加减法

同类项 所含的字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的单项式称为同类项.

$4xy^2z$和$-\frac{2}{3}xy^2z$ 30和-25 所有常数项都是同类项

整式的加减法 即合并同类项，把同类项的系数相加减，字母和字母的指数不变.

$$(x^3y + 2x^2y^2 + 3xy^2 - 5xy^2 + 6) + (x^2y^2 + 2xy + 3xy^2 - 2y^3 - 13)$$
$$= x^3y + (2x^2y^2 + x^2y^2) + (3xy^2 - 5xy^2 + 3xy^2) + 2xy - 2y^3 + (6 - 13)$$
$$= x^3y + 3x^2y^2 + xy^2 + 2xy - 2y^3 - 7$$

基础知识 幂的运算

同底数幂法则 同底数幂相乘，底数不变，指数相加，即$a^m \times a^n = a^{m+n}$

同底数幂相除，底数不变，指数相减，即$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$2^5 \times 2^2 = 2^{5+2} = 2^7$

$(x+1)^2 \times (x+1)^3 = (x+1)^{2+3} = (x+1)^5$

积的乘方 把积中每个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，即$(ab)^n = a^nb^n$

$(xyz)^2 = x^2 \times y^2 \times z^2 = x^2y^2z^2$

幂的乘方 底数不变，幂的指数与乘方的指数相乘，即$(a^m)^n = a^{mn}$

基础知识 幂的运算

注意：0的非正指数幂无意义

常见应用情形	公式	举例
指数为正整数	$a^m=a\times a\times\cdots\times a$	$2^3=2\times 2\times 2$
指数为零	$a^0=a^{1-1}=\frac{a^1}{a^1}=1$	$2^0=1$
指数为负	$a^{-m}=a^{0-m}=\frac{a^0}{a^m}=\frac{1}{a^m}$	$3^{-2}=\frac{1}{3^2}$ $5^{-3}=\frac{1}{5^3}$
指数为分数	$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$	$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ $125^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125^2}=25$
	$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ $a^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$	$5^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $2^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

m,n为正整数，$n>1$，$a>0$

基础知识 整式的乘法

应用乘法分配律：分别相乘再相加

$25\times 41=25\times(40+1)=25\times 40+25\times 1=1000+25=1025$

$25\times 31+25\times 3=25\times(37+3)=25\times 40=1000$

$$
\begin{aligned}
(2a+3)\times(4a-5)&=(2a)\times(4a)-5\times 2a+3\times 4a-3\times 5\\
&=8a^2-10a+12a-15\\
&=8a^2+2a-15
\end{aligned}
$$

基础知识 整式的乘法

$$
\begin{aligned}
(x^2+3x+1)\cdot(x^2-2x+3)&=x^2\cdot(x^2-2x+3)+3x\cdot(x^2-2x+3)+1\cdot(x^2-2x+3)\\
&=(x^4-2x^3+3x^2)+(3x^3-6x^2+9x)+(x^2-2x+3)\\
&=x^4+(-2x^3+3x^3)+(3x^2-6x^2+x^2)+(9x-2x)+3\\
&=x^4+x^3-2x^2+7x+3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+1)^3&=(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)\\
&=(x^2+2x+1)\cdot(x+1)\\
&=(x^2+2x+1)\cdot x+(x^2+2x+1)\cdot 1\\
&=x^3+3x^2+3x+1
\end{aligned}
$$

考点一 整式的运算

整式的运算 $\begin{cases}\text{求值：化简代入}\\ \text{加减法}\\ \text{乘法：展开式中各项的构成}\\ \text{除法：竖式除法}\end{cases}$

考点一 整式的运算

【例题1】（条件充分性判断）代数式$2a(a-1)-(a-2)^2$的值为-1.（ ）

（1）$a=-1$ （2）$a=-3$

【答案】B

考点一 整式的运算

【例题2】$f(x)=3x^2-x+1$；$g(x)=5x-7$，试写出下列算式的具体表达式：

（1）$f(x)+g(x)$ （2）$f(x)-g(x)$ （3）$f(x)g(x)$

【答案】

（1）$f(x)+g(x)=3x^2+4x-6$

（2）$f(x)-g(x)=3x^2-6x+8$

（3）$f(x)g(x)=15x^3-26x^2+12x-7$

考点一 整式的运算

【例题3】已知$(x^2+px+8)(x^2-3x+q)$的展开式中不含x^2，x^3项，则p，q的值为（ ）.

A. $p=2\quad q=1$ B. $p=3\quad q=2$ C. $p=3\quad q=-1$

D. $p=1\quad q=3$ E. $p=3\quad q=1$

【答案】E

考点一 整式的运算

【例题4】用竖式除法进行整式除法运算

（1）$129\div 4$ （2）$2x^3-5x^2+3x-7$除以x^2-x+2

【答案】

$129=4\times 32+1$. $2x^3-5x^2+3x-7=(x^2-x+2)(2x-3)-4x-1$.

考点一 整式的运算

【例题4】用竖式除法进行整式除法运算

（3）$2x^3+5x^2+1$除以x^2-1

【答案】 $2x^3+5x^2+1=(x^2-1)(2x+5)+2x+6.$

考点一 整式的运算

【例题5】若$x^2+x+1=0$，则$x^4+2x^3-3x^2-4x+3$的值为（　　）.

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10　　E. 12

【答案】B

基础知识 乘法公式

二元

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ $\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\end{cases}$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ $\begin{cases}a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\\a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{cases}$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ $\begin{cases}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{cases}$

基础知识 乘法公式

三元 $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

PAGE 20

基础知识 恒等变形

恒等变形 代数式的一种变换，即把一个代数式变成另一个与它恒等的代数式.

合并同类项，展开多项式，乘法公式

两代数式恒等 ⇔ 不论代数式中的字母代入任何数值，计算结果均相等.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a=2,b=1\begin{cases}\text{等号左边}2^2-1^2=4-1=3\\ \text{等号右边}(2+1)(2-1)=3\times1=3\end{cases}$$

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$$

$$x=1\begin{cases}\text{等号左边}(1+1)^3=2^3=8\\ \text{等号右边}1^3+3\times1^2+3\times1+1=8\end{cases}$$

PAGE 21

基础知识 因式分解

因式分解 是把一个多项式恒等变形分解成几个整式的积的形式，且分解到不能再分解为止.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

$$x^4-4=(x^2)^2-2^2=(x^2+2)(x^2-2)=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

$$42=6\times7=2\times3\times7$$

PAGE 22

基础知识 因式分解

(1) 提： 提公因式.

$$ka+kb+kc=k(a+b+c).$$

(2) 看： 看多项式是否符合乘法公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \qquad a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

(3) 代入： $f(x)$的系数都是已知数字，代入$x=\pm1$，$x=\pm2$，$x=\pm3$

若$x=1$时$f(1)=0$，则$f(x)$有因式$x-1$ $\boxed{x=a\text{时的}f(x)\text{写作}f(a)}$

(4) 算： 十字相乘、待定系数等方法运算求解.

PAGE 23

考点二 恒等变形

恒等变形
- 求因式（因式分解）
  - **乘法公式应用**
  - 因式定理法
  - 十字相乘法
  - 待定系数法
- 求系数

考点二 恒等变形•乘法公式

二元乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ 请熟读并背诵全文

$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

考点二 恒等变形•乘法公式

【例题1】对下列多项式进行因式分解：

(1) a^4-9b^4 (2) $a^4+b^4c^4-2a^2b^2c^2$

【答案】(1)$a^4-9b^4=(a^2+3b^2)(a+\sqrt{3}b)(a-\sqrt{3}b)$ (2)$a^4+b^4c^4-2a^2b^2c^2=(a+bc)^2(a-bc)^2$

考点二 恒等变形•乘法公式

【例题2】（条件充分性判断）已知$f(x,y)=x^2-y^2-x+y+1$，则$f(x,y)=1$.（ ）

(1) $x=y$. (2) $x+y=1$.

【答案】D

考点二 恒等变形•乘法公式

$\boldsymbol{a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2}$

二次多项式配平方：将一个二次多项式化为一个一次多项式的平方与一个常数的和.

$x^2\pm 2x+1=(x\pm 1)^2$

$x^2+bx+c=x^2+2\cdot\frac{b}{2}x\boxed{+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}+c=(x+\frac{b}{2})^2+c-\frac{b^2}{4}$

加上一次项系数一半的平方，后再减去一次项系数一半的平方

考点二 恒等变形•乘法公式

【例题3】已知x^2-3x+a是一个完全平方式，则$a=$（　　）.

A. $2\frac{2}{3}$　　B. 2　　C. 3　　D. $2\frac{1}{4}$　　E. 4

【答案】D

考点二 恒等变形•乘法公式

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$\boxed{\boldsymbol{a^2+b^2}} \pm 2\boxed{\boldsymbol{ab}} = (\boxed{\boldsymbol{a \pm b}})^2$

整体与部分

- 给出a^2+b^2与ab，求$a+b$　　$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$
- 给出a^2+b^2与ab，求$a-b$　　$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$
- 给出$a+b$与ab，求a^2+b^2　　$(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$
- 给出$a-b$与ab，求a^2+b^2　　$(a-b)^2+2ab=a^2+b^2$

a^2+b^2，ab和$a+b$这三个多项式$\Rightarrow$知道任两个，可得第三个

a^2+b^2，ab和$a-b$这三个多项式$\Rightarrow$知道任两个，可得第三个

考点二 恒等变形•乘法公式

【例题4】已知$(2020-a)(2019-a)=2000$，那么$(2020-a)^2+(2019-a)^2=$（　　）

A 3998　　B 4000　　C 4001　　D 4002　　E 5000

【答案】C

考点二 恒等变形•乘法公式

【例题5】已知$(99-a)(101+a)=2$，那么$(99-a)^2+(101+a)^2=$（　　）

A. 39990　　B. 39996　　C. 40000　　D. 40002　　E. 40004.

【答案】B

考点二 恒等变形•乘法公式

$\boldsymbol{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2}$

a, b互为倒数时：$a^2 \pm 2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 \pm 2a \cdot \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \left(a \pm \frac{1}{a}\right)^2$ 建立$a+\frac{1}{a}$与$a-\frac{1}{a}$之间的关系

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 4 = a^2 + 2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 4 = \left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| \underset{\text{平方后加4，再开方}}{\overset{\text{平方后减4，再开方}}{\rightleftharpoons}} \left|a-\frac{1}{a}\right|$$

考点二 恒等变形•乘法公式

【例题6】已知$x^2 - 5x + 1 = 0$，则$\left|x - \frac{1}{x}\right| = $（ ）

A. 2　B. 4　C. $2\sqrt{7}$　D. $\sqrt{21}$　E. $\sqrt{19}$.

【答案】D

考点二 恒等变形•乘法公式

【例题7】（条件充分性判断）设a，b为非负实数，则$a + b \le \frac{5}{4}$.（ ）

（1）$ab \le \frac{1}{16}$.　（2）$a^2 + b^2 \le 1$.

【答案】C

考点二 恒等变形•乘法公式

【例题8】已知$x - y = 5$，$z - y = 10$，则$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$的值为（ B ）.

A. 50　B. 75　C. 100　D. 105　E. 110

【答案】B

扫码下载app

考点二 恒等变形•乘法公式

三元乘法公式

$\frac{1}{2}\left[\boxed{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}\right]=\boxed{a^2+b^2+c^2}-\boxed{ab-bc-ac}$

$ab+bc+ac=a^2+b^2+c^2-\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$

$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]+(ab+bc+ac)$

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$，$a^2+b^2+c^2$和$ab+bc+ac$三个多项式$\Rightarrow$知道任两个，可得第三个

考点二 恒等变形•乘法公式

【例题9】若△ABC的三边a,b,c满足$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则△ABC为（ ）.

A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形 E. 以上都不是

【答案】C

考点二 恒等变形•乘法公式

【例题10】已知a,b,c是不完全相等的任意实数，若$x=a^2-bc$，$y=b^2-ac$，$z=c^2-ab$，则x,y,z（ ）.

A. 都大于0 B. 至少有一个大于0 C. 至少有一个小于0 D. 都不小于0 E. 以上均不正确.

【答案】B

基础知识 拓展

证明三个任意实数a,b,c中至少有一个**大于零**

方法一：相加 $a+b+c>0\Rightarrow a,b,c$中至少有一个大于零 荐

方法二：相乘 $abc>0\Rightarrow a,b,c$均为正或两负一正，即至少有一个大于零.

正数个数	负数个数	乘积
0	3	负
1	2	正
2	1	负
3	0	正

扫码下载app

基础知识 拓展

证明三个任意实数a,b,c中至少有一个**小于零**

方法一：相加 $a+b+c<0 \Rightarrow a,b,c$中至少有一个小于零 荐

方法二：相乘 $abc<0 \Rightarrow a,b,c$均为负或两正一负，即至少有一个小于零.

正数个数	负数个数	乘积
0	3	负
1	2	正
2	1	负
3	0	正

基础知识 拓展

- 若n个实数之和大于m，则其中至少有一个大于$\frac{m}{n}$.

【举例】若3个数之和大于6，则这3个数中至少有一个大于$\frac{6}{3}=2$

若4个数之和大于12，则这4个数中至少有一个大于$\frac{12}{4}=3$

- 若n个实数之和小于m，则其中至少有一个小于$\frac{m}{n}$.

【举例】若3个数之和小于6，则这3个数中至少有一个小于$\frac{6}{3}=2$

若4个数之和小于12，则这4个数中至少有一个小于$\frac{12}{4}=3$

考点二 恒等变形•乘法公式

三元乘法公式

$\boxed{a^2+b^2+c^2}+\boxed{2ab+2bc+2ac}=\boxed{(a+b+c)^2}$

$2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$\boxed{a^2+b^2+c^2}=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)$

$(a+b+c)^2$，$ab+bc+ac$和$a^2+b^2+c^2$三个多项式$\Rightarrow$知道任两个，可得第三个

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(\boxed{a^2+b^2+c^2}-ab-bc-ac)$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)[(a+b+c)^2-3ab-3bc-3ac]$

考点二 恒等变形•乘法公式

【例题11】设实数x,y适合等式$x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=0$，则$x+y$的最大值为（ ）.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$ E. $3\sqrt{3}$

【答案】C

PAGE 44

考点二 恒等变形·乘法公式

【例题12】若实数a,b,c满足$a^2+b^2+c^2=9$，则$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$的最大值是（ ）.

A. 21 B. 27 C. 29 D. 32 E. 39

【答案】B

PAGE 45

考点二 恒等变形

恒等变形
- 求因式（因式分解）
  - 乘法公式应用
  - **因式定理法**
  - 十字相乘法
  - 待定系数法
- 求系数

PAGE 46

基础知识 整式的整除与整式的因式

	整数整除	**整式整除**
举例	$42=6\times7$	$x^2-9=(x+3)(x-3)$
表达式	$a=bq$ 被除数=除数×商	$f(x)=g(x)q(x)$ 被除式=除式×商式
要点	a能被b和q整除	$f(x)$能被$g(x)$和$q(x)$整除
	b与q都叫做a的因数	$g(x)$与$q(x)$都叫做$f(x)$的因式

PAGE 47

基础知识 因式定理

两多项式恒等$x^2-9=(x+3)(x-3)$

等式右边代入$x=-3$得$(-3+3)\times(-3-3)=0$ 等式左边多项式一定为0

等式右边代入$x=3$得$(3+3)\times(3-3)=0$ 等式左边多项式一定为0

因式定理 如果关于x的多项式$f(x)$含有因式$x-a\Leftrightarrow f(x)$能被$(x-a)$整除$\Leftrightarrow f(a)=0$

$f(x)=(x-a)q(x)$

如果关于x的多项式$f(x)$含有因式$(ax-b)\Leftrightarrow f(x)$能被$(ax-b)$整除$\Leftrightarrow f\left(\frac{b}{a}\right)=0$

$f(x)=(ax-b)q(x)$

扫码下载app

基础知识 因式定理

【应用】设$f(x)$为一个关于x的多项式当$x=a$时有$f(a)=0$，那么多项式$f(x)$必定含有因式$x-a$.

【标志词汇1】系数全为已知数字的多项式$f(x)$因式分解/求因式

$\Rightarrow$ 尝试代入$x=\pm1$，$x=\pm2$，$x=\pm3$……

若代入$x=1$后$f(x)$值为0，那么可以确定$f(x)$含有因式$x-1$.

【例题13】x^3-9x+8与$x^9+x^6+x^3-3$必同时含有下列哪个因式（ ）

A. $x+1$　B. $x+2$　C. $x+3$　D. $x-2$　E. $x-1$

【答案】E

考点二 恒等变形·因式定理法

【例题14】用因式定理法将下面的多项式因式分解为两个一次式乘积的形式.

（1）$2x^2-5x+2$.　（2）$2x^2-3x-9$.

【答案】（1）$2x^2-5x+2=(x-2)(2x-1)$.

考点二 恒等变形·因式定理法

【例题14】用因式定理法将下面的多项式因式分解为两个一次式乘积的形式.

（1）$2x^2-5x+2$.　（2）$2x^2-3x-9$.

【答案】（2）$2x^2-3x-9=(x-3)(2x+3)$.

考点二 恒等变形·因式定理法

【标志词汇2】关于x的多项式A $\begin{cases} A\text{是}f(x)\text{的因式} \\ A\text{能整除}f(x) \\ f(x)\text{能被}A\text{整除} \\ f(x)\text{含有因式}A \end{cases}$ $\Rightarrow$ 代入使$A=0$的x值得此时$f(x)=0$

因式A为一次式$x-a\Rightarrow$仅有一个x值可使$f(x)$为零，等同于给出$f(a)=0$

因式A为二次式$(x-a)(x-b)\Rightarrow$有两个x值均可使$f(x)$为零

等同于给出$f(a)=0$且$f(b)=0$

扫码下载app

考点二 恒等变形•因式定理法

【例题15】多项式x^2+7x+6，x^2-2x-3，$2x^2+6x+4$，x^2-6x+5，$2x^2+x-1$中含有因式$x+1$的多项式共有（　）个.

A. 1　　B. 2　　C.3　　D. 4　　E. 5

【答案】D

考点二 恒等变形•因式定理法

【例题16】已知多项式$f(x)=-x^3-a^2x^2+ax+1$能被$x+1$整除，则实数a的值为（　）.

A. -2或1　　B. 2　　C. -1　　D. -2或+2　　E.1或-1

【答案】A

考点二 恒等变形•因式定理法

【例题17】多项式x^2+x+m能被$x+5$整除，则此多项式也能被多项式（　）整除.

A. $x-6$　　B. $x+4$　　C. $x+6$　　D. $x-4$　　E. $x+2$

【答案】D

考点二 恒等变形•因式定理法

【例题18】（条件充分性判断）$x-2$是多项式$f(x)=x^3-2x^2+ax-b-2$的因式.（　）

（1）$a=1,b=2$.　　（2）$a=2,b=2$.

【答案】B

考点二 恒等变形•因式定理法

【例题19】（条件充分性判断）二次三项式x^2+x-6是多项式$f(x)=2x^4+x^3-ax^2+bx+a+b-1$的一个因式.（　　）

（1）$a=16$.　　　　（2）$b=2$.

【答案】E

考点二 恒等变形

恒等变形
- 求因式（因式分解）
  - 乘法公式应用
  - 因式定理法
  - **十字相乘法**
  - 待定系数法
- 求系数

考点二 恒等变形•十字相乘法

【例题20】用十字相乘法将下列多项式因式分解：（1）$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

x^2-5x+6

拆为两项乘积　拆为两项乘积

$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 2 \\ 1 & & 3 \end{array}$ 十字相乘再相加$1\times3+1\times2=5$

$\begin{array}{ccc} \boxed{1} & \times & \boxed{-2} \\ \boxed{1} & & \boxed{-3} \end{array}$ 十字相乘再相加$1\times(-3)+1\times(-2)=-5$

$(1\cdot x-2)(1\cdot x-3)$

考点二 恒等变形•十字相乘法

【例题20】用十字相乘法将下列多项式因式分解：（2）$x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$

x^2-5x-6

拆为两项乘积　拆为两项乘积

$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 2 \\ 1 & & -3 \end{array}$ 十字相乘再相加$1\times(-3)+1\times2=-1$

$\begin{array}{ccc} \boxed{1} & \times & \boxed{-6} \\ \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$ 十字相乘再相加$1\times(-6)+1\times1=-5$

$(1\cdot x-6)(1\cdot x+1)$

考点二 恒等变形•十字相乘法

【例题20】用十字相乘法将下列多项式因式分解：（3）$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$x^2+(a+b)x+ab$

拆为两项乘积　　拆为两项乘积

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & a \\ \hline 1 & b \\ \hline\end{array}$$

十字相乘再相加$1\cdot a+1\cdot b=a+b$

$(1\cdot x+a)(1\cdot x+b)$

考点二 恒等变形•十字相乘法

【例题20】用十字相乘法将下列多项式因式分解：（4）$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$

$x^2-(a+b)x+ab$

拆为两项乘积　　拆为两项乘积

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -a \\ \hline 1 & -b \\ \hline\end{array}$$

十字相乘再相加$1\cdot(-a)+1\cdot(-b)=-a-b=-(a+b)$

$(1\cdot x-a)(1\cdot x-b)$

考点二 恒等变形•十字相乘法

【例题20】用十字相乘法将下列多项式因式分解：（5）$6x^2+19x+15=(2x+3)(3x+5)$

$6x^2+19x+15$

拆为两项乘积　　拆为两项乘积

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline\end{array}$$

十字相乘再相加$2\times5+3\times3=19$

$(2\cdot x+3)(3\cdot x+5)$

考点二 恒等变形•十字相乘法

【例题20】用十字相乘法将下列多项式因式分解：（6）$2x^2-7xy+3y^2=(2x-y)(x-3y)$

$2x^2-7xy+3y^2$

拆为两项乘积　　拆为两项乘积

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & -1 \\ \hline 1 & -3 \\ \hline\end{array}$$

十字相乘再相加$2\times(-3)+1\times(-1)=-7$

$(2\cdot x-1\cdot y)(1\cdot x-3\cdot y)$

考点二 恒等变形•十字相乘法

【例题21】已知$x^2+xy+y=24$，$y^2+xy+x=32$，则$x+y=$（ D ）.

A. 7 B. 8 C. 7或8 D. 7或-8 E. 8或-7

【答案】D

考点二 恒等变形

恒等变形
- 求因式（因式分解）
  - 乘法公式应用
  - 因式定理法
  - 十字相乘法
  - **待定系数法**
- 求系数

考点二 恒等变形•待定系数法

【例题22】若$4x^4-ax^3+bx^2-40x+16$是完全平方式，则ab等于（ ）

A. 820或180 B. -820或-180 C. 820或-180 D. -820或180 E. ±820或±180

【答案】C

考点二 恒等变形•待定系数法

【例题22】若$4x^4-ax^3+bx^2-40x+16$是完全平方式，则ab等于（ ）

A. 820或180 B. -820或-180 C. 820或-180 D. -820或180 E. ±820或±180

【答案】C

扫码下载app

考点二 恒等变形·待定系数法

$a^2x + mx + b^2 = (ax + b)^2$

a, b同号

$$\begin{array}{ccc} a & \times & b \\ a & & b \end{array}$$ 交叉相乘$m = 2ab$

$$\begin{array}{ccc} -a & \times & -b \\ -a & & -b \end{array}$$ 交叉相乘$m = 2ab$

a, b异号

$$\begin{array}{ccc} a & \times & -b \\ a & & -b \end{array}$$ 交叉相乘$m = -2ab$

$$\begin{array}{ccc} -a & \times & b \\ -a & & b \end{array}$$ 交叉相乘$m = -2ab$

考点二 恒等变形·待定系数法

【例题23】用待定系数法将多项式$x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3$分解因式.

【答案】$x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3 = (x + 4y - 1)(x - 2y + 3)$.

考点二 恒等变形

恒等变形
- 求因式（因式分解）
  - 乘法公式应用
  - 因式定理法
  - 十字相乘法
  - 待定系数法
- 求系数
  - **恒等式的对应项系数相等**
  - 余式定理

考点二 恒等变形·对应项系数相等

【例题24】若$x^2 - 3x + 2xy + y^2 - 3y - 40 = (x + y + m)(x + y + n)$，则$m^2 + n^2 =$（ C ）.

A. 69　　B. 79　　C. 89　　D. 106　　E. 120

【答案】C

扫码下载app

考点二 恒等变形

恒等变形
- 求因式（因式分解）
  - 乘法公式应用
  - 因式定理法
  - 十字相乘法
  - 待定系数法
- 求系数
  - 恒等式的对应项系数相等
  - **余式定理**

基础知识 多项式的余式

$$\begin{array}{r} 2x\ -3 \\ x^2-x+2\overline{\big)\,2x^3-5x^2+3x-7} \\ \underline{2x^3-2x^2+4x\quad} \\ -3x^2-\ x-7 \\ \underline{-3x^2+3x-6} \\ -4x-1 \end{array}$$

$129=4\times32+1$

$2x^3-5x^2+3x-7=(2x-3)(x^2-x+2)-4x-1.$

要点	整数除法	整式除法
表达式	$a=bq+r$ 被除数=除数×商+余数	$f(x)=g(x)q(x)+\boldsymbol{r}(x)$ 被除式=除式×商式+**余式**
限制条件	$0\le r<b$	$r(x)$的次数小于$g(x)$的次数

基础知识 多项式的余式

【举例】分析多项式$f(x)$分别除以（1）$x+1$；（2）x^2+1所得余式的形式.

（1）$x+1$为一次多项式

多项式$f(x)$除以$x+1$的余式的次数为零，即为常数

一般将常数余式（余数）用大写字母C来表示. $f(x)=(x+1)q(x)+C$

（2）x^2+1为二次多项式

多项式$f(x)$除x^2+1的余式的次数最高为一次

一般将一次余式用$ax+b$表示 $f(x)=(x^2+1)q(x)+ax+b$

基础知识 余式定理

由$f(x)$除以一次多项式$x-m$所得的余式是一个零次式，即常数C，可得恒等式：

$$f(x)=(x-m)q(x)+C$$

代入令$x-m$为零的x值$x=m$

$$f(m)=(m-m)q(m)+C=C$$

余式定理 多项式$f(x)$除以一次多项式$x-m$，所得的余式是一个常数C

这个常数的值等于$x=m$时多项式的值，即$f(m)=C$.

考点二 恒等变形•余式定理的五大应用

【应用1】除式的数字系数：不影响余式

多项式$f(x)$除以$x-m$和多项式$f(x)$除以$5(x-m)$

$f(x)=5(x-m)q(x)+C$

【应用2】除式为二次：分解成两个一次式乘积的形式. $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

判断整数1426除以4的余数：$1426=14\times 100+26$

【应用3】给出$f(x)$除以二次式$(x-m)(x-n)$的余式为$ax+b$，

要求$f(x)$除以此二次式的一个因式$x-m$的余式

$f(x)=(x-m)(x-n)q(x)+(ax+b)$

$f(x)$除以$x-m$的余式就是$ax+b$除以$x-m$的余式.

考点二 恒等变形•余式定理

【例题25】一个数除以35所得的余数是7，则它除以5所得的余数是（ C ）.

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3　E. 4

【答案】C

考点二 恒等变形•余式定理

【例题26】（条件充分性判断）多项式$f(x)$除以$x+1$所得的余式为2.（　）

（1）多项式$f(x)$除以x^2-x-2所得的余式是$x+5$

（2）多项式$f(x)$除以x^2-2x-3所得的余式是$x+3$

【答案】B

考点二 恒等变形•余式定理

【例题27】已知多项式$f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$除以$(x-1)(x+2)$余式为$-2x+1$，则它除以$5(x-1)$的余式为（　）.

A. 1　B. -1　C. 2　D. -2　C. 3

【答案】B

考点二 恒等变形·余式定理的五大应用

余式定理 多项式$f(x)$除以一次多项式$x-m$，所得的余式是一个常数C

这个常数的值等于$x=m$时多项式的值，即$f(m)=C$.

【标志词汇1】 $f(x)$除以$x-m$所得余式为C

$\Rightarrow$ 相当于给定等式$f(m)=C$

除式为二次时：$f(x)=(x-m)(x-n)q(x)+ax+b$

【标志词汇2】 $f(x)$除以$(x-m)(x-n)$所得余式为$ax+b$

$\Rightarrow$ 相当于给定等式$\begin{cases}f(m)=am+b\\f(n)=an+b\end{cases}$

考点二 恒等变形·余式定理的五大应用

【应用4】 给出$f(x)$除以一次式$x-m$的余式为C_1 $f(m)=C_1$

给出$f(x)$除以一次式$x-n$的余式为C_2 $f(n)=C_2$

要求$f(x)$除以以这两个一次式组成的二次式$(x-m)(x-n)$的余式

$f(x)=(x-m)(x-n)q'(x)+(ax+b)$

$\begin{cases}f(m)=am+b=C_1\\f(n)=an+b=C_2\end{cases}$

考点二 恒等变形·余式定理

【例题28】已知多项式$f(x)$除以$x+2$余式为1，除以$x+3$余式为-1，则$f(x)$除以$(x+2)(x+3)$的余式为（ ）.

A. $2x-5$ B. $2x+5$ C. $x-1$ D. $x+1$ E. $2x-1$

【答案】B

考点二 恒等变形·余式定理

【例题29】关于x的多项式$f(x)$除以$3(x-1)$和$2(x+2)$的余式分别是1和-17，则$f(x)$除以x^2+x-2的余式是（ ）.

A. $-5x+6$ B. $-6x-5$ C. $6x-5$ D. $6x+11$ E. $6x-7$

【答案】C

扫码下载app

考点二 恒等变形·余式定理

【例题30】一个数m除以5所得的余数是2，除以7所得的余数是3，则它除以35所得的余数是（　）.

A.13　　B.14　　C.15　　D.16　　E.17

【答案】E

考点二 恒等变形·余式定理

【例题31】设多项式$f(x)$除以$x-1$，x^2-2x+3的余式分别依次为2，$4x+6$，则$f(x)$除以$(x-1)(x^2-2x+3)$的余式为__________.

【答案】$-4x^2+12x-6$

考点二 恒等变形·余式定理的五大应用

【应用5】余式定理的逆应用：当题干给定$f(m)=C$时，就意味着给定$f(x)$除以$x-m$的余式为C.

【例题32】设$f(x)$是三次多项式且$f(2)=f(-1)=f(4)=3$，$f(1)=-9$，则$f(0)=$（　）

A.-13　　B. -12　　C. -9　　D. 13　　E. 7

【答案】A

考点二 恒等变形·梳理

- 恒等变形
  - 求因式（因式分解）
    - 乘法公式应用
    - 因式定理法
    - 十字相乘法
    - 待定系数法
  - 求系数
    - 恒等式的对应项系数相等
    - 余式定理

基础知识 分式

分式 一般地，若A,B（B中含有字母且$B\neq 0$）表示两个整式，那么$\frac{A}{B}$就叫做分式.

其中A称为分式的分子，B称为分式的分母.

$\frac{1}{x-2}$　　　　$\frac{x}{y}$

分式有意义的条件：$B\neq 0$

分式无意义的条件：$B=0$

分式值为零的条件：$B\neq 0$且$A=0$

基础知识 分式

分式的基本性质 分式的分子分母同乘以不为零的数字或者不为零的多项式，分式的值不变.

$$\frac{A}{B}=\frac{m\cdot A}{m\cdot B}=\frac{A\cdot f(x)}{B\cdot f(x)}$$

（$B\neq 0$，m为非零实数，多项式$f(x)\neq 0$）

分式
- 分式的通分与化简
- 裂项相消
- 倒数和
- 齐次分式

考点三 分式·分式的通分与化简

【例题1】当$x=\sqrt{2}$时，分式$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+1}$的值为（　　）.

A. $\frac{5}{3}$　　B. $-\frac{5}{3}$　　C. 1　　D. -1　　E. 2

【答案】A

考点三 分式·分式的通分与化简

【例题2】若分式$\frac{3}{x^2+x-6}+\frac{2}{x^2+5x+6}$与$\frac{4}{x^2-4}$相等，则$x=$（　　）.

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8　　E. 10

【答案】E

考点三 分式•分式的通分与化简

【例题3】（条件充分性判断）已知p、q为非零实数，则能确定$\frac{p}{q(p-1)}$的值.（ ）

（1）$p+q=1$.　　（2）$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

【答案】B

基础知识 分式•裂项相消

分式
- 分式的通分与化简
- **裂项相消**
- 倒数和
- 齐次分式

$$\frac{4}{3\times7}=\frac{7-3}{3\times7}=\frac{7}{3\times7}-\frac{3}{3\times7}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}$$

$$\frac{\text{大数字}-\text{小数字}}{\text{小数字}\times\text{大数字}}=\frac{\mathbf{1}}{\text{小数字}}-\frac{\mathbf{1}}{\text{大数字}}$$

$$\frac{1}{2\times5}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2\times5}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$

基础知识 分式•裂项相消

$$\frac{\text{大}-\text{小}}{\text{小}\times\text{大}}=\frac{\mathbf{1}}{\text{小}}-\frac{\mathbf{1}}{\text{大}}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}-\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{(x+3)-(x+1)}\times\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$

考点三 分式•裂项相消

【例题4】化简$\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}+\cdots+\frac{1}{x^2+201x+10100}$

$$\frac{\text{大}-\text{小}}{\text{小}\times\text{大}}=\frac{\mathbf{1}}{\text{小}}-\frac{\mathbf{1}}{\text{大}}\qquad\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\text{原式}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\cdots+\frac{1}{(x+100)(x+101)}$$

$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+100}-\frac{1}{x+101}\right)$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+101}$$

扫码下载app

PAGE 96

考点三 分式•裂项相消

【例题5】已知$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+9)(x+10)}$，则$f(8)=$（　）.

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{10}$　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\frac{1}{17}$　　E. $\frac{1}{18}$

【答案】E

PAGE 97

基础知识 分式•倒数和

分式
- 分式的通分与化简
- 裂项相消
- **倒数和**
- 齐次分式

【标志词汇】当题目中出现形如$a\pm\frac{1}{a}$的互为倒数的算式之和/差的形式

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| \underset{\text{平方后加4，再开方}}{\overset{\text{平方后减4，再开方}}{\rightleftharpoons}} \left|a-\frac{1}{a}\right|$$

PAGE 98

基础知识 分式•倒数和

【标志词汇】当题目中出现形如$a\pm\frac{1}{a}$，$x^2\pm\frac{1}{x^2}$，$\frac{a}{b}\pm\frac{b}{a}$，$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$的互为倒数的算式之和/差的形式时，

一部分乘法公式形态将有改变：

$$\left(x\pm\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}\pm2$$

【举例】已知$x+\frac{1}{x}=m$，求下列算式的值.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=m^2-2$$

$$x+\frac{1}{x} \underset{\text{逆向?}}{\overset{\text{平方后减2}}{\rightleftharpoons}} x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=(m^2-2)^2-2$$

PAGE 99

基础知识 分式•倒数和

【标志词汇】当题目中出现形如$a\pm\frac{1}{a}$，$x^2\pm\frac{1}{x^2}$，$\frac{a}{b}\pm\frac{b}{a}$，$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$的互为倒数的算式之和/差的形式时，

一部分乘法公式形态将有改变：

$$x^3\pm\frac{1}{x^3}=\left(x\pm\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\mp1\right)$$

【举例】已知$x+\frac{1}{x}=m$，求下列算式的值.

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(\boxed{x+\frac{1}{x}}\right)\left(\boxed{x^2+\frac{1}{x^2}}-1\right)=m(m^2-3)$$

扫码下载app

考点三 分式•倒数和

【例题6】（条件充分性判断）设x是非零实数，则$x^3+\frac{1}{x^3}=18$.（ ）

（1）$x+\frac{1}{x}=3$.

（2）$x^2+\frac{1}{x^2}=7$.

【答案】A

考点三 分式•倒数和

【例题7】若$x+\frac{1}{x}=3$，则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=$（ ）.

A. $-\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{4}$

E. $\frac{1}{8}$

【答案】E

基础知识 分式•齐次分式

分式
- 分式的通分与化简
- 裂项相消
- 倒数和
- **齐次分式**

齐次结构 所含各项的次数都相同的分式结构或者方程

$\frac{b^2}{ac}$ $a^2=bc+c^2$ $x^2+2x+3=0$

齐次分式 分式形式的齐次结构

$$\frac{b^2+bc-c^2}{a^2-ac}$$

基础知识 分式•齐次分式

【举例】已知$a:b:c=2:3:6$，求$\frac{a^2+b^2}{a(b+c)}$的值.

设$a=2k$，$b=3k$，$c=6k$ $\Rightarrow$ $a=2$，$b=3$，$c=6$

$$\frac{a^2+b^2}{a(b+c)}=\frac{4k^2+9k^2}{2k(3k+6k)}=\frac{4k^2+9k^2}{6k^2+12k^2}=\frac{13}{18}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a(b+c)}=\frac{4+9}{2\times(3+6)}=\frac{13}{18}$$

【标志词汇】仅给定未知字母间比例关系，求未知字母组成的齐次分式的值：

①化为整数连比

②比值即特值

③代入求值.

考点三 分式·齐次分式

【例题8】$a:b=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$，则$\frac{12a+16b}{12a-8b}=$（　　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. -3　　E. -2

【答案】C

考点三 分式·齐次分式

【例题9】（条件充分性判断）设x,y,z为非零实数，则$\frac{2x+3y-4z}{-x+y-2z}=1$.（　　）

（1）$3x-2y=0$.　　（2）$2y-z=0$.

【答案】C

基础知识 特值法

特值法$\begin{cases}\text{对任意}x\text{恒成立}\\\text{化简求值}\end{cases}$

【标志词汇】恒等式问题：两个关于x的多项式相等

关于x的等式对所有/任意实数x都恒成立

求x的系数相关算式的值.

特值选取方向：消去未知量，提取待求式

常用特值：$x=0$，±1

考点四 特值法在整式、分式中的应用

【例题1】对任意实数x，等式$ax-5x+6+b=0$恒成立，则$(a+b)^{2019}$为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 2^{2019}　　E. -2^{2019}

【答案】C

考点四 特值法在整式、分式中的应用

【例题2】若$x^2-3x+2xy+y^2-3y-40=(x+y+m)(x+y+n)$，则$m^2+n^2=$（　）.

A. 69　B. 79　C. 89　D. 106　E. 120

【答案】C

考点四 特值法在整式、分式中的应用

【例题3】多项式$f(x)=2x-7$与$g(x)=a(x-1)^2+b(x+2)+c(x^2+x-2)$相等，则（ E ）.

A. $a=\frac{11}{3}$，$b=\frac{5}{3}$，$c=-\frac{11}{3}$　B. $a=-11$，$b=15$，$c=11$　C. $a=\frac{11}{9}$，$b=\frac{5}{3}$，$c=-\frac{11}{9}$

D. $a=11$，$b=-15$，$c=-11$　E. $a=-\frac{11}{9}$，$b=-\frac{5}{3}$，$c=\frac{11}{9}$

【答案】E

考点四 特值法在整式、分式中的应用

【例题4】若$x^4+2x^3+ax^2-bx+1$除以x^2-1所得的余式为$2x-1$，则$ab=$（　）.

A. 0　B. 2　C. 3　D. -3　E. 6

【答案】A

考点四 特值法在整式、分式中的应用

【例题5】多项式x^3+ax^2+bx-6的两个因式是$x-1$和$x-2$，则其第三个一次因式为（　）.

A. $x-6$　B. $x-3$　C. $x+1$　D. $x+2$　E. $x+3$

【答案】B

扫码下载app

基础知识 特值法

特值法 $\begin{cases}\text{对任意}x\text{恒成立}\\ \text{化简求值}\end{cases}$

特值选取方向：消去未知量，提取待求式
使$f(x)$变为待求式形式
常用特值：$x=0$，±1

【标志词汇】恒等式问题：两个关于x的多项式相等，这个等式对所有/任意实数x都恒成立，求x的系数相关算式的值.

【举例】已知关于x的多项式$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$

常数项$a_0=f(0)$

各项系数之和$a_0+a_1+\cdots+a_n=f(1)$

$a_0-a_1+a_2\ldots a_n=f(-1)$

奇次项系数之和$a_1+a_3+a_5+\cdots=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$

偶次项系数之和$a_0+a_2+a_4+\cdots=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

考点四 特值法在整式、分式中的应用

【例题6】若$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n=a_1(x-1)+2a_2(x-1)^2+\cdots+na_n(x-1)^n$，则$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=$（　）.

A. $\frac{3^n-1}{2}$　B. $\frac{3^{n+1}-1}{2}$　C. $\frac{3^{n+1}-3}{2}$　D. $\frac{3^n-3}{2}$　E. $\frac{3^n-3}{4}$

【答案】C

考点四 特值法在整式、分式中的应用

【例题6】若$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n=a_1(x-1)+2a_2(x-1)^2+\cdots+na_n(x-1)^n$，则$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=$（　）.

A. $\frac{3^n-1}{2}$　B. $\frac{3^{n+1}-1}{2}$　C. $\frac{3^{n+1}-3}{2}$　D. $\frac{3^n-3}{2}$　E. $\frac{3^n-3}{4}$

【答案】C

考点四 特值法在整式、分式中的应用

【例题7】若$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n=a_1(x-1)+2a_2(x-1)^2+\cdots+na_n(x-1)^n$，则$2a_1+8a_2+24a_3+\cdots+n2^na_n=$（　）.

A. $\frac{4^n-1}{3}$　B. $\frac{4^{n+1}-1}{3}$　C. $\frac{4^{n+1}-4}{3}$　D. $\frac{4^n-4}{3}$　E. $\frac{4^n-4}{3}$

【答案】C

扫码下载app

考点四 特值法在整式、分式中的应用

特值法 { 对任意x恒成立；**化简求值**

常用特值：0，±1，±2，10以内整数的平方，5以内整数的立方，2^n（$n=0,1,2\ldots$）以及它们的常见和、差，因此需要有一定的数字敏感度.

【标志词汇】 给定关于某几个未知量的一个/多个等式，求另一个关于相同未知量的代数式的具体值.
找到满足题干条件的任一组未知量特值，代入待求式即可.

【例题8】已知$x-y=5$，$z-y=10$，则$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$的值为（ ）.

A. 50　B. 75　C. 100　D. 105　E. 110

【答案】B

考点四 特值法在整式、分式中的应用

【例题9】设实数a,b满足$|a-b|=2$，$|a^3-b^3|=26$，则$a^2+b^2=$（ ）.

A. 30　B. 22　C. 15　D. 13　E. 10

【答案】E

章节梳理 整式、分式

- 整式的运算
  - 求值：化简代入
  - 加减法
  - 乘法：展开式中各项的构成
  - 除法：竖式除法
- 恒等变形
  - 求因式（因式分解）
    - 乘法公式应用
    - 因式定理法
    - 十字相乘法
    - 待定系数法
  - 求系数
    - 恒等式的对应项系数相等
    - 余式定理
- 分式
  - 分式的通分与化简
  - 裂项相消
  - 倒数和
  - 齐次分式
- 特值法
  - 对任意x恒成立
  - 化简求值

THANK YOU FOR WATCHING

扫码下载app