后继结构

zysx997

2025 年 1 月 7 日

1　认识数，从认识数数开始

原本打算把标题起成“认识数学，从认识数数开始的”，但仔细一想不太合理。如果想要认识自然数，从数数开始是很有必要性的。但是对于整个数学，或许认识集合、认识范畴、认识泛性质才是最为重要的。正如接下来我在处理“数数”的问题中，多次用到集合、范畴、泛性质的工具。这些工具或许不是必要的，但往往能解释清楚我们进行构造的动机，或是构造的原因。因此，认识这些概念是有益的，从“数数”这个简单的例子开始，用来辅助理解这些概念也是有帮助的。

我认为数学中定义一种结构的抽象有两个方面。一是把现实中或者概念中的直觉用数学的语言描述，给出一个“基础”，二是利用逻辑推理，在基础上附加更多“良好”的性质，以便我们对结构进行处理。在这个观点下，让我们来看看数学中是怎么对自然数进行抽象的。首先，自然数对应的现实直觉来自“数数”，运用集合代数的知识，我们可以将“自然数集”抽象为一个集合 $\mathbb{N}$，然后，将“数数”这个操作定义为一个从 $\mathbb{N}$ 到其自身的映射 s。这样，我们就把自然数的定义从“数数”这个操作抽象为一个集合上的映射。这一步的抽象是很自然的，因为我们知道，自然数是一个集合，而“数数”这个操作就是把集合中的元素按照一定的顺序取出来。这个操作可以被抽象为一个映射。然而，我们并没有定义这个映射，也没有给出这个映射的性质。这就是我们需要进行的第二个步骤。我们需要定义这个映射，或是给出这个映射的性质。这个映射的定义或性质的给出，就是我们需要进行的第二步抽象。如果熟悉 Peano 公理，那么你应该会明白，Peano 公理的几条性质就是第二步抽象的结果。在这里我们先列出自然数集 $\mathbb{N}$ 与后继映射 $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足的 Peano 公理：

Zero

$$0 \in \mathbb{N}$$

Zero is not a successor

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} ns \neq 0$$

Injective

$$\underset{m,n\in\mathbb{N}}{\forall} ms = ns \to m = n$$

Induction

$$\underset{A\subset\mathbb{N}}{\forall}(0 \in A \wedge (\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} n \in A \to ns \in A)) \to A = \mathbb{N}$$

注意，在上面的符号中我们对 n 在映射 s 下的像记为 ns，而不是 $s(n)$。这样做是为了符合我们从左向右书写的习惯。另外，上面列出的 Peano 公理说没有包括 $ns \in \mathbb{N}$ 这一条，因为 s 作为 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的函数，已经包含了这个性质。注意，Peano 公理的 Zero 条目并非关于映射 s，而是关于集合 $\mathbb{N}$。因此，自然数集的基石与其说是集合 $\mathbb{N}$ 与映射 s 两者，不如说是集合 $\mathbb{N}$、映射 s 与元素 0 三者。而在这三者的基础上，进一步应满足 Peano 公理的 Zero is not a successor、Injective 与 Induction 三条性质。但是，除了抽象的第一步对 s 的定义，再加上 0 作为某个“起点”符合我们对于“数数”直觉的抽象之外，我们并不知道剩下的三条性质是如何与我们关于“数数”的直觉相联系的。或许更好的问法是：具有一个确定点 x，一个自映射 s 的集合 X 有很多，为什么我们偏偏对于满足上面的三条性质的有确定点 0，自映射 s 的集合 $\mathbb{N}$ 感兴趣？这个问题，更一般的问法，是“一个结构的全体中有那么多结构对象，为什么会有一些特殊的结构对象，我们特别感兴趣？”。这个问题的解答，其主观成分在于“我们对怎样的数学对象感兴趣”，而客观成分在于，当我们确定了对怎样的数学对象兴趣后，我们能严格地证明，某些性质是这些数学对象的必然性质。这就是数学的魅力所在。

让我们来先对主观成分进行讨论。我们会对怎样的数学对象感兴趣呢？首先，这里要澄清一点，这里的数学对象是来自已经定义了的结构全体的，而这样的结构全体的定义来源于直觉，是上面说的第一步抽象。已经定义的某个结构全体，其可以有各种各样不同的结构对象，我们最为关注的是能反映所有对象性质的那些特别的对象。举例明之，如果结构全体是一个闭区间，对象是其中的元素，那么我们最关注的对象自然是最大元 b 与最小元 a，因为如果确定了这两者，那么所有其他的元素都得到了确定。在这里，我们用特殊的两个对象，得到了关于全体对象的性质。像这样关于全体对象的性质，称为这个结构的泛性质。一个对象能反映结构的泛性质，是我们对这个对象感兴趣的主要原因。这里要说明的是，对象之所以能反映整个结构的泛性质，是因为这个对象与结构的其他对象之间有着联系，这种联系也是结构必须含有的一部分，不然的话，结构中的对象就是孤立的，没有联系，也就不可能用一个对象反映整个结构的性质。

关于问题的客观成分，需要用到范畴论。范畴论是系统地研究结构、关系、泛性质的理论。范畴论是数学的一种基础理论，它研究的是数学对象之间的关系，以及这些关系的性质。范畴论

的基本概念是范畴，一个范畴包括了对象、态射与态射的复合。对象是我们研究的数学对象，态射是对象之间的联系，这种联系可以通过复合进行传递。有了范畴提供了关于结构、对象、关系的统一语言，我们就可以证明某些对象在某种意义下的唯一性，这就得到了这样的数学对象的“必然性质”。接下来，一旦确定了对象和联系的定义，我们就会用“范畴”代替“结构全体”，用“对象”代替“结构对象”，用“态射”代替“联系”，作为更标准的术语。

让我们回到关于自然数的问题。我们由第一步抽象，得到一种具有一定结构的对象：一个集合 X，具有一个自映射 s，同时具有一个确定点 x。这种结构的对象包含了 3 个特征，或者说属性，我们用 3 元组方便地表示它，记为 (X,s,x)。这里使用 X 与 x 作为符号而不使用 $\mathbb{N}$ 与 0 的原因是，当我们提及 $\mathbb{N}$ 与 0 时，往往默认了 Peano 公理，而这里我们考虑的是不一定具有特殊性的结构对象。这样的结构对象，我们就由它的元素构成，叫它“带基点的后继集合”吧。在这里，基点指的是 x，后继指的是集合 X 上的自映射 s，我们将其视为一种一元运算，或者也可以叫算子，称为后继算子。有了结构的对象，它们之间还需要相互联系。在集合范畴中，我们定义态射的标准方式是把态射定义为两个集合之间的映射。至于集合之间的联系为什么既不是要求更高的单射、满射、双射，又不是更弱的二元关系，这个问题有些意思。不过，我们的标准做法依然是把集合间的态射定义为映射。而我们在此处考虑的带基点的后继集合，它本质上是在一个集合上附加了两个结构：一个自映射与一个基点。因此，我们一方面继承集合范畴的态射，把带基点的后继集合 (X,s,x) 到带基点的后继集合 (X',s',x') 间的态射定义为某种映射 $f\colon X\to X'$。另一方面，我们还需要考虑这个映射应该在附加的两个结构上建立联系，或者说如何保持自映射与基点的结构。保持这两个结构的方法很简单，首先是对于基点，保持基点我们能想到的唯一标准方法无非是使 $xf=x'$；而对于后继算子，保持运算的标准方法是，考虑 X 中的元素 y,z 满足 $ys=z$，我们可以对它在这两个点在映射 f 下得到像 yf,zf，既然和 X 中 y 可由一步后继得到 z，那么，我们就想在 X' 中，使像 yf 由一步后继得到 zf。换言之，我们想让等式 $yfs'=zf$ 对一切满足 $ys=z$ 的 $y,z\in X$ 成立。由于 z 可用 y 代入，这相当于下面的式子成立：

$$\underset{y\in X}{\forall} yfs'=ysf,\quad \text{即}\quad fs'=sf.$$

实际上，我们可以用交换图来更加直观地展示这个关系：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X' \end{tikzcd}$$

我们的态射定义源于集合映射定义，因此态射的复合可以直接定义为集合映射的复合，单位态射也可直接定义为一个集合的恒等映射。严格地说，为了使这样的定义符合范畴的公理，我们还需验证态射的复合也是态射，以及对单位态射定义本身满足态射的性质。恒等映射符合上面对态射的要求，这一点是显然的，关键在于对态射复合仍为态射的验证。这里我们使用交换图的方式进行直观验证：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & X' & \xrightarrow{g} & X'' \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & {\scriptstyle s'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s''} \\ X & \xrightarrow[f]{} & X' & \xrightarrow[g]{} & X'' \end{array}$$

于是，我们可以将所有带基点的后继集合作为对象，它们之间满足上面给出要求的映射为态射，得到带基点的后继集合的范畴。我们用 $\mathsf{Succ}_\bullet$ 表示它，其中 0 表示有一个基点。我们再总结上面对 $\mathsf{Succ}_\bullet$ 给出的定义：

范畴 $\mathsf{Succ}_\bullet$

对象 所有带基点的后继集合 (X, s, x)。

态射 从 (X, s, x) 到 (X', s', x') 的态射是一个映射 $f\colon X \to X'$，满足 $xf = x'$ 与 $fs' = sf$。

态射的复合 若 $f\colon (X, s, x) \to (X', s', x')$，$g\colon (X', s', x') \to (X'', s'', x'')$，则 $f \circ g\colon (X, s, x) \to (X'', s'', x'')$ 定义为集合映射的复合 $f \circ g$。

单位态射 对于每个对象 (X, s, x)，单位态射 $\mathrm{id}_{(X,s,x)}\colon (X, s, x) \to (X, s, x)$ 定义为集合 X 上的恒等映射 id_X。

研究这个范畴可以告诉我们自然数所额外满足的性质有什么重要性。不过，对于对象的三部分信息，或者说三部分资料，实际上基点所提供的信息是最少的。因此，我们可以考虑去掉基点，只研究带后继算子的集合。这样的集合，我们称之为“后继集合”。后继集合的范畴的定义与带基点的后继集合的范畴的定义类似，只是去掉了基点的信息。我们将后继集合的范畴记为 Succ，并在下面给出它的定义：

范畴 Succ

对象 所有后继集合 (X, s)。

态射 从 (X, s) 到 (X', s') 的态射是一个映射 $f\colon X \to X'$，满足 $fs' = sf$。

态射的复合 若 $f\colon (X, s) \to (X', s')$，$g\colon (X', s') \to (X'', s'')$，则 $f \circ g\colon (X, s) \to (X'', s'')$ 定义为集合映射的复合 $f \circ g$。

单位态射 对于每个对象 (X, s)，单位态射 $\mathrm{id}_{(X,s)}\colon (X, s) \to (X, s)$ 定义为集合 X 上的恒等映射 id_X。

接下来，我们就深入研究范畴 Succ 的对象的性质，以及该范畴的泛性质。

2 对后继集合的研究

现在我们的任务是，对一个一般的后继集合 (X, s)，研究它的性质。为了方便之后的讨论，我们约定 X 总是非空的。

因为后继集合 X 上有后继算子 s，我们可以考虑从一个元素 x 出发，对 x 施以 s 的多次作用，得到一系列元素 $x, xs, xss, xsss, \cdots$。我们先研究这样的一系列元素，将其放在一个集合中，我们称之为 x 生成的后继闭包，记为 $\overline{x}$。

然而，上面对 x 生成的后继闭包的定义并不严谨，什么是集合 $\{x, xs, xss, xsss, \cdots\}$？这个集合的元素我们似乎完全无法列举出来。因此，我们在定义 $\overline{x}$ 时，要考虑另一种定义方法：考虑 $\overline{x}$ 应该满足什么性质。我们将 $\overline{x}$ 的性质分为两部分，一是 $\overline{x}$ 包含 x，二是 $\overline{x}$ 在我们讨论的集合 X 的后继算子 s 下封闭。我们将前者称为 Base 性质，后者称为 Inductive 性质。这里，我们其实又在做第一步抽象，其抽象出了 $\overline{x}$ 应满足的性质，然而我们将看到，这个性质不足以唯一地确定一个子集。因此，我们不妨先考虑所有满足这个性质的子集的集合，我们称之为含 x 的后继闭子集族，记为 $\mathcal{C}_x$，其中 $\mathcal{C}$ 表示“闭集”（closed set）。

注意这里我们是将 x 记在 $\mathcal{C}$ 的右边的。这与我们在表示 x 在映射 s 下的像时将 x 记在左边的原因是一样的。我们将 x 放在右边，是因为我们对每个 $x \in X$ 都能定义 $\mathcal{C}_x$，相当于我们有了抽象的集族 $\mathcal{C}_\bullet$，再将抽象的集族应用于 x 得到具体的集族 $\mathcal{C}_x$，所以我们将 x 作为放在右边的下标。这样的记号也是为了使我们的记号符合我们从左向右书写的规则。甚至可以理解为，x 是一个映射，将 $\mathcal{C}_\bullet$ 映射到 $\mathcal{C}_x$，这样的记号也是合理的。

我们接下来将 $\mathcal{C}_x$ 的定义写出来：

定义 2.1. 对于后继集合 (X, s)，$x \in X$，我们定义 x 生成的后继闭子集族 $\mathcal{C}_x$ 为满足以下性质的集合 T 的集族：

Base $x \in T$

Inductive $\underset{y \in T}{\forall} ys \in T$

首先要注意一个技术上的细节，我们这样定义出的 $\mathcal{C}_x$ 一定是非空的，这样才能便于我们之后的讨论。这是因为，整个后继集合 X 一定是满足 Base 与 Inductive 性质的子集。那么，我们不禁仍要问，我们想要定义的 x 的后继闭包 $\overline{x}$，到底是集族 $\mathcal{C}_x$ 中的哪个集合呢？显然，在很多情况下，我们不会希望它是整个后继集合 X。如果再作思索，我们会发现，我们不想在 $\overline{x}$ 中添加任何不必要的元素。因此，我们希望 $\overline{x}$ 尽量“小”，这里的“小”指的是在包含关系 $\subset$ 下的“小”，确切地说，是包含关系作为集族中的偏序关系下的最小元。事实上，我们可以证明，$\mathcal{C}_x$ 中的确存在着一个包含关系下的最小元，因此我们将 $\overline{x}$ 定义为这个最小元。具体的论述用到关键性质是“交性质”：

性质 2.1. 对于后继集合 (X, s)，$x \in X$，$\underset{i \in I}{T_i} \in \mathcal{C}_x$，其中 I 为非空指标集，则 $\bigcap_{i \in I} T_i \in \mathcal{C}_x$。

证明. 首先，由于 $T_{i(i\in I)}\in\mathcal{C}_x$，即对于每个 $\forall_{(i\in I)}\, x\in T_i$，有 $x\in\bigcap_{i\in I}T_i$，即 $\bigcap_{i\in I}T_i$ 满足 Base 性质。接下来，我们证明 $\bigcap_{i\in I}T_i$ 满足 Inductive 性质。对于任意 $y\in\bigcap_{i\in I}T_i$，我们有 $y\in T_i$，因此 $ys\in T_i$。由于 I 为非空指标集，所以对于任意 $i\in I$，$ys\in T_i$。因此，$ys\in\bigcap_{i\in I}T_i$，即 $\bigcap_{i\in I}T_i$ 满足 Inductive 性质。综上，$\bigcap_{i\in I}T_i\in\mathcal{C}_x$。 □

由交性质结合 $\mathcal{C}_x$ 非空知，$\bigcap\mathcal{C}_x\in\mathcal{C}_x$。易于证明它是 $\mathcal{C}_x$ 中的最小元。

定理 2.1. 对于后继集合 (X,s)，$x\in X$，$\bigcap\mathcal{C}_x$ 是 $\mathcal{C}_x$ 关于包含关系 $\subset$ 的最小元。

证明. 首先，由于 $\mathcal{C}_x$ 非空，$\bigcap\mathcal{C}_x\in\mathcal{C}_x$。接下来，我们证明 $\bigcap\mathcal{C}_x$ 是 $\mathcal{C}_x$ 的最小元。对于任意 $T\in\mathcal{C}_x$，我们有 $\bigcap\mathcal{C}_x\subset T$。由于 $\bigcap\mathcal{C}_x\in\mathcal{C}_x$，$\bigcap\mathcal{C}_x\subset T$，所以 $\bigcap\mathcal{C}_x$ 是 $\mathcal{C}_x$ 的最小元。 □

因此，我们可以将 $\overline{x}$ 定义为 $\bigcap\mathcal{C}_x$。这样，我们就得到了 x 生成的后继闭包 $\overline{x}$ 的定义。

评价 2.1. 从另一个角度说，我们对后继闭包 $\overline{x}$ 感兴趣，并非因为我们希望 $\overline{x}$ 包含尽量少的元素。就算我们没有按照直觉“不要添加任何不必要的元素”来刻画某个特殊的 $\mathcal{C}_x$ 中的集合，我们也一定会将 $\mathcal{C}_x$ 中的那个最小元 $\bigcap\mathcal{C}_x$ 拿出来研究。这只是因为最小元的特殊性，对于任何 $T\in\mathcal{C}_x$，都有 $\bigcap\mathcal{C}_x\subset T$。这正是集族 $\mathcal{C}_x$ 具有的泛性质，它由一个集族中的成员 $\bigcap\mathcal{C}_x$ 与该成员到其他成员的包含关系刻画。因此，这个成员 $\bigcap\mathcal{C}_x$ 本身就是特别的，它值得我们对它进行研究。在这里，我们又一次体会到了泛性质的重要性。