

数据结构与算法 (Python)

递归与动态规划

谢正茂 webg@PKU-Mail

计算机学院数据所

March 25, 2025

- 本章目标
- 什么是递归
- 实现递归
- 递归的可视化
- 复杂递归问题
- 动态规划 Dynamic Programming
- 递归与动态规划的比较
- DP 的一般套路

- 了解某些难解的问题具有简单的递归解决法；
- 了解和应用递归的“三定律”；
- 学会如何用递归方式写程序；
- 动态规划与递归的比较

- 本章目标
- 什么是递归
- 实现递归
- 递归的可视化
- 复杂递归问题
- 动态规划 Dynamic Programming
- 递归与动态规划的比较
- DP 的一般套路

递归的归纳法思想

- lambda 函数: `lambda x, y: x**2 + y**2`
- 当问题规模很小的时候, 答案显而易见。
- 如果较小规模 (n) 的问题解决了, 较大规模 ($n+1$) 的问题很容易就能解决。
- 一行代码实现阶乘运算 (递归 +lambda 函数):

```
>>> f = lambda n : n**2
>>> f(3)
9
>>> fact = lambda n : 1 if n<2 else n*fact(n-1)
>>> fact(5)
120
```

什么是递归 Recursion?

- 递归是一种解决问题的方法，其精髓是将问题分解为一个或多个规模更小的相同问题；分解可以持续进行，直到问题规模小到可以用非常简单直接的方式来解决。
- 递归的问题分解方式非常独特，其算法方面的明显特征就是：在算法流程中调用自身。
- 递归为我们提供了一种对复杂问题的优雅解决方案，精妙的递归算法常会出奇简单，令人赞叹。

初识递归：数列求和——从简单问题开始

- 问题：给定一个列表，返回列表中所有数的和
 - 列表中数的个数不定，需要一个循环和一个累加变量来迭代求和
- 程序很简单，但假如没有循环语句？
 - 既不能用 `for`，也不能用 `while`
 - 还能对不确定长度的列表求和么？
- 我们认识到求和实际上最终是由一次次的加法实现的，而加法函数恰有两个参数，这个是确定的。
- 看看怎么想办法，将问题规模较大的列表求和，分解为规模较小而且固定的两个数求和（加法）？
 - 同样是求和问题，但规模发生了变化，符合递归解决问题的特征！

```
def listsum(numList):  
    theSum = 0  
    for i in numList:  
        theSum = theSum + i  
    return theSum  
  
print(listsum([1,3,5,7,9]))
```

初识递归：数列求和

- 我们换一个方式来表达数列求和：全括号表达式
 - $(1+(3+(5+(7+9))))$
- 上面这个式子，最内层的括号 $(7+9)$ ，这是无需循环即可计算的，实际上整个求和的过程是这样：

$$\begin{aligned}total &= (1 + (3 + (5 + (7 + 9)))) \\total &= (1 + (3 + (5 + 16))) \\total &= (1 + (3 + 21)) \\total &= (1 + 24) \\total &= 25\end{aligned}$$

- 观察上述过程中所包含的重复模式，可以把求和问题归纳成这样：
 - 数列的和 = “首个数” + “余下数列”的和

$$listSum(numList) = first(numList) + listSum(rest(numList))$$

问题

分解

相同问题，规模更小

初识递归：数列求和

- 上面的递归算法变成程序

最小规模

```
def listsum(numList):  
    if len(numList) == 1:  
        return numList[0]
```

减小规模

```
else:  
    return numList[0] + listsum(numList[1:]),
```

调用自身

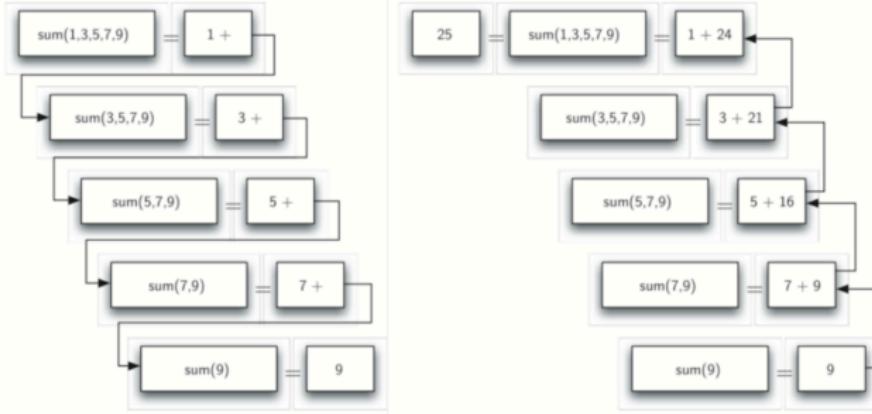
```
print(listsum([1,3,5,7,9]))
```

- 上面程序的要点：

- 问题分解为更小规模的相同问题，并表现为“调用自身”
- 对“最小规模”问题的解决：简单直接

递归程序如何被执行?

- 递归函数调用和返回过程的链条（隐含的空间开销：调用栈）
- 递归调用：递归函数（直接或间接）对自身的调用，对递归函数的调用不一定是递归调用
- 递归函数在栈中出现的帧数比递归调用数多一



- 为了致敬阿西莫夫的“机器人三定律”，递归算法也总结出“三定律”
 - 1，递归算法必须有一个基本结束条件（最小规模问题的直接解决）
 - 2，递归算法必须能改变状态向基本结束条件演进（减小问题规模）
 - 3，递归算法必须调用自身（解决减小了规模的相同问题）

数列求和问题中的“递归三定律”

- 基本结束条件：当列表长度为 1 的时候，直接输出它唯一的元素
- 减少问题规模：求和的对象是列表，每次递归调用列表长度减一
- 调用自身是递归算法中最难理解的部分，我们可以理解为“问题规模缩小了，但问题不变”：在数列求和算法中，就是“更短数列的求和问题”。

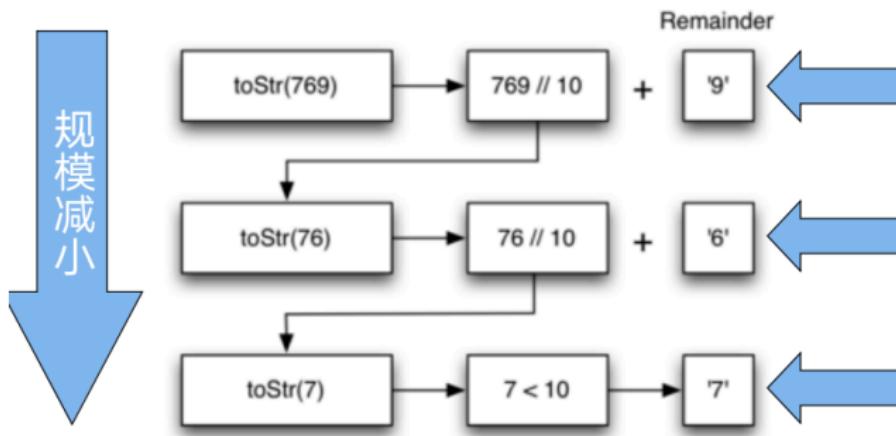
递归的应用：整数转换为任意进制字符串表示

- 这个在数据结构栈里讨论过的算法，又回来了！
 - 递归和栈，一定有关联
- 如果上次你被“入栈”“出栈”搞得挺晕乎的话，递归算法让人感到简单明白
 - 而且这次我们要解决从二进制到十六进制的任意进制转换

- 我们用最熟悉的十进制分析下这个问题
 - 十进制有十个不同数字符号: `convString = "0123456789"`
 - 基本结束条件:
 - 比十小的整数, 转换成十进制, 直接查表就可以了: `convString[n]`
 - 减少问题规模:
 - 比十大的整数, 用十整除得到商和余数, 把它拆成了两部分
 - 比方说 769, 得到 76 和 9; 9 查表得“9”, 对 76 继续转换, 最后把它的结果和“9”粘接在一起
 - 从 769 到 76, 问题的规模减少了
 - 拆解整数的过程就是向“基本结束条件”演进的过程

整数转换为任意进制

- 对于任意进制，我们则使用不同的进制基数
 - 除以“进制基 **base**”，和对“进制基”求余数
- 问题就分解为：
 - 余数总小于“进制基 **base**”，是“基本结束条件”，可直接进行查表转换
 - 整数商成为“更小规模”问题，通过递归调用自身解决



整数转换为任意进制：代码

- 下面就是递归算法的代码

```
def toStr(n,base):
    convertString = "0123456789ABCDEF"
    if n < base:
        return convertString[n]
    else:
        return toStr(n//base,base) + convertString[n%base]

print(toStr(1453,16))
```

最小规模

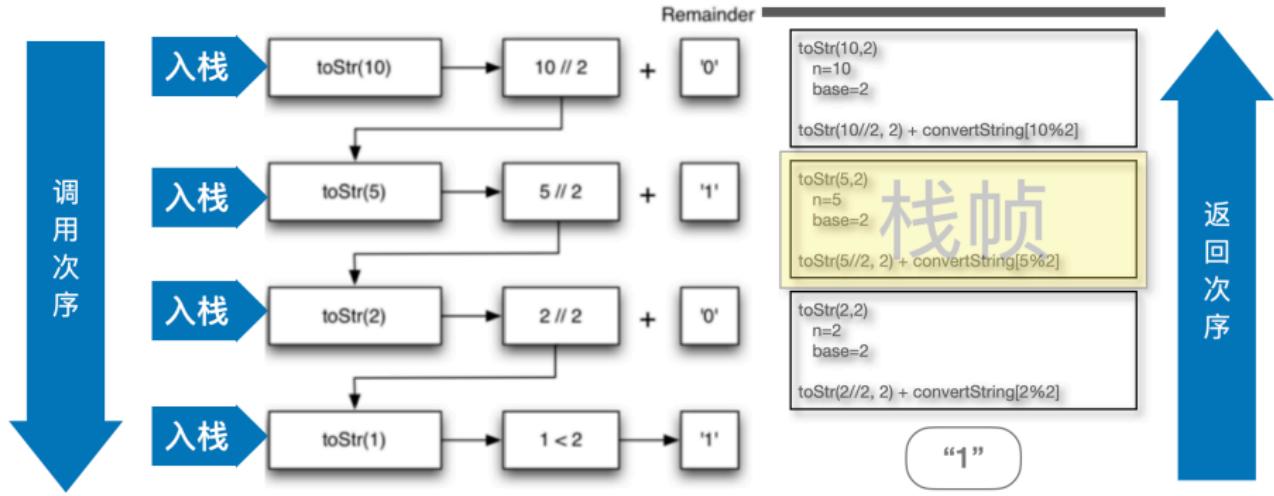
减小规模

调用自身

- 本章目标
- 什么是递归
- 实现递归
- 递归的可视化
- 复杂递归问题
- 动态规划 Dynamic Programming
- 递归与动态规划的比较
- DP 的一般套路

递归调用的实现

- 当一个函数被调用的时候，系统会把调用时的现场（包括所有的局部变量，以及返回地址）压入到调用栈 Call Stack
 - 每次调用，压入栈的现场数据称为 Stack Frame 栈帧
- 当函数执行完成，返回时，要从调用栈的栈顶取得返回地址，把返回值放到栈顶，恢复现场，弹出栈帧，按地址返回。



- 编写将字符串反转的递归函数
 - `def revstring(s):`
- 编写回文词判断的递归函数
 - `def palcheck(s):`

目录

- 本章目标
- 什么是递归
- 实现递归
- 递归的可视化
- 复杂递归问题
- 动态规划 Dynamic Programming
- 递归与动态规划的比较
- DP 的一般套路

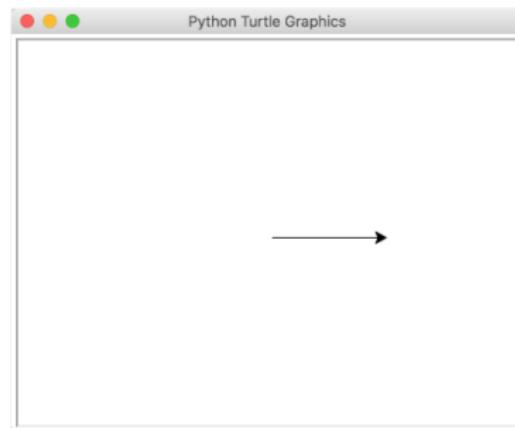
递归可视化：图示

- 前面的种种递归算法展现了其简单而强大的一面，但还是难有个直观的概念
- 下面我们通过递归作图来展现递归调用的视觉影像
- Python 的海龟作图系统 **turtle module**
 - Python 内置，随时可用，以 LOGO 语言的创意为基础
 - 其意象为模拟海龟在沙滩上爬行而留下的足迹
 - 爬行：`forward(n); backward(n)`
 - 转向：`left(a); right(a)`
 - 笔触：`penup(); pendown(); pensize(); pencolor(c)`
- 参考：<https://docs.python.org/3/library/turtle.html>

递归可视化：图示

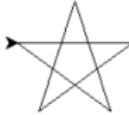
● 使用方法

- import turtle # 导入模块
- t=turtle.Turtle() # 生成一只海龟
- w=turtle.Screen() # 获取屏幕对象，用于最后的点击自动关闭窗口
- t.forward(100)..... # 指挥海龟作图
- w.exitonclick() # 作图完毕，欣赏结束后可以点击关闭窗口

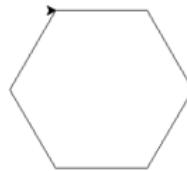
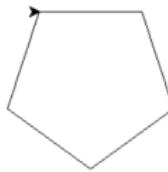


海龟作图

- 画正方形
- 画五边形
- 画六边形
- 画五角星



```
import turtle  
t= turtle.Turtle()  
w= turtle.Screen()  
  
for i in range(5):  
    t.forward(100)  
    t.right(144)  
  
w.exitonclick()
```



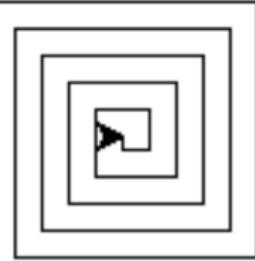
```
import turtle  
t= turtle.Turtle()  
w= turtle.Screen()  
  
for i in range(4):  
    t.forward(100)  
    t.right(90)  
  
w.exitonclick()  
  
import turtle  
t= turtle.Turtle()  
w= turtle.Screen()  
  
for i in range(5):  
    t.forward(100)  
    t.right(72)  
  
w.exitonclick()  
  
import turtle  
t= turtle.Turtle()  
w= turtle.Screen()  
  
for i in range(6):  
    t.forward(100)  
    t.right(60)  
  
w.exitonclick()
```

一个递归作图的例子：螺旋

```
import turtle  
  
myTurtle = turtle.Turtle()  
myWin = turtle.Screen()  
  
def drawSpiral(myTurtle, lineLen):  
    if lineLen > 0:  
        myTurtle.forward(lineLen)  
        myTurtle.right(90)  
        drawSpiral(myTurtle, lineLen-5)
```

最小规模，0直接退出

减小规模，边长减5

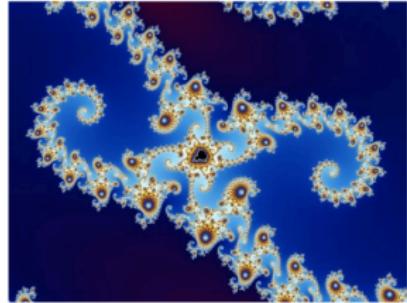
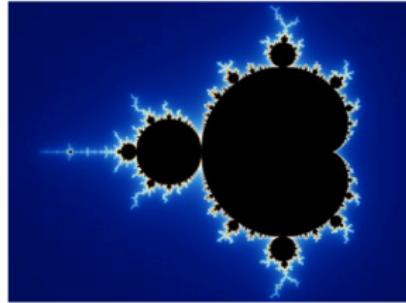


```
drawSpiral(myTurtle, 100)  
myWin.exitonclick()
```

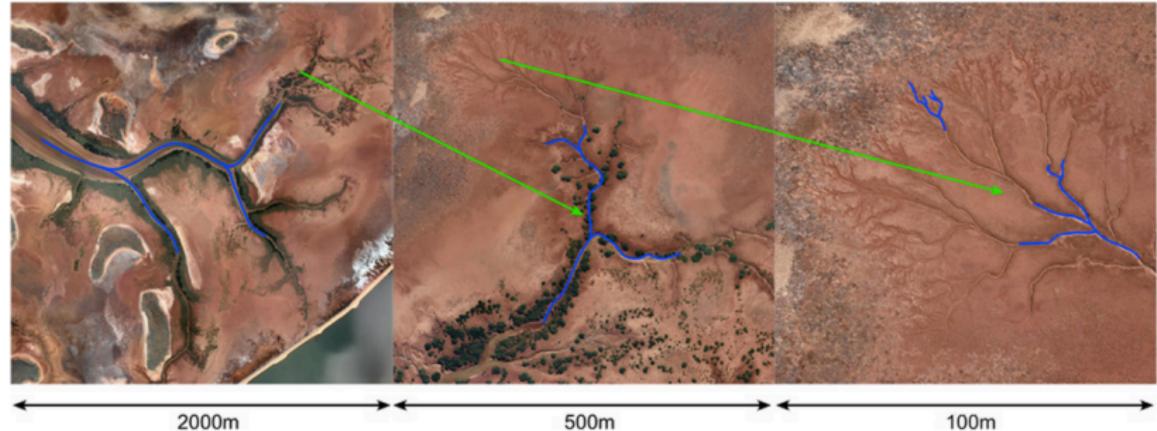
调用自身

递归的应用：分形树—自相似图形

- 分形 Fractal，是 1975 年由 Mandelbrot 开创的新学科
- 通常被定义为“一个粗糙或零碎的几何形状，可以分成数个部分，且每一部分都（至少近似地）是整体缩小后的形状”，即具有**自相似**的性质。
- 自然界中能找到众多具有分形性质的物体
 - 海岸线、山脉、闪电、云朵、雪花、树
 - <http://paulbourke.net/fractals/googleearth/>
 - <http://recursivedrawing.com/>

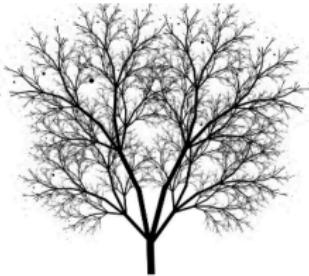


分形树：自相似递归图形



分形树：自相似递归图形

- 分形特性在自然界中广泛存在，使得计算机可以通过分形算法生成非常逼真的自然场景（电脑游戏），下面我们将以树为例做一个粗糙的近似
- 分形是在不同尺度上都具有相似性的事物，将这种观点放在对树的观察上，我们就能看出，一棵树的每个分叉和每条树枝，实际上都具有整棵树的外形特征（也是逐步分叉的）
- 这样，我们可以把树分解为三个部分：树干、左边的小树、右边的小树
 - 这样的分解，正好符合递归的定义：对自身的调用



分形树：代码

```
import turtle  
  
def tree(branchLen,t):  
    if branchLen > 5:  
        t.forward(branchLen)  
        t.right(20)  
        tree(branchLen-15,t)  
        t.left(40)  
        tree(branchLen-15,t)  
        t.right(20)  
        t.backward(branchLen)  
  
    海龟  
    画树干  
    调用自身  
    海龟回到原位置
```

最小规模，0直接退出

右倾20度

减小规模，树干减15

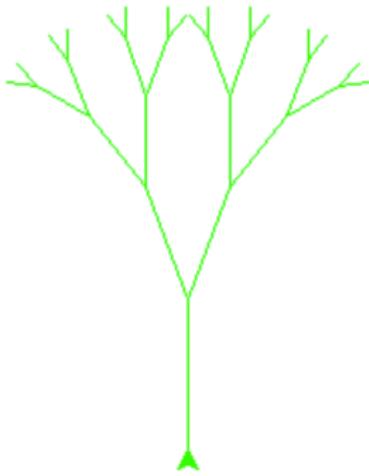
回左倾40度，即左20

减小规模，树干减15

回右倾20度，即回正

分形树：运行

- 注意海龟作图的次序
 - 先画树干，再画右树枝，最后画左树枝：与递归函数里的流程一致

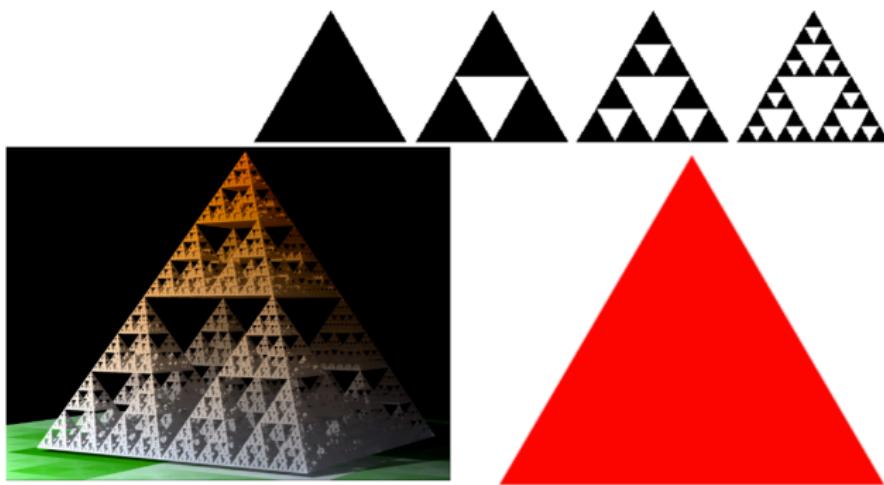


```
def main():
    t = turtle.Turtle()
    myWin = turtle.Screen()
    t.left(90)
    t.up()
    t.backward(100)
    t.down()
    t.color("green")
    tree(75,t)
    myWin.exitonclick()

main()
```

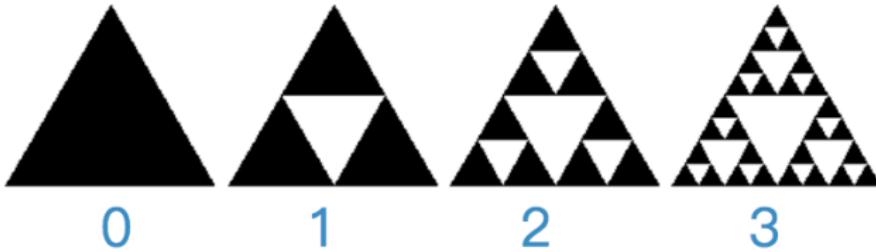
谢尔宾斯基三角形 Sierpinski Triangle

- 分形构造，平面称谢尔宾斯基三角形，立体称谢尔宾斯基金字塔（自然界晶体）
 - 实际上，真正的谢尔宾斯基三角形是完全不可见的，其面积为 0，但周长无穷，是介于一维和二维之间的分数维（约 1.585 维）构造。
 - degree 每加一，面积乘 $3/4$ ，周长乘 $3/2$
 - $\text{degree} \rightarrow \infty$



谢尔宾斯基三角形：作图思路

- 首先，根据自相似特性，谢尔宾斯基三角形是由 3 个相同的谢尔宾斯基三角形按照品字形拼叠而成。
- 由于我们无法真正做出谢尔宾斯基三角形 ($\text{degree} \rightarrow \infty$)，只能做 degree 有限的近似图形。
- 在 degree 有限的情况下， $\text{degree}=n$ 的三角形，是由 3 个 $\text{degree}=n-1$ 的三角形按照品字形拼叠而成，同时，这 3 个 $\text{degree}=n-1$ 的三角形边长均为 $\text{degree}=n$ 的三角形的一半。
 - 当 $\text{degree}=0$ ，则就是一个等边三角形，这是递归基本结束条件
- 为了便于演示， $\text{degree}>0$ 时我们也画上各种颜色



谢尔宾斯基三角形：代码

```
def sierpinski(points,degree,myTurtle):
    colormap = ['blue','red','green','white','yellow', \
                'violet','orange']
    drawTriangle(points,colormap[degree],myTurtle)
    if degree > 0:
        sierpinski([points[0], \
                   getMid(points[0], points[1]), \
                   getMid(points[0], points[2])], \
                  degree-1, myTurtle)
        sierpinski([getMid(points[0], points[1]), \
                   points[1], \
                   getMid(points[1], points[2])], \
                  degree-1, myTurtle)
        sierpinski([getMid(points[0], points[2]), \
                   getMid(points[2], points[1]), \
                   points[2]], \
                  degree-1, myTurtle)
```

等边三角形（左上右顶点次序）

最小规模，0直接退出

减小规模：
getMid边长减半

调用自身，左上右次序

谢尔宾斯基三角形：代码

画指定顶点的等边三角形
指定填充颜色
1, 抬笔到左顶点
2, 落笔开始填充
3, 到上顶点
4, 到右顶点
5, 回到左顶点闭合

```
import turtle

def drawTriangle(points,color,myTurtle):
    myTurtle.fillcolor(color)
    myTurtle.up()
    myTurtle.goto(points[0][0],points[0][1])
    myTurtle.down()
    myTurtle.begin_fill()
    myTurtle.goto(points[1][0],points[1][1])
    myTurtle.goto(points[2][0],points[2][1])
    myTurtle.goto(points[0][0],points[0][1])
    myTurtle.end_fill()

def getMid(p1,p2):
    return ((p1[0]+p2[0]) / 2, (p1[1] + p2[1]) / 2)

def main():
    myTurtle = turtle.Turtle()
    myWin = turtle.Screen()
    myPoints = [[-200,-100],[0,200],[200,-100]]
    sierpinsk(myPoints,3,myTurtle)
    myWin.exitonclick()

main()

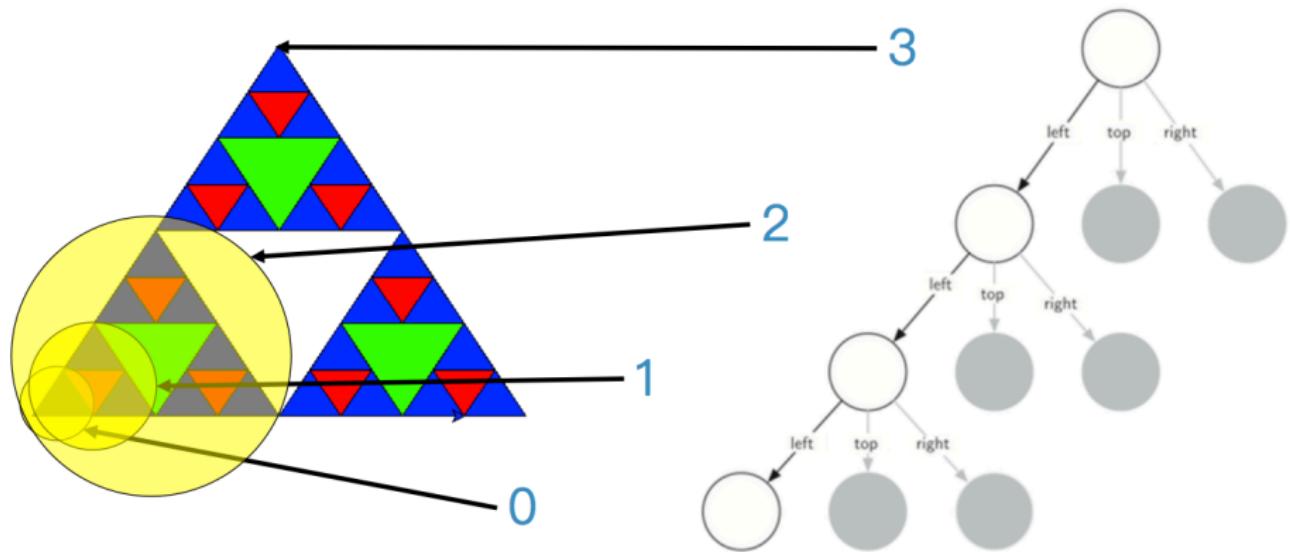
def sierpinsk(myPoints,degree,myTurtle):
    if degree == 0:
        drawTriangle(myPoints,"red",myTurtle)
    else:
        mid1 = getMid(myPoints[0],myPoints[1])
        mid2 = getMid(myPoints[0],myPoints[2])
        mid3 = getMid(myPoints[1],myPoints[2])
        sierpinsk([myPoints[0],mid1,mid2],degree-1,myTurtle)
        sierpinsk([mid1,myPoints[1],mid3],degree-1,myTurtle)
        sierpinsk([mid2,mid3,myPoints[2]],degree-1,myTurtle)
```

取两个点的中点

外轮廓的3个顶点

画degree=3的三角形

谢尔宾斯基三角形：递归调用过程



目录

- 本章目标
- 什么是递归
- 实现递归
- 递归的可视化
- 复杂递归问题
 - 河内塔问题
 - 迷宫问题
- 动态规划 Dynamic Programming
- 递归与动态规划的比较
- DP 的一般套路

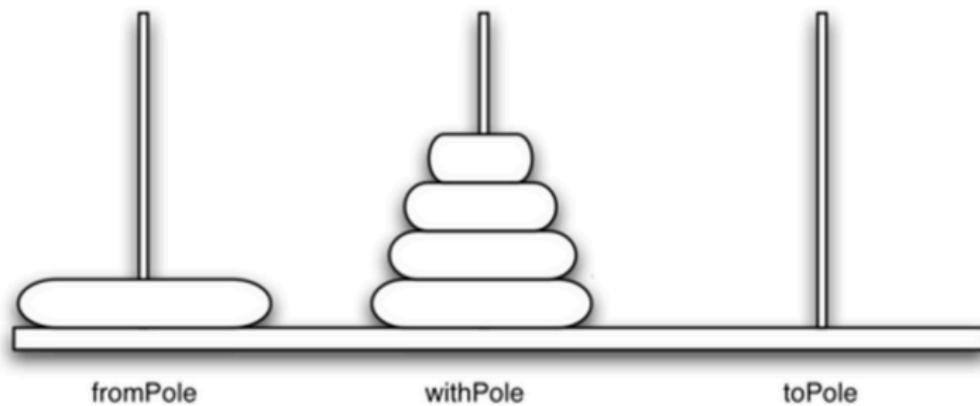
复杂递归问题：河内塔 Tower of Hanoi

- 河内塔问题是法国数学家 Edouard Lucas 于 1883 年，根据传说提出来的。又名 Lucas 塔，梵天塔。
 - 传说在一个印度教寺庙里，有 3 根柱子，其中一根套着 64 个由小到大的黄金盘片，僧侣们的任务就是要把这一叠黄金盘从一根柱子搬到另一根，但有两个规则：
 - 一次只能搬 1 个盘子
 - 大盘子不能叠在小盘子上
 - 神的旨意是说，一旦这 64 个盘子完成迁移：
 - 寺庙将会坍塌
 - 世界将会毁灭……
 - 神的旨意是千真万确的！



河内塔问题

- 虽然这些黄金盘片跟世界末日有着神秘的联系，但我们却不必太担心，据计算，要搬完这 64 个盘片：
 - 需要的移动次数为 $2^{64}-1=18,446,744,073,709,551,615$ 次
 - 如果每秒钟搬动一次，则需要 584,942,417,355（五千亿）年！
 - 现有宇宙年龄的 40 倍。
- 问题如何分解为递归形式？
- 为什么要 3 个柱子？



河内塔问题：分析

- 我们还是从递归三定律来分析河内塔问题
 - 基本结束条件（最小规模问题），如何减小规模，调用自身
- 假设我们有 5 个盘子，穿在 1# 柱，需要挪到 3# 柱
 - 如果能把上面的一摞 4 个盘子统统挪到 2# 柱，那问题就好解决了：
 - 把剩下的最大号盘子直接从 1# 柱挪到 3# 柱，再用同样的办法把 2# 柱上的那一摞 4 个盘子挪到 3# 柱，就完成了整个移动
- 接下来的问题就是 4 个盘子怎么从 1# 挪到 2#?
 - 此时问题规模已经减小！
 - 同样是想办法把上面的一摞 3 个盘子挪到 3# 柱，把剩下最大号盘子从 1# 挪到 2# 柱，再想办法把一摞 3 个盘子从 3# 挪到 2# 柱
- 一摞 3 个盘子的挪动也照此：分为上面一摞 2 个，和下面最大号盘子
- 那么 2 个盘子怎么移动呢？（啥？这还要想？）
- （实在想不出，那么）最后是 1 个盘子的移动……

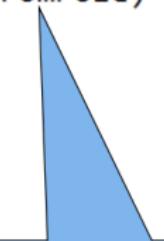
河内塔问题：递归思路

- 将盘片塔从开始柱，经由中间柱，移动到目标柱：
 - 首先将上层 $N-1$ 个盘片的盘片塔，从开始柱，经由目标柱，移动到中间柱；
 - 然后将第 N 个（最大的）盘片，从开始柱，移动到目标柱；
 - 最后将放置在中间柱的 $N-1$ 个盘片的盘片塔，经由开始柱，移动到目标柱。
- 基本结束条件，也就是最小规模问题是：1 个盘片的移动问题
- 上面的思路用 Python 写出来，几乎跟语言描述一样：

```
def moveTower(height,fromPole, toPole, withPole):  
    if height >= 1:  
        moveTower(height-1,fromPole,withPole,toPole)  
        moveDisk(fromPole,toPole)  
        moveTower(height-1,withPole,toPole,fromPole)
```

河内塔问题：代码

```
def moveTower(height,fromPole, toPole, withPole):  
    if height >= 1:  
        moveTower(height-1,fromPole,withPole,toPole)  
        moveDisk(fromPole,toPole)  
        moveTower(height-1,withPole,toPole,fromPole)  
  
    def moveDisk(fp,tp):  
        print "moving disk from",fp,"to",tp  
  
    moveTower(3, "A", "B", "C")  
  
    >>>  
    moving disk from A to B  
    moving disk from A to C  
    moving disk from B to C  
    moving disk from A to B  
    moving disk from C to A  
    moving disk from C to B  
    moving disk from A to B
```



调用自身，两次腾挪

思考：找到本问题的非递归算法，试着看懂它。

- 本章目标
- 什么是递归
- 实现递归
- 递归的可视化
- 复杂递归问题
 - 河内塔问题
 - 迷宫问题
- 动态规划 Dynamic Programming
- 递归与动态规划的比较
- DP 的一般套路

探索迷宫：古希腊的迷宫

- 古希腊克里特岛米诺斯王
- 牛头人身怪物米诺陶洛斯
 - 童男童女献祭，雅典王子忒修斯
- 公主，利剑，线团
- 老国王投海
- 爱琴海

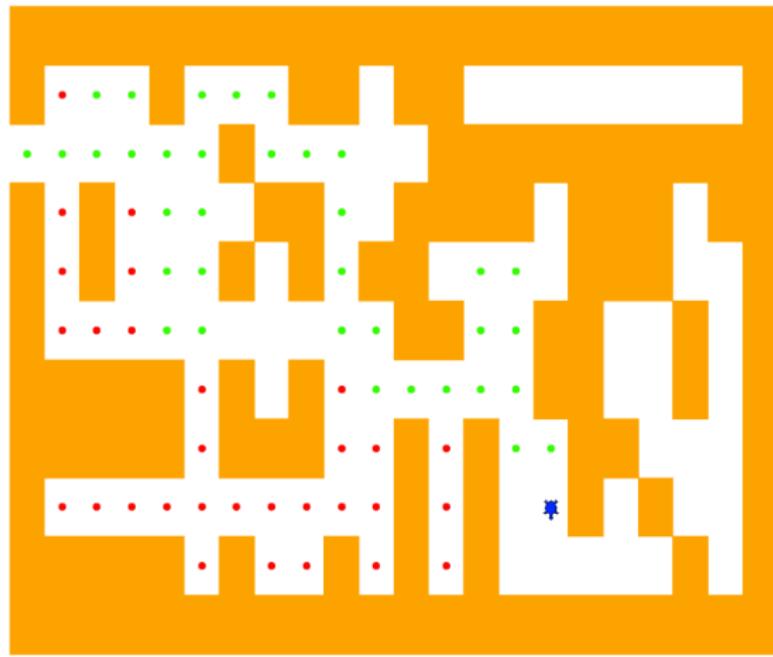


探索迷宫：圆明园的黄花阵

- 位于圆明园西洋楼景区

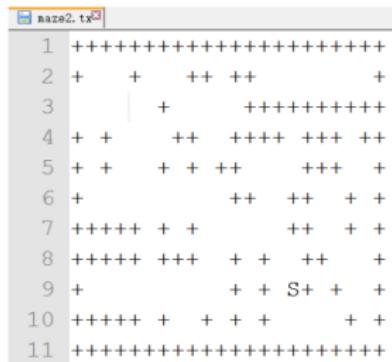


- 我们将海龟放在迷宫中间，看它如何能找到出口



迷宫的数据结构

- 首先，我们将整个迷宫的空间（矩形）分为行列整齐的方格，区分出墙壁和通道。
 - 给每个方格具有行列位置，并赋予“墙壁”、“通道”的属性
- 考虑用矩阵方式来实现迷宫数据结构
 - 采用“数据项为字符列表的列表”这种两级列表的方式来保存方格内容
 - 采用不同字符来分别代表“墙壁”“通道”“海龟投放点”
 - +: 墙壁
 - 空格: 通道
 - S: 海龟
 - 从一个文本文件逐行读入迷宫数据



```
maze2.txt
1 ++++++#+#+#+#+#+#+#+
2 + + + ++ ++
3 | + ++++++
4 + + ++ +++++++ ++
5 + + + + + + + + +
6 + + + ++
7 +++++ + + ++ + +
8 +++++ +++ + + ++ +
9 + + + S + + +
10 +++++ + + + + + +
11 ++++++#+#+#+#+#+#+#
```

迷宫的数据结构：Maze Class

- Maze Class 的成员

- `mazelist`: 保存矩阵
 - `rowsInMaze`: 矩阵的行数
 - `columnsInMaze`: 矩阵的列数

● 读入数据文件成功后

- mazelist 如下图示意
 - mazelist[row][col]=='+'

```
class Maze:  
    def __init__(self,mazeFileName):  
        rowsInMaze = 0  
        columnsInMaze = 0  
        self.mazelist = []  
        mazeFile = open(mazeFileName,'r')  
        rowsInMaze = 0  
        for line in mazeFile:  
            rowList = []  
            col = 0  
            for ch in line[:-1]:  
                rowList.append(ch)  
                if ch == 'S':  
                    self.startRow = rowsInMaze  
                    self.startCol = col  
                col = col + 1  
            rowsInMaze = rowsInMaze + 1  
            self.mazelist.append(rowList)  
        columnsInMaze = len(rowList)
```

- 注意: `line[-1] == '\n'`
 - 写程序如何更有 Python 范?
`pythonic`

探索迷宫：算法思路

- 确定了迷宫数据结构之后，我们知道，对于海龟来说，其身处某个方格之中
 - 它所能移动的方向（东南西北），必须是向着通道的方向
 - 如果某个方向是墙壁方格，就要换一个方向移动
- 这样，探索迷宫并找到出口的递归算法思路如下：
 - 将海龟从原位置向北移动一步，然后以海龟的新位置递归调用探索迷宫寻找出口；
 - 如果上面的步骤找不到出口，那么将海龟从原位置向南移动一步，然后以海龟的新位置递归调用探索迷宫寻找出口；
 - 如果向南还找不到出口，那么将海龟从原位置向西移动一步，然后以海龟的新位置递归调用探索迷宫寻找出口；
 - 如果向西还找不到出口，那么将海龟从原位置向东移动一步，然后以海龟的新位置递归调用探索迷宫寻找出口；
 - 如果上面四个方向都找不到出口，那么这个迷宫没有出口！
 - 在方向上我们采取了“北-南-西-东”的探索顺序

- 上面这个思路看起来很完美，但有些细节是至关重要：
 - 如果我们向某个方向（如北）移动了海龟，那么如果新位置的北正好是一堵墙壁，那么在新位置上的递归调用就会让海龟向南尝试
 - 可是新位置的南边一格，正好就是递归调用之前的原位置
 - 这样就陷入了无限递归的死循环之中（鬼打墙）
- 所以需要有个机制来记录海龟所走过的路径
 - 沿途洒“面包屑”，一旦前进的方向发现“面包屑”，就不能再踩上去，而必须换下一个方向尝试
 - 对于递归调用来说，就是某方向的方格上发现“面包屑”，就立即从递归调用返回上一级。

探索迷宫：算法思路

- 这样，我们对递归调用的“基本结束条件”归纳如下：
 - 海龟碰到了“墙壁”方格，递归调用结束，返回失败；
 - 海龟碰到了“面包屑”方格，表示此方格已访问过，递归调用结束，返回失败；
 - 海龟碰到了“出口”方格，即“位于边缘的通道”方格，递归调用结束，返回成功！
 - 海龟在四个方向上探索都失败，递归调用结束，返回失败
- 为了让海龟在迷宫图里跑起来，我们给迷宫数据结构 **Maze Class** 添加一些成员和方法
 - t：一个作图的海龟，设置其 **shape** 为海龟的样子（缺省是一个箭头）
 - **drawMaze()**：绘制出迷宫的图形，墙壁用实心方格绘制
 - **updatePosition(row, col, val)**：更新海龟的位置，并做标注
 - **isExit(row, col)**：判断是否“出口”

探索迷宫：算法代码

```
def searchFrom(maze, startRow, startColumn):
    # try each of four directions from this point until we find a way out.
    # base Case return values:
    # 1. We have run into an obstacle, return false
    maze.updatePosition(startRow, startColumn)
    if maze[startRow][startColumn] == OBSTACLE :
        return False
    # 2. We have found a square that has already been explored
    if maze[startRow][startColumn] == TRIED or maze[startRow][startColumn] == DEAD_END:
        return False
    # 3. We have found an outside edge not occupied by an obstacle
    if maze.isExit(startRow,startColumn):
        maze.updatePosition(startRow, startColumn, PART_OF_PATH)
        return True
    maze.updatePosition(startRow, startColumn, TRIED)
    # Otherwise, use logical short circuiting to try each direction in turn (if needed)
    found = searchFrom(maze, startRow-1, startColumn) or \
            searchFrom(maze, startRow+1, startColumn) or \
            searchFrom(maze, startRow, startColumn-1) or \
            searchFrom(maze, startRow, startColumn+1)
    if found:
        maze.updatePosition(startRow, startColumn, PART_OF_PATH)
    else:
        maze.updatePosition(startRow, startColumn, DEAD_END)
    return found
```

墙，失败

已过，失败

出口，成功

成功，标注

失败，标注

标注洒“面包屑”

北、南、西、东
依次尝试

由于or的短路算法，
只要有一个方向返回
成功，则后面的尝试
就不需要做了，直接
返回成功！



- 本章目标
- 什么是递归
- 实现递归
- 递归的可视化
- 复杂递归问题
- 动态规划 Dynamic Programming
- 递归与动态规划的比较
- DP 的一般套路

- 计算机科学中许多程序都是为了找到某些问题的最优解，例如：
 - 两个点之间的最短路径
 - 能最好匹配一系列点的直线
 - 满足一定条件的最小集合
- 人们会采用各种策略来解决这些问题，我们这里介绍其中的一种策略：动态规划
- 优化问题的一个经典的案例是“最少硬（纸）币数找零”问题
 - 假设你为一家自动售货机厂家编程序，自动售货机要每次找给顾客最少数量的硬币；
 - 假设某次顾客投进 \$1 纸币，买了¢37 的东西，要找¢63，那么最少数量就是：两个 quarter (¢25)、一个 dime (¢10) 和三个 penny (¢1)，一共 6 个
 - 一般我们这么做：重复“选择不大于找零余额的最大硬币找给顾客”，直至余额为零。

¹arrange according to a plan or schedule

- 这种方法称为“贪心法 Greedy Method”
 - 朝着解决问题的方向，每一步都迈出最大可能的步子。
 - 实际上，每一步的选择会影响到后面步子的选择空间
 - 下象棋时使用“贪吃法”，只顾眼前利益，多数情况是输的
- “贪心法”在美元硬币体系（25/10/5/1）下表现尚好
- 但如果出现一种¢21 的硬币会怎么样呢？
- 按照“贪心法”，找零¢63 还是原来的 6 个硬币
- 但实际上最优解是 3 个面值¢21 的硬币！
- “贪心法”失效了。

兑换硬币：递归解法

- 我们来找一种肯定能找到最优解的方法，既然本章是介绍递归，那这个解法肯定是递归的
- 首先是确定基本结束条件，兑换硬币这个问题最简单直接的情况就是，需要兑换的找零，其面值正好等于某种硬币
 - 如找零 25 分，答案就是 1 个硬币！
- 其次是减小问题的规模，在美元硬币体系里，每次找出一枚硬币可以有 4 种尝试：
 - 找零减去 1 分 (penny) 后，求兑换硬币最少数量的解；
 - 找零减去 5 分 (nikel) 后，求兑换硬币最少数量的解；
 - 找零减去 10 分 (dime) 后，求兑换硬币最少数量的解；
 - 找零减去 25 分 (quarter) 后，求兑换硬币最少数量的解；
 - 上述 4 项中选择最小的一个，再加上 1。

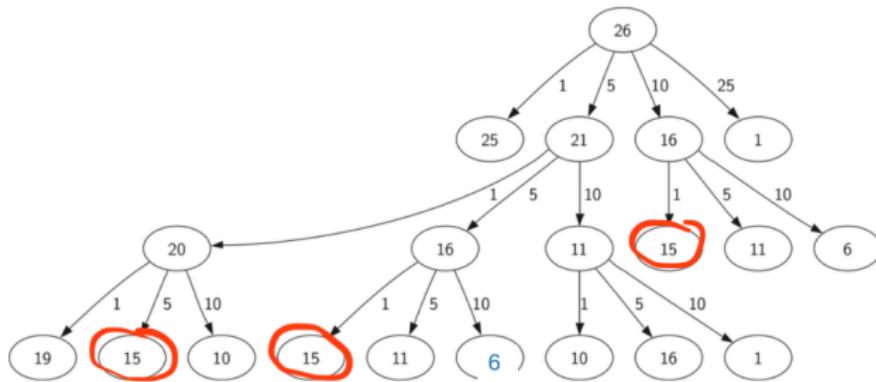
$$minCoins = 1 + \min \begin{cases} minCoins(originalamount - 1) \\ minCoins(originalamount - 5) \\ minCoins(originalamount - 10) \\ minCoins(originalamount - 25) \end{cases}$$

兑换硬币：递归解法代码

```
1 import sys
2 def recMC(coinValueList, change):
3     if change in coinValueList:
4         return 1          # 最小规模，直接返回
5     # 减小规模：依次尝试减去一种硬币面值，再调用自身
6     ntry = [recMC(coinValueList, change-c) for c
7             in coinValueList if c <= change]
8     # 挑选出最优方案，再加一
9     return 1+min(ntry, default=sys.maxsize)
10 print(recMC([1,5,10,25], 63))
```

兑换硬币：递归解法分析

- 递归解法虽然能解决问题，但其最大的问题是：极！其！低！效！
 - 对 63 分的兑换硬币问题，需要进行 67,716,925 次递归调用！
 - 在一台笔记本电脑上花费了半分钟时间得到解：6 个硬币
- 以 26 分兑换硬币为例，看看递归调用过程（377 次递归的一小部分），发现大量的重复计算！
 - 结点是剩余的找零数额，边上标记了所取用的硬币面值
 - 例如对 15 分的求解，在这里出现了 3 次！浪费 2 次
 - 而求解 15 分底下还要 52 次递归调用，所以总共浪费 104 次调用



兑换硬币：递归解法改进

- 对这个递归解法进行改进的关键就在于消除重复计算
 - 我们可以用一个表将计算过的中间结果保存起来，在计算之前查表看看是否已经计算过
- 这个算法的中间结果就是部分找零的最优解，在递归调用过程中已经得到的最优解被记录下来
 - 在递归调用之前，先查找表中是否已有部分找零的最优解
 - 如果有，直接返回最优解而不进行递归调用
 - 如果没有，才进行递归调用
- 改进后的解法，极大减少了递归调用的次数
 - 对 63 分的兑换硬币问题，仅仅需要 221 次递归调用，是改进前的三十分之一，瞬间返回！

兑换硬币：递归解法改进代码

```
1 import sys
2 def recMC(coinValueList, change, knownResults):
3     """
4         用函数值缓存递归法求解最小硬币数问题,
5         返回值不小于 sys.maxsize 表示无解;
6         knownResults 列表中的 0 表示缓存空洞
7     """
8     if knownResults[change] > 0:
9         return knownResults[change] # 查表命中直接返回
10    elif change in coinValueList:
11        knownResults[change] = 1      # 最小规模先记录结果
12        return 1                  # 再返回
13    # 减小规模: 依次尝试减去一种硬币面值, 再调用自身
14    ntry = [recMC(coinValueList, change-c, knownResults)
15            for c in coinValueList if c <= change]
16    # 挑选出最优方案, 再加一; 记录结果并返回
17    knownResults[change] =
18        1+min(ntry, default=sys.maxsize)
19    return knownResults[change]
20
21 print(recMC([2,5,10,25], 63, [0]*64))
```

- Python 支持函数值缓存: openjudge/1748/2400012630.py

兑换硬币：动态规划解法

- 动态规划算法采用了一种更有条理的方式来得到问题的解
- 兑换硬币的动态规划算法从最简单的“1分钱找零”的最优解开始，逐步递加上去，直到我们需要的找零钱数
- 在找零递加的过程中，设法保持每一分钱的递加都是最优解，一直加到求解找零钱数，自然得到最优解
- 递加的过程能保持最优解的关键是，其依赖于更少钱数最优解的简单计算，而更少钱数的最优解已经得到了。
- 还是归纳法： a_1 显而易见；在 $a_{i, 1 \leq i \leq n-1}$ 已知的情况下，求解 a_n
- 步步为营，稳打稳扎

兑换硬币：动态规划算法

- 动态规划是怎么开始“规划”的？

- 从 1 分钱兑换开始
- 逐步建立一个最优兑换表
- 到 5 分钱兑换有两个选择：
- 5 个 1 分或者 1 个 5 分硬币
- 显然 1 个是最优解
- 所以将 1 填入表中
- 那么更多的钱数是如何得到解？
- 下面我们看 11 分钱的过程

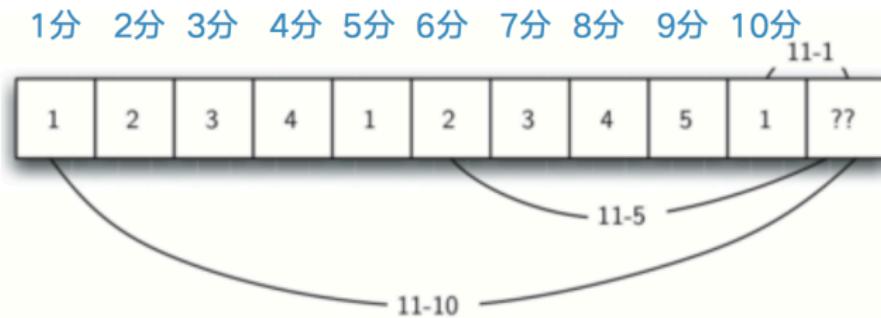
Change to Make											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1											
1	2										
1	2	3									
1	2	3	4								
1	2	3	4	1							
1	2	3	4	1	2						
1	2	3	4	1	2	3					
1	2	3	4	1	2	3	4				
1	2	3	4	1	2	3	4	5			
1	2	3	4	1	2	3	4	5	1		
1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	

Step of the Algorithm

1	2	3	4	1	2	3	4	5	1		
1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	

兑换硬币：动态规划解法

- 没有 11 分钱的硬币，它肯定需要由小于 11 分钱的多枚硬币加起来。我们可以假设里面有一枚 n 分钱的硬币，于是计算 11 分钱的兑换法，我们做如下几步：
 - 首先 11 分钱减去 1 个 1 分钱的币值，剩下 10 分钱，查表，10 分钱的最优解是 1
 - 然后 11 分钱减去 1 个 5 分钱的币值，剩下 6 分钱，查表，6 分钱的最优解是 2
 - 最后 11 分钱减去 1 个 10 分钱的币值，剩下 1 分钱，查表，1 分钱的最优解是 1
- 这样，第 1、3 步我们都可以得到 11 分钱的最优解：2 个硬币



兑换硬币：动态规划算法代码

```
1 def dpMC(coinValueList, change):
2     """
3         动态规划法硬币找零，无解时返回为 None;
4     """
5     minCoins=[0]*(change+1)
6     # 计算从一分到所需找零，零分找零为零，无需计算
7     for cents in range(1, change+1):
8         # 依次减去一种硬币面值，查表而不是递归来获得部分最优解
9         ntry = [minCoins[cents-c] for c in coinValueList
10            ↪ if c <= cents]
11         # 部分最优解取最小值，再加一得到最优解
12         minCoins[cents] = 1+min(ntry,
13            ↪ default=sys.maxsize)
14     # 循环结束，对最优解进行判断并返回
15     return minCoins[change] if
16        ↪ minCoins[change]<sys.maxsize else None
17
18 print(dpMC([1,5,10,25], 63))
```

兑换硬币：动态规划算法扩展

- 我们注意到动态规划算法的 `dpMakeChange` 并不是递归函数，虽然这个问题是从递归算法开始解决，但最终我们得到一个更有条理的高效非递归算法
 - 动态规划计算最优找零，对于找零金额，从最简单情况开始到达目标金额，每一步都依靠以前的最优解来得到本步骤的最优解，直到得到答案。
- 前面的算法已经得到了最少硬币的数量，但没有返回硬币如何组合
 - 扩展算法的思路很简单，只需要在生成最优解列表同时跟踪记录所选择的那个硬币币值即可
 - 在得到最后的解之后，减去选择的硬币币值，回溯到表格之前的部分找零，就能逐步得到每一步所选择的硬币币值

兑换硬币：动态规划算法扩展代码

```
1 import sys
2 def dpMC(coinValueList, change):
3     """
4         动态规划法硬币找零，返回最少找零数和部分最优解对应的硬币
5         当无解时最少找零数为 None;
6     """
7     minCoins = [0]*(change+1)
8     coinsUsed = [0]*(change+1)
9     for cents in range(1, change+1):
10         # 依次尝试减去一种硬币面值，通过查表而不是递归来获得部分最优解
11         # 当时使用的硬币也一起记录下来
12         ntry = [(1+minCoins[cents-c], c) for c in coinValueList if c <=
13             cents]
14         # 挑选部分最优解中最小的
15         minCoins[cents], coinsUsed[cents] = min(ntry, key=lambda x:x[0],
16             default=(sys.maxsize, None))
17     return minCoins[change] if minCoins[change]<sys.maxsize else None,
18             coinsUsed
19
20 def printCoins(coinsUsed, change):
21     buff = []
22     while change > 0:      # 查表知道最优解首先使用的硬币
23         thisCoin = coinsUsed[change]
24         buff.append(str(thisCoin))
25         change -= thisCoin
26     print(' '.join(buff))
27
28 minCoin, coinsUsed = dpMC([1,5,10,21, 25], 63) # 增加了奇葩 21
29 print(minCoin)
30 if minCoin:
31     printCoins(coinsUsed, 63)
```

兑换硬币：动态规划算法扩展代码

```
25 if __name__ == "__main__":
26     change = 63
27     minCoin, coinsUsed = dpMC([1,5,10,21, 25], change) #增加了硬币奇葩21
28     print("Making change for {} penny requires {} coins".format(change, minCoin))
29     print("They are: ", end="")
30     printCoins(coinsUsed, change)
31     print("UsedCoins table is as follows:")
32     print(coinsUsed)
```

Making change for 63 penny requires 3 coins

They are: 21 21 21

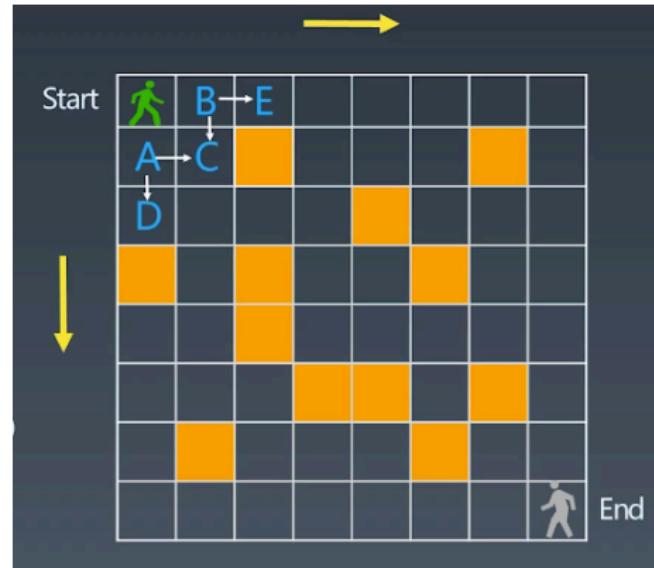
UsedCoins table is as follows:

```
[0, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 10, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 10, 21, 1, 1, 1, 25, 1, 1, 1,
1, 5, 10, 1, 1, 1, 10, 1, 1, 1, 1, 5, 10, 21, 1, 1, 10, 21, 1, 1, 25, 1, 10, 1, 1, 5, 10,
1, 1, 1, 10, 1, 10, 21]
```

- 本章目标
- 什么是递归
- 实现递归
- 递归的可视化
- 复杂递归问题
- 动态规划 Dynamic Programming
- 递归与动态规划的比较
 - 最短路径数问题
 - 列车编组问题
- DP 的一般套路

最短路径数问题

```
paths (start, end) =  
    paths (A, end) + paths (B, end)  
    ||||  
paths (D, end) + paths (C, end) + paths (C, end) + paths (E, end)  
  
3 def paths(row, col, M, N):  
4     if row==M or col==N : return 1  
5     return paths(row+1, col, M, N) \  
6         + paths(row, col+1, M, N)  
7  
8 def pathsDP(M, N):  
9     paths = [[0]*N+[1] for _ in range(M)]  
10    paths += [[1]*N]  
11    for j in range(M-1, -1, -1):  
12        for i in range(N-1, -1, -1):  
13            paths[j][i] = paths[j+1][i] \  
14                + paths[j][i+1]  
15    return paths[0][0]  
16  
17 if __name__ == "__main__":  
18     print(paths(0, 0, 4, 5))  
19     print(pathsDP(4, 5))
```

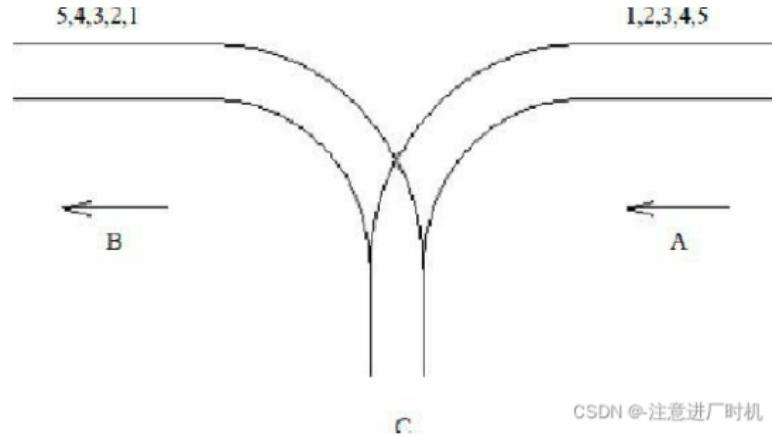


- 动态规划：最下一行和最右一列都是 1，然后往左、往上计算。

- 本章目标
- 什么是递归
- 实现递归
- 递归的可视化
- 复杂递归问题
- 动态规划 Dynamic Programming
- 递归与动态规划的比较
 - 最短路径数问题
 - 列车编组问题
- DP 的一般套路

列车编组问题

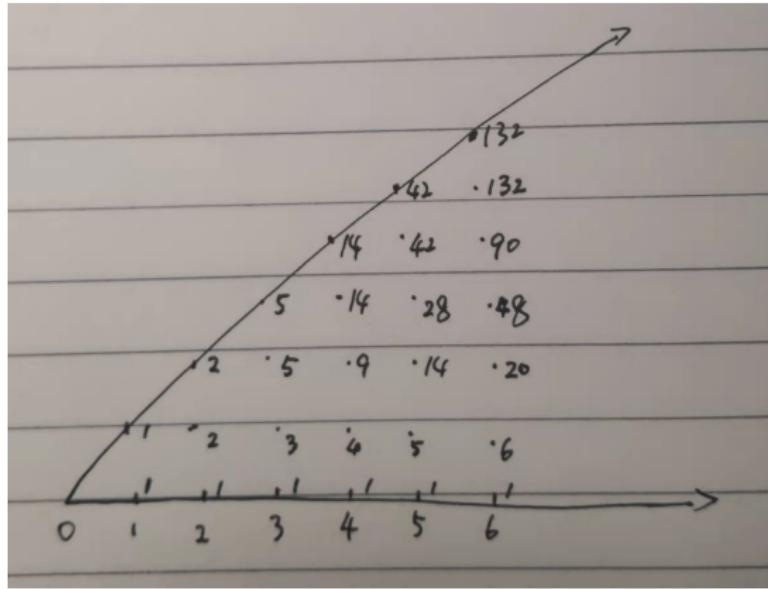
- 一列火车有若干个车厢，从 A 点通过一个道岔 C 后，对车厢进行重新编组。
- 到达 B 点后，车厢有多少种排列方式？
- 题目有多种解法



CSDN @-注意进厂时机

列车编组问题（出栈序列数）

- 蛮力法：对车厢进行全排列，再通过栈一一验证。
- 抽象法：把入栈/出栈操作抽象为平面上点的移动，转化为最短路径数问题。



- 车厢数为 N 的时候，通过栈重新编组后的排列数为 $T(N)$
- 找 N 与 $N-1$ 的关系，或者 N 与 $1, 2, \dots, N-1$ 的关系
- 考虑 $N=6$ 的时候，车厢 1 在 B 中出现在第 3 位的排列数
 - ? - ? - 1 - ? - ? - ?
 - {2, 3} - 1 - {4, 5, 6} 排列情况: $T(2) * T(3)$
- 车厢 1 的新位置还可能是 1, 2, 4, 5, 6，它们对应的排列数为 $T_i * T_{5-i}$ ；考虑车厢 1 在位置为 1 或 6 的情况，令 $T_0 = 1$
- 得到递推公式

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T_i * T_{n-1-i}$$

- 数学解法：根据递推公式求通项

递归与动态规划解法

```
1 #车厢编组问题
2 def T(n):
3     return 1 if n<=1 else sum(T(i)*T(n-1-i) for i in range(n))
4
5 def Tdp(n):
6     t=[1]*(n+1)
7     for i in range(2,n+1):
8         t[i] = sum(t[j]*t[i-1-j] for j in range(i))
9     return t[n]
10
11 print(T(6))
12 print(Tdp(6))
```

132
132

- 最优子结构 optimal substructure
 - 通过子问题的最优解，能够轻易的构造出问题的最优解
- 递归与动态规划算法后面都存在着最优子结构
- 动态规划按照计算的依赖关系，对它们的顺序进行了主动重排
 - 如果 A 依赖于 B, 先于 A 把 B 计算好，而不是等 A 的调用。
- 如果不同的子问题之间出现重叠 overlap，即有相同的“孙”问题时，动规的效率更高

递归与动态规划效率

```
1 from line_profiler import LineProfiler
2 if __name__ == "__main__":
3     lprofiler = LineProfiler(T)
4     lprofiler.run('T(15)')
5     lprofiler.print_stats()
6     lprofiler = LineProfiler(Tdp)
7     lprofiler.run('Tdp(15)')
8     lprofiler.print_stats()
```

Timer unit: 1e-06 s

Total time: 2.52536 s

File: /var/folders/wl/0jh0p1h13jq40llp05qw5rt00000gn/T/ipykernel_43986/358612773.py

Function: T at line 2

Line #	Hits	Time	Per Hit	% Time	Line Contents
--------	------	------	---------	--------	---------------

2					def T(n):
3	7971615	2525357.0	0.3	100.0	return 1 if n<=1 else sum(T(i)*T(n-1-i) for i in range(n))

Timer unit: 1e-06 s

Total time: 4e-05 s

File: /var/folders/wl/0jh0p1h13jq40llp05qw5rt00000gn/T/ipykernel_43986/358612773.py

Function: Tdp at line 5

Line #	Hits	Time	Per Hit	% Time	Line Contents
--------	------	------	---------	--------	---------------

5					def Tdp(n):
6	1	1.0	1.0	2.5	t=[1]*(n+1)
7	15	2.0	0.1	5.0	for i in range(2,n+1):
8	14	37.0	2.6	92.5	t[i] = sum(t[j]*t[i-1-j] for j in range(i))
9	1	0.0	0.0	0.0	return t[n]

- 本章目标
- 什么是递归
- 实现递归
- 递归的可视化
- 复杂递归问题
- 动态规划 Dynamic Programming
- 递归与动态规划的比较
- DP 的一般套路

动态规划问题的一般套路

- 把原问题扩展为具有最优子结构的问题 Q 。
 - 一维情景: $Q = Q(n)$
 - 二维情景: $Q = Q(n, m)$
- 找到 Q 的递归推导式:
 - 一维情景: $Q(n) = F(Q(n_1), Q(n_2), \dots, Q(n_i)), n_1, n_2, \dots, n_i < n$
 - 二维情景:
$$Q(n, m) = F(Q(n_i, m_j), \dots), (n_i < n \wedge m_j \leq m) \vee (n_i \leq n \wedge m_j < m)$$
 - 当 n 和 m 很小的时候, Q 易得
- 算法实现
 - 动态规划: 用一个数组 dp 存储 Q 的结果, 从“前”往“后”算
 - 递归: 用递归函数“原则上也可以”实现

- 本章目标
- 什么是递归
- 实现递归
- 递归的可视化
- 复杂递归问题
- 动态规划 Dynamic Programming
- 递归与动态规划的比较
- DP 的一般套路
 - 跟着套路“按图索骥”

讨论：博物馆大盗问题

- 大盗潜入博物馆，面前有 5 件宝物，分别有重量和价值，大盗的背包仅能负重 20 公斤，请问如何选择宝物，总价值最高？

item	weight	value
0	2	3
1	3	4
2	4	8
3	5	8
4	9	10

- 博物馆每种宝物只有一件！如果有很多件的话，则变成“超市零元购”问题。

讨论：单词最小编辑距离问题

- 任意两个单词之间的变换，长度可以不同。
 - 从源单词每复制一个字母到目标单词，计 5 分
 - 从源单词每删除一个字母，计 20 分
 - 在目标单词每插入一个字母，计 20 分
- 例如从单词“algorithm”变为“alligator”

源	al		g	ori		t	hm		
目标	al	lli	g		a	t		or	
操作	复制	插入	复制	删除	插入	复制	删除	插入	
分数	10	60	5	60	20	5	40	40	240

- 求多种操作方案中，分数最低的一种方案（编辑距离最小）

讨论：最长公共子序列问题 LCS

定义一些线性表中的概念

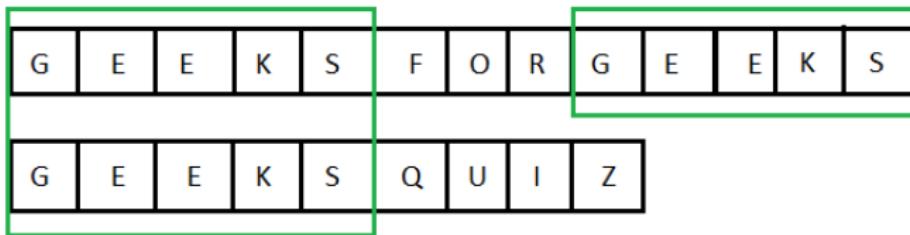
- 子序列：从原序列 A 中去除某些元素但不破坏余下元素的相对位置（在前或在后）而形成的新序列 L 。
- 子串：如果 L 在 A 中是连续的，即 L 中的前驱/后继关系在 A 中也是，则称 L 为 A 的子串。
- 前缀：子串 L 在 A 的开始位置出现。
- 后缀：子串 L 在 A 的末端出现。

问题描述：给定两个序列： $X[1 \dots m]$ 和 $Y[1 \dots n]$ ，求在两个序列中同时出现的最长子序列的长度。

- 假设 X 和 Y 的序列如下：
 - $X[1 \dots m] = \{A, B, C, B, D, A, B\}$
 - $Y[1 \dots n] = \{B, D, C, A, B, A\}$
- 可以看出， X 和 Y 的最长公共子序列有“BDAB”、“BCAB”、“BCBA”，即长度为 4。

讨论：最长公共子串问题

问题描述：给定两个序列： $X[1 \dots m]$ 和 $Y[1 \dots n]$ ，求在两个序列中同时出现的最长子串的长度。



OUTPUT: 5

As longest Common String is "Geeks"

讨论：最长公共前后缀问题

问题描述：给定序列： $A[1 \dots m]$ ，不等于 A 的 L 满足： L 同时是 A 的前缀和后缀，求 L 的最大长度。

- 力扣 1392 《最长快乐前缀》
- “快乐前缀”是在原字符串中既是前缀也是后缀（不包括原字符串自身）的字符串。给你一个字符串 s ，请你返回它的最长快乐前缀。如果不存在满足题意的前缀，则返回一个空字符串 ""。

示例 1：

输入： $s = "level"$

输出： "l"

解释：不包括 s 自己，一共有 4 个前缀 ("l", "le", "lev", "leve") 和 4 个后缀 ("l", "el", "vel", "evel")。最长的既是前缀也是后缀的字符串是 "l"。

示例 2：

输入： $s = "ababab"$

输出： "abab"

解释："abab" 是最长的既是前缀也是后缀的字符串。题目允许前后缀在原字符串中重叠。

嵌套列表法实现二维数组

Python 3.6
[known limitations](#)

```
1 l=[0]*4
2 l2 = [0 for _ in range(4)]
3 ll = [[0]*4] * 3
4 ll2 = [[0]*4 for _ in range(3)]
```

[Edit this code](#)

- ▶ line that just executed
- next line to execute

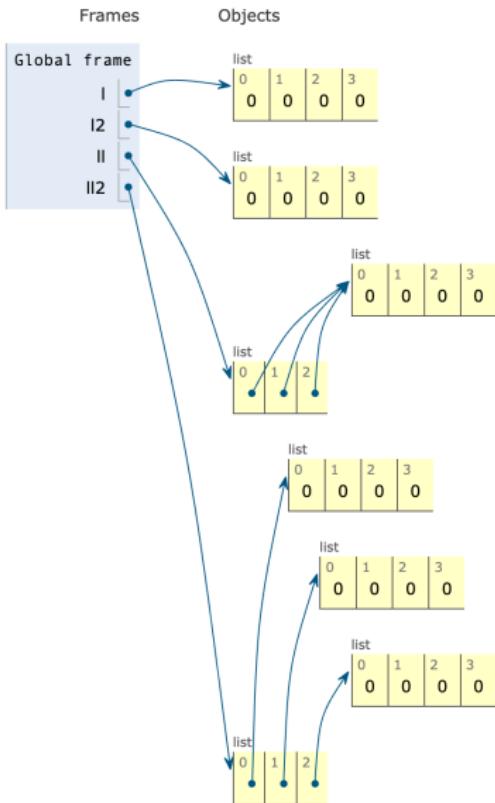
<< First < Prev Next > >>

Done running (17 steps)

Visualized with [pythontutor.com](#)

NEW: [subscribe](#) to our YouTube

[Move and hide objects](#)



- 在本章我们研究了几种递归算法，表明了递归是解决某些具有自相似性的复杂问题的有效技术
- 递归算法“三定律”
 - 递归算法必须具备基本结束条件
 - 递归算法必须要减小规模，改变状态，向基本结束条件演进
 - 递归算法必须要调用自身
- 某些情况下，递归与迭代循环（DP）可以互相替代
- 递归算法通常能够跟问题的表达很自然地契合
- 递归不总是最合适的选择，有时候递归算法会引发大量的重复计算
- 算法课程中能学到的是用计算机解决一类问题的固定方法及套路；在此之前首先要分析问题，所需的逻辑、归纳、推理能力，则来源于长期的数学训练。