南京审计大学2022-2023学年第一学期期末

《线性代数》期末试卷

年级_____专业___________学号________姓名______________任课教师___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟．要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空与选择题（均为单选题）(27 分)

1、已知 4 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ 4 & b & 5 & 6 \\ 7 & 8 & c & 9 \\ 0 & 5 & 4 & d \end{pmatrix}$，函数 $f(x)=|xE-A|$，E 为 4 阶单位阵，则函数 $f(x)$ 中 x^3 项的系数为__________________.

2、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均为 4 维列向量，已知 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，又 $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=$____________________.

3、 已知 3 阶方阵 A 满足 $|A+3E|=|A-2E|=|A-E|=0$，其伴随矩阵为 A^*，则行列式 $|A^*|=$______________.

4、 α 是 3 维实列向量，且 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\|\alpha\|=$____________.

5、设 α 是 R^3 空间中的某一向量，它在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，则 α 在基 $\varepsilon_1+k\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标是__________________________.

6、 下列关于矩阵乘法的结论中**错误**的是______________________.

(A). 若矩阵 A 可逆，则 A 与 A^{-1} 可交换

(B). 可逆阵必与初等矩阵可交换

(C). 任一个 n 阶方阵均与 cE_n 可交换，这里 c 为任意常数

(D). 初等矩阵与初等矩阵乘法未必可交换

7、 设 A、B 均为 n 阶方阵，且 $(AB)^2=E$，则下列式子中成立的是____________.

(A). $AB=E$　　(B). $AB=-E$

(C). $A^2B^2=E$　　(D). $(BA)^2=E$

8、 设 $Ax=b$ 为 n 元非齐次线性方程组，则下面说法中正确的是__________

(A). 若 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解

(B). 若 $Ax=0$ 有无穷多个解，则 $Ax=b$ 有无穷多个解

(C). 若 $Ax=b$ 有两个不同的解，则 $Ax=0$ 有无穷多个解

(D). $Ax=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=n$

二、(10 分) 已知 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$，求第一行各元素的代数余子式之和.

三、(10 分) 参数 a,b 满足什么条件的时候，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$ 有解？并在有解的情况下，求出它的通解.

四、(15 分) 已知 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$，问参数 k 满足什么条件的时候 A 可以对角化？

并求出可逆阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

五、(12 分) 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\k\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-k\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$，问：

（2） 参数 k 为何值时，α_1,α_2 为向量组的一个最大线性无关组？并在此时，求出 α_3,α_4 由最大线性无关组表出的线性表达式.

六、(12 分) 设 V 为实数域 R 上全体 2 阶方阵关于矩阵的加法和数乘运算所成的线性空间，在 V 中定义映射 $T:T(X)=X\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，（1） 证明 T 是 V 中的线性变换，（2） 求线性变换 T 在自然基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵，（3） 若 $a=1,b=2,c=3,d=4$，试求线性变换 T 的核 $\ker T$ 与像空间 $\operatorname{Im} T$.

七、(1)(7 分)已知 A 为 3 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 A 的三个不同的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别为相应的特征向量，又 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，试证：$\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关.

(2)（7 分)设 A 为 3 阶实对称阵，且 $A^2+2A=0$，又 $R(A)=2$，试求出 A 的全体特征值，并问参数 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定阵?