2021-2022-1《概率论与数理统计》期中测试 A

（本次考试不允许使用计算器）

姓名__________ 学号 __________ 班级__________ 得分________

1、（1）设事件 A 与事件 B 互斥，$P(A\cup B)=0.6, P(A)=0.2$, 求 $P(B)$.

（2）已知 $P(B-A)=0.2, P(A)=0.3$, 求 $P(\overline{AB})$. (12′)

(1) A,B互斥，$\cancel{P(AB)}=0$. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.6$ 又 $P(A)=0.2$，则 $P(B)=0.4$

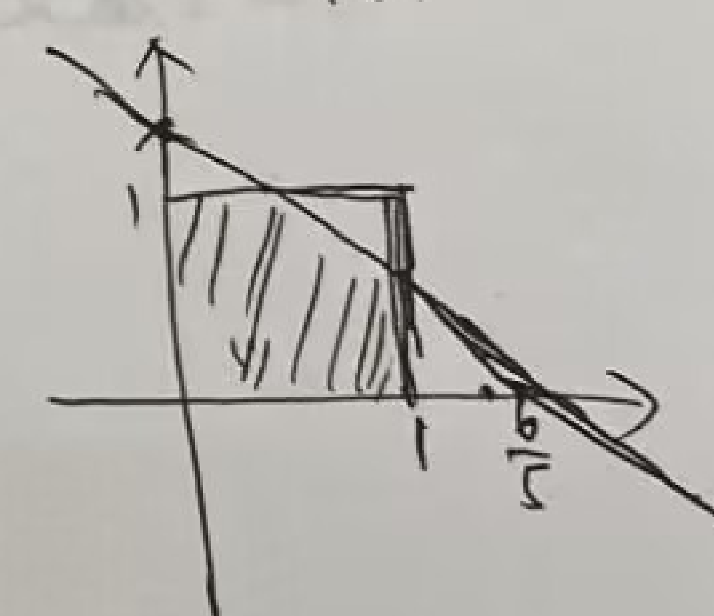
(2) $P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.2$

$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-0.2-0.3=0.5$

2、（1）一间宿舍中住有 4 名学生，（假定每人生日在各个月的可能性相同），求 4 人中恰好有 2 个人的生日在同一个月的概率。

（2）从 $(0,1)$ 中随机的取两个数，则两个数之和小于 $\frac{6}{5}$ 的概率。(12′)

(1) ~~解~~ 设A为 4人中恰有2人生日在同一个月，则 $P(A)=\frac{C_4^2 C_{12}^1\times 11\times 10}{12^4}=\frac{55}{144}$



(2) $P(\text{两数之和小于}\frac{6}{5})=1-\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{17}{25}$

3、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{3}, & -1\le x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$ ，求 X^2 的概率分布. (10′)

$X\sim$

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$X^2\sim$

X^2	0	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

4、设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} A\cos x, & |x|\le \frac{\pi}{2} \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求：(1)系数 A；（2） X 落在区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内的概率．（14′）

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A\cos x\,dx = A\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

5、假设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x\ge 0 \\ 0, \quad x<0 \end{cases}$，求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$．（15′）

$$Y=e^X\ge 0$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $y\ge 0$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)=\int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)dx$

∴ 当 $y<0$ 时，$f_Y(y)=F_Y'(y)=0$

当 $y\ge 0$ 时，$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\ln y)\cdot(\ln y)'=\frac{1}{y}f_X(\ln y)$

$$=\begin{cases} \frac{1}{y}\cdot e^{-\ln y}=\frac{1}{y^2}, & y\ge 1 \\ 0 & y<1 \end{cases}$$

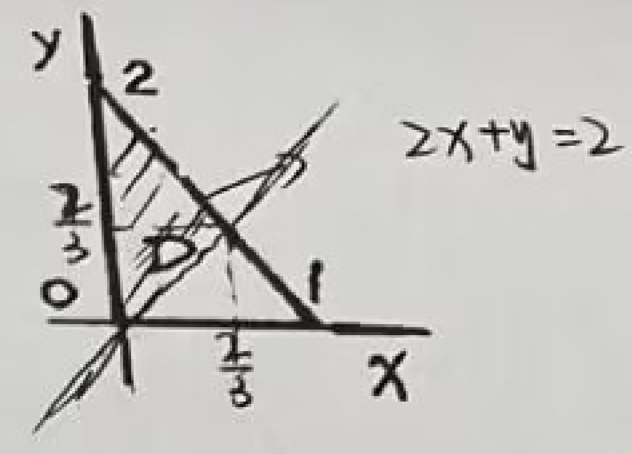
综上，$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{y^2} & y\ge 1 \\ 0, & y<1 \end{cases}$

6、设（X，Y）服从区域 D（如下图）上的均匀分布，求

（1）（X，Y）的联合密度函数；

（2）关于 X 和关于 Y 的边缘密度函数，并判断 X 和 Y 是否相互独立；

（3）$P(X \le Y)$.（20′）



(1) $\because$ $S_D = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

$\therefore$ $f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

(2) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{2-2x} 1\,dy = 2-2x, \quad 0<x<1.$ $\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 2-2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{\frac{2-y}{2}} 1\,dx = \frac{2-y}{2}, \quad 0<y<2$ $\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2-y}{2}, & 0<y<2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$f_X(x) f_Y(y) \ne f(x,y)$. X,Y 不独立.

(3) $P(X \le Y) = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\int_x^{2-2x} 1\,dy \right) dx = \int_0^{\frac{2}{3}} (2-3x)\,dx = \frac{2}{3}$

7、设（X，Y）的分布律如下，已知 $P(Y=1|X=0) = \frac{1}{2}$, $P(X=1|Y=0) = \frac{1}{3}$, 求未知参数 a,b,c 的值。（12′）

X \ Y	0	1
0	a	b
1	c	0.5

$\frac{1}{2} = P(Y=1|X=0) = \frac{P(X=0, Y=1)}{P(X=0)} = \frac{b}{a+b}$

$\frac{1}{3} = P(X=1|Y=0) = \frac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{c}{a+c}$

$a+b+c = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 0.2 \\ b = 0.2 \\ c = 0.1 \end{cases}$

8、某班有 40 名同学，一次考试后的数学成绩服从正态分布，平均分为 80，标准差为 10，理论上说在 80 到 90 分的人数是多少人？？$\Phi(1)=0.8413$ （5′）

记 X 为数学成绩，则 $X \sim N(80, 10^2)$

则 $P(80 \le X \le 90) = P\left(\frac{80-80}{10} \le \frac{X-80}{10} \le \frac{90-80}{10}\right) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413$

$40 \times 0.3413 \simeq 14$ 人.