姓名________ 学号________ 学院________ 专业________ 座位号________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考,考试作弊将带来严重后果!

南京审计大学线性代数期末考试（A 卷）

2019-2020 第二学期

注意事项：1. 考前请将密封线内各项信息填写清楚；
2. 所有答案请直接答在试卷上(或答题纸上)；
3. 考试形式：闭卷；
4. 本试卷共 八 大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟。

第一部分　选择题　(共 28 分)

一、单项选择题（本大题共 14 小题，每小题 2 分，共 28 分）在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填在题后的括号内。错选或未选均无分。

1.设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=m$，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}=n$，则行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$等于（　　）

A. m+n　　　　B. −(m+n)

C. n−m　　　　D. m−n

2.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}^{-1}$ 等于（　　）

A. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　　　D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^*$是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，则 $\mathbf{A}^*$中位于（1，2）的元素是（　　）

A. −6　　　　B. 6

C. 2　　　　D. −2

4.设 $\mathbf{A}$ 是方阵，如有矩阵关系式 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$，则必有（　　）

A. $\mathbf{A}=\mathbf{0}$　　　　B. $\mathbf{B}\neq\mathbf{C}$ 时 $\mathbf{A}=\mathbf{0}$

C. $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$ 时 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$　　　　D. $|\mathbf{A}|\neq\mathbf{0}$ 时 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$

5.已知 3×4 矩阵 $\mathbf{A}$ 的行向量组线性无关，则秩（$\mathbf{A}^T$）等于（　　）

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. 4

6.设两个向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$均线性相关，则（　　）

A.有不全为 0 的数λ_1，λ_2，…，λ_s使$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$ 和$\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\ldots\lambda_s\boldsymbol{\beta}_s=0$

B.有不全为 0 的数λ_1，λ_2，…，λ_s使λ_1（$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$）$+\lambda_2$（$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$）$+\ldots+\lambda_s$（$\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s$）$=0$

C.有不全为 0 的数λ_1，λ_2，…，λ_s使λ_1（$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1$）$+\lambda_2$（$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2$）$+\ldots+\lambda_s$（$\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s$）$=0$

D.有不全为 0 的数λ_1，λ_2，…，λ_s和不全为 0 的数μ_1，μ_2，…，μ_s使$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$ 和$\mu_1\boldsymbol{\beta}_1+\mu_2\boldsymbol{\beta}_2+\ldots+\mu_s\boldsymbol{\beta}_s=0$

7.设矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 r，则 $\mathbf{A}$ 中（　　）

A.所有 r－1 阶子式都不为 0　　　　B.所有 r－1 阶子式全为 0

C.至少有一个 r 阶子式不等于 0　　　　D.所有 r 阶子式都不为 0

8.设 $\mathbf{Ax=b}$ 是一非齐次线性方程组，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$是其任意 2 个解，则下列结论错误的是（　　）

A.$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$是 $\mathbf{Ax=0}$ 的一个解　　　　B.$\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2$是 $\mathbf{Ax=b}$ 的一个解

C.$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$是 $\mathbf{Ax=0}$ 的一个解　　　　D.$2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$是 $\mathbf{Ax=b}$ 的一个解

9.设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 不可逆，则必有（　　）

A.秩($\mathbf{A}$)<n　　　　B.秩($\mathbf{A}$)=n－1

C.$\mathbf{A=0}$　　　　D.方程组 $\mathbf{Ax=0}$ 只有零解

10.设 A 是一个 n(⩾3)阶方阵，下列陈述中正确的是（　　）

A.如存在数λ和向量α使 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则α是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值λ的特征向量

B.如存在数λ和非零向量α，使$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则λ是 $\mathbf{A}$ 的特征值

C.$\mathbf{A}$ 的 2 个不同的特征值可以有同一个特征向量

D.如λ_1，λ_2，λ_3是 $\mathbf{A}$ 的 3 个互不相同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$依次是 $\mathbf{A}$ 的属于λ_1，λ_2，λ_3的特征向量，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$有可能线性相关

11.设λ_0是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程的 3 重根，$\mathbf{A}$ 的属于λ_0的线性无关的特征向量的个数为 k，则必有（　　）

A. k⩽3　　　　B. k<3

C. k=3　　　　D. k>3

12.设 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵，则下列结论错误的是（　　）

A.$|\mathbf{A}|^2$必为 1　　　　B.$|\mathbf{A}|$必为 1

C.$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$　　　　D.$\mathbf{A}$ 的行（列）向量组是正交单位向量组

13.设 $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵，$\mathbf{C}$ 是实可逆矩阵，$\mathbf{B}=\mathbf{C}^T\mathbf{AC}$.则（　　）

A.$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似

B. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 不等价

C. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 有相同的特征值

D. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同

14.下列矩阵中是正定矩阵的为（　　）

A.$\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}$　　　　B.$\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}$

C.$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & -3\\0 & -3 & 5\end{pmatrix}$　　　　D.$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 0\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

第二部分　非选择题（共 72 分）

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）不写解答过程，将正确的答案写在每小题的空格内。错填或不填均无分。

15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 9 & 25 & 36 \end{vmatrix} =$ _________.

16.设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.则 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}=$_________.

17. 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{3\times3}$，$|\mathbf{A}|=2$，$\mathbf{A}_{ij}$ 表示 $|\mathbf{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式（$i,j=1,2,3$），则 $(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23})^2+(a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23})^2+(a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23})^2=$________.

18.设向量（2，-3，5）与向量（-4，6，a）线性相关，则 a=________.

19.设 **A** 是 3×4 矩阵，其秩为 3，若 η_1，η_2 为非齐次线性方程组 **Ax=b** 的 2 个不同的解，则它的通解为________.

20.设 **A** 是 m×n 矩阵，**A** 的秩为 r(<n)，则齐次线性方程组 **Ax=0** 的一个基础解系中含有解的个数为________.

21.设向量α、β的长度依次为 2 和 3，则向量$\alpha+\beta$与$\alpha-\beta$的内积（$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$）=______.

22.设 3 阶矩阵 A 的行列式$|\mathbf{A}|=8$，已知 **A** 有 2 个特征值-1 和 4，则另一特征值为_______.

23.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 6 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 10 & 8 \end{pmatrix}$，已知$\alpha=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$是它的一个特征向量，则$\alpha$所对应的特征值为_________.

24.设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$的秩为 4，正惯性指数为 3，则其规范形为_______.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

25.设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.求（1）$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$；（2）$|4\mathbf{A}|$.

26.试计算行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

27.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵 **B** 使其满足矩阵方程 $\mathbf{AB}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}$.

28.给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\9\end{pmatrix}$.

试判断$\boldsymbol{\alpha}_4$是否为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合；若是，则求出组合系数。

29.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\-2&4&2&6&-6\\2&-1&0&2&3\\3&3&3&3&4\end{pmatrix}$.

求：(1）秩（$\mathbf{A}$)；

(2）$\mathbf{A}$ 的列向量组的一个最大线性无关组。

30.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-2&-3&4\\2&4&-3\end{pmatrix}$ 的全部特征值为 1，1 和−8.求正交矩阵 T 和对角矩阵 $\mathbf{D}$，使 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}=\mathbf{D}$.

31.试用配方法化下列二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3,$$

并写出所用的满秩线性变换。

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

32.设方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^3=\mathbf{0}$，试证明 $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆，且（$\mathbf{E}-\mathbf{A}$）$^{-1}=\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2$.

33.设$\boldsymbol{\eta}_0$是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax=b}$ 的一个特解，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$是其导出组 $\mathbf{Ax=0}$ 的一个基础解系.试证明

(1）$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\xi}_2$均是 $\mathbf{Ax=b}$ 的解；

(2）$\boldsymbol{\eta}_0$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$线性无关。