南京审计大学

2018-2019 学年第 1 学期《概率论与数理统计》试卷

一、单项选择题（每题 2 分，共 20 分）

1.设 A 和 B 为随机事件，若 $0 < P(A) < 1$，$0 < P(B) < 1$，则 $P(A \mid B) > P(A \mid \overline{B})$ 的充分必要条件是（ ）

A. $P(B \mid A) > P(B \mid \overline{A})$　　　　B. $P(B \mid A) < P(B \mid \overline{A})$

C. $P(\overline{B} \mid A) > P(B \mid \overline{A})$　　　　D. $P(\overline{B} \mid A) < P(B \mid \overline{A})$

2.甲袋中有 2 个白球 3 个黑球，乙袋中一半白球一半黑球。现从甲袋中任取 2 球与从乙袋中任取 1 球混合后，再从中任取 1 球为白球的概率为（ ）

A. $\frac{11}{30}$　　B. $\frac{6}{15}$　　C. $\frac{13}{30}$　　D. $\frac{7}{15}$

3.随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)dx = 0.6$，则 $P(X < 0) =$ （ ）

A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0.4　　D. 0.5

4.设 (X,Y) 的联合分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	a	b
1	0.1	0.5

，已知 $P(Y=1 \mid X=0) = \frac{1}{2}$,则（ ）

A. $a = 0.1, b = 0.2$　　B. $a = 0.2, b = 0.1$

C. $a = 0.2, b = 0.2$　　D. $a = 0.3, b = 0.1$

5.将长度为 1 米的木棒随机分为两段，则这两段长度的相关系数为（ ）

A. 1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. $\frac{1}{2}$

6. 假设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=-2) = \frac{1}{2}$，$P(X=1) = a$，$P(X=3) = b$，若 $EX = 0$，则 $DX =$（ ）

A. 1　　B. $\frac{9}{2}$　　C. -1　　D. $\frac{1}{2}$

7.设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则下列结论不正确的是（ ）

A. $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　B. $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

C. $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布　　D. $n(\overline{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

8.下列关于样本平均数和总体平均数的说法,正确是( )

A.前者是一个确定值，后者是随机变量　　B. 前者是随机变量，后者是一个确定值

C.两者都是随机变量　　　　　　　　　　D.两者都是确定值

9.设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，在 σ^2 已知和未知两种情况下，若样本容量和置信度均不变，则对于不同的样本观测值，总体均值 μ 的置信区间的长度分别将（　）

A.变长；变短　B. 变短；变长　C.不能确定；不变　　　　D. 不变；不能确定

10.在一次假设检验中，当显著性水平 $\alpha = 0.01$ 时，原假设被拒绝，则用 $\alpha = 0.05$ 时，原假设（　）

A.一定会被拒绝　B. 一定不会被拒绝　C.需要重新检验　　　D. 有可能被拒绝

二、计算题（每题 9 分，共 54 分）

1.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}|x|, -1<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，令 $Y = X^2 + 1$，

求（1）Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$；（2）$P\{-1<Y<\frac{3}{2}\}$。

2.从 1,2,3 三个数字中一次任取两个数字，记第一个数为 X，第二个数为 Y，求 (X,Y) 的联合分布及其边缘分布，并判断 X 和 Y 是否独立。

3. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度函数为 $f(y)=\begin{cases}2y, 0<y<1\\ 0,\ 其他\end{cases}$，求（1）$P(Y \le EY)$；（2）$Z = X+Y$ 的概率密度函数 $f(z)$。

4.设一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的，假设每箱平均重量 50 千克，标准差为 5 千克。若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，请利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0.977。

5.设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty<x<+\infty$，$\sigma\in(0,+\infty)$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求 σ 的最大似然估计 σ。

6.某银行计划在两个相邻地区选择一个开设一家新的支行。支行选址的因素之一是这两个地区的平均家庭收入是否不同。以往统计数据显示，这两个地区的家庭收入的标准差分别为 500 元和 700 元，现从这两个地区各随机抽取 200 个家庭，发现两个地区家庭收入均值分别为 25600 元和 25490 元，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验这两个地区的平均家庭收入是否相同。

三、应用题（每题 10 分，共 20 分）

1. 乔治（George）是一名大二学生，正在学习《概率论与数理统计》课程。糟糕的是，乔治并不是一名勤奋的学生，课前不愿意看书，课后也不做作业，还经常睡懒觉不上课。他总是想靠运气通过考试。某次考试中，有 10 道选择题，每道选择题有 5 个选项，只有 1 个是正确的。乔治对每个问题都是猜答案。请帮助乔治计算他 1 道题目都没答对的概率；另外，若答对的题目比率低于 50%，就认为不及格，那么乔治会不及格么？

2.美国审计署发布的报告，主要内容是政府机构如何支配财政资金。2009 年以来，美国审计署将美国林务局的财务管理划归为高风险级别，因为该机构的内部控制和财务功能较弱。数据显示，2011 年，美国林务局使用购物卡进行了 110 万次消费，总计 32000 万美元。美国审计署对此进行了审计，以检查是否有重复记录，分析发现，共有 8659 笔重复记录。现随机抽取 125 笔交易，平均值为 929.67 美元，标准差为 408 美元，请在 95%的置信度水平下，估计重复记录的总金额的取值范围。

四、证明题（共 6 分）

设连续型随机变量X_1和X_2相互独立且方差均存在，密度函数分别为$f_1(x)$和$f_2(x)$，随机变量Y_1的概率密度函数为$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量$Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$。请分别判断$EY_1$和$EY_2$，$DY_1$和$DY_2$的大小关系，并证明。

附表：

$\Phi_0(1.64)=0.95$	$t_{0.025}(7)=2.365$	$\chi^2_{0.025}(7)=16.013$	$F_{0.025}(1,8)=7.57$
$\Phi_0(1.96)=0.975$	$t_{0.025}(8)=2.306$	$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$	$F_{0.025}(1,9)=7.21$
$\Phi_0(1)=0.8413$	$t_{0.05}(25)=1.708$	$\chi^2_{0.05}(7)=14.067$	$F_{0.025}(1,10)=6.94$
$\Phi_0(0.745)=0.7718$	$t_{0.025}(125)=1.978$	$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$	$F_{0.05}(1,8)=5.32$
$\Phi_0(2)=0.977$	$t_{0.025}(124)=1.980$	$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$	$F_{0.05}(1,9)=5.12$