南京审计大学《高等数学》期末试卷

2017-2018学年第一学期

一、填空题(每小题 2 分，共 14 分)

1、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{e^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$__________________.

2、设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线斜率为__________________.

3、设 $\dfrac{d}{dx}\left[f\left(x^3\right)\right]=\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=$________________________.

4、设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt$，$\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=$_____________________.

5、曲线 $y=\dfrac{2x^2-x+5}{(x-1)^2}$ 的渐进线有_______条.

6、函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$ 的第二类间断点是________________

7、设 $\begin{cases}x=e^t+\ln\left(1+t^2\right)\\ y=\arctan t-t\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$__________

二、计算题(每小题 7 分，共 8 大题，共 56 分)

1、设 $y=\left[f\left(x^2\right)\right]^{\frac{1}{x}}$，$f(x)>0$ 且可微，求 dy .

2、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 为二阶可导且导数连续，$g(0)=1$，求使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续的 a 值.

3、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+b\tan x)^x-a^x}{\sin^2(bx)},a>0,a\neq 1,b\neq 0$

4、$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{3a}{n}\right)+\ldots+\left(x+\dfrac{(n-1)}{n}a\right)\right]\cdot\dfrac{1}{n}$

5、求不定积分 $\int\dfrac{(x+1)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

6、求定积分 $\int_{-1}^{1}|x-y|e^x dx\left(|y|\leq 1\right)$

7、已知函数 $f(x)=\ln\left(e^{\cos x}(x+1)\right)$，求 $f^{(n)}(x)$.

8、求函数 $I\left(x\right)=\int_{e}^{x}\frac{\ln t}{t^{2}-2t+1}dt$ 在区间 $\left[e,e^{2}\right]$ 上的最大值.

三、证明题(第 1 大题 6 分，第 2、3、4 大题 8 分，共 30 分)

1、按定义证明数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right\}$ 为无穷大量

2、试证：当 $x>0$ 时，$\left(x^{2}-1\right)\ln x\geq\left(x-1\right)^{2}$

3、设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 上二阶连续可导，证明存在常数 $c\in\left(a,b\right)$，使得

$$f\left(b\right)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(a\right)=\frac{\left(b-a\right)^{2}}{4}f''\left(c\right)$$

4、设 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0^{+}}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to1^{-}}\frac{f\left(x\right)}{x-1}=1$，证明：至少存在一点 $\xi\in\left(0,1\right)$，使得 $f\left(\xi\right)=0$