2020-2021-1《概率论与数理统计》期中测试 A

(本次考试不允许使用计算器)

姓名__________ 学号__________ 班级__________ 得分__________

1、(12 分) 已知 $P(A)=\frac{4}{5}$, $P(A\overline{B})=\frac{1}{5}$, 求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$。

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-[P(A)-P(A\overline{B})]=1-\left[\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\right]=\frac{2}{5}$$

2、(15 分) 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份，随机地抽取一个地区的报名表，从中先后抽出两份，求 (1) 先抽到的一份是女生表的概率；(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率。

(1) $\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{25}=\frac{29}{90}$

(2)

12

3、(14 分) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，求 X 的分布函数。

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$$

① $x<-1$ 时，0

② $x>1$ 时，1

③ $-1\le x\le 0$，$F(x)=\int_{-1}^{x}1+t\,dt=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$

④ $0<x\le 1$

$$F(x)=\int_{-1}^{0}1+t\,dt+\int_{0}^{x}1-t\,dt=\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}, & -1\le x\le 0\\ -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

2、(15 分) 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份，随机地抽取一个地区的报名表，从中先后抽出两份，求 (1) 先抽到的一份是女生表的概率；(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率。

解：设事件 A_i 为"第i地区"，事件B为"第一份抽到的是女生"

事件C为"第二份抽到的是男生"

(1) 由全概率公式 $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{25}=\frac{29}{90}$

(2) 则 $P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{P(A_1BC)+P(A_2BC)+P(A_3BC)}{P(A_1C)+P(A_2C)+P(A_3C)}=\frac{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(BC|A_i)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(C|A_i)}$

$=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{15}\cdot\frac{8}{14}+\frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)}=\frac{20/30}{61/30}=\frac{20}{61}$

3、(14 分) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，求 X 的分布

4、(14 分) 设随机变量 X 服从参数为λ (λ>0) 的指数分布，且 $P(X\le 1)=\frac{1}{2}$，

求 (1) 参数λ；(2) $P(X>2\mid X>1)$。

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & else.\end{cases}$$

$$P\{X\le 1\}=\int_0^1\lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda x}\Big|_1^0 = 1-e^{-\lambda}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \lambda=\ln 2$

无记忆性

$$P\{X>2\mid X>1\}=P\{X>1\}=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{P\{X>2\}}{P\{X>1\}}=\frac{e^{\cancel{-2\lambda}}}{e^{\cancel{-\lambda}}}=\frac{1}{2}$$

5、(15 分) 设 X 表示 10 次独立重复投篮中投中的次数，每次投中的概率为 0.8，

求 X^2 的期望值。$X\sim b(k;10,0.8)$

$EX=8,\quad DX=1.6.$

$EX^2=DX+(EX)^2=1.6+8^2=65.6$

6、(14 分) 设随机变量 X 服从区间 $[0,2]$ 上的均匀分布，求随机变量 $Y=X^2$ 的分布函数和密度函数。

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2\\ 0, & else.\end{cases}$$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}.$

① $y\le 0$, 0.

② $0\le y\le 4$, $F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\frac{\sqrt{y}}{2}$

③ $y>4$. 1.

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \frac{1}{2}\sqrt{y}, & 0\le y\le 4\\ 1, & y>4\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}} & 0\le y\le 4\\ 0, & else.\end{cases}$$

7、(16 分) 设 (X,Y) 服从 $G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 上的均匀分布，求：

(1) (X,Y) 的概率密度函数；(2) X 和 Y 的边缘密度函数。

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1.\\ 0, & else.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2\\ 0, & else.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1\\ 0, & else.\end{cases}$$