一　$(A \vee B) \wedge \neg A = B$

前提 $\neg p \vee (\neg q \vee r)$，$q \to (r \to s)$，$p$，$q$　得 s

① q　附加前提引入

② $\neg p \vee (\neg q \vee r)$　前提引入

③ $q \to (r \to s)$　前提引入

④ p　前提引入

⑤ $\neg q \vee r$　②④析取三段

⑥ r　①⑤析取三段

⑦ $\neg q \vee (\neg r \vee s)$　③蕴含等价

⑧ $\neg r \vee s$　①⑦

⑨ s　⑥⑧

二. 前提 $p \to (q \to s)$，q，$p \vee \neg r$，r　得出 s

① r　附加前提　$A \vee (B \wedge C)$

② q　前提引入　$= (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

③ $p \vee \neg r$　前提引入　$A \wedge (B \vee C)$

④ $p \to (q \to s)$　前提引入　$= (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

⑤ $(p \vee \neg r) \wedge r$　①③合取

$(p \wedge r) \vee (\neg r \wedge r)$

$p \wedge r$

⑥ p ⑤化简

⑦ r ⑤化简

⑧ $q \to s$ ④⑥假言

⑨ $\neg q \vee s$ ⑧蕴含等值

⑩ $(\neg q \vee s) \wedge q$ ②⑨析取三段论

$(\neg q \wedge q) \vee (s \wedge q)$)

$0 \vee (s \wedge q)$

$s \wedge q$

⑪ $s.$ ⑩化简

三 $p \to \neg q$ $\neg r \vee q$ $r \wedge \neg s$; p

① $p \to \neg q$ x (前提引入)

② $\neg r \vee q$ x (前提引入)

③ $r \wedge \neg s$ (前提引入) $(A \vee B) \wedge (\neg B) \Rightarrow A$.

④ p x (否定引入)

⑤ $\neg p \vee \neg q$ x ①蕴含

⑥ $\neg q$ ④⑤析取三段论.

⑦ $\neg r$. ②⑥析取三段论.

⑧ $0 \wedge \neg s = 0$. ③⑦合取.

故为假命题

Ⅲ $p \to (q \to r)$, $r \to (q \to s)$ p | $q \to s$.

① $p \to (q \to r)$ x 前提引入

② $r \to (q \to s)$ 前提引入

③ p x 附加前提引入.

④ $q \to r$. ①③假言推理.

⑤ $\neg r \vee \neg q \vee s$ v ②蕴含等值

⑥ $\neg q \vee r$. ④蕴

⑦ $\neg q \vee r \vee s$. v ⑥扩. .

$(\neg q \vee s) \wedge (\neg r \vee r)$ ⑤⑦合

$\neg q \vee s$

⑧ $q \to s$. ⑦蕴

五

p: A到过受害者房间

q: 11点前离开.

s: A犯罪

t: A被人看见

前提 $(p \wedge \neg q) \to s$, p, $q \to t$, $\neg t$ ⊢ s.

① $(p \wedge \neg q) \to s$ 前提引入

② p 前提引入

③ $q \to t$ 前提引入

④ $\neg t$. 前提引入

⑤ $\neg q$ ③④拒取

⑥ $p \wedge \neg q$. ②⑤合取

⑦ s. ①⑥假言推理.

六

p: 今天是星期六

q: 去颐和园

r: 去圆明园

t 颐和园人多

前提 $p \to (q \vee r)$, $t \to \neg q$, $(p \wedge t)$ ⊢ r.

① $p \to (q \vee r)$ 前提引入.

② $t \to \neg q$ 前提引入

③ $p \wedge t$ × 前提引入.

④ p ③化简

⑤ t × ③化简

⑥ $\neg q$ ②⑤假言推理.

⑦ $q \vee r$. ①④假言推理.

⑧ $\neg q \wedge (q \vee r)$ ⑥⑦合取.

$(\neg q \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

$\neg q \wedge r$.

⑨ r ⑧化简

七/ p: A盗窃钻石项链、

$\neg p$: B盗窃钻石项链、

q: 发生在营业时间

r: A提供了正确证

s: 货柜上了锁.

前提 ① $p \vee \neg p$ ② $\neg p \to \neg q$ ③ $r \to \neg s$

④ $\neg r \to q$ ⑤ s

① $\neg p \to \neg q$ × 前提引入

② $r \to \neg s$ ×. 前提引入

③ $\neg r \to q$ × 前提引入

④ s × 前提引入

⑤ $p \vee \neg q$ ①蕴含.

⑥ $\neg r \vee \neg s$ x ②蕴含

⑦ $r \vee q$. ③蕴含

⑧ $\neg r$ ④⑥析取三段论

⑨ q ⑦⑧析取三段论.

⑩ p. ⑤⑨析取三段论

故A正确

八

p: A努力工作.

q: B感到愉快

r: C感到愉快

s: D感到愉快

前提 $p \to (q \vee r)$, $q \to \neg p$

$s \to \neg r$. 结. $p \to \neg s$.

① $p \to (q \vee r)$ x 前提引入.

② $q \to \neg p$ x. 前提引入

③ $s \to \neg r$ 前提引入

④ p x 附加前提引入

⑤ $\neg q \vee \neg p$ x ②蕴含.

⑥ $\neg q$. ④⑤析取三段论.

⑦ $\neg q \vee q \vee r$ ①蕴含

r.

⑧ $\neg s \vee \neg r$ ③蕴含

⑨ $\neg s$. ⑦⑧析取三段

九. x是个体域

设. $R(x)$: x可以阅读

$L(x)$: x可识字

$I(x)$: x是有智力的

$D(x)$: x是海豚.

$\forall x(R(x) \to L(x))$

$\forall x(D(x) \to \neg L(x))$.

$\exists x(D(x) \wedge I(x))$.

求证 $\exists x(I(x) \wedge \neg R(x))$.

① $\exists x(D(x) \wedge I(x))$ 前提引入

② $\forall x(R(x) \to L(x))$ 前提引入

③ $\forall x(D(x) \to \neg L(x))$ 前提引入

④ $D(c) \wedge I(c)$ ① $\exists -$

⑤ $R(c) \to L(c)$ x ② $\forall -$

⑥ $D(c) \rightarrow \neg L(c)$ ③∀-

⑦ $\neg R(c) \vee L(c)$ ⑤蕴含

⑧ $\neg D(c) \vee \neg L(c)$ ⑥蕴含

⑨ $D(c)$ ④化简

⑩ $I(c)$ ④化简

⑪ $\neg L(c)$ ⑧⑨析取三段论

⑫ $\neg R(c)$ ⑦⑪析取三段论

⑬ $I(c) \wedge \neg R(c)$ ⑩⑫合取

⑭ $\exists x(I(x) \wedge \neg R(x))$ ⑬∃+

十

$F(x)$: 喜欢步行

$G(x)$: 喜欢坐汽车

$h(x)$: 骑自行车

前提: $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$,

$\forall x(G(x) \vee h(x))$

$\exists x(\neg h(x))$

结论: $\exists x \neg F(x)$

① $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$ 前提引入

② $\forall x(G(x) \vee h(x))$ 前提引入

③ $\exists x \neg h(x)$ 前提引入

④ $\neg h(c)$ ③ $\exists -$

⑤ $F(c) \to \neg G(c)$ x ① $\forall -$

⑥ $G(c) \vee h(c)$. ② $\forall -$

⑦ $\neg F(c) \vee \neg G(c)$ ⑤蕴含等值

⑧ $G(c)$ ④⑥析取三段论

⑨ $\neg F(c)$ ⑦⑧析取三段论

⑩ $\exists x \neg F(x)$. ⑨ $\exists +$.

十一

(1). x是数字

$F(x)$: x是有理数

$G(x)$: x是实数.

$h(x)$: x是整数.

前提 $\forall x(F(x) \to G(x))$, $\exists x(F(x) \wedge h(x))$.

结论 $\exists x(G(x) \wedge h(x))$

① $\forall x(F(x) \to G(x))$ 前提引入

② $\exists x(F(x) \wedge h(x))$ 前提引入

③ $F(c) \wedge h(c)$ $\exists -$

④ $F(c) \to G(c)$ x. $\forall -$

⑤ $\neg F(c) \vee G(c)$ ④蕴含等值式

⑥ $F(c)$ ③化简

⑦ $G(c)$ ⑤⑥析取三段论.

⑧ $H(c)$ ③代词

⑨ $G(c)\wedge H(c)$ ⑦⑧合取

⑩ $\exists x(G(x)\wedge H(x))$ ⑨ $\exists+$

十二

$P(x)$：x是15倍数

$Q(x)$：x是3倍数

$R(x)$：x是5倍数

前提 $\forall x(P(x)\to Q(x))$，$\forall x(P(x)\to R(x))$

$\exists x P(x)$.

结论 $\exists x(R(x)\wedge Q(x))$

① $\forall x(P(x)\to Q(x))$ 前提引入

② $\forall x(P(x)\to R(x))$ 前提引入

③ $\exists x P(x)$ x 前提引入

④ $P(c)$ ③ $\exists-$

⑤ $P(c)\to Q(c)$ ① $\forall-$

⑥ $P(c)\to R(c)$ ② $\forall-$

⑦ $Q(c)$ ④假言推理

⑧ $R(c)$ ⑤假言推理

⑨ $R(c)\wedge Q(c)$ ⑦⑧合取

⑩ $\exists x(R(x)\wedge Q(x))$ ⑨ $\exists+$

十三

前提

$\forall x(\neg F(x)\to\neg G(x))$

$\exists x(G(x)\land H(x))$

结论 $\exists x(H(x)\land F(x))$

① $\forall x(\neg F(x)\to\neg G(x))$ 前提引入

② $\exists x(G(x)\land H(x))$ 前提引入

③ $G(c)\land H(c)$ ②∃−

④ $\neg F(c)\to\neg G(c)$ ①∀−

⑤ $F(c)\lor\neg G(c)$ ④蕴含等值式

⑥ $G(c)$ ③化简

⑦ $H(c)$ ③化简

⑧ $F(c)$ ⑤⑥析取三段论

⑨ $H(c)\land F(c)$ ⑦⑧合取

⑩ $\exists x(H(x)\land F(x))$ ⑨∃+

十四.

$\forall x(F(x)\to(H(x)\land G(x)))$

$\exists x(F(x)\land R(x))$.

结论: $\exists x(F(x)\land R(x)\land G(x))$.

① $\forall x(F(x)\to(H(x)\land G(x)))$ 前提引入

② $\exists x(F(x)\land R(x))$ 前提引入

③ $F(c) \land R(c)$ ② ∃−

④ $F(c) \rightarrow (R(c) \land G(c))$ ① ∀−

⑤ $F(c)$ ③化简

⑥ $R(c) \land G(c)$ ④⑤假言推理

⑦ $F(c) \land R(c) \land G(c)$ ③⑥合取

⑧ $\exists x(F(x) \land R(x) \land G(x))$ ⑦ ∃+

十六

$\forall <a,b> \in N \times N$

$b=b \Leftrightarrow <a,b>R<a,b>$. 故自反.

$\forall <a,b>, <c,d> \in N \times N$

$<a,b>R<c,d> \Leftrightarrow b=d \Rightarrow d=b \Leftrightarrow <c,d>R<a,b>$

故具有对称性

$\forall <a,b>, <c,d>, <e,f> \in N \times N$

$<a,b>R<c,d> \Leftrightarrow b=d$

$<c,d>R<e,f> \Leftrightarrow d=f$

$d=d \quad b=f$

规范

$<a,b>R<c,d> \land <c,d>R<e,f>$

$\Leftrightarrow b=d \land d=f$

$\Rightarrow b=f \Leftrightarrow <a,b>R<e,f>$. 传递.

十五

$\forall \langle a,b\rangle \in N\times N$

$a=a \Leftrightarrow \langle a,b\rangle R\langle a,b\rangle$ 自反.

$\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in N\times N$

$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle \Leftrightarrow a=c \Rightarrow c=a \Leftrightarrow \langle c,d\rangle R\langle a,b\rangle$

$\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle e,f\rangle$.

$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle \wedge \langle c,d\rangle R\langle e,f\rangle$

$\Leftrightarrow \quad a=c \wedge c=e$.

$\Rightarrow \quad a=e \Leftrightarrow \langle a,b\rangle R\langle e,f\rangle$. 传递.

十七 $\forall \langle a,b\rangle \in A\times A$ $\qquad a-b=c-d$

$a-b=a-b \Leftrightarrow \langle a,b\rangle R\langle a,b\rangle$ 自反.

$\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in A\times A$

$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle \Leftrightarrow a-b=c-d \Rightarrow c-d=a-b$

$\Leftrightarrow \langle c,d\rangle R\langle a,b\rangle$ 对称

$\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle e,f\rangle \in A\times A$

$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle \wedge \langle c,d\rangle R\langle e,f\rangle$

$\Leftrightarrow \quad a-b=c-d \wedge c-d \wedge e-f$

$\Rightarrow \quad a-b=e-f$

$\Leftrightarrow \quad \langle a,b\rangle R\langle e,f\rangle$

十八 $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

$A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$.

$\Rightarrow (A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$.

$\Rightarrow \emptyset \oplus B = \emptyset \oplus C$

$\Rightarrow B \oplus \emptyset = C \oplus \emptyset$

$\Rightarrow B = C$.

十九 ① $\forall (x, y) \in A \times (B \cap C)$

则 $x \in A$, $y \in B \cap C$

$\therefore x \in A$. $y \in B$ 且 $y \in C$

由 $x \in A$ $y \in B$.

$(x, y) \in (A \times B)$.

因 $x \in A$ $y \in C$

$(x, y) \in (A \times C)$.

$\therefore (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

$\therefore A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$

②. $\forall (x, y) \in ((A \times B) \cap (A \times C))$

$(x, y) \in A \times B$

$(x, y) \in A \times C$

即 $x \in A$, $y \in B$ 且 $y \in C$.

即 $x\in A$ $y\in B\cap C$

$(x,y)\subseteq A\times(B\cap C)$

故 $(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C)$

故 $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

二十(1) $ab=e$, $bc=e$.

设 $a,b,c\in A$. b是a右逆元 c是b右逆元.

$$e=b*c=b*(a*b)*c$$
$$=(b*a)*(b*c)$$
$$=(b*a)*e.$$
$$=b*a.$$

(2).

设a有两个逆元 b,c.

$$b=b*e=b*(a*c)=(b*a)*c=e*c=c.$$

二十一

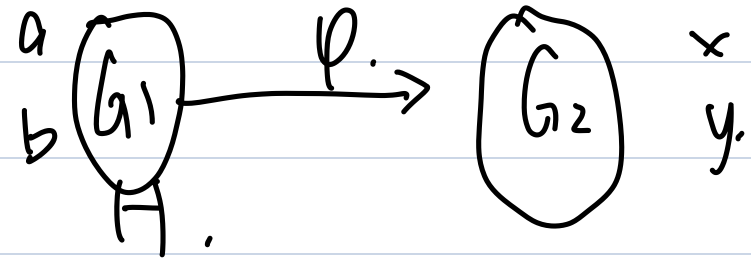
(1) H是G_1子群 ∵H非空. ∴$\varphi(H)$非空.

$\forall\, a,b\in H$ 设 $\varphi(a)=x$ $\varphi(b)=y$.

∵H是G_1子群 $ab^{-1}\in H$.

$$xy^{-1}=\varphi(a)\varphi(b)^{-1}=\varphi(ab^{-1})\in\varphi(H)$$

∴$f(H)$是G_2子群.



二十二、

H是群G子群. $a \in G$. 证 aHa^{-1} 是G子群.

设 $aHa^{-1} = \{aha^{-1} ; h \in H\}$

$e \in G$. $e \in H$. H是非空.

$\forall\ ah_1a^{-1}.\ ah_2a^{-1} \in aHa^{-1}$

$$ah_1a^{-1} \cdot (ah_2a^{-1})^{-1} = ah_1a^{-1} \cdot a \cdot h_2^{-1} \cdot a^{-1}$$

$$= ah_1h_2^{-1} a^{-1} \in aHa^{-1}.$$

二十三 $a \in G$.

$H = \{x \in G \mid ax = xa\}$ 证明 H是G子群

$\forall\ x, y \in H$

$ax = xa$ 右同乘 a^{-1}

$axa^{-1} = x$ $H = \{x \in G \mid x = axa^{-1}\}$.

$aya^{-1} = y$

$(xy^{-1})a = axa^{-1} \cdot ay^{-1}a \cdot a$

$= axy^{-1}$.

$\therefore xy^{-1} \in H$. 可得.

二十四

如果其为素数阶群

仅被1与 p 整除.

由拉格朗日定理

元素阶数只能为1或 p.

只有 1是1阶元素

其余全是生成元

二十五 6阶群必有3阶元

由拉格朗日定理可知.

G中元素, 1阶 2阶. 3阶. 6阶. 元

若 G中含6阶元 则 a^2 为3阶元.

若不含6阶元 只含1. 2阶元.

$\forall a \in G$. $a^2 = e$.

取G中两个不同的2阶元 a, b 令 $H = \{e, a, b, ab\}$.

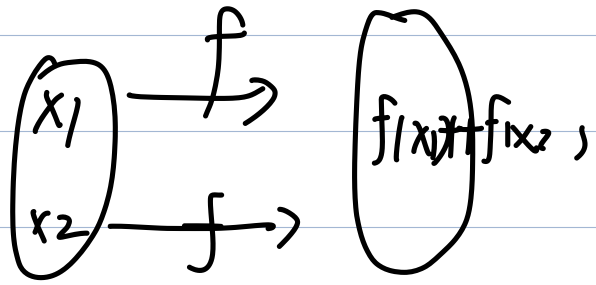
H是G子群 $|H| = 4$ $|G|$ 矛盾.

故必含3阶元

二十六.

二十七

二十八



设 $x_1\ x_2$,

$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1x_2)$

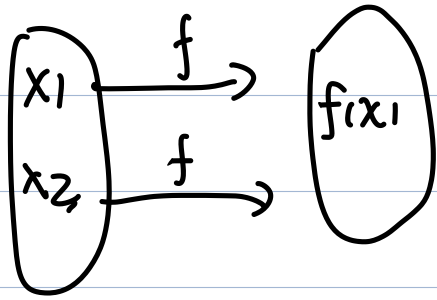
$\ln x_1+\ln x_2 = \ln x_1+\ln x_2$

同态 单射 满射.

单射 $\forall x,y\in G \quad f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$.

满射 $\forall y\in G \quad \exists x\in G \quad f(x)=y$.

二十九



$$f(x_1)\cdot f(x_2) = f(x_1+x_2).$$

$$5^{x_1}\cdot 5^{x_2} = 5^{x_1+x_2}$$ 同态

单射 $\forall x, y \in G.$ $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y.$

满射 $\forall y \in G$ $\exists x \in G$ $f(x)=y.$

三十

设森林里每个树为 $S_1 \dots S_2 \dots S_k$，

阶数为 n_i ($i=1 \dots k$)

边数为 m_i ($i=1,2,\dots,k$)。

S_1: $n_1 = m_1 + 1$

S_2: $n_2 = m_2 + 1$

$\vdots$

S_k: $n_k = m_i + 1$。

$$\sum_{k=1}^{k} n_i = \sum_{k=1}^{k} m_i + m。$$

$$n = m + k$$

$$m = n - k。$$

三十一.

假设两个奇度顶点不连通，

导致各自所对应的分支度数为奇数个

与握手定理矛盾

故必连通。

三十二

边数 m。

树叶 k。

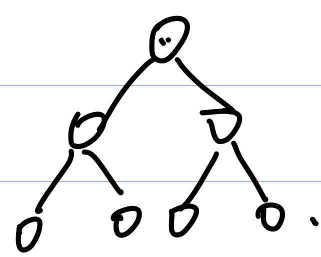
阶数 $m+1$。

由握手

出度为2

入度为1

度数为3。



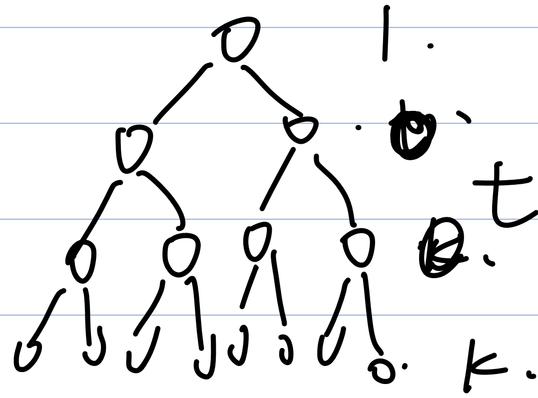
$2m = 2 + k + 3(m-k)$

$2m = 2 + k + 3m - 3k$

$-m = 2 - 2k$

$m = 2(k-1)$.

62



三十三 共n个结点.

树叶 k 个

3度结点 t 个

推导:

$$\begin{cases} n = t + k + 1 \\ 2(n-1) = 2 + 3t + k \\ 2n - 2 = 2 + 3(n-k-1) + k \end{cases}$$

$t = n - k - 1$

$2n - 2 = 2 + 3n - 3k - 3 + k$

$-n = 4 - 3 - 2k$

$2k = n + 1$

$k = \frac{n+1}{2}$

主析取 自须向合取式 投小项

解析

成真赋值 m.

1. $(p\to q)\wedge(q\to r)$

$=(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)$ 主合取范式

$=(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$.

要求主合取范式，要求其真值为0 求成假赋值.

100，101，010，110.

即. M_4，M_5，M_2，M_6.

主合取范式：$M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$

主析取范式：$m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_7$.

2. $(p\to q)\leftrightarrow r$.

$=(\neg p\vee q)\leftrightarrow r$.

蕴含等值

等价等值

$=((\neg p\vee q)\to r)\wedge(r\to(\neg p\vee q))$

$=(\neg(\neg p\vee q)\vee r)\wedge(\neg r\vee(\neg p\vee q))$

$=((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg r\vee\neg p\vee q)$.

$=(p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee\neg p\vee q)$.

$\neg p\vee q\vee\neg r)$

$=(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\cancel{p\vee\neg q\vee r})\wedge(\cancel{\neg p\vee\neg q\vee r})\wedge(\cancel{\neg r\vee\neg p\vee q})$

$=(p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

主合取 成假. 000，110，101.

$M_0\wedge M_6\wedge M_5$.

主析取 $m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$.

3. $\neg(p \to \neg q) \wedge q \vee r$

$= \neg(\neg p \vee \neg q) \wedge q \vee r$

$= (p \wedge q) \wedge q \vee r$

$= (p \wedge q) \vee r$.

$= (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$= (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge \cancel{(p \vee q \vee r)} \wedge (\neg p \vee q \vee r)$.

$= (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

为主合取范式 为成假赋值 000, 010, 100.

$M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$.

$m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$.

4 A上 p

B上 q

C上 s.

前提 $p \to s$, $q \to \neg s$. $\neg s \to (p \vee q)$.

$= (p \to s) \wedge (q \to \neg s) \wedge (\neg s \to (p \vee q))$

$= (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (s \vee p \vee q)$.

$= (\neg p \vee q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee s)$.

主合取 成假. 100 110 011 111 000.

$M_0 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_6 \wedge M_7$.

成真主析取 $m_1 \vee m_2 \vee m_5$.

即 001，010，101.

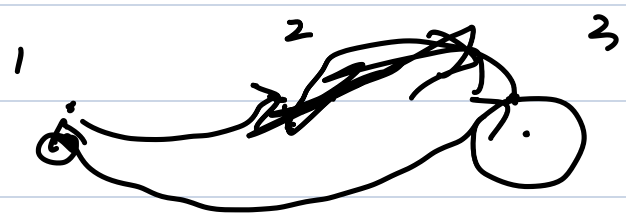
即 C上 AB不上

B上 AC不上

AC上 B不上.

5.

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

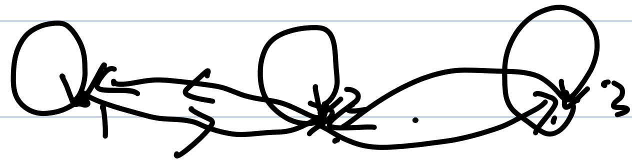


r(R) 自反 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

S(R) 对称 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

t(R) 可传递 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$s(r(R))$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

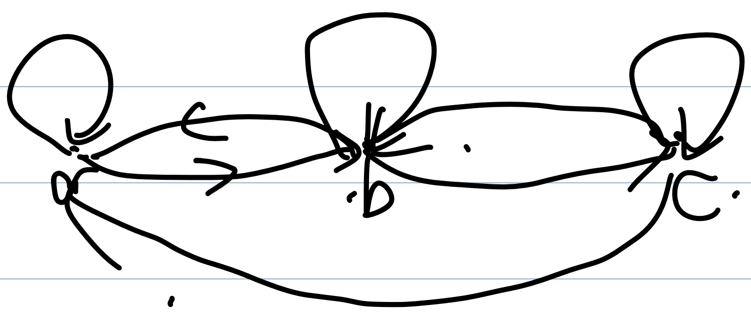


$t(s(r(R))) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$r(R)$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $s(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $t(R)$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

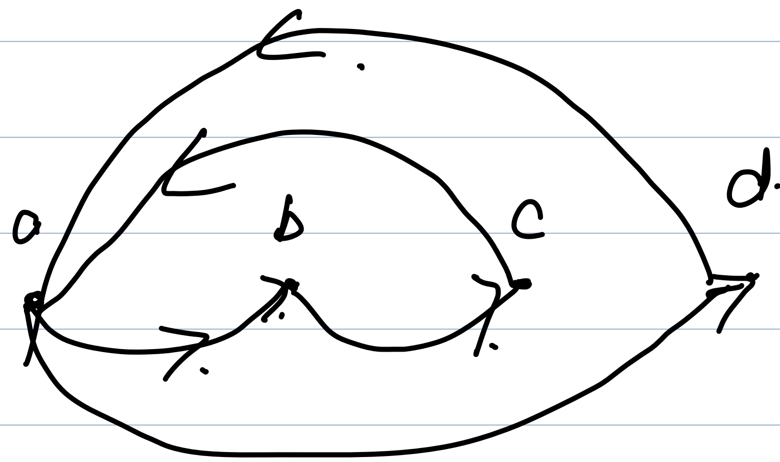
$tsR = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$



$$tsr(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7 $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

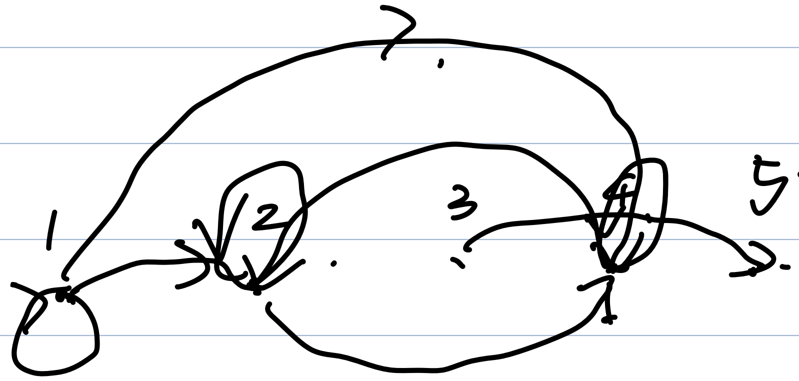
8 $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$t(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

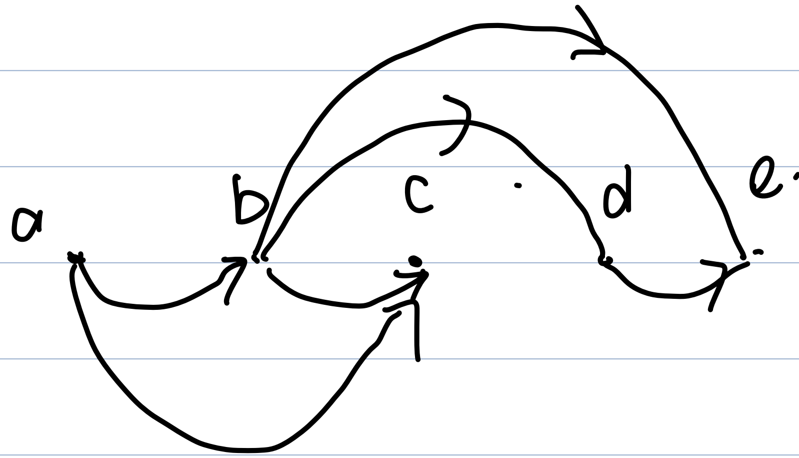
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.



$$t(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

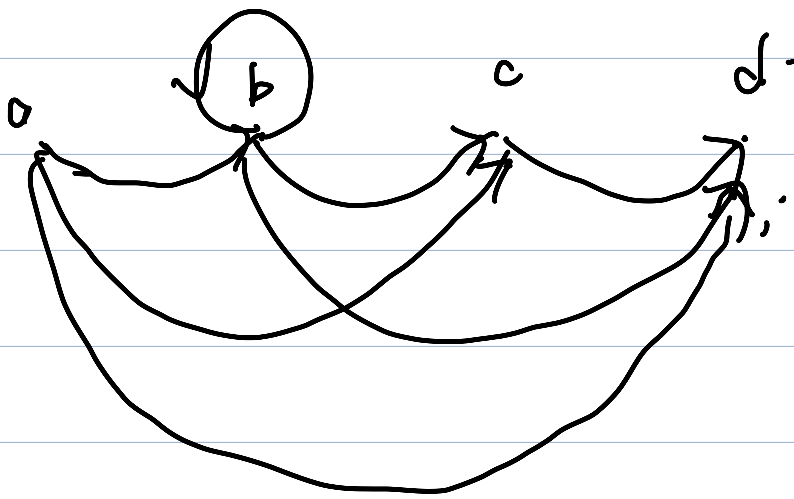
10. $\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$



$$t(R)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

11.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$t(R)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. 证明自反、对称、可传~~递~~性质..

$R=\{<<x_1,y_1>,<x_2,y_2>> \mid x_1-y_1=x_2-y_2\}$.

对 $\forall <x,y> \in X$. $<x,y>R<x,y> \Leftrightarrow x-y=x-y$ 自反.

对于 $\forall <x_1,y_1>\ <x_2,y_2> \in X$

$\langle x_1, y_1\rangle R \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2$

$\Rightarrow x_2 - y_2 = x_1 - y_1 \Leftrightarrow \langle x_2, y_2\rangle R \langle x_1, y_1\rangle$ 对称。

对于 $\forall \langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \langle x_3, y_3\rangle \in X$.

$\langle x_1, y_1\rangle R \langle x_2, y_2\rangle \wedge \langle x_2, y_2\rangle R \langle x_3, y_3\rangle$

$= x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \wedge x_2 - y_2 = x_3 - y_3$

$\Rightarrow x_1 - y_1 = x_3 - y_3$

$\Leftrightarrow \langle x_1, y_1\rangle R \langle x_3, y_3\rangle$ 可传递

商集：$\{\langle x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = -2\rangle, \langle x_1 - y_2 = x_2 - y_2 = -1\rangle\}$.

十三. $a-b=c-d$.

$2-5=-3$.

$= \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,5\rangle \langle 3,6\rangle \langle 4,7\rangle \langle 5,8\rangle \langle 6,9\rangle\}$.

十四.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

既不是自反也不是反自反。

不对称。

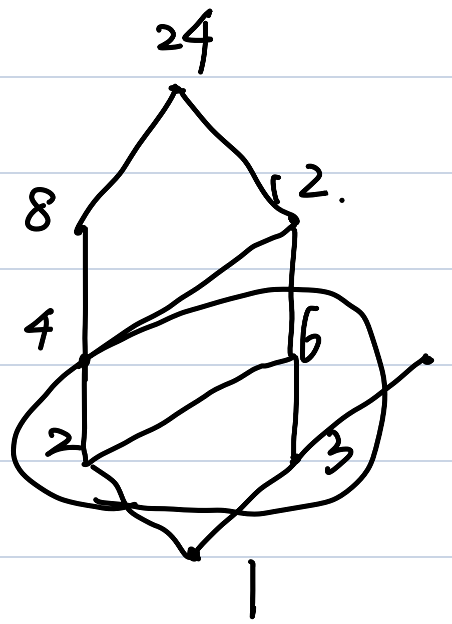
可传递.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

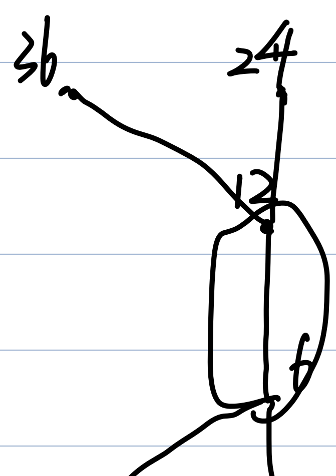
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

十五、



极小 2,3
极大 6
最小无
最大 6
上界 6,12,24
下界：1
最小上界：6
最大下界：1.

16.

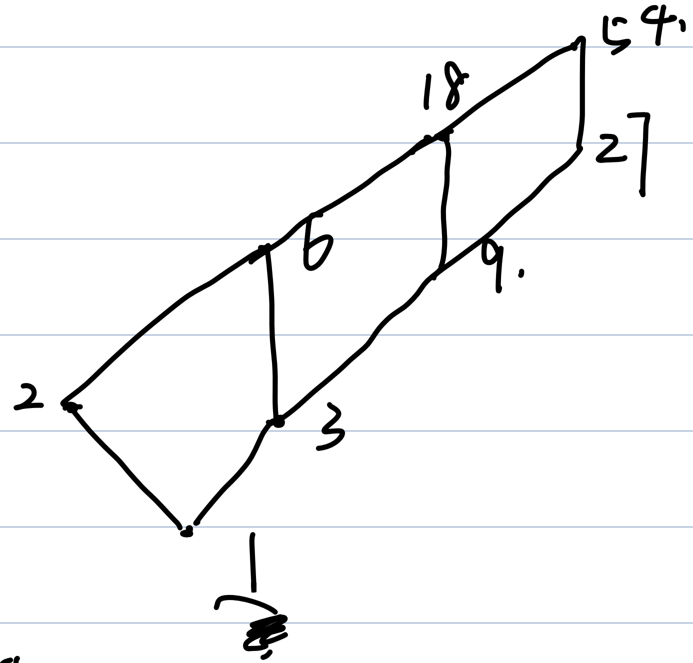


	最大	极大	下界	上确界
A	无.	24、36	无.	无
B	12.	12	6.	12.

2 3 C 6. 1,2 无. 6,12.

17.

$A=\{1,2,3,6,9,18,27,54\}$



最大 54

最小 1

极大 54

极小 1

18 $\forall x,y\in Z$ $x\circ y=x+y-1$

结合律 $\forall x,y,z\in Z$

$(x\circ y)\circ z=(x+y-1)\circ z$

$= x+y-1+z-1 = x+y+z-2.$

$x\circ(y\circ z) = x\circ(y+z-1)$

$= x+y+z-1-1 = x+y+z-2$

$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$ 故得证.

含单位元

$x \circ y = x = x+y-1$

$1 = y$ 可得 1 是此 ~~关于单~~ 单位元.

可逆 x, x^{-1}, y, z y 为 x 逆元

$x \circ y = x+y-1 = 1$ $y = 2-x = x^{-1}$

$x \circ y = x \circ x^{-1} = x \circ (2-x) = x+2-x-1 = 1$

即 $x^{-1} = 2-x$.

十九 $\forall x, y \in Q$. $x \circ y = x+y-c$. [可交换 可逆 含单位元]

$\forall x, y, z \in Q$.

$(x \circ y) \circ z = (x+y-c) \circ z = x+y+z-c-c$.

$x \circ (y \circ z) = x \circ (y+z-c) = x+y+z-c-c$ 可交换.

$x \circ y = x = x+y-c$ $y = c$ 单位元

x x^{-1} y 可逆

$x \circ y = 1 = x+y-c$.

$c+1-x = y$.

$x \circ x^{-1} = x \circ (c+1-x) = c+1-x+x-c$

$= 1$.

二十. $\langle Z_{24}, \oplus \rangle$ = 0-23. $\langle Z_n, \oplus \rangle$, $Z_n=\{0,\ldots,n-1\}$ $\oplus$为模n加法

1阶子群 $\cancel{\langle 24\rangle} = \langle 0 \rangle = \{0\}$.

2阶子群 $\langle 12 \rangle = \{0, 12\}$. 1/2 y : 0

3阶子群 $\langle 8 \rangle = \{0, 8, 16\}$.

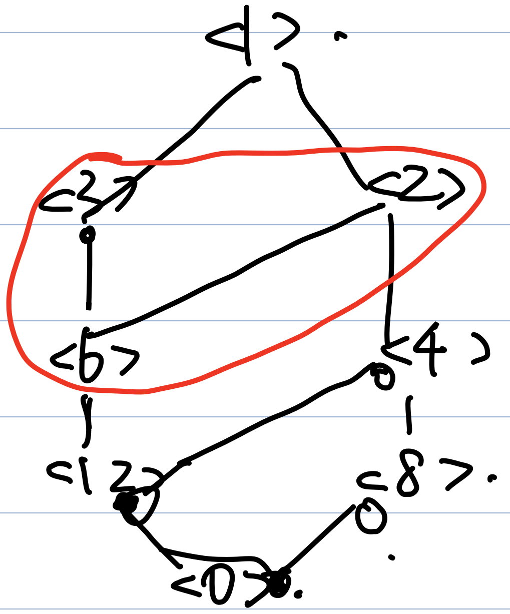
4阶子群 $\langle 6 \rangle = \{0, 6, 12, 18\}$.

6阶子群 $\langle 4 \rangle = \{0, 4, 8, 12, 16\}$.

8阶子群 $\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 12, 18, 15, 21\}$.

12阶子群 $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}$

24阶 $\langle 1 \rangle = Z_{24}$.



极大: <2>, <3>.

极小 <6>.

最大: <2>, <3>

最小: <6>.

上界: <1>

下界: <6>, <12>, <0>.

上确界 <1>

下确界 <6>.

二十一

1阶=<0> = {0}

2阶= <24> = {0,24}.

3阶=<16>={0,16}.

4阶=<12>={0,12,}.

6阶=<8>

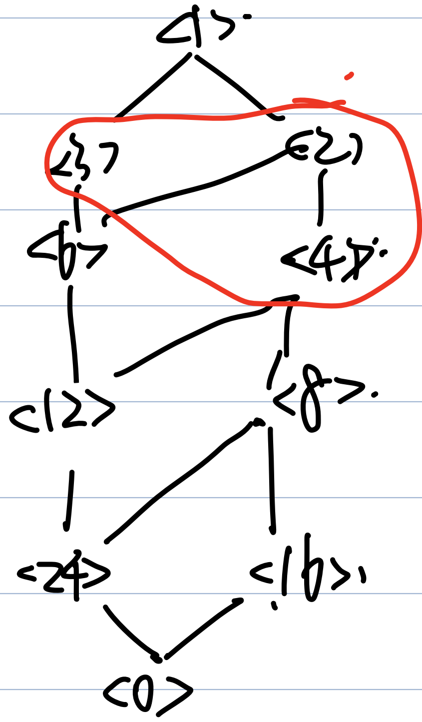
8阶=<6>

12阶=<4>

16阶=<3>.

24阶=<2>

48阶=<1>



极大：<2>,<3>

极小<4>

最大：无

最小<4>

上界：<1>

下界<4>,<8>,<12>,<24>,<16>,<0>

上确界：<1>

下确界：<4>.

③

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & & & & \\ v_2 & & \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right] & & \\ v_3 & & & & \\ v_4 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

简单

二十三

1阶 2阶

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3阶 四阶

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 0，0 2，2.

(2) $1+3+7+11=22$

二十四

②

$$\begin{array}{c|ccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ \hline V_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

简单.

1阶

2阶

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3阶

4阶

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 0, 2, 0, 0

(2) 0 0 4 0

(3). 36

(4). 12

(5). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

二十五.

①

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & & & & \\ v_2 & & & & \\ v_3 & & & & \\ v_4 & & & & \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

单向.

1阶 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2阶 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3阶 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

5条

0

26. 设有n条边. $n+1$个点、

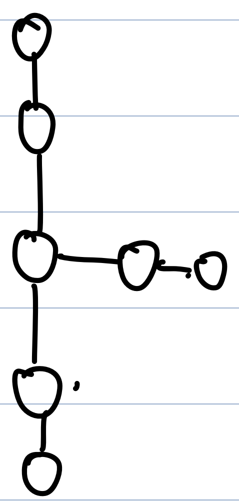
$$n\times 2 = (n+1-4)\times 1+2\times 3+3$$

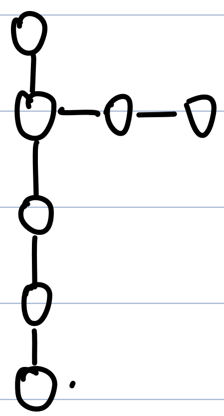
$$2n = n-3+9$$

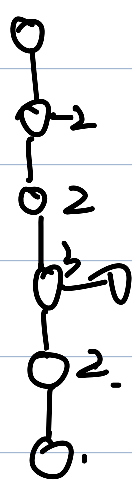
$$n=6.$$

7个点.

3个.







27.

28 共

a:2

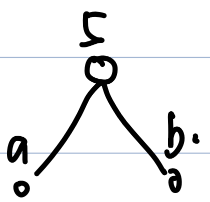
b:3

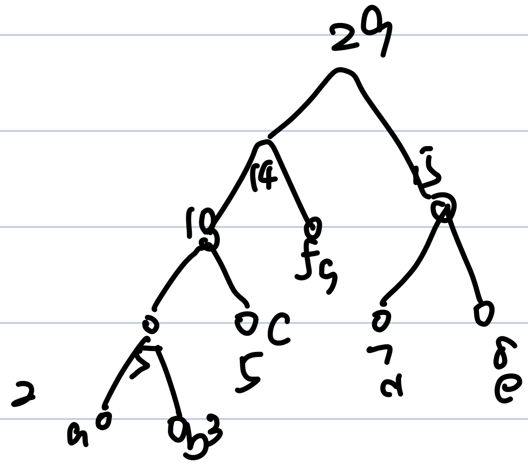
c:5

d:7

e:8

f:9





a: 0000,

$WPL = 2\times4 + 3\times4 + 5\times3 + 9\times2 + 7\times2 + 8\times2$

$= 8 + 12 + 15 + 18 + 14 + 16$

$= 20 + 25 + 8 + 30 = 83.$

a [0000] b[0001] c[001] f[01]

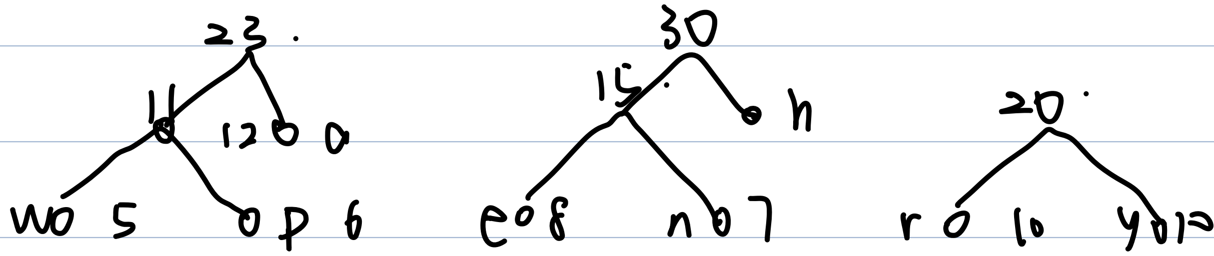
d [10] e[11].

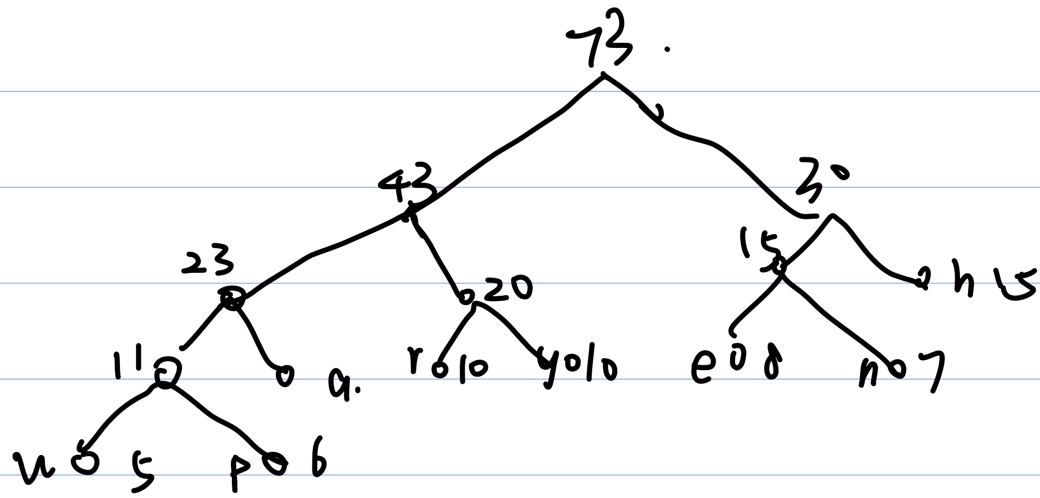
{0000, 0001, 001, 01, 10, 11}.

二十九

a: 12 h: 15 p: 6. w: 5

~~e:8~~ ~~n:7~~ ~~r:10 y:10.~~

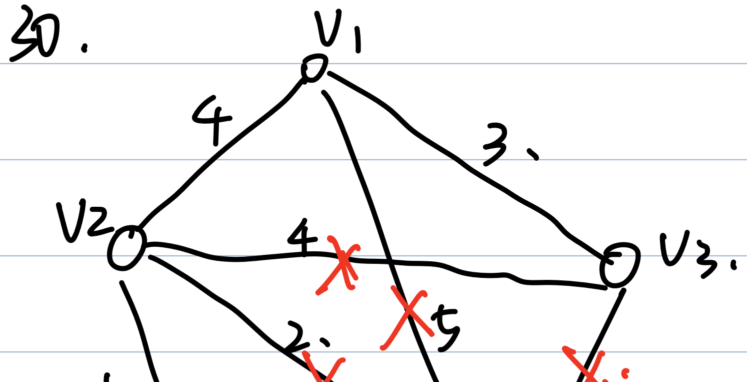


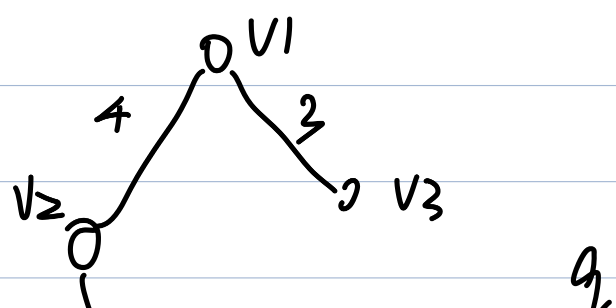


[0000, 0001, 001 010. 011 | 100, 101. 11].

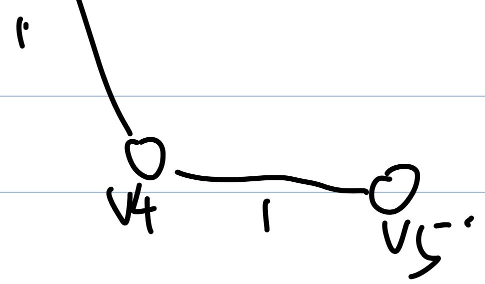
[11., 001, 0001, 0001, 010, 101, 100, 0000, 011 100 001010]

30.



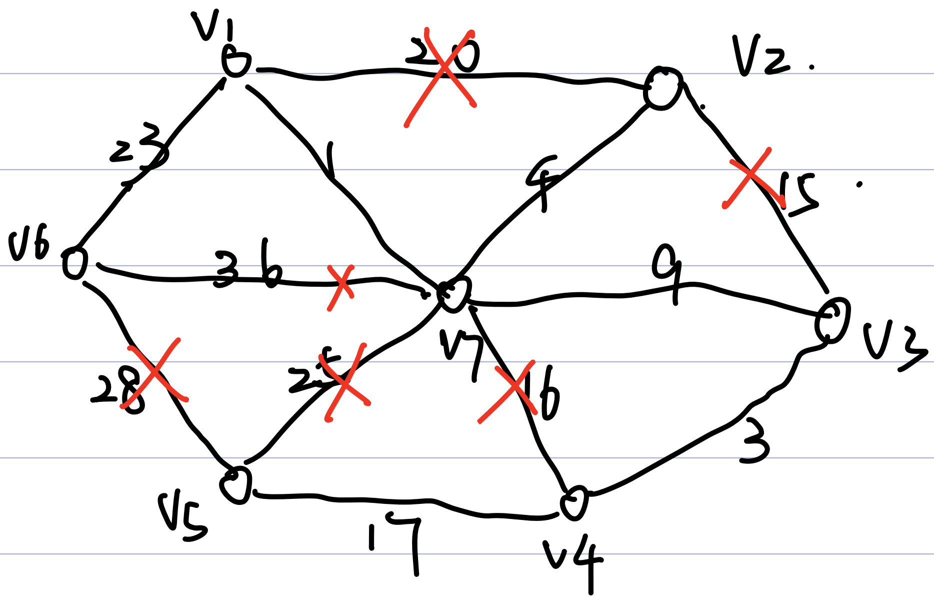


5
V4
V5
1

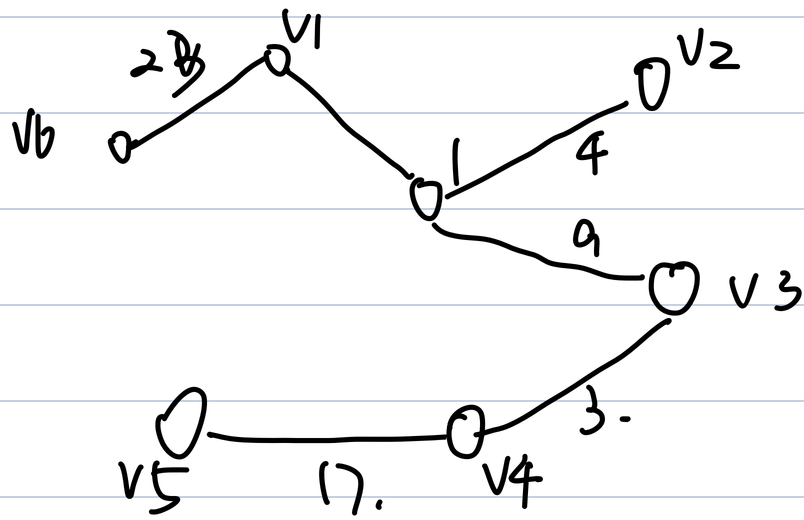


V4
1
V5

31



V1
20
V2
23
1
4
15
V6
36
9
V7
V3
28
25
16
3
V5
17
V4



V1
23
V2
V6
1
4
9
V3
3
V5
17
V4

$20+37=57$