命题部门：___理学院__ 试卷序号：____B___ 考试形式：__闭卷___ 学分：____4____#
考生姓名：__________ 考生班级：__________ 考生学号：__________ 书院：__________
#考试班级：___2020级金融1班、7班、金融工程1班、2班______________________________
#

南京审计大学
2020-2021学年第二学期《高等数学》期末试卷B

一、填空题（将正确答案填在横线上，本大题共 4 小题，每题 4 分，共 16 分）

1．已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________。

2．$\begin{cases} x=\cos t^2 \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du (t>0) \end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________________。

3．微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为____________。

4．$\int_1^e \dfrac{dx}{x(2+\ln^2 x)}=$__________________。

二、选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 4 小题，每题 4 分，共 16 分）

1．如果 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, x\le 0 \\ b(1-x^2), x>0 \end{cases}$ 处处可导，则（　　）。

(A) $a=b=1$；　(B) $a=0,b=1$；　(C) $a=1,b=0$；　(D) $a=-2,b=-1$。

2．函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且取得极大值，则 $f(x)$ 在 x_0 处必有（　　）。

(A) $f'(x_0)=0$；　(B) $f''(x_0)<0$

(C) $f'(x_0)=0$或不存在；　(D) $f'(x_0)=0$且$f''(x_0)<0$。

3．若 $\dfrac{\ln x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=$（　　）。

(A) $\dfrac{\ln x}{x}+C$；　(B) $\dfrac{1+\ln x}{x^2}+C$；　(C) $\dfrac{1}{x}+C$；　(D) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}+C$。

4．微分方程 $y'''=\sin x$ 的通解是(　　)。

(A) $y=\cos x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$；　(B) $y=\cos x+C_1$；

(C) $y=\sin x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$；　(D) $y=2\sin 2x$；

三、解答下列各题（本大题共 2 小题，共 14 分）

1．（本小题 7 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^t-1-t)^2 dt}{x\sin^4 x}$

2．（本小题 7 分）

设 $y(x)=(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x},(\frac{1}{2}<x<1)$，求 dy 。

四、解答下列各题（本大题共 4 小题，共 28 分）

1．（本小题 7 分）

$F(x)=\int_{-1}^{x} t(t-4)dt$，求 $F(x)$ 的极值及 $F(x)$ 在 $[-1,5]$ 上的最值。

2．（本小题 7 分）

求 $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

3．（本小题 7 分）

设 $f(t)=\int_1^{t^2} e^{-x^2}dx$，计算 $I=\int_0^1 tf(t)dt$ 。

7 分

4．（本小题 7 分）

求积分 $\int_{1/2}^{3/4}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ 。

五、解答下列各题（本大题共 3 小题，共 26 分）

1．（本小题 9 分）

求由曲线 $y=e^{2x}$， x 轴及该曲线过原点的切线所围成平面图形的面积。

2．（本小题 9 分）

求微分方程 $y''-4y'+4y=3e^{2x}+2x$ 的通解。

3．（**本小题 8 分**）设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$， $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$，证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}=\dfrac{1}{2n}f'(0)$。

答案：

一、填空题

1、 $a=\dfrac{3}{2}$ 　　2 、 $\dfrac{dy}{dx}=t$ 　　3 、 $(x-4)y^4=Cx$

4 $I=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、选择题

1、B　2、C　3、D　 4、A

三、计算题

1、解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(e^t-1-t)^2dt}{x\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(e^t-1-t)^2dt}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1-x)^2}{5x^4}$ 　　3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^x-1-x)(e^x-1)}{20x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^x-1-x)x}{20x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1-x)}{10x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{20x}=\dfrac{1}{20}$

2、解：取对数　 $\ln y=\tan\dfrac{\pi}{2}x\cdot\ln(2-x)$ 　　2 分

两边对 x 求导： $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\pi}{2}\sec^2\dfrac{\pi}{2}x\cdot\ln(2-x)+\dfrac{1}{x-2}\tan\dfrac{\pi}{2}x$ 　　5 分

$dy=y'dx=(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}[\dfrac{\pi}{2}\sec^2\dfrac{\pi}{2}x\cdot\ln(2-x)+\dfrac{1}{x-2}\tan\dfrac{\pi}{2}x]dx$

四、1、解： $F(x)=\int_{-1}^x t(t-4)dt=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+\dfrac{7}{3}$ 　　2 分

则 $F'(x)=x^2-4x$，令 $F'(x)=x^2-4x=0$，解得 $x=0,x=4$

$F''(x)=2x-4$， $F''(0)=-4<0$，所以 $x=0$时， $F(x)$ 的极大值是 $\dfrac{7}{3}$；