《概率论与数理统计》试卷

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1、已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6}$, 则 A,B,C 全不发生的概率为________.

2、设事件 A、B 互不相容，$P(A)=1/4, P(B)=1/2$, 则 $P(A+B)=$__________.

3、请写出事件 A、B、C 相互独立的定义：____.

4、设随机变量 $X\sim N(0,1)$ ，则 $E(Xe^{2X})=$_______.

5、设随机变量 X 服从参数为 5 的泊松分布，则 $EX^2=$_____.

6、设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布表为：

X \ Y	0	1	2
1	1/8	1/2	1/8
2	1/8	0	1/8

则 $P(X=2|Y=1)=$___________.

7、已知 $E(X)=3, E(X^2)=10$, 则 $E(3X-2)=$______, $D(3X+1)=$____________.

8、已知 $Y=-3X+4$, 则随机变量 X 与 Y 的相关系数为____________.

9、在用置信区间对未知参数进行区间估计时，可靠度和精确度是一对矛盾，但可以通过________________________， 同时提高可靠度和精确度。

10、设显著性水平为 α，则假设检验中犯第一类错误的概率是___________.

二、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1.将三个球随机放入四个盒中,则第一个盒子内恰有3个球的概率为(　　).

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{4^3}$　　C. $\dfrac{3^3}{4^3}$　　D. $1-\dfrac{1}{4^3}$

2.若 A,B 是任意两个事件，则(　　).

A. $P(AB)\le P(A)P(B)$　　B. $P(AB)\ge P(A)P(B)$　　C. $P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　D. $P(AB)\ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

3.设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, 则 $Y=2X$ 的密度函数为(　　).

A. $\dfrac{1}{\pi(1+4y^2)}$　　B. $\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$　　C. $\dfrac{1}{\pi}\arctan y$　　D. $\dfrac{2}{\pi(4+y^2)}$

4.设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $E(X^2-DX)=$(　　　).

A. DX　　B. λ^{-1}　　C. λ^{-2}　　D. λ^2

5.设 (X,Y) 服从二维正态分布,则 X,Y 相互独立的充要条件是(　　　).

A. $\rho=0$　　B. $\rho=1$　　C. $\rho=-1$　　D. $|\rho|=1$

6.设随机变量 X,Y 相互独立，都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，则 $P(X^2+Y^2\le 1)=$(　　).

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{8}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

7.设 X_1,X_2,X_3 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本,则 μ 的无偏估计量是(　　　).

A. $X_1-X_2-X_3$　　B. $X_1+X_2+X_3$　　C. $X_1-X_2+X_3$　　D. X_1-X_2

8.若X服从正态分布$N(0,\sigma^2)$,则$Y=\dfrac{X^2}{\sigma^2}$服从(　　　　).

A. t分布　　　B.F分布　　　C.$\chi^2(1)$分布　　　D.标准正态分布

9.若X服从$t(n)$分布$(n>1)$,则$Y=X^2$服从(　　　　).

A. $F(1,n)$分布　　B.$F(n,1)$分布　　C.$\chi^2(n)$分布　　D.$\chi^2(n-1)$分布

10.设总体$X\sim b(m,\theta)$, $X_1,\cdots,X_n$为来自总体的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值，则$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$(　　　　).

A.$(m-1)n\theta(1-\theta)$　　B.$m(n-1)\theta(1-\theta)$　　C.$(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$　　D.$mn\theta(1-\theta)$

三、（8 分）根据以往资料，出口服装的索赔事件中 50%是质量问题，30%是数量短缺问题，20%是包装问题，又知在质量问题中，经过协商解决不诉诸法律的占 40%，数量问题中，经协商解决的占 60%，包装问题中，经协商解决的占 75%，如果在一起索赔事件中，通过协商解决了，请问这一案件属于质量问题的概率是多少？

四、（12 分）已知随机向量 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}3x^2y & -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$,

(1) 判定X与Y是否独立?　(2) $P\{X+Y>1\}$;　(3)$COV(X,Y)$。

五、（8 分）一部件包括 50 部分，每部分的长度相互独立且服从同一分布，其数学期望为 2mm，方差为 0.005mm,规定总长度为(100 ± 0.2) mm 时产品合格，用中心极限定理求产品合格的概率。

六、（8 分）设总体 X 的密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{2}e^{-\frac{\theta}{2}x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$　其中$\theta>0$，今从总体 X 中抽取样本 $X_1,\ldots,X_n$，试用最大似然估计法估计未知参数θ。

七、（8 分）假定初生婴儿的体重 X 服从正态分布，随机抽取 5 名婴儿，测得其体重为：3100,2880,3350,3150,3320（克），试在置信度 0.95 下求总体 X 的期望值μ的置信区间。

八、（8 分）某种导线，要求其电阻的标准差不得超过0.005欧姆，今在生产的一批导线中抽取9根，测得样本标准差为$s=0.007$欧姆，设总体服从正态分布，问：在显著性水平$\alpha=0.05$下能否认为该批导线电阻标准差显著地偏大？（$\chi^2_{0.05}(8)=15.507,\chi^2_{0.05}(9)=16.919$）

九、证明题（8 分）

设(X,Y)是连续型随机向量，分布函数和密度函数为$F(x,y)$和$f(x,y)$，若对于给定的y, $f_Y(y)>0$，

试证明在$Y=y$ 条件下X 的条件分布函数$F_{X|Y}(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$。

附表: $\Phi_0(0.4)=0.6554$,　$\Phi_0(1.6)=0.7257$,　$t_{0.025}(5)=2.571$,　$t_{0.025}(4)=2.776$,　$t_{0.05}(5)=2.015$,　$t_{0.05}(4)=2.132$,　$F_{0.05}(15,15)=2.40$,　$F_{0.025}(15,15)=2.86$,　$F_{0.05}(1,3)=10.13$,　$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$,　$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$,　$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$,　$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$