命题部门：统计与数学学院 试卷序号：A 考试形式：闭卷 学 分：5 #

考生校区：浦口 考生班级：______ 考生学号：______ 考生姓名：______#

考试班 2020 级各专业 #

2020-2021 学年第一学期《高等数学一》期中试卷 答案

一、填空题（本题共 5小题，每题 5分，满分25分）

1．函数 $f(x)=\ln(3+x)+\arccos\dfrac{x+2}{4}$ 的定义域是____$(-3,2]$____。

2．$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n}==$___1____。

3．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\cos x}{3x+\cos x}=$___$\dfrac{2}{3}$_____。

4．已知 $\dfrac{d}{dx}[f(x^3)]=\dfrac{3}{x}$，则 $f'(x)=$___$\dfrac{1}{x}$_____。

5．已知 $f'(a)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{3h}=$___$\dfrac{4}{3}$_____。

二、计算题（本题共 4 小题，每题 10 分，满分 40 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(e^{\tan x}-1)}$。

解：$\because x\to 0$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$e^{\tan x}-1\sim\tan x\sim x$，$\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\frac{1}{3}x^2$，-----6 分

$\therefore$ 原式$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x^3}=\frac{3}{2}$.---------4 分

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-1}{x})^{2x+1}$。

解：原式 $=\lim_{x\to\infty}[(1-\frac{1}{x})^{-x}]^{-2}(1-\frac{1}{x})$---------6 分

$=\lim_{x\to\infty}[(1-\frac{1}{x})^{-x}]^{-2}\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})=e^{-2}$.---------4 分

3. 求曲线 $y=\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ 通过点 $(1,\dfrac{\pi}{8})$ 的切线方程。

解：该切线斜率为$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\left.\frac{1-2x\arctan x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=1}=\frac{2-\pi}{8}$,--------6 分

故所求切线方程为：$y-\frac{\pi}{8}=\frac{2-\pi}{8}(x-1)$， 即 $8y+(\pi-2)x+2(1-\pi)=0$.--4 分

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x+1}}-1}$，试确定 $f(x)$ 的间断点及其类型。

解：易见间断为 $x=-1$ 和$x=0$.---------4 分

$\because \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x+1}}-1}=-1$, $\because \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x+1}}-1}=0$,

$\therefore x=-1$ 是$f(x)$的第一类间断点中的跳跃间断点.-------------3 分

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x+1}}-1}=\infty$,

$\therefore$ $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点.-------3 分

三、证明题（本题共 1 小题，每题 5 分，满分 5 分）

1. 用极限的定义（$\varepsilon - N$ 语言）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$。

证明：$\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$, 只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$, 于是，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 就有 $\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.-----------5 分

四、解答题（本题共 2 小题，每题 15 分，满分 30 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1-2x), & x\le 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$。

解：$\because f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$,------2 分

$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-2x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x}=-2$,--------2 分

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$，$\therefore f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导. ---------2 分

此外，易见 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 时可导，且

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{2x-1}, & x<0,\\ 2x+1, & x>0.\end{cases}$$ ------------9 分

2. 试确定常数 a,b，使 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数。

解：当 $|x|<1$ 时, $f(x)=ax^2+bx$,----------2 分

当 $|x|>1$时，$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{a}{x^{2n-3}}+\frac{b}{x^{2n-2}}}{x+\frac{1}{x^{2n-1}}}=\frac{1}{x}$,-------2 分

当 $x=1$ 时，$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+b}{1+1}=\frac{1+a+b}{2}$,-------1 分

当 $x=-1$ 时， $f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+a-b}{1+1}=\frac{-1+a-b}{2}$,-----1 分

于是,

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx, & |x|<1, \\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1, \\ \dfrac{1+a+b}{2}, & x=1, \\ \dfrac{-1+a-b}{2}, & x=-1, \end{cases}$$

要使 $f(x)$ 为连续函数，那么必然使 $f(x)$ 在点 $x=\pm1$处连续， 即

$f(-1^-)=f\left(-1^+\right)=f(-1)=\frac{-1+a-b}{2}$, $f(1^-)=f(1^+)=f(1)=\frac{1+a+b}{2}$, -------2 分

注意到

$f(-1^-)=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x}=-1$, $f(-1^+)=\lim_{x\to-1^+}(ax^2+bx)=a-b$,

$f(1^-)=\lim_{x\to1^-}(ax^2+bx)=a+b$, $f(1^+)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1$,--------4 分

故$\begin{cases} -1=a-b=\frac{-1+a-b}{2}, \\ 1=a+b=\frac{1+a+b}{2}, \end{cases}$ 解得 $a=0,b=1$.----3 分