《概率论与数理统计》试卷

一、填空题（每小题 2 分，共 30 分）

1．设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，则 $P(A\cup\overline{B})=$________.

2．设袋内有 5 个红球、3 个白球和 2 个黑球，从袋中任取 3 个球，则恰好取到 1 个红球、1 个白球和 1 个黑球的概率为_________.

3．某地区的人群吸烟的概率是 0.2，不吸烟的概率是 0.8，若吸烟使人患某种疾病的概率为 0.008，不吸烟使人患该种疾病的概率是 0.001，则该人群患这种疾病的概率等于______.

4．设随机变量 $X\sim U(-1,2)$，随机变量 $Y=\begin{cases}1\,, & X>0\\ 0, & X=0\\ -1, & X<0\end{cases}$，则 $DY=$________.

5．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，则 X 的概率密度函数 $f(x)=$________.

6．若随机变量 $X\sim b(4,\frac{1}{3})$，则 $P(X\geq 1)=$ _________.

7．若某段时间内通过一路口的汽车数 X 服从泊松分布，且已知 $P(X=4)=3P(X=3)$，

则在该段时间内至少有一辆汽车通过的概率为_________.

8．设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2, 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 $P(X+Y\leq 1)=$_________.

9．设随机变量 $X\sim N(0,4)$，则 EX^2 =_________.

10．设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，$COV(X,Y)=0.5$，则 $D(X+Y)$ =_________.

11．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $D(\overline{X})=$_______.

12．假设检验中小概率原理是指____.

13．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$X\sim U(\theta,3\theta)$，$\theta>0$ 为未知参数，则 θ 的矩估计为___________.

14．设总体 X 的方差为 1，来自总体 X 的容量为 100 的样本，其均值为 5，则数学期望的置信度为 0.95 的置信区间为_________.

15．已知某产品使用寿命服从正态分布，要求平均使用寿命不超过 1000 小时，从一批这种产品中随机抽出 25 只，测得平均使用寿命为 950 小时，样本方差为 100 小时，则可用统计量___________检验这批产品是否合格.

二、判断题（每小题 1 分，共 5 分）

1、事件 A、B、C 相互独立即两两独立 （　　）

2、二维均匀分布的边缘分布一定是一维均匀分布 （　　）

3、正态总体的样本均值和样本方差必独立 （　　）

4、设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计，且 $D\hat{\theta}\neq 0$，则 $\hat{\theta}^2$ 必为 θ^2 的有偏估计 （　　）

5、假设检验中，原假设一般应包含等号 （　　）

三、（9 分）计算机在进行加法运算时，每个加数按四舍五入取整数，假定每个加数的取整误差服从 $(-0.5,0.5)$ 上的均匀分布，今有 5 个加数相加，计算它们中至少有 3 个加数的取整误差绝对值不超过 0.3 的概率。

四、（15 分）设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布，求(1) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度；(2) Y 的概率密度；(3) 概率 $P\{X+Y>1\}$。

五、(**10 分**)设二维随机变量$(X，Y)$ 的概率密度函数为

$f(x，y)=\begin{cases}6x^2y & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$ ，（1）判断X 与Y 是否独立；（2）求$COV(X，Y)$ 。

六、(**10 分**)银行为支付某日即将到期的债券须准备一笔现金。已知这批债券共发行了 500 张，每张须付本息 1000 元。设持券人（一人一券）于债券到期之日到银行领取本息的概率为 0.4，用中心极限定理计算银行于该日应准备多少现金才能以 99.9%以上的把握满足客户的兑换？

七、(**6 分**)设总体$X\sim f(x;\alpha)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha} & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$ ，$X_1,X_2,\cdots X_n$是来自X 的样本，求θ的最大似然估计量.

八、(**5 分**)某厂生产某种型号的电池，其寿命长期以来服从方差为$\sigma^2=40^2$（小时）的正态分布，现从中抽取 25 只进行测量，得$s^2=2500$，问在$\alpha=0.05$下，这批电池的波动性较以往有无显著变化？

九、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1、设$X\sim U(0,1)$，证明：随机变量$Y=-\dfrac{\ln(1-X)}{2}\sim e(2)$。

2、若随机变量$X\sim t(\mathrm{n})$，则$Y=X^2\sim F(1,n)$ 。

附表:

$\mathbf{\Phi_0(1.96)=0.025}$, $\mathbf{\Phi_0(1.645)=0.05}$, $\mathbf{\Phi_0(3.09)=0.998999}$, $\mathbf{\Phi_0(3.10)=0.999032}$

$\mathbf{t_{0.025}(5)=2.571}$, $\mathbf{t_{0.025}(4)=2.776}$, $\mathbf{t_{0.05}(5)=2.015}$, $\mathbf{t_{0.05}(4)=2.132}$

$\mathbf{F_{0.05}(15,15)=2.40}$, $\mathbf{F_{0.025}(15,15)=2.86}$, $\mathbf{F_{0.05}(1,3)=10.13}$

$\boldsymbol{\chi^2_{0.975}(24)=12.401}$, $\boldsymbol{\chi^2_{0.025}(24)=39.364}$, $\boldsymbol{\chi^2_{0.975}(25)=13.120}$, $\boldsymbol{\chi^2_{0.025}(25)=40.646}$