期末复习

一、选择题

1. 设随机事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)>0, P(B)>0$，则（　　）

（A） $P(A|B)=P(A)$　　（B） $P(AB)=P(A)P(B)$　　（C） $P(A|B)=\dfrac{P(A)}{P(B)}$　　（D） $P(A|B)=0$

2. 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则“两数之和大于 1.2”的概率为（　　）

（A） 0.28　　（B） 0.72　　（C） 0.32　　（D） 0.68

3. 已知随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，令 $Y=-3X$，则 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$ 为（　　）

（A） $3f_X(-3y)$　　（B） $f_X(-\frac{y}{3})$　　（C） $\frac{1}{3}f_X(-\frac{y}{3})$　　（D） $-\frac{1}{3}f_X(-\frac{y}{3})$

4. 设随机变量 $X\sim U[1,7]$，$Y\sim e(\frac{1}{2})$，且 X 与 Y 相互独立，则 $D(2X-Y)=$（　　）

（A） 2　　（B） 8　　（C） 10　　（D） 16

5. 设二维随机向量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
1	0.2	0,2	b
2	a	0.1	0.

，若事件 $\{\max\{X,Y\}=1\}$ 与事件 $\{\min\{X,Y\}=0\}$ 相互独立，则 $b=$（　　）

（A） 0.1　　（B） 0.2　　（C） 0.3　　（D） 0.4

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=0.5$，$Y\sim P(2)$，

令 $Z=XY$，则 $\mathrm{cov}(X,Z)=$（　　）

（A） 1　　（B） 2　　（C） 3　　（D） 4

7. 设 (X_1,X_2,X_3) 是来自总体 X 的简单随机样本，α 是未知参数，以下函数不是统计量的是（　　）

（A） $X_1+X_2+X_3$　　（B） $\alpha X_1+X_2+X_3$　　（C） $X_1X_2X_3$　　（D） $\max\{X_1,X_2,X_3\}$

8. 设 (X_1,X_2,X_3) 是来自正态总体 X 的简单随机样本，则下列估计总体 X 的均值 μ 的估计量中最好的是（　　）

（A） $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$　　（B） $\frac{1}{12}X_1+\frac{3}{4}X_2+\frac{1}{6}X_3$

（C） $\frac{1}{2}X_1+\frac{2}{3}X_2-\frac{1}{6}X_3$　　（D） $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{3}X_3$

二、计算题

1. 甲、乙、丙三人各自独立破译一份密码，已知三人能破译出密码的概率分别为$0.5, 0.6, 0.7$，求：密码能被破译出来的概率.

2. 已知连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ Ax^2, & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$，求：

（1）常数A，（2）$P\{0.5<X<0.8\}$

3. 设总体X的概率密度函数为$f(x;\theta)=\begin{cases} \theta x^{-\theta-1}, & x>1 \\ 0, & x\le 1 \end{cases}$，$(\theta>1)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为取自该总体$X$的简单随机样本，试求$\theta$的最大似然估计量.

4. 设工厂生产的螺钉长度服从正态分布，现从中随机抽取 6 个，测得长度（单位：mm）分别为：55，54，54，56，53，52，求方差σ^2的 95% 置信区间.（最终计算结果请保留小数点后 2 位）

三、应用题

1. 设某种元件的使用寿命X（单位：小时）的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1000}{x^2}, & x>1000 \\ 0, & x\le 1000 \end{cases}$，求：

（1）该元件使用寿命不超过 1500 小时的概率；

（2）若有 5 个独立工作的这种元件，求在使用 1500 小时后，恰好有一个元件损坏的概率.

2. 假设一生产线生产的产品的次品率为$p=0.1$，求：在新生产的 400 件产品中，次品有 40~46 件的概率.

3. 假设考生数学成绩服从正态分布，现随机抽取 25 位考生的数学成绩，算得平均成绩$\overline{X}=71$分，标准差$S=10$分，问：是否可以认为全体考生的数学平均成绩高于 70 分？$(\alpha=0.05)$

四、解答题

1. 设二维连续型随机向量(X,Y)的概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases} 8xy^3, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求：

（1）边缘密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$；（2）X与Y是否相互独立，说明理由；（3）$P\{X<Y\}$.

2. 设随机变量X与Y均服从参数$p=\dfrac{2}{3}$的 0-1 分布，且X与Y的相关系数$\rho_{X,Y}=\dfrac{1}{4}$，求：

（1）$\mathrm{cov}(X,Y)$；（2）(X,Y)的概率分布.

五、证明题

1. 设 A, B 为随机事件，且 $0 < P(B) < 1$，若 $P(A \mid B) > P(A \mid \overline{B})$，证明：$P(A \mid B) > P(A)$

2. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为该样本的样本均值与样本方差，证明：$Y = \dfrac{n\left(\overline{X}\right)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$

附表：

$\Phi_0(1) = 0.8413$	$t_{0.025}(24) = 2.064$	$\chi^2_{0.025}(5) = 12.833$	$F_{0.025}(1,5) = 10.01$
$\Phi_0(1.64) = 0.95$	$t_{0.025}(25) = 2.06$	$\chi^2_{0.025}(6) = 14.449$	$F_{0.025}(1,6) = 8.81$
$\Phi_0(1.96) = 0.975$	$t_{0.05}(24) = 1.711$	$\chi^2_{0.975}(5) = 0.831$	$F_{0.05}(1,5) = 6.61$
$\Phi_0(2) = 0.97725$	$t_{0.05}(25) = 1.708$	$\chi^2_{0.975}(6) = 1.237$	$F_{0.05}(1,6) = 5.99$

一、选择题

DCCDBBBA

二、计算题

1. 解：$p=1-(1-0.5)(1-0.6)(1-0.7)=0.94$

2. 解：（1）由 $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=F(1)$，得 $A=1$

（2）$P\{0.5<X<0.8\}=F(0.8)-F(0.5)=0.39$

3. 解：$L(\theta)=\theta^n x_1^{-\theta-1}x_2^{-\theta-1}\cdots x_n^{-\theta-1}$

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

其唯一解是 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$

4. 解：$\overline{X}=54, S^2=2$

置信区间：$\left(\dfrac{5S^2}{\chi^2_{0.025}(5)},\dfrac{5S^2}{\chi^2_{0.975}(5)}\right)=(0.78,12.03)$

三、应用题

1. 解：（1）$P\{X\le1500\}=\int_{1000}^{1500}\dfrac{1000}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$

（2）设 Y 表示使用 1500 小时后损坏的元件数，则 $Y\sim b(5,\frac{1}{3})$

$$P\{Y=1\}=5\times(\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{3})^4=\frac{80}{243}$$

2. 解：设 X 表示等外品的件数，则 $X\sim b(400,0.1)$

$$P\{40\le X\le46\}\approx\Phi_0\left(\frac{46-400\times0.1}{\sqrt{400\times0.1\times0.9}}\right)-\Phi_0\left(\frac{40-400\times0.1}{\sqrt{400\times0.1\times0.9}}\right)$$

$$=\Phi_0(1)-\Phi_0(0)=0.3413$$

3. 解：$H_0:\mu\le70$

$\because\alpha=0.05$，$\therefore t_{0.05}(24)=1.711$

又 $\overline{X}=71$，$S=10$，则 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=0.5<t_{0.05}(24)=1.711$

接受 H_0

四、解答题

1. 解：（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}4y^3, & 0<y<\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（2） $\because f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 相互独立

（3） $P\{X<Y\}=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 8xy^3\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 (2x-2x^5)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

2. 解：（1） $\mathrm{cov}(X,Y)=\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{9}}\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{1}{18}$

（2） $E(XY)=\mathrm{cov}(X,Y)+EX\cdot EY=\frac{1}{18}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

$\therefore P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}$

$\therefore P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}, P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	1/6	1/6
1	1/6	1/2

五、证明题

1. 证明：若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则有 $\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$

即 $P(AB)[1-P(B)]>[P(A)-P(AB)]P(B)$

则 $P(AB)>P(A)P(B)$，所以 $P(A|B)>P(A)$

2. 证明：$\overline{X}\sim N(0,\frac{1}{n}\sigma^2)$，则 $\frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，所以 $\left(\frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\sim\chi^2(1)$

又 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且 $\left(\frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$ 与 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 相互独立

$$\therefore Y=\frac{n\left(\overline{X}\right)^2}{S^2}=\frac{\left(\frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}\sim F(1,n-1)$$