2015 级概率与数理统计试题（A 卷）

一、（12 分）

解：$A_1=\{选取的口袋是甲袋\}$,

$A_2=\{选取的口袋是乙袋\}$,

$A_3=\{选取的口袋是丙袋\}$,

$B=\{取出的球是白球\}$.

（1）根据全概率公式可得所求的概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

由题意知

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},\ P(B\mid A_1)=\frac{6}{10},$$

$$P(B\mid A_2)=\frac{12}{20},\ P(B\mid A_3)=\frac{6}{20}.$$

将这些代入上面的全概率公式知所求的概率为

$$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{12}{20}+\frac{1}{3}\times\frac{6}{20}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}=0.5.$$

（2）根据 Bayes 公式可得所求的概率为

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}}{\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{12}{20}+\frac{1}{3}\times\frac{6}{20}}=\frac{2}{5}=0.4.$$

二、（12 分）

解：1.X 的分布律为

X	2	3	4
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

2（1）X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）（解一）：

$y=\ln x^{-2}=-2\ln x$ 的可取值范围是$(0,+\infty)$.

由 $y=-2\ln x$ 得 $y'=-\frac{2}{x}<0$,

故 $y=-2\ln x$ 在$(0,+\infty)$上严格单减，

其反函数 $x=h(y)=e^{-\frac{1}{2}y}$ ，且 $h'(y)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}$

所以$Y=-2\ln X$ 的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(e^{-\frac{1}{2}y})\left|-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}\right|, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

………………………………………………………………

………………

（解二）：先求$Y=\ln X^{-2}=-2\ln X$的分布函数$F_Y(y)$

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=0$；

当$y>0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-2\ln X\le y)=P\left(X\ge e^{-\frac{y}{2}}\right)$

$$=1-P\left(X\le e^{-\frac{y}{2}}\right)=1-F\left(e^{-\frac{y}{2}}\right)$$

因此，$Y=-2\ln X$的密度函数

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

三、（16 分）

解　（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{\infty}3\mathrm{e}^{-(x+3y)}\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{\infty}3\mathrm{e}^{-(x+3y)}\,\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$几乎处处成立，故 X 和 Y 相互独立.

（2）$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y.$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^{z}3\mathrm{e}^{-(z+2y)}\mathrm{d}y=\frac{3}{2}(\mathrm{e}^{-z}-\mathrm{e}^{-3z}), & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（3）$P(U=1)=P(X\le Y)=\iint_{x\le y}f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\infty}\int_0^{y}3e^{-(x+3y)}dxdy=\frac{1}{4}.$

$$P(U=0)=\frac{3}{4}.$$

X	0	1
p_k	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

四、（16 分）

解 1. $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$,

$$F'(x)=0.3\varphi(x)+\frac{0.7}{2}\varphi(\frac{x-1}{2})$$

所以 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xF'(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x[0.3\varphi(x)+\frac{0.7}{2}\varphi(\frac{x-1}{2})]dx$

$=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-1}{2})dx$，

$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=0$，

$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-1}{2})]dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+1)\varphi(u)]du=2$，

$EX=0+0.35\times2=0.7$

2.易知 $EX=EY=\mu$,

$DX=DY=\sigma^2$,

$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=\rho_{XY}\sigma^2$

$DZ=D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\operatorname{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$
$=a^2\sigma^2+b^2\sigma^2+2ab\rho_{XY}\sigma^2$

$DW=D(aX-bY)=a^2DX+b^2DY-2ab\operatorname{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$
$=a^2\sigma^2+b^2\sigma^2-2ab\rho_{XY}\sigma^2$

$\operatorname{cov}(Z,W)=\operatorname{cov}(aX+bY,aX-bY)=a^2DX-b^2DY=a^2\sigma^2-b^2\sigma^2$

$$\rho_{ZW}=\frac{\text{cov}(Z,W)}{\sqrt{DZ\cdot DW}}=\frac{a^2\sigma^2-b^2\sigma^2}{\sqrt{(a^2\sigma^2+b^2\sigma^2+2ab\rho_{XY}\sigma^2)\cdot(a^2\sigma^2+b^2\sigma^2-2ab\rho_{XY}\sigma^2)}}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2+2ab\rho_{XY})\cdot(a^2+b^2-2ab\rho_{XY})}}$$

当 a=b 时，Z 和 W 不相关。

五、（8 分）

解：令 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 分别表示各次射击的得分，则 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立，共同的分布为

X_i	10	9	8	7	6
P	0.5	0.3	0.1	0.05	0.05

计算得

$$\mu=E(X_i)=10\times0.5+9\times0.3+8\times0.1+7\times0.05+6\times0.05=9.15$$

$$\mu=E(X_i)E(X_i^2)=10^2\times0.5+9^2\times0.3+8^2\times0.1+7^2\times0.05+6^2\times0.05=84.95;$$

$$\sigma^2=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=1.2275.$$

所以由中心极限定理，得

$$P(X_1+X_2+\cdots+X_{100}\geq930)=P(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{100}-100\mu}{\sqrt{100\sigma^2}}\geq\frac{930-100\mu}{\sqrt{100\sigma^2}})$$

$$\approx1-\Phi(\frac{930-100\mu}{\sqrt{100\sigma^2}})=1-\Phi(1.35)=1\text{-}0.9115=0.0885.$$

六、（8 分）

解：(1)

$$X_1+X_2-X_3\sim N(0,3\sigma^2)，\quad X_4-X_5+X_6\sim N(0,3\sigma^2),\ X_7+X_8+X_9\sim N(0,3\sigma^2)$$

$$\frac{X_1+X_2-X_3}{\sqrt{3\sigma^2}}\sim N(0,1),\ \frac{X_4-X_5+X_6}{\sqrt{3\sigma^2}}\sim N(0,1),\ \frac{X_7+X_8+X_9}{\sqrt{3\sigma^2}}\sim N(0,1)$$

$$\frac{(X_1+X_2-X_3)^2}{3\sigma^2}\sim\chi^2(1),\quad \frac{(X_4-X_5+X_6)^2}{3\sigma^2}+\frac{(X_7+X_8+X_9)^2}{3\sigma^2}\sim\chi^2(2)$$

由独立性知：

$$\frac{2(X_1+X_2-X_3)^2}{(X_4-X_5+X_6)^2+(X_7+X_8+X_9)^2}=\frac{\frac{(X_1+X_2-X_3)^2}{3\sigma^2}\Big/1}{\left(\frac{(X_4-X_5+X_6)^2}{3\sigma^2}+\frac{(X_7+X_8+X_9)^2}{3\sigma^2}\right)\Big/2}\sim\mathrm{F}(1,2)$$

(2)

$$P\left(\frac{(X_1+X_2-X_3)^2}{(X_4-X_5+X_6)^2+(X_7+X_8+X_9)^2}<c\right)=P\left(\frac{2(X_1+X_2-X_3)^2}{(X_4-X_5+X_6)^2+(X_7+X_8+X_9)^2}<2c\right)$$

$$=1-P\left(\frac{2(X_1+X_2-X_3)^2}{(X_4-X_5+X_6)^2+(X_7+X_8+X_9)^2}\geq 2c\right)=0.9$$

所以 $P\left(\frac{2(X_1+X_2-X_3)^2}{(X_4-X_5+X_6)^2+(X_7+X_8+X_9)^2}\geq 2c\right)=0.1$

从而

$$2c=F_{0.1}(1,2)=8.53\Rightarrow \mathrm{c}=\frac{8.53}{2}=4.265$$

七、（12 分）

解：(1)

$$EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}e^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\theta$$

令 $EX=\bar{X}$ 即 $\theta=\bar{X}$

解得 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

$E(\hat{\theta})=E(\bar{\mathrm{X}})=\mathrm{E}(\mathrm{X})=\theta$，

所以 $\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计。

(2) 设 $x_1,\dots,x_n$ 为样本观测值，似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}, & x_1,x_2,\dots,x_n>0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\text{，}$$

对 θ 求导并令其为零，得

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$$

解得 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$$

八、（16 分）

1.（1）检验统计量为：$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

拒绝域为$W=\{(x_1,\cdots,x_n):|t|>t_{0.05}(24)=1.7109\}$.

将样本值代入统计量算出统计量的观测值为

$$|t|=\left|\frac{\bar{x}-1000}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{950-1000}{100/\sqrt{25}}\right|=2.5>1.7109\in W$$

所以拒绝原假设$H_0:\mu=1000$

（2）检验统计量为$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$~$\chi^2(n-1)$

拒绝域为$W=\{(x_1,\cdots,x_n):\chi^2\geq\chi^2_{0.1}(24)=33.196\}$.

将样本值代入统计量算出统计量的观测值为

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=\frac{24\times100^2}{96^2}\approx26<33.196\notin W$$

所以接受原假设$H_0:\sigma^2\leq96^2$。

2． 由于 $\bar{X}\sim N(\mu,1/9)$，因此在原假设$H_0:\mu=0$成立下,$3\bar{X}\sim N(0,1)$，

因此犯第一类错误的概率为$P\left\{3\left|\bar{X}\right|\geq1.96\right\}$=0.05

犯第二类错误的概率为

$$P_{\mu\neq0}\left\{3\left|\bar{X}\right|\leq1.96\right\}=P_{\mu\neq0}\left\{-1.96/3\leq\bar{X}\leq1.96/3\right\}=\Phi\left(\frac{1.96/3-\mu}{1/\sqrt{9}}\right)-\Phi\left(\frac{-1.96/3-\mu}{1/\sqrt{9}}\right)$$

$$=\Phi(1.96-3\mu)-\Phi(-1.96-3\mu)$$