练习 3 参考答案

一、填空题

1. $\underline{(e^{\lambda}-1)^{-1}}$; 2. $\underline{\quad 0.8413 \quad}$; 3. $\underline{\dfrac{\theta}{3}}$; 4. $\underline{\quad 4 \quad}$; 5. $\underline{\quad 1-\alpha \quad}$.

二 解：设 A={发送 0} B={收到 0}

由题意可知,

$$P(A)=\frac{1}{2}, P(\overline{A})=\frac{1}{2}, P(\overline{B}\,|\,A)=0.2, P(B\,|\,A)=0.8, \quad P(B\,|\,\overline{A})=0.1$$

利用乘法公式可得

$$P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)=\frac{1}{2}\times 0.8=0.4.$$

利用全概率公式可得

$$P(B)=P(A)P(B\,|\,A)+P(\overline{A})P(B\,|\,\overline{A})=\frac{1}{2}\times 0.8+\frac{1}{2}\times 0.1=0.45.$$

根据条件概率的定义可知

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.4}{0.45}=\frac{40}{45}=\frac{8}{9}.$$

三 1.答：若 A 为不可能事件，则一定有 A 的概率为零。但是反过来不成立，反例如下：设 X 服从正态分布，$A=\{X=0\}$，则 A 的概率为零，但 A 不是不可能事件。

2. 解：由于$Y=-2\theta\ln X$是X的严格单调递减函数，且反函数为 $X=e^{-\frac{1}{2\theta}Y}$，

$\left|\dfrac{dX}{dY}\right|=\dfrac{1}{2\theta}e^{-\frac{1}{2\theta}Y}$，由此得到$Y=-2\theta\ln X$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\theta e^{-\frac{\theta-1}{2\theta}y}\dfrac{1}{2\theta}e^{-\frac{1}{2\theta}y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

四

解：1 由概率密度的性质， 得到

$$1=\iint_{R^2} f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dx\int_0^x Ce^{-2x}dy$$

化简后得到$1=\int_0^{\infty}dx\int_0^x Ce^{-2x}dy=\int_0^{\infty}Ce^{-2x}xdx=\dfrac{C}{2}\int_0^{\infty}2e^{-2x}xdx=\dfrac{C}{2}\dfrac{1}{2}$，

所以 C=4。

2 已知(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2x}, & x>0, 0<y<x,\\ 0\ , & \text{其它}.\end{cases}$$

所以 X 的边缘密度为

$$f_X(x)=\int_R f(x,y)dy=\int_0^x 4e^{-2x}dy=4xe^{-2x},\qquad x>0,$$

Y 的边缘密度为

$$f_Y(x)=\int_R f(x,y)dx=\int_y^\infty 4e^{-2x}dx=-2e^{-2x}\Big|_y^\infty=2e^{-2y},\quad y>0,$$

因为 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=4xe^{-2x}\cdot 2e^{-2y}\neq f(x,y)$，所以 X 与 Y 不独立。

3. $Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{z/2}^{z}4e^{-2x}\mathrm{d}x, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}=\begin{cases}2e^{-z}-2e^{-2z}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

4.由题设条件

$$P(X\le Y+2)=\iint_{x\le y+2}f(x,y)dxdy=\int_0^\infty dy\int_y^{y+2}4e^{-2x}dx$$

$$=\int_0^\infty 2(e^{-2y}-e^{-2(y+2)})dy=(1-e^{-4})\int_0^\infty 2e^{-2y}dy=1-e^{-4}\ .$$

五 1. $|\rho_{XY}|$的大小刻画了 X 和 Y 的线性相关的程度.若$|\rho_{XY}|$越接近于 1，说明 X 与 Y 之间越近似有线性关系；即：X 与 Y 的线性相关的程度越高；若$|\rho_{XY}|$越接近于 0，说明 X 与 Y 之间越不能有线性关系；即 X 与 Y 的线性相关的程度越弱；若$|\rho_{XY}|=1$，说明 Y 与 X 之间以概率 1 有严格线性关系；若$\rho_{XY}=0$，说明 X 与 Y 之间没有线性关系，此时 X 与 Y 之间的关系较复杂，可能相互独立，也可能有其他某种非线性的函数关系.

2 解：由于区域 G 的面积为 1，因此$(X,\ Y)$的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,\ y)\in G\\ 0 & (x,\ y)\notin G\end{cases}$

当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dy=\int_0^{2-2x}dy=2(1-x)$，

所以，$f_X(x)=\begin{cases}2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$.

当 $0<y<2$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx=\int_0^{1-\frac{y}{2}}dy=1-\dfrac{y}{2}$，

所以，$f_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2} & 0<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{3}，\quad E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy=\int_0^2 y\cdot\left(1-\frac{y}{2}\right)dy=\frac{2}{3}，$$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2(1-x)dx=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}，\quad E\left(Y^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy=\int_0^2 y^2\cdot\left(1-\frac{y}{2}\right)dy=\frac{2}{3}，$$

所 以， $\operatorname{var}(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$ ， $\operatorname{var}(Y)=E\left(Y^2\right)-\left(E(Y)\right)^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$ ，

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,\quad y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x} xydy=\int_0^1 x\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{2-2x} dx$$

$$=2\int_0^1 x(1-x)^2 dx=2\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=2\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}，$$

所以，$\operatorname{cov}(X,\quad Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{18}$.

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,\quad Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\sqrt{\operatorname{var}(Y)}}=\frac{-\frac{1}{18}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{2}{9}}}=-\frac{1}{2}.$$

六 解：令 $Z_k=\ln(X_k), k=1, 2, \ldots, 100.$

$$E(Z_1)=\int_0^1 \ln xdx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1$$

$$E(Z_1^2)=\int_0^1 \ln^2 xdx=x\ln^2 x\Big|_0^1-2\int_0^1 \ln xdx=2$$

$$D(Z_1)=E(Z_1^2)-E^2(Z_1)=1$$

由独立同分布的中心极限定理得

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} Z_i-100\times(-1)}{\sqrt{100\times 1}}\text{近似服从}N(0,1).$$

$$P(Y<e^{-80})=P(\sum_{i=1}^{100} Z_i<-80)=P(\frac{\sum_{i=1}^{100} Z_i-100\times(-1)}{\sqrt{100}}<\frac{-80-100\times(-1)}{\sqrt{100}})\approx\Phi(2)=\ 0.9772$$

七

解：(1) X 的概率分布律为：$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\ldots$

$$\mu_1=E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p(1-p)^{k-1}=p(\sum_{k=1}^{\infty} q^k)'=p(\frac{q}{1-q})'=1/p$$

解方程得：$p=1/\mu_1$

用 $\overline{X}$ 代替 μ_1 得参数 p 的矩估计 $\hat{p}=1/\overline{X}.$

(2) 易知似然函数为：

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}$$

对数似然函数为：

$$\ln L(p)=n\ln p+(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-p)$$

关于未知参数 p 求导数并令导函数为 0，得：

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{1}{1-p}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)=0$$

解方程得 p 的最大似然估计为 $\hat{p}=n/\sum_{i=1}^{n}x_i=1/\bar{x}.$

即最大似然估计量为 $\hat{p}=1/\bar{X}.$

八

1. （1）若检验结果是接受原假设，则检验可能犯第二类类错误

（2）若检验结果是拒绝原假设，则检验有可能犯第一类错误

2. 解：提出假设：$H_0:\sigma\le 0.9$ ； $H_1:\sigma>0.9$

检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒绝域 $W=\{(x_1,\cdots,x_n):\chi^2\ge\chi_\alpha^2(n-1)\}$

查表得 $\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(9)$=16.919，

计算得 $\chi^2=\dfrac{9s^2}{0.9^2}=\dfrac{9\times1.2^2}{0.9^2}=16<16.919$

未落入拒绝域，所以接受原假设，即认为说明书上所写的标准差可信.