

2019 级概率与数理统计试题 (A 卷)

座号_____ 班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共八大题, 满分 100 分; 将每道题的答案写在答题卡对应的位置上, 答题卡共 8 页, 需要分别在第 1 页和第 5 页上方填写座号、姓名、学号、班级等信息, 并用 2B 铅笔在相应的位置填涂学号; 本试卷最后一页空白纸为草稿纸, 可撕下; 考试结束后试卷及草稿纸不用上交, 答案写在草稿纸及试卷上无效)

附表: $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.64)=0.95$, $\Phi(2)=0.9772$, $t_{0.05}(15)=1.7531$, $t_{0.05}(16)=1.7459$ $t_{0.025}(15)=2.1315$, $t_{0.025}(16)=2.1199$

一、填空题 (16 分)

1. 将 4 封信放入 4 个邮筒, 则恰好有 2 个邮筒为空的概率是_____.
2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(|X-\mu|>\sigma)$ 等于_____. (用标准正态分布的分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示)
3. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{a^3} x^2, & 0 < x < a, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

且 $P(X>1)=7/8$. 则 $a=$ _____.

4. 若随机变量 X 和 Y 互相独立, 则由 X 和 Y 的边缘分布_____ (填: 一定、不一定、一定不) 能确定其联合分布.
5. 已知随机变量 X 和 Y 独立同分布, 且 $P\{X=1\}=P\{X=3\}=0.2$, $P\{X=2\}=0.6$, 则 $D(X-Y)=$ _____.
6. 设总体 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, X_1, X_2, \dots, X_6 是来自总体 X 的一个简单随机样本,

$$Y = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2}}$$

则当 $a=$ _____ 时, aY 服从 $t(4)$ 分布.

7. 设总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$, 其中 $\theta > 0$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 为取自该总体的一个样本, \bar{X} 为样本均值, 则当 $a=$ _____ 时, $\hat{\theta} = a\bar{X}$ 是参数 θ 的无偏估计
8. 在假设检验中, 两类错误的概率的和_____ (填: 一定, 不一定) 等于 1.

二、(10 分)

设甲、乙、丙三人独立的向同一飞行目标各射击一次, 击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.8. 如果只有一人击中目标, 则目标被击落的概率为 0.3; 如果有两人击中目标, 则目标被击落的概率为 0.6; 如果三人都击中目标, 则目标一定被击落. 求目标被击落的概率.

三、(12分)

1. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 100/x^2, & x > 100 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 X 的分布函数; (2) 计算概率 $P(X \leq 200)$, $P(X > 300)$.

2. 设随机变量 X 服从数学期望为 λ 的指数分布. 令 $Y = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}X}$, 求 Y 的概率密度函数.

四、(16分)

设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} cye^{-x}, & x > 0, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

1. 求常数 c 的值.

2. 求 X 和 Y 的边缘概率密度函数, 判断 X 和 Y 是否相互独立并说明理由.

3. 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

五、(8分)

一食品店有 A、B、C 三种蛋糕出售, 其价格分别为 10 元、15 元、20 元. 根据经验, 顾客进店后选择这三种蛋糕的概率分别为 0.3、0.4、0.3. 某天售出了 375 只蛋糕, 求蛋糕收入至少是 5775 元的概率.

六、(12分)

1. 给出两个随机变量 X 和 Y 独立以及不相关的定义, 并叙述独立与不相关之间的关系.

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

记 $Y = X^2$, 求 $Cov(X, Y)$, $D(X + Y)$.

七、(14分)

总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{\theta} x^{-(\theta+1)}, & x > e \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $\theta > 1$ 为未知参数. X_1, X_2, \dots, X_n 为取自该总体的样本, x_1, x_2, \dots, x_n 为相应的样本观测值.

1. 求参数 θ 的矩估计量; 2. 求参数 θ 的最大似然估计量; 3. 求 EX 的最大似然估计量.

八、(12分)

1. 在假设检验问题中, (1) 原假设 H_1 不真, 但被接受, 这种判断错误称为第几类错误?

(2) 原假设 H_0 为假, 但被接受, 这种判断错误又称为第几类错误?

2. 某钢厂原工艺下钢板厚度服从正态分布 $N(40, 2^2)$ (单位: 毫米), 改进工艺后, 测得 16 块钢板厚度的平均值为 41. 假定方差不变, 试问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 平均钢板厚度是否有所提高?