2017-2018-2 级概率与数理统计试题参考答案（A 卷）

一、（12 分）每空 1 分

1．事件 A 和 B 都不发生

2. 0.6

3. 9/64

4. e^{-4}

5. 9

6. 1/9

7. 0.0228

8. $n+m$ ， $2(n+m)$

9. [39.51, 40.49]

10. 0.05, 0.5845

二、（12 分 ）

解：（1）设 A、B、C 分别表示甲、乙、丙 3 台机床加工出的零件是一等品。

易知： $P(A\bar{B})=\frac{1}{4}$， $P(B\bar{C})=\frac{1}{12}$， $P(AB)=\frac{3}{20}$

有独立性可得 $P(A)P(\bar{B})=\frac{1}{4}$， $P(B)P(\bar{C})=\frac{1}{12}$， $P(A)P(B)=\frac{3}{20}$

解方程组得： $P(A)=\frac{2}{5},P(B)=\frac{3}{8},P(C)=\frac{7}{9}$

（2） $P(A\cup B\cup C)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=1-\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}\times\frac{2}{9}=\frac{11}{12}$

三、（16 分）

1. 解： （1）由 $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+c=1$，得 $c=\frac{17}{30}$

（2）$Y=X^2$ 的分布律为

Y	1	4	9
P_k	4/15	1/6	17/30

（3）Y 的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \frac{4}{15}, & 1\le y<4\\ \frac{13}{30}, & 4\le y<9\\ 1, & y\ge 9\end{cases}$$

2 解　（1）由 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1\\ \lim\limits_{x\to0+}F(x)=\lim\limits_{x\to0-}F(x)\end{cases}$ 得 $\begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$

（2）$P(X\le 2)=F(2)=1-\mathrm{e}^{-2}$

$$P(X>3)=1-F(3)=1-(1-\mathrm{e}^{-3})=\mathrm{e}^{-3}$$

（3）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

四、（14 分）

解：（1）(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x>0,y>0,2x+y\le 2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（2）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{2-2x}1\mathrm{d}y=2-2x,0<x<1,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{\frac{2-y}{2}}1\mathrm{d}x=\dfrac{2-y}{2},0<y<2,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$$

在区域 D=$\{(x,y)\mid x>0,y>0,2x+y\le 2\}$上，$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，

X 和 Y 不相互独立.

（3）$Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^z 1\mathrm{d}x, \ 0<z<1,\\ \int_0^{2-z}1\mathrm{d}x,1\le z<2,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}=\begin{cases}z, \ 0<z<1,\\ 2-z,1\le z<2,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$$

五、（14 分）

解：（1）$E(Z)=E(2X-3Y)=2E(X)-3E(Y)=2$

$$D(Z)=D(2X-3Y)=D(2X)+D(3Y)-2Cov(2X,3Y)$$

$$=4D(X)+9D(Y)-12Cov(X,Y)$$
$$=16+9-12\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}\cdot\rho_{XY}=9$$

（2）$Cov(X,Z)=2Cov(X,X)-3Cov(X,Y)=4$

$$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=\frac{2}{3}$$

（3） $\because \rho_{XZ}=\frac{2}{3}\neq 0 \quad \therefore$不独立

六、（8 分）

解：由于 $\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2/10)$，因此 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{10}}\sim N(0,1)$， $\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2/10}\sim\chi^2(1)$

又由性质可知，$\frac{9S_X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9)$，且 $\bar{X}$ 和 S_X^2 相互独立，

因此，
$$\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2/10}+\frac{9S_X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(10)$$

由于 $\frac{Y_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), i=1,\cdots 5$ 且相互独立，因此，

$$\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{Y_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(5)$$

所以，

$$\frac{10(\bar{X}-\mu)^2+9S_X^2}{2\sum_{i=1}^{5}(Y_i-\mu)^2}\sim F(10,5)$$

七、（12 分）

解：(1)由于 $EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\theta$

令 $EX=\bar{X}$， 即 $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\theta=\bar{X}$

解得θ的矩估计为 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{X}$

(2) 似然函数为 $$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta^2}}=\frac{1}{\theta^{2n}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{2\theta^2}}$$

对数似然函数为 $$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{2\theta^2}$$

对θ求导并令其为零，得 $$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

解得θ的最大似然估计为 $$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

八、（12 分）

解：提出假设 H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$， H_1: $\sigma^2\neq\sigma_0^2$.

选取检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0\text{真}}{\sim}\chi^2(n-1)$

拒绝域 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ or $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

已知 $n=5$，$\sigma_0=0.048$，$\alpha=0.05$，$s^2=0.00778$

查表 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(4)=11.143$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(4)=0.484$

计算 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=13.51>11.143$

拒绝H_0，即在显著性水平$\alpha=0.05$下认为这天纤度的波动有显著变化。