2019级概率与数理统计试题（A卷）

一、填空题

1. $\frac{11}{12}$　2. e^{-2}　3. 1/3;　4. $\frac{1}{12}$　5. $1-\Phi(0.75)$. 6. $1-\alpha$　7. $1-\Phi(1.2)$或者$\Phi(-1.2)$

二、

解：设 A={取出的一件是正品}，B_i={取出的一箱中恰有 i 件正品}，i=0,1,2,3,4

1. 根据全概率公式可得所求的概率为

$$P(A)=\sum_{i=0}^{4}P(B_i)P(A|B_i).$$

由题意知

$$P(B_0)=\frac{1}{5},\ P(B_1)=\frac{1}{5},\ P(B_2)=\frac{1}{5},\ P(B_3)=\frac{1}{5},\ P(B_4)=\frac{1}{5},$$
$$P(A|B_0)=\frac{0}{4},\ P(A|B_1)=\frac{1}{4},\ P(A|B_2)=\frac{2}{4},\ \ P(A|B_3)=\frac{3}{4},\ \ P(A|B_4)=\frac{4}{4}.$$

将这些代入上面的全概率公式知所求的概率为

$$P(A)=\frac{1}{5}\times\frac{0}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}=0.5.$$

2. 根据 Bayes 公式可得所求的概率为

$$P(B_4|A)=\frac{P(B_4)P(A|B_4)}{\sum_{i=0}^{4}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}}{\frac{1}{5}\times\frac{0}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$$

三、

1. X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

2. 证明：$\boldsymbol{P\{X>s+t\,|\,X>s\}=\frac{P\{X>s+t,X>s\}}{P\{X>s\}}}$

$$\boldsymbol{=\frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}=\frac{1-P\{X\le s+t\}}{1-P\{X\le s\}}=e^{-\frac{1}{\theta}t}=P\{X>t\}}$$

如果 X 表示某仪器的工作寿命，无记忆性的解释是：当仪器工作了 s 小时后总共能工作至少 $s+t$ 小时的条件概率等于该仪器刚开始就能至少工作 t 小时的概率．说明该仪器的使用寿命不随使用时间的增加发生变化，或说对它已经使用过 s 小时没有记忆．

3．由 $Y=1-e^{-\frac{1}{2}X}$，且 $y'=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}>0$ 可知，y 是单调增函数，

其反函数为 $x=-2\ln(1-y)$，且有 $x'=\frac{2}{1-y}$

故 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}[-2\ln(1-y)]}\left|\frac{2}{1-y}\right| & ,\ 0<y<1\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-y)\frac{2}{1-y} & ,\ 0<y<1\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}=\begin{cases}1 & ,\ 0<y<1\\ 0 & ,\ \text{其它}\end{cases}$$

因此 $Y\sim U(0,1)$．

四、

解：1. 令随机变量 Z 表示第二次取到的球的号码，则 $\boldsymbol{P(X=i,Z=j)=\frac{1}{9},\quad 1\le i,j\le 3;}$

下面求 $\boldsymbol{P(X=i,Y=j)=\frac{1}{9},\quad 1\le i,j\le 3;}$

若 $i>j$，则 $\boldsymbol{P(X=i,Y=j)=P(\phi)=0;}$

若 $i<j$，则 $\boldsymbol{P(X=i,Y=j)=P(X=i,Z=j)=1/9;}$

若 $i=j$，则 $\boldsymbol{P(X=i,Y=j)=P(X=i,Y=i)=\sum_{k=1}^{i}P(X=i,Z=k)=i/9;}$

综上所述，X 和 Y 的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	1/9	1/9	1/9
2	0	2/9	1/9
3	0	0	3/9

2. X 和 Y 的边缘分布律为

X	1	2	3
1	1/3	1/3	1/3

Y	1	2	3
1	1/9	3/9	5/9

3. 因为 $P(X=1, Y=1) \neq P(X=1)\, P(Y=1)$，所以 X 和 Y 不独立.

4. 显然有 $U=Y-X\geq 0$ 成立，

$P(U=0)=P(Y-X=0)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=3)=6/9$;

$P(U=1)=P(Y-X=1)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=3)=2/9$;

$P(U=2)=P(Y-X=2)=P(X=1,Y=3)=1/9$;

所以 U 的分布律为

U	0	1	2
P	6/9	2/9	1/9

五、

解：Y服从 F 分布，第一自由度为 1，第二自由度为 3.

根据题意，$X_1, X_2, \ldots, X_6$ 相互独立，且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，故

$$\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}\sim N(0,1),$$

$$\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1),$$

$$\frac{{X_4}^2}{\sigma^2}+\frac{{X_5}^2}{\sigma^2}+\frac{{X_6}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3).$$

注意到 $X_1, X_2, \ldots, X_6$ 的独立性，并结合 F 分布的定义可知

$$\frac{\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}\right)^2\Big/1}{\left(\frac{{X_4}^2}{\sigma^2}+\frac{{X_5}^2}{\sigma^2}+\frac{{X_6}^2}{\sigma^2}\right)\Big/3}=\frac{(X_1+X_2+X_3)^2}{{X_4}^2+{X_5}^2+{X_6}^2}\sim F(1,3).$$

六、

1. 解：设 Y 表示厂方出售一台设备净赢利,有

$$Y=g(X)=\begin{cases}1 & X\ge 1\\ -1 & 0<X<1\end{cases}$$

$$E(Y)=E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx=\int_0^1 -1\times\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx+\int_1^{+\infty}1\times\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=2e^{-\frac{1}{4}}-1$$

所以每台净赢利的数学期望为$2e^{-\frac{1}{4}}-1$元

2. 解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{x}{8}(x+y)dy=\int_0^2\frac{x}{8}(xy+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^2dx=\int_0^2\frac{x}{4}(x+1)dx=\frac{7}{6}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{x^2}{8}(x+y)dy=\int_0^2\frac{x^2}{8}(xy+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^2dx=\int_0^2\frac{1}{4}(x^3+x^2)dx=\frac{5}{3}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{xy}{8}(x+y)dy=\int_0^2\frac{1}{4}(x^2+\frac{4}{3}x)dx=\frac{4}{3}$$

由于 x,y 的对称性，可知

$$E(Y)=E(X)=7/6,\quad E(Y^2)=E(X^2)=5/3$$

且有

$$D(Y)=D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36},$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{49}{36}=-\frac{1}{36},$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{11},$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{5}{9}.$$

七、

解：1. $EX=\int_0^{\infty}x\cdot(\theta-1)e^{-(\theta-1)x}dx=\frac{1}{\theta-1}$

解方程得$\theta=\frac{1}{EX}+1$

用 $\bar{X}$ 代替 EX 得θ 的矩估计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{\bar{X}}+1.$

2. 似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta-1)e^{-(\theta-1)x_i}=(\theta-1)^ne^{-(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta-1)-(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}x_i$$

似然方程为

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L=\frac{n}{\theta-1}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

解方程得 $\hat{\theta}=1+\frac{1}{\bar{x}}$， 即最大似然估计量为 $\hat{\theta}=1+\frac{1}{\bar{X}}$.

3. 由于 $R=P(X>1)=\int_1^{\infty}(\theta-1)e^{-(\theta-1)x}dx=e^{-(\theta-1)}$

所以 $\hat{R}=e^{-\frac{1}{\bar{X}}}$

八、

1、（1）第二类错误 （2）第一类错误

2、H_0： $\mu=10.5$ H_1： $\mu\neq10.5$

检验统计量 $t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域 $|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$

查表得 $t_{0.025}(35)=2.0$

本题中 $n=36,\quad \alpha=0.05,$

$\bar{x}=11.08,\quad s=0.516$

计算得 $|t|=\left|\frac{11.08-10.5}{0.516/6}\right|=6.74>2.0301$

落入拒绝域

拒绝 H_0，即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，认为零件的长度不符合要求。