2014级概率与数理统计试题（A卷）

一、（12分）

解： 设 $A_i=\{$从甲盒中任取2只球中有 i 只白球$\}$，$i=0,1$，2

$B=\{$从乙盒中任取一只球为白球$\}$

由已知得：

$$P(A_0)=\frac{C_4^0C_5^2}{C_9^2}=\frac{10}{36}$$

$$P(A_1)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\frac{20}{36}$$

$$P(A_2)=\frac{C_4^2C_5^0}{C_9^2}=\frac{6}{36}$$

$$P(B\mid A_0)=\frac{C_5^1}{C_{10}^1}=\frac{5}{10}$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{C_6^1}{C_{10}^1}=\frac{6}{10}$$

$$P(B\mid A_2)=\frac{C_7^1}{C_{10}^1}=\frac{7}{10}$$

由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)$$
$$=\frac{10}{36}\times\frac{5}{10}+\frac{20}{36}\times\frac{6}{10}+\frac{6}{36}\times\frac{7}{10}$$
$$=\frac{212}{360}=\frac{53}{90}\approx 0.5889$$

二、（12分）

1、 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

2、 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} \int_0^x 3e^{-3t}dt & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x\le 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1-e^{-3x} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x\le 0 \end{cases}$$

3、 $Y=1-e^{-3X}$ 的可取值范围为(0,1)

由 $y'=3e^{-3x}>0$，可知 y 是单调增函数

其反函数为 $x=-\frac{1}{3}\ln(1-y)$， $x'=\frac{1}{3(1-y)}$

故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} 3e^{-3\left[-\frac{1}{3}\ln(1-y)\right]}\left|\frac{1}{3(1-y)}\right| & , \quad 0<y<1 \\ 0 & , \quad y\le 0, y\ge 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1 & , \quad 0<y<1 \\ 0 & , \quad \text{其它} \end{cases}$$

三、（16 分）

1、解： $\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=1.$

$$\int_0^1\int_0^\infty ce^{-x}ydxdy=\frac{c}{2}=1\Rightarrow c=2.$$

2、解： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

当$x>0$时，$f_X(x)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}y\,dy=e^{-x}.$

当$x\le 0$时，$f_X(x)=0.$

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$f_Y(y)=\int_0^{\infty} 2e^{-x}ydx=2y, 0<y<1.$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,所以 X 与 Y 相互独立.

3、解：由于 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$ $\quad f_Y(z-x)=\begin{cases}2(z-x), & 0\le z-x<1\\ 0, & 其\ 它\end{cases}$

因此 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z e^{-x}2(z-x)dx, & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^z e^{-x}2(z-x)dx, & 1\le z<2\\ 0, & 其\ 它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2z+2e^{-z}-2, & 0\le z<1\\ 2e^{-z}, & 1\le z<2\\ 0, & 其\ 它\end{cases}$$

4、解:

由 X 与 Y 相互独立，得到

$$P(U\le 1)=P(\max(X,Y)\le 1)=P(X\le 1,Y\le 1)$$

$$=\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^1 2ydy=1-e^{-1}$$

四、（16 分）

1、解：X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$$

球的体积为$\boldsymbol{V=\frac{1}{6}\pi X^3}$，则球体积的数学期望为

$$EV=E\left(\frac{1}{6}\pi X^3\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{6}\pi x^3 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{1}{6}\pi x^3dx=\frac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2)$$

2、解：（1）由于$\boldsymbol{EX=1,DX=9,EY=0,DY=16}$

因此 $$EZ=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{EX}{3}+\frac{EY}{2}=\frac{1}{3}$$

$$Cov\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{6}Cov(X,Y)=\frac{1}{6}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=-1$$

$$DZ=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+2Cov\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)=3$$

（2）由于$Cov(X,Z)=Cov\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}Cov(X,Y)=0$

因此 $$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=0$$

五、（8 分）

解：设X_i为第 i 只元件的寿命，i＝1,...16， $X_1\cdots X_{16}$相互独立同分布 ，

X＝$\sum_{i=1}^{16}X_i$为 16 只元件的寿命总和，已知 $\mu=100,\sigma^2=100^2.$

那么由中心极限定理$\frac{X-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ 近似服从 N（0,1）.

所以

P（X>1920）≈$1-\Phi(\frac{1920-16\times100}{100\sqrt{16}})=1-\Phi(0.8)=0.2119$.

六、（8 分）

1、解： 因为 $\overline{X}$ 服从 $N(20,\dfrac{3}{10})$, $\overline{Y}$ 服从 $N(20,\dfrac{3}{15})$,

且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立。

所以 $\overline{X}-\overline{Y}$ 服从 $N(0,\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{15})$，即 $\overline{X}-\overline{Y}$ 服从 $N(0,\dfrac{1}{2})$.

2、解：

$$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>0.3\}=P\{\frac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{\frac{1}{\sqrt{2}}}>\frac{0.3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\}=2\Phi(-0.3\sqrt{2})=2\Phi(-0.424)$$

$=0.6712.$

七、（16 分）

1、解：（1） 由于 $E(X)=\int_0^1\sqrt{\alpha}x^{\sqrt{\alpha}}dx=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+1}$，

令 $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+1}=\bar{X}$，得 α 的矩估计为

$$\hat{\alpha}=\left(\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$$

(2) 似然函数为

$$L(\alpha)=\left(\sqrt{\alpha}\right)^n\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{\sqrt{\alpha}-1}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\alpha)=\frac{n}{2}\ln\alpha+(\sqrt{\alpha}-1)\left(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n\right)$$

对 α 求导并令其为零，即得

$$\frac{d\ln L}{d\alpha}=\frac{n}{2\alpha}+\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n\right)=0$$

解得 α 的最大似然估计为

$$\hat{\alpha}=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^{-2}$$

2 解： (1) 由于 $E\bar{X}=\mu$，因此 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计量.

(2) 由于

$$ET = E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = E\bar{X}^2 - \frac{1}{n}ES^2$$

$$=D\bar{X} + (E\bar{X})^2 - \frac{1}{n}ES^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \mu^2$$

因此T是μ^2的无偏估计量.

八、（**12 分**）

1、解：三聚氰胺含量的均值μ的置信水平为 95%的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(15),\ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(15)\right),$$

即$\left(1.5 - \frac{0.36}{\sqrt{16}} \times 2.13,\quad 1.5 + \frac{0.36}{\sqrt{16}} \times 2.13\right) = (1.3083, 1.6917)$

所以μ的置信水平为 0.95 的置信区间为(1.3083,1.6917)

2、解：提出假设：H_0 :成年男性的平均身高等于 175 厘米或μ=175

H_1 :成年男性的平均身高不等于 175 厘米或$\mu \neq 175$

检验统计量为 $t = \dfrac{\bar{X} - 175}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域为$W = \{(x_1, \cdots, x_n) : |t| > t_{0.025}(15) = 2.13\}$.

将样本值代入统计量算出统计量的观测值为

$$|t| = \left|\frac{\bar{x} - 175}{s/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{174 - 175}{10/\sqrt{16}}\right| = 0.4 \notin W$$

所以接受原假设，认为成年男性的平均身高是 175 厘米.