

2017 级概率与数理统计试题 (A 卷)

一、填空题 (10 分, 每空 1 分)

1. 三次都没有击中目标; 2. 1; 3. 一定是; 4. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; 5. 0.25; 6. $\sigma^2 + \mu^2$; 7. 0.7; 8. 0.927; 9. $\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$; 10. $\{(x_1, x_2, \dots, x_{16}) : \bar{x} \geq 2.33\}$;

二、(12 分)

1. 设事件为 A 和 B , 当 $P(A) > 0$ 且 $P(B) > 0$ 时, A 和 B 互斥可以推出 A 和 B 不独立; 反之, A 和 B 独立则有 A 和 B 不互斥;

若 $P(A)$ 和 $P(B) > 0$ 至少一个为 0 时, 由互斥可以推出独立, 独立不一定互斥.

2. 解: 设 A 表示系统甲单独使用时有效, B 表示系统乙单独使用时有效

则已知条件为: $P(A) = 0.92, P(B) = 0.3, P(B | \bar{A}) = 0.85$

$$(1) P(B | \bar{A}) = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(BA)}{1 - P(A)}$$

$$\Rightarrow P(BA) = P(B) - P(B | \bar{A})[1 - P(A)] = 0.93 - 0.85 \times 0.08 = 0.862$$

$$P(B \cup A) = P(B) + P(A) - P(BA) = 0.92 + 0.93 - 0.862 = 0.988 \dots$$

$$(2) P(A | \bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(BA)}{1 - P(B)} = \frac{0.92 - 0.862}{1 - 0.93} = \frac{29}{35} = 0.829 \dots\dots$$

三、(12 分)

解: 1. 随机变量 X 的分布列为

X	-1	2	3
P	1/4	1/4	1/2

$$P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3/4$$

2. 解: (1) $P(|X| < 1/4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(2) 随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

显然当 $y \leq 0$ 时, $P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = 0$;

当 $y \in (0, 1)$ 时, $P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \sqrt{y}$

当 $y \geq 1$ 时, $P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = 1$

因此, Y 的分布函数为 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \sqrt{y}, & y \in (0, 1) \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$

Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}}, & y \in (0, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

四、(16 分)

1. 解: (1) X 的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 3e^{-3x} \int_0^{\infty} 4e^{-4y} dy, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 4e^{-4y} \int_0^{\infty} 3e^{-3x} dx, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 由于 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 因此 X 和 Y 相互独立.

(3) X 和 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-4y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$Z = \min(X, Y)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = 1 - P(X > z, Y > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) \\ &= 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) = \begin{cases} 1 - e^{-7z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

$$Z = \min(X, Y) \text{ 的密度函数为 } f_Z(z) = \begin{cases} 7e^{-7z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(4) $U = 3X + 4Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) = P(3X + 4Y \leq u) = \begin{cases} \iint_{\substack{3x+4y \leq u \\ x>0, y>0}} 12e^{-(3x+4y)} dx dy, & u > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 12 \int_0^{\frac{u}{3}} \int_0^{\frac{u-3x}{4}} e^{-(3x+4y)} dy dx, & u > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-u} - ue^{-u}, & u > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

$$U = 3X + 4Y \text{ 的密度函数为 } f_U(u) = \begin{cases} ue^{-u}, & u > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

五、(14 分)

1. 切比雪夫不等式为: 设随机变量 X 的期望 $EX = \mu$, 方差 $DX = \sigma^2 > 0$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 成立不

等式: $P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 或者 $P\{|X - \mu| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \dots\dots$

2.解：解：（1）

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 1 = 1.$$

$$E(Y) = E(X^2) = 2.$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx = 24.$$

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 24 - 4 = 20.$$

（2）因为

$$E(XY) = E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = 6.$$

所以，

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 6 - 1 \times 2 = 4.$$

所以

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{4}{\sqrt{1} \sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

（3）因为 $\rho_{XY} = \frac{2}{\sqrt{5}} \neq 0$ 所以， X 与 Y 相关.

因为 X 与 Y 相关，即存在线性关系，所以 X 与 Y 不独立。

六、（8分）

解：（1） $\because X_i \sim N(0, \sigma^2)$ ， $\therefore \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1), i=1, 2, \dots, 5$,

$$\text{且有 } \therefore X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2) \Rightarrow \frac{X_1 + X_2}{\sigma\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$$

$$\therefore \sum_{i=3}^5 \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(3), \text{即 } \frac{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3)$$

由独立性和 t 分布的定义知

$$\frac{\frac{X_1 + X_2}{\sigma\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}{3\sigma^2}}} \sim t(3), \text{即 } \frac{\sqrt{3}(X_1 + X_2)}{\sqrt{2(X_3^2 + X_4^2 + X_5^2)}} \sim t(3)$$

$$\text{（2）由（1）知 } \frac{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3), \frac{X_1 + X_2}{\sigma\sqrt{2}} \sim N(0, 1), \text{ 所以有 } \frac{(X_1 + X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$$

由独立性和 F 分布的定义知

$$\frac{\frac{(X_1 + X_2)^2}{2\sigma^2}}{\frac{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}{3\sigma^2}} = \frac{3}{2} \frac{(X_1 + X_2)^2}{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2} \sim F(1, 3)$$

七、(14 分)

解：(1) 由于 $EX = \sqrt{\alpha} + 1$ ，即 $\alpha = (EX - 1)^2$

令 $EX = \bar{X}$ ，解得 α 的矩估计为 $\alpha = (\bar{X} - 1)^2$

(2) 先求 p 的最大似然估计

$$\text{似然函数为 } L(p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\text{对数似然函数为 } \ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1-p)$$

$$\text{对 } p \text{ 求导并令其为零，得 } \frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} + \frac{n}{1-p} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0$$

$$\text{解得 } p \text{ 的最大似然估计值为 } p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\text{最大似然估计量为 } p = \bar{X}$$

$$\text{由最大似然估计的不变性知， } \beta = \frac{1-p}{p} \text{ 的最大似然估计为 } \hat{\beta} = \frac{1-\hat{p}}{\hat{p}} = \frac{1-\bar{X}}{\bar{X}}$$

八、(14 分)

1. 实际统计推断原理，又叫小概率原理：即在单次试验中，概率很小的事件几乎不会发生。

2. 提出假设 $H_0: \mu = 200$ ， $H_1: \mu \neq 200$ 。

$$\text{选取检验统计量 } t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \stackrel{H_0 \text{真}}{\sim} t(n-1), \text{拒绝域 } |t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$$

已知 $n = 9$ ， $\mu_0 = 200$ ， $\bar{x} = 197$ ， $s = 4.3589$ ， $\alpha = 0.05$ ，查表 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$

$$\text{计算 } |t| = \left| \frac{197 - 200}{4.5/\sqrt{9}} \right| = 2 < 2.306$$

接受 H_0 ，即在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下认为该卷装卫生纸净含量符合要求。