# 2020 级概率与数理统计试题（A 卷）

（本试卷共八个大题，满分 100 分；将每道题的答案写在答题卡对应的位置上，答题卡共 8 页，需要分别在第 1 页和第 5 页对应的位置填写座号、姓名、学院、班级、学号等信息，并用 2B 铅笔在相应的位置填涂学号；本试卷最后一页空白纸为草稿纸，可撕下；考试结束后试卷及草稿纸不用上交，答案写在草稿纸及试卷上无效）

附表：$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.64)=0.95$，$\Phi(1)=0.8413$，$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.05}(25)=1.7081$

$t_{0.025}(24)=2.4922$，$t_{0.025}(25)=2.4851$，$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.05}(25)=37.652$，$\chi^2_{0.95}(24)=13.848$

$\chi^2_{0.95}(25)=14.611$，$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$，$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$，$\chi^2_{0.975}(24)=14.401$，

$\chi^2_{0.975}(25)=13.120$

## 一、填空题（14 分）

1. 若在区间（0,1）内任取两个数，则事件“两数之和小于$\dfrac{6}{5}$”的概率为______.

2. 设随机变量 $K$ 服从均匀分布 $U(0,5)$. 则关于 $x$ 的方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的概率为______

3. 如果随机向量$(X,Y)$服从二维正态分布，则其边缘分布______（一定是，不一定是，一定不是）正态分布.

4. 设随机变量 $X\sim\chi^2(2)$，$Y$ 服从二项分布 $b(4,0.5)$，且相互独立，则 $D(XY)$=______.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是互相独立的随机变量序列，且均服从参数为 3 的泊松分布 $P(3)$，则当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(X_i-1)$ 依概率收敛于______

6. 设总体 $X$ 与 $Y$ 相互独立，$X\sim N(0,3)$，$Y\sim N(0,9)$，$X_1,X_2,X_3$ 与 $Y_1,Y_2,Y_3,Y_4$ 分别是取自 $X$ 与 $Y$ 的样本，令 $T=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2+Y_4^2}}$，则当 $c$=______时，统计量 $cT$ 服从 $t$ 分布 $t(4)$.

7. 设总体 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 均未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的样本。令 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Q=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则对假设检验问题 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，使用的检验统计量为______（用 $\bar{X},Q$ 表示）.

## 二、（12 分）

设甲袋有 5 个白球 6 个红球，乙袋有 10 个白球 9 个红球. 先从甲袋任取一球放入乙袋，再从乙袋任取一球.

1. 求从乙袋取得的是一个白球的概率；2. 若已知从乙袋取得的球是白球，求它是取自“从甲袋取一白球放入乙袋中”这种情况的概率.

三、（12 分）

1. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 $X$（分钟）服从期望为 5 的指数分布。某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开。若该顾客一个月要到银行 5 次，以 $Y$ 表示该顾客一个月未等到服务而离开窗口的次数.

（1）求 $Y$ 的分布律;（2）求 $P\{Y\geq 1\}$.

2. 设 $X\sim N(0,1)$，令 $Y=|X|$，求 $Y$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

四、（12 分）

设随机变量$(X,Y)$的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-2(x+y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

1. 确定常数 $k$ 的值；2. 求 $X$ 和 $Y$ 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；3. 判断 $X$ 和 $Y$ 是否相互独立，并给出理由；4. 求 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 和密度函数 $f_Z(z)$.

五、（8 分）

某厂商生产一件产品是合格品的概率为 0.8。已知生产一件合格品获利 10 元，生产一件次品亏损 5 元。问这家工厂生产 1 万件产品至少获利 69400 元的概率是多少？

六、（16 分）

二维随机变量$(X,Y)$在区域 $G=\{(x,y): |x|<y<1\}$上服从均匀分布，随机变量 $V$ 和$(X,Y)$独立，且 $V\sim N(0,\frac{1}{36})$，令 $U=2X-Y$，$Z=U+V+1$，

求 1. $E(X), E(Y), D(X), D(Y), Cov(X,Y)$；2. $E(Z), D(Z)$ 和 $\rho_{ZU}$.

七、（12 分）

设总体 $X$ 的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自该总体的样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为相应的样本观测值.

1. 求参数$\theta$ 的矩估计； 2.求参数$\theta$ 的最大似然估计；3. 求 $DX$ 的最大似然估计.

八、（14 分）

1. 叙述假设检验中犯第一类错误和犯第二类错误的定义。

2.某零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，按规定其方差$\sigma^2$不得超过 0.016。现从一批零件中随机抽取 25 件测量其长度，得样本方差为 0.025. 由此判断这批零件是否符合规定？（显著性水平$\alpha$=0.05）.