2019 级概率与数理统计试题（A 卷）

座号______________ 班级______________ 学号______________ 姓名______________

（本试卷共八个大题，满分 100 分；将每道题的答案写在答题卡对应的位置上，答题卡共 8 页，需要分别在第 1 页和第 5 页上方填写座号、姓名、学号、班级等信息，并用 2B 铅笔在相应的位置填涂学号；本试卷最后一页空白纸为草稿纸，可撕下；考试结束后试卷及草稿纸不用上交，答案写在草稿纸及试卷上无效）

附表：$\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.64)=0.95$，$t_{0.05}(36)=1.6883$，$t_{0.05}(35)=1.6896$

$t_{0.025}(35)=2.0301, t_{0.025}(36)=2.0281$

一、填空题（14 分）

1. 设事件 A，B，C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=$______.

2. 设随机变量 Y 服从期望为 1 的指数分布，则方程 $x^2+Yx+1=0$ 有实根的概率为______.

3. 设随机变量 X 服从均匀分布 $U(0,3)$，Y 服从均匀分布 $U(0,2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $P(X\le Y)=$______________.

4. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 -0.5，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X+Y|\ge 6\}\le$__________

5. 已知某厂生产的晶体管寿命服从均值为 100 小时的指数分布，现从该厂的产品中随机抽取 64 只，假设这些晶体管的寿命是相互独立的. 利用中心极限定理计算这 64 只晶体管的寿命总和超过 7000 小时的概率为________. （结果用标准正态分布的分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示）

6.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 $\mu\in R$，$\sigma>0$ 未知，$\bar{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差，给定 $0<\alpha<1$，则区间 $[\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)+1, \bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)+1]$ 包含 $\theta=\mu+1$ 的概率是 ________.

7.设总体 $X\sim N(\mu,1)$，其中 $\mu\in R$ 未知，$x_1,\ldots,x_9$ 是总体 X 的样本值，对假设检验问题

$H_0:\mu=2, H_1:\mu=3$，取拒绝域 $W=\{\bar{x}\ge 2.6\}$，则该检验犯第二类错误的概率是________.

（结果用标准正态分布的分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示）

二、（12 分）

某种产品分为正品和次品，次品不能出厂. 出厂的产品 4 件装一箱，检验前装入 0,1,2,3,4 件正品是等可能的，并以箱为单位出售. 由于疏忽，有一批产品未经检验就直接装箱出厂，某客户打开其中一箱，从中任意取出一件.

1. 求取出的一件是正品的概率；2. 若取出的是 1 件正品，求这一箱里没有次品的概率.

三、（12 分）

某仪器的工作寿命用随机变量 X 表示，且 X 服从数学期望为 2 的指数分布. 令 $Y=1-e^{-X/2}$.

1. 写出 X 的概率密度函数和分布函数；2. 证明: $P(X>s+t|X>s)=P(X>t)$，其中 $s>0$，$t>0$ 为常数；并叙述指数分布的无记忆性的含义; 3. 证明: $Y\sim U(0,1)$.

四、（12 分）

在袋中有 3 个球，分别标记号码 1、2、3，从中有放回地取两次，每次取一个球. 令随机变量 X 表示第一次取到的球的号码，随机变量 Y 表示两次取到的球的号码的较大值.

1. 求 X 和 Y 的联合分布律；2. 求 X 和 Y 的边缘分布律；

3. 判断 X 和 Y 是否独立；4. 求 $U=Y-X$ 的分布律.

五、（8 分）

总体 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，$X_1, X_2,\dots, X_6$ 是来自总体 X 的简单随机样本，令

$$Y=\frac{(X_1+X_2+X_3)^2}{X_4^2+X_5^2+X_6^2}$$

试判断 Y 服从什么分布（指出参数），并给出证明.

六、（16 分）

1. 一工厂生产的某种设备的寿命 X (以年计) 服从数学期望为 4 的指数分布，工厂规定，出售的设备若一年之内损坏可予以调换. 已知工厂售出一台设备赢利 1 万元，调换一台设备则需花费 2 万元. 试求厂方出售一台设备赢利的数学期望（单位：万元）.

2. 设随机变量（X, Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0<x<2, 0<y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 1. $E(X), E(Y), DX$，DY；2. $E(XY)$, $Cov(X, Y), \rho_{XY}$；3. $D(X+Y)$.

七、（12 分）

总体 X 的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta-1)e^{-(\theta-1)x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中$\theta>1$ 为未知参数. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自该总体的样本，$x_1, x_2, \dots, x_n$ 为相应的样本观测值.

1. 求参数θ 的矩估计量； 2.求参数θ 的最大似然估计量；3. 求 $R=P(X>1)$的最大似然估计.

八、（14 分）

1. 在假设检验问题中，（1）原假设 H_0 不真，但被接受，这种判断错误称为第几类错误？（2）原假设 H_0 正确，但被拒绝，这种判断错误又称为第几类错误？

2.某零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，按标准要求均值为 10.5. 今测得 36 个长度数据，计算得样本均值 $\bar{x}=11.08$，样本标准差 $s=0.516$. 问在显著性水平$\alpha=0.05$ 下，该零件的长度是否符合要求？