2018 级概率与数理统计试题（A 卷）

附表：

$\Phi(2)=0.9772$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.64)=0.95$，$\Phi(1)=0.8413$，$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.05}(25)=1.7081$，$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.025}(25)=2.0595$

一、填空题（16 分，将答案写在下面的表格中）

得分	

1. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=1/8$，则 A、B、C 全不发生的概率为_____.

2. 设随机变量 X 服从二项分布 $b(3, p)$，并且 $P(X=0)=1/27$，则 $p=$_____________.

3. 设随机变量 X_1 和 X_2 的分布律分别为：

$$\begin{array}{c|ccc} X_1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} X_2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{array},$$

且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}=$_____________.

4. 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $E[(X-2)(X-3)]=2$，则 $\lambda=$_____________.

5. 设总体 $X\sim\chi^2(m)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自该总体的一个样本，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 表示样本方差，则 $E(S^2)=$_______________.

6. 设总体 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \ldots, X_6$ 是来自该总体的样本，则当 $a=$______时，统计量 $\frac{a(X_1+X_2)}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2)}}$ 服从 t 分布，自由度为______.

7. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma_0^2)$ 的一个样本，其中 $\sigma_0^2>0$ 已知，$\bar{X}$ 是样本均值，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是样本方差，则 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为____________.

二、（10 分）

得分	

从过去经验得知一电子器件工厂中，一位新工人参加培训后能完成生产定额的概率为 0.86，而不参加培训能完成生产定额的概率为 0.35，假如该厂中 80%的新工人参加过培训.

1. 求一位新工人完成生产定额的概率是多少？

2. 若一位新工人已完成生产定额，求他参加过培训的概率是多少？

三、（12 分）

得分	

1. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 令 $Y=e^X$，求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

2. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} A\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中常数 $A>0$.令 $Y=\begin{cases} 0, & 0<x<\pi/4 \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$.

（1）求常数 A 的值；（2） 求 Y 的分布律.

四、（12 分）

得分	

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 服从参数为 1 的指数分布，$Y\sim U(0,1)$，试求：

1. X 和 Y 的联合概率密度；2. $P(X\le Y)$；3. $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$；

五、（16 分）

得分	

1. 两个随机变量 X 和 Y 不相关，则他们一定独立. 判断此命题是否正确，如正确请证明，如不正确请给出反例.

2. 设二维随机变量(X,Y)在矩形 $G=\{(x,y):0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases} 1, & X>Y \\ 0, & X\le Y \end{cases},\quad V=\begin{cases} 1, & X\le 2Y \\ 0, & X>2Y \end{cases}$$

试求（1）$EU,\ DU,\ EV,\ DV$；（2）$Cov(U,V),\ \rho_{UV}$；（3） 判断 U 与 V 是否独立，并说明理由.

六、（8 分）

得分	

某生产线上组装每件产品的时间服从同一指数分布，均值为 $\dfrac{1}{6}$（小时），且各件产品的组装时间是相互独立的，试求组装 100 件产品需要 15 小时至 20 小时的概率.

七、（12 分）

得分	

设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)\,x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中，$\theta>-1$为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$为取自该总体的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为相应的样本观测值. 1. 求参数θ的矩估计量； 2. 求参数θ的最大似然估计量.

八、（14 分）

得分	

1. 叙述实际推断原理；
2. 某纤维的强力服从正态分布 $N(\mu, 0.04^2)$，按设计要求均值为1.40. 今测得25个强力数据，计算得其平均值为1.39. 设方差稳定不变，问在显著性水平$\alpha=0.05$下，该纤维的强力是否符合要求？