北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

2013 级概率与数理统计试题 A 卷参考答案

一

解：设 A 表示取到的产品为次品；B_1 表示取到的产品是甲车间生产的;

B_2 表示取到的产品是乙车间生产的; B_3 表示取到的产品是丙车间生产的.

(1)由全概率公式得：

$$P(\mathrm{A})=\sum_{i=1}^{3}P(\mathrm{B}_i)P(\mathrm{B}_i\,|\,\mathrm{A})=0.2\times0.04+0.3\times0.03+0.5\times0.02=\frac{27}{1000}=0.027$$

(2) 由贝叶斯公式得：

$$P(\mathrm{B}_1\,|\,\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{B}_1)P(\mathrm{B}_1\,|\,\mathrm{A})}{P(\mathrm{A})}=\frac{0.2\times0.04}{0.027}=\frac{8}{27}=0.2963$$

二

1 解：（1）随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

（2）解法一：当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sqrt{X}\le y)$

$$=P(X\le y^2)=F_X(y^2)\quad =1-e^{-\frac{1}{\lambda}y^2}$$

故，$Y=\sqrt{X}$ 的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\lambda}y\,e^{-\frac{1}{\lambda}y^2}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

解法二：由于当 $x>0$ 时，$Y=\sqrt{X}$ 为单调增函数，反解得 $x=y^2$, 且

$x'=2y$，

所以 Y 的密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f(x)|x'|, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases} \dfrac{2}{\lambda}y\,e^{-\frac{1}{\lambda}y^2}, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

2. 解: (1)由归一性的 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{\pi} Axdx=\frac{1}{2}A\pi^2$，解得 $A=\frac{2}{\pi^2}$

(2) $P(X<\frac{\pi}{2})=\int_{-\infty}^{\pi/2} f(x)dx=\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi^2}xdx=\frac{1}{4}$

三

1 解： ⑴由密度函数的归一性：

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=C\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x+y)\mathrm{d}y=C\int_0^1\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{C}{2}$$

解得 $C=2$

（2） X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 2(x+y)\,dy=3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & 其它\end{cases},$$

Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 2(x+y)dx=1+2y-3y^2, & 0\le y\le 1 \\ 0, & 其他\end{cases},$$

易见 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 X 和 Y 不独立。

2．解：（1） $P(Y>\frac{1}{2}|X>\frac{1}{2})=\dfrac{P(Y>\frac{1}{2},X>\frac{1}{2})}{P(X>\frac{1}{2})}=\dfrac{1/8}{3/4}=\dfrac{1}{6}$

（2） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

被积函数的非 0 区域 为 ：

$$\begin{cases}|z-x|<x \\ 0<x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<z<2x \\ 0<x<1\end{cases}$$

当 z<0 时 ， $f_Z(z)=0$;

当$0 \le z \le 2$时， $f_Z(z) = \int_{z/2}^{1} 1dx = 1 - \frac{z}{2}$

当 z>2 时 ，$f_Z(z)=0$;

故 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \dfrac{z}{2}, 0 \le z \le 2 \\ 0 \quad\ ,\text{其他} \end{cases}$$

四

1.解: 由于 $X \sim U(a, b)$, 所以得

$$EX = \frac{a+b}{2} = 4, DX = \frac{(b-a)^2}{12} = 3,$$

解得: $a=1,b=7$

X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{x-1}{6}, & 1 \le x \le 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$$

2．解：易知（X,Y）的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/\pi, & x^2 + y^2 \le 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（1） $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \frac{1}{\pi} dy = 2\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2} \frac{1}{\pi} dx = 0$，

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 \frac{1}{\pi} dy = 2\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1-x^2} \frac{1}{\pi} dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 \sqrt{1-(\sin t)^2} d\sin t$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\sin t\cos t)^2 dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(\sin 2t)^2 dt$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{1}{4}$$

$DX=EX^2-(EX)^2=1$

（2） $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y)dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y \frac{1}{\pi} dx = 2\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2} \frac{1}{\pi} dx = 0$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}xy\frac{1}{\pi}dx=0$$

$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=0$

五

解：设 X 表示售出的 300 只面包中价格为 1 元的面包的个数，则

$X\sim B(300,0.3)$

且 $EX=300\times0.3=90$, $DX=300\times0.3\times0.7=63$

由中心极限定理

$$\frac{X-90}{\sqrt{63}}\sim N(0,1)$$

$$P(X>100)=P(\frac{X-90}{\sqrt{63}}>\frac{100-90}{\sqrt{63}})=1-\Phi(\frac{100-90}{\sqrt{63}})$$

$$=1-\Phi(\frac{100-90}{3\sqrt{7}})\approx 1-\Phi(1.26)=1-0.8962$$

六

1. 解：易知 $\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1), \mathrm{i}=1,2,\dots,10, \frac{Y_j}{\sigma}\sim N(0,1), \mathrm{j}=1,2,\dots,10$

所以有 $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(10)$ $\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{Y_j}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(10)$

由独立性得：$$\frac{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2}{\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{Y_j}{\sigma}\right)^2}=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_{10}^2}\sim F(10,10)$$

即所求统计量服从第一自由度为 10,第二自由度为 10 的 F 分布.

2. 解: 易知 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ ， 所以 $X_{n+1}-\bar{X}\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$

故 $\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\sim N(0,1)$ ， 又因为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

由于 $\bar{X}$ ， X_{n+1} 和 S^2 相互独立，所以

$$\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\Bigg/\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S}\sim t(n-1)$$

即当$c=\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$时 cY 服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布.

七

解：(1)由于

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{c}^{\infty}x\alpha c^{\alpha}x^{-(\alpha+1)}dx=\frac{c\alpha}{\alpha\text{-}1}$$

得$\alpha=\dfrac{EX}{EX-c}$

用 $\bar{X}$ 代替 EX 得 α 的矩估计为 $\hat{\alpha}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$

(2) 似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=(\alpha c^{\alpha})^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{-(\alpha+1}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\alpha)=n(\ln\alpha+\alpha\ln c)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

对 α 求导并令其为零，得

$$\frac{d\ln L}{d\alpha}=n\left(\frac{1}{\alpha}+\ln c\right)-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得 α 的最大似然估计为

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln c}$$

由于 $\mu=E(X)=\dfrac{c\alpha}{\alpha\text{-}1}$，因此 μ 的最大似然估计为

$$\hat{\mu}=\frac{c\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}\text{-}1}=\frac{c}{1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+\ln c}$$

八

解：（1）提出假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 200, H_1: \mu \neq \mu_0 = 200,$

选取检验统计量 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

构造拒绝域 $|z| > z_{\alpha/2}$

由已知，α=0.05，查表得 $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

n=16，$\bar{x} = 197.5$，$\sigma^2 = 25$.，计算得 $|z| = \left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{197.5 - 200}{5/4}\right| = 2 > 1.96$

故在显著性水平α=0.05 下,拒绝 H_0，认为洗涤剂净含量的均值不是额定的 200.

（2）给定$H_0: \mu = 200$，$H_1: \mu < 200$，针对拒绝域$W = \{\bar{x} < 197.55\}$，犯第一类错误的概率为

$$P(\bar{X} < 197.55 \mid \mu=200) = P\left(\frac{\bar{X} - 200}{5/\sqrt{16}} < \frac{197.55 - 200}{5/\sqrt{16}} \mid \mu=200\right) = \Phi\left(\frac{197.55 - 200}{5/\sqrt{16}}\right)$$

$$= \Phi(-1.96) = 1 - \Phi(1.96) = 0.025$$