2018级概率与数理统计试题（A卷）

附表：

$\Phi(2)=0.9772$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.64)=0.95$，$\Phi(3)=0.9987$，$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1/3)=0.6293$，

$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.05}(10)=1.8125$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$t_{0.025}(10)=1.8125$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，

$\chi^2_{0.95}(10)=3.940$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$，$\chi^2_{0.975}(10)=3.247$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.022$，$\chi^2_{0.025}(10)=20.483$，

$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.05}(10)=18.307$ ，$\sqrt{10}=3.16$

一、填空题（10分，将答案写在下面的表格中）

得分	

1. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=C\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}, \lambda>0, k=1,2,\cdots$，则常数 C 为_______.

2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(2,5)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(1,4)$，且 X 与 Y 相互独立，则概率 $P(X\leqslant Y+4)=$____________.

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从均匀分布 $U(0,\theta)$，则 $E\left[\min(X,Y)\right]=$____________.

4. 设总体 X 服从期望为 2 的指数分布，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则统计量 $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 的数学期望为____________.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 $\mu\in R$，$\sigma>0$ 均未知，$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 分别表示样本均值和样本方差，则对于给定的常数 α（$0<\alpha<1$），区间 $[\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$ 包含 μ 的概率是 __________________ .

二、（12分）

得分	

在数字通讯中，信号由 0 和 1 组成，因为有随机干扰，收到信号时，0 被误收作 1 的概率为 0.2，而 1 被误收作 0 的概率为 0.1，假定发送信号 0 与 1 的几率均等.

1. 求发送的是信号 0 且收到的也是信号 0 的概率；
2. 求收到的是信号 0 的概率；
3. 已知收到的是信号 0，求发出的是信号 0 的概率.

三、（10分）

得分	

1. 叙述“事件 A 概率为零”与“事件 A 为不可能事件”的关系，并给出例子支持你的结论.

2. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中常数 $\theta>0$，令 $Y=-2\theta\ln X$. 求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

四、（16 分）

得分	

设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ce^{-2x}, & x>0,0<y<x,\\ 0\ \ , & 其它.\end{cases}$$

1. 确定常数 C 的值；2. 求 X 与 Y 边缘概率密度函数 $f_X(x)$和 $f_Y(y)$，并判断 X 与 Y 是否独立；3. 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$；4. 求概率 $P(X\le Y+2)$.

五、（14 分）

得分	

1. 叙述两个随机变量 X 和 Y 的相关系数ρ_{XY}的含义.
2. 设 G 是由 x 轴、y 轴及直线 $2x+y-2=0$ 所围成的区域，二维随机变量(X,Y)在 G 内服从均匀分布．求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

六、（10 分）

得分	

已知随机变量 $X_1, X_2,\ldots, X_{100}$ 独立同分布且均服从 $U(0, 1)$, 令 $Y=X_1\cdot X_2\cdots X_{100}$，求 $Y<e^{-80}$ 的概率的近似值.

七、（14 分）

得分	

设总体 X 服从参数为 p 的几何分布，其中 $0<p<1$ 为未知参数， $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为取自该总体的样本， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应的样本观测值.

1. 求参数 p 的矩估计；2. 求 p 的最大似然估计.

八、（14 分）

得分	

1. 在假设检验问题中

（1）若检验结果是接受原假设，则检验可能犯哪一类错误？

（2）若检验结果是拒绝原假设，则检验又有可能犯哪一类错误？

2. 某厂生产的汽车电池使用寿命服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其说明书上写明其标准差不超过 0.9 年。现随机抽取 10 个，得样本均值为 4 年，样本标准差为 1.2 年。试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验厂方说明书上所写的标准差是否可信.