2010-2011 年概率论与数理统计 1 答案（信二学习部整理）

一,

解：A_i={他第 i 次及格}，i=1,2

已知 $P(A_1)=P(A_2|A_1)=P$，$P(A_2/\bar{A}_1)=\dfrac{P}{2}$

（1）B={至少有一次及格}

所以 $\bar{B}=\{两次均不及格\}=\bar{A}_1\bar{A}_2$

∴

$P(B)=1-P(\bar{B})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)$------------------------------------4 分

$=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2|\bar{A}_1)]$

$=1-(1-P)(1-\dfrac{P}{2})=\dfrac{3}{2}P-\dfrac{1}{2}P^2$--2 分

（2）由乘法公式，有 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P^2$ -------------------------2 分

由全概率公式，有 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)$

$=P\cdot P+(1-P)\cdot\dfrac{P}{2}$

$=\dfrac{P^2}{2}+\dfrac{P}{2}$

------------------------------2 分

得 $P(A_1|A_2)=\dfrac{P^2}{\dfrac{P^2}{2}+\dfrac{P}{2}}=\dfrac{2P}{P+1}$ ----------------------2 分

二、

解： 1、$\boldsymbol{Y=\ln X}$ 的可取值范围是$(-\infty,\infty)$

由 $\boldsymbol{y=\ln x}$ 得 $\boldsymbol{y'=\dfrac{1}{x}>0}$

故 $\boldsymbol{y=\ln x}$ 在 $(0,\infty)$ 上严格单增，

其反函数 $\boldsymbol{x=h(y)=e^y}$ ，且 $\boldsymbol{h'(y)=e^y}$ ………(6 分)

所以 $\boldsymbol{Y=\ln X}$ 的密度函数

$\boldsymbol{f_Y(y)=f_X(e^y)|e^y|}$ ………(2 分)

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{y}\sigma}e^{-\frac{\left(\ln e^{y}-\mu\right)^{2}}{2\sigma^{2}}}e^{y}$$

………(2 分)

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^{2}}{2\sigma^{2}}}\ ,\ -\infty<y<\infty$$

2、因为

$$\begin{aligned}P\left(|X-\mu|<\sigma\right)&=P\left(-\sigma<X-\mu<\sigma\right)\\&=\Phi(1)-\Phi(-1)\\&=2\Phi(1)-1\end{aligned}$$

所以，随着σ 的增大，概率 $P\left(|X-\mu|<\sigma\right)$ 是不变的

………(4 分)

三、

解：（1）（X,Y）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1\le x\le 3, 1\le y\le \\ 0, & 其它\end{cases}$$ ………(4 分)

（2） $$f_X(x)=\begin{cases}\int_1^3\frac{1}{4}dy, & 1\le x\le 3\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1\le x\le 3\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_1^3\frac{1}{4}dx, & 1\le y\le \\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1\le y\le \\ 0, & 其它\end{cases}$$ ………(6 分)

（3）因为 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

所以 X 和 Y 独立。………(2 分)

（4） $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_1^{z-1}\frac{1}{4}dx, & 2\le z\le 4\\ \int_{z-3}^{3}\frac{1}{4}dx, & 4<z\le 6\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4}(z-2), & 2\le z\le 4\\ \frac{1}{4}(6-z), & 4<z\le 6\\ 0, & 其它\end{cases}$$

先求 U 的分布函数：

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0\\ \dfrac{4-2\times\frac{1}{2}\times(2-u)^2}{4}, & 0\le u\le 2\\ 1, & u>2\end{cases}=\begin{cases}0, & u<0\\ 1-\frac{1}{4}\times(2-u)^2, & 0\le u\le 2\\ 1, & u>2\end{cases}$$

求导数得 U 的密度函数为

$$f_U(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}\times(2-u), & 0\le u\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ ………(6 分)

四、

解：(1) 由 X,Y 的密度函数易知

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ 1-e^{-y}, & y>0.\end{cases}$$

从而

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\max(X,Y)\le z)=P(X\le z,Y\le z)$$

$$=P(X\le z)\cdot P(Y\le z)=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ (1-e^{-\frac{1}{2}z})(1-e^{-z}), & z>0.\end{cases}$$

故

$$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}+e^{-z}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}z}, & z>0.\end{cases}$$

(2) 由指数分布的期望与方差易知

$$\int_0^\infty x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda},\quad \int_0^\infty x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$ 因此

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}zf_Z(z)dz=\int_0^\infty z(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}+e^{-z}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}z})dz$$

$$=\int_0^\infty z\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}dz+\int_0^\infty z\cdot e^{-z}dz-\int_0^\infty z\cdot\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}z}dz$$

$$=2+1-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}.$$

又

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z)dz=\int_0^{\infty} z^2(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}+e^{-z}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}z})dz$$

$$=\int_0^{\infty} z^2\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}dz+\int_0^{\infty} z^2\cdot e^{-z}dz-\int_0^{\infty} z^2\cdot\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}z}dz$$

$$=2\cdot 2^2+2\cdot 1^2-2(\frac{2}{3})^2=\frac{82}{9}.$$

最终 $Var(Z)=E(Z^2)-E^2(Z)=\frac{82}{9}-(\frac{7}{3})^2=\frac{11}{3}.$

五、

解 设第 k 位顾客的消费额为 $X_k(k=1,2,...,10000)$，商场日销售额为 X ，则

$X=\sum_{k=1}^{10000} X_k$ ，由已知

$$\mathrm{E}(X_k)=\frac{200+2000}{2}=1100，$$

$$\mathrm{D}(X_k)=\frac{(2000-200)^2}{12}=\frac{1800^2}{12}=270000；\qquad ---------- \quad 2\text{ 分}$$

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{10000}\mathrm{E}(X_k)=10000\times 1100=11\times 10^6，$$

$$\mathrm{D}(X)=\sum_{k=1}^{10000}\mathrm{D}(X_k)=10000\times 270000=27\times 10^8。\qquad --------- \quad 2\text{ 分}$$

进而，由中心极限定理，

$$\mathrm{P}\{11\times 10^6-30000\le X\le 11\times 10^6+30000\}$$

$$=\mathrm{P}\{-\frac{30000}{100\times\frac{1800}{\sqrt{12}}}\le\frac{X-11\times 10^6}{100\times\frac{1800}{\sqrt{12}}}\le\frac{30000}{100\times\frac{1800}{\sqrt{12}}}\}$$

$$=2\Phi(\frac{30000}{30000\times\sqrt{3}})-1$$

$$=2\Phi(\frac{1}{\sqrt{3}})-1\approx 2\Phi(0.58)-1\approx 0.44 \qquad ---------- \quad 4\text{ 分}$$

六、

解：(1)由于

$EX=\lambda+1$ ……………3 分

令 $EX=\bar{X}_n$ 即 $\lambda+1=\bar{X}_n$ ……………3 分

解得 λ 的矩估计为

$\hat{\lambda}=\bar{X}_n-1$ ……………3 分

(2) 似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda+1}e^{-\frac{1}{\lambda+1}x_i}=(\lambda+1)^{-n}e^{-\frac{1}{\lambda+1}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$ ……………2 分

对数似然函数为

$$\ln L(\lambda)=-n\ln(\lambda+1)-\frac{1}{\lambda+1}\sum_{i=1}^{n}x_i$$ ……………2 分

对 λ 求导并令其为零，得

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda+1}+\frac{1}{(\lambda+1)^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$ ……………1 分

解得 λ 的最大似然估计为

$$\hat{\lambda}=\bar{x}_n-1$$ ……………2 分

由于 $EX=\lambda+1$，因此 EX 的最大似然估计为

$$\hat{\lambda}+1=\bar{x}_n$$ ……………2 分

七、

解：（1）检验该门成绩的平均分是否为 70。

假设 H_0： $\mu=70$； H_1： $\mu\neq 70$ 。

选取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-70}{S/\sqrt{n}}$，

构造拒绝域： $|t|\geq t_{0.025}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.030$ ------4 分

计算得：$t=\dfrac{64-70}{15/6}=-2.4$ 故拒绝 H_0，可以认为这门课程的平均成绩与 70 分有显著性差异。 ------2 分

（2）检验该门课程成绩的方差是否低于 210。

假设 $H_0:\sigma^2\leq 210,\quad H_1:\sigma^2>210$

选取检验统计量 $\chi^2=(n-1)\dfrac{S^2}{210}$，

构造拒绝域： $\chi^2\geq\chi^2_{0.05}(n-1)=\chi^2_{0.05}(35)=49.802$ ------4 分

由样本计算得：$\chi^2=35\times\dfrac{225}{210}=37.50.$ 故不拒绝 H_0，可以认为该成绩的方差没有显著地大于 210。 ------2 分