2015级概率与数理统计试题（A卷）

一、（12分）

1． 解:设事件 A_i={从第 i 箱取的零件}，

B_i={第 i 次取的零件是一等品}

（1）由全概率公式知：

$$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$$

（2）

$$P(B_1B_2)=P(A_1)\times P(B_1B_2\mid A_1)+P(A_2)\times P(B_1B_2\mid A_2)=\frac{1}{2}.\frac{2\times1}{10\times9}+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{90}$$

则 $P(B_2|B_1)=\dfrac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\dfrac{2}{27}$

二、（12分）

解 （1）Y 可能取值为$1,2,\cdots\cdots$，

记 p 为观测值大于 3 的概率，

则 $p=P(X>3)=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2dx=\dfrac{1}{8}$，

从而 $P\{Y=n\}=(1-p)^{n-1}p=(\dfrac{1}{8})\ (\dfrac{7}{8})^{n-1}$， $n=1,2,3,\cdots$

为 Y 的概率分布；

（2）Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\le y\}=P\{X\ge(1-y)^3\}$$

$$=1-P\{X\le(1-y)^3\}=1-F_X((1-y)^3)$$

则： $f_Y(y)=F_Y'(y)=-F_X'((1-y)^3)3(1-y)^2(-1)=3(1-y)^2f_X((1-y)^3)$

$$=3(1-y)^2\frac{1}{\pi[1+(1-y)^6]}$$

三、(16 分)

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$$

(2) $\because f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\therefore X$和$Y$相互独立

(3) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases} \quad f_Y(z-x)=\begin{cases}\beta e^{-\beta(z-x)}, z-x>0\\ 0, \quad z-x\le 0\end{cases}$$

被积函数表达式的非零区域为

$$\begin{cases}x>0\\ z-x>0\end{cases}$$

当$z\ge 0$时

$$f_Z(z)=\int_0^{\alpha}\alpha e^{-\alpha x}\beta e^{-\beta(z-x)}dx=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right)$$

当$z<0$时

$$f_Z(z)=0$$

因此，$Z=X+Y$的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right), z>0\\ 0, \quad z\le 0\end{cases}$$

(4) 由已知得

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}, F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$$

故

$$F_U(u)=1-\left[1-F_X(u)\right]\left[1-F_Y(u)\right]=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)u}, u>0\\0, \quad u\le 0\end{cases}$$

因此

$$f_U(u)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)u}, u>0\\0, \quad u\le 0\end{cases}$$

四、（16 分）

(1) $E(X)=\int_0^1 3x^3dx=\frac{3}{4}$

$$E(Y)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$$

(2) $E(X^2)=\int_0^1 3x^4dx=\frac{3}{5}$

$$E(Y^2)=1\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$$

所以，

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{3}{80}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{3}{16}$$

因此，由独立性

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)=\frac{9}{40}$$

(3) 由独立性，cov(X,Y)=0，所以

$$cov(X+Y,X-Y)=D(X)-D(Y)=-\frac{3}{20}$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\frac{9}{40}$$

所以，

$$\rho_{X+Y,X-Y}=\frac{\mathrm{cov}(X+Y,X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)D(X-Y)}}=-\frac{2}{3}$$

五、（8 分）

解：（1）这是 100 重贝努里试验，

所以 X 服从二项分布 $\boldsymbol{B(100, 0.2)}$，即

$$P(X=k)=C_{100}^{k}0.2^{k}0.8^{100-k},\quad k=0,1,....,100$$

（2）由二项分布的数字特征，有

$$\mu = E(X) = 100\times 0.2 = 20;\qquad \sigma^2 = D(X) = 100\times 0.2\times 0.8 = 16.$$

所以由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理，得

$$\begin{aligned}&P(14\le X\le 30) = P(\frac{14-20}{\sqrt{16}}\le\frac{X-20}{\sqrt{16}}\le\frac{30-20}{\sqrt{16}})\\&\approx \Phi(2.5)-\Phi(-1.5) = \Phi(2.5)-[1-\Phi(1.5)]\\&= 0.9938-[1-0.9332] = 0.927.\end{aligned}$$

六、（8 分）

解：易知 $Y_1\sim N(\mu,\sigma^2/6)$, $Y_2\sim N(\mu,\sigma^2/3)$,

由于 Y_1 和 Y_2 独立 ，所以 $Y_1 - Y_2\sim N(0,\sigma^2/2)$

$$\frac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}\sim N(0,1),$$

$$\frac{2S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2\Big/\sigma^2\sim\chi^2(2),$$

由于 $Y_1 - Y_2$ 和 $\frac{2S^2}{\sigma^2}$ 独立，所以

$$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}\Bigg/\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2}\Big/2}\sim t(2)。$$

七、（12 分）

解：（1） $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx=\int_{2}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-2}{\theta}}dx=\theta+2$

解得 $\theta=EX-2$

用 $\bar{X}$ 代替 EX 的矩估计为 $\hat{\theta}_1=\bar{X}-2$

（2）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i-2}{\theta}}=\theta^{-n}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-2}{\theta}}=\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)}$$

对数似然函数为：

$$\ln L(\theta)=\ln(\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)})=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)$$

求导数并令导函数为 0 得：

$$-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)=0$$

解得最大似然估计为：

$$\hat{\theta}_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)}{n}=\bar{x}-2$$

$E\hat{\theta}_2=E(\bar{X}-2)=E(\bar{X})-2=E(X)-2=\theta$ 。

所以 $\hat{\theta}_{MLE}$ 是θ的无偏估计。

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,\theta)dx=\int_{2}^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-2}{\theta}}dx=\int_{0}^{+\infty}(t+2)^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}dt=\int_{0}^{+\infty}(t^2+4t+4)\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty}t^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}dt+4\int_{0}^{+\infty}t\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}dt+\int_{0}^{+\infty}4\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}dt=2\theta^2+4\theta+4=\theta^2+(\theta+2)^2$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\theta^2$$

$$D\hat{\theta}_2 = D(\bar{X}-2) = D(\bar{X}) = D(X)/n = \theta^2/n$$

八、（16 分）

解：　1 (1) 检验统计量为 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域为$W=\{t \ge t_{0.05}(24)=1.7109\}$

由$n=25, \bar{x}=102, s^2=16$计算得：$t$=2.5>1.7109

因此，拒绝$H_0: \mu \le 100$.

(2) 检验统计量为$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

拒绝域为$W=\{(x_1,\cdots,x_n): \chi^2 \le \chi^2_{0.95}(24)=13.848\}$

由$n=25, s^2=16$计算得$\chi^2=\dfrac{24S^2}{32}=12<13.848$，

因此，拒绝$H_0: \sigma^2 \ge 32$.

2. 由于当原假设$H_0: \lambda=3$成立时，$X_1+X_2+X_3 \sim \pi(9)$，

因此犯第一类错误的概率为

$$\alpha = P\left(X_1+X_2+X_3 \le 1.5\right) = P\left(X_1+X_2+X_3=0\right)+P\left(X_1+X_2+X_3=1\right)=10e^{-9}$$

由于当备择假设$H_1: \lambda=1/3$成立时，$X_1+X_2+X_3 \sim \pi(1)$，

因此犯第二类错误的概率为

$$\beta = P\left(X_1+X_2+X_3 > 1.5\right) = 1-P\left(X_1+X_2+X_3=0\right)-P\left(X_1+X_2+X_3=1\right)=1-2e^{-1}$$