2019级概率与数理统计试题（A卷）

一、填空题

1. $\frac{21}{64}$; 2. $2-2\Phi(1)$；3. 2; 4.一定；5. 0.8；6. $\pm\sqrt{2}$；7. $\frac{2}{3}$；8. 不一定

二、

解：设 A 表示"目标被击落"，B_1，B_2，B_3 分别表示"甲、乙、丙击中目标"，C_i 表示"有 i 个人击中目标"，$i=1$，2，3

则由已知得

$$P(B_1)=0.4,\quad P(B_2)=0.5,\quad P(B_3)=0.8$$

$$C_1=B_1\bar{B}_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1B_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1\bar{B}_2B_3,$$

$$P(C_1)=P(B_1\bar{B}_2\bar{B}_3)+P(\bar{B}_1B_2\bar{B}_3)+P(\bar{B}_1\bar{B}_2B_3)=0.34$$

$$C_2=B_1B_2\bar{B}_3\cup B_1\bar{B}_2B_3\cup\bar{B}_1B_2B_3$$

$$P(C_2)=P\left(B_1B_2\bar{B}_3\right)+P\left(B_1\bar{B}_2B_3\right)+P\left(\bar{B}_1B_2B_3\right)=0.44$$

$$C_3=B_1B_2B_3$$

$$P(C_3)=P\left(B_1B_2B_3\right)=0.16$$

由全概率公式得 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(C_i)P(A|C_i)=0.526$

三、

1. （1）当 $x\le 100$ 时，$F(x)=0$

当 $x>100$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{100}^{x}\frac{100}{x^2}=1-\frac{100}{x}$

因此，X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\frac{100}{x}, & x>100\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2） $P\{X\le 200\}=F(200)=\frac{1}{2}$，$P\{X>300\}=1-F(300)=\frac{1}{3}$

3．易知 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$e^{-\frac{1}{\lambda}x}=1-y$

$-\frac{1}{\lambda}x=\ln(1-y)$

$Y=1-e^{-\frac{1}{\lambda}X}$ 的可取值范围为(0,1)，

由 $y'=\dfrac{1}{\lambda}3e^{-\frac{1}{\lambda}x}>0$，可知 y 是严格单调递增函数

$-\lambda$

其反函数为 $x=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-y)$，　$x'=\dfrac{1}{\lambda(1-y)}$

故 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\right]}\left|\dfrac{1}{\lambda(1-y)}\right|, & 0<y<\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1, & 0<y<\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

四、

解：1 由 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$ 得到

$$\int_0^1\int_0^{\infty}ce^{-x}ydxdy=\frac{c}{2}=1\Rightarrow c=2.$$

2、X 的边缘概率密度函数为　$\displaystyle f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$

当$x>0$时，$f_X(x)=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}y\,dy=e^{-x}$. 当$x\le 0$时，$f_X(x)=0$.

因此 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

Y 的边缘概率密度函数为 $\displaystyle f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$

由于　$f_Y(y)=\displaystyle\int_0^{\infty}2e^{-x}ydx=2y, 0<y<1.$

因此 $f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,所以 X 与 Y 相互独立.

3、由于 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　$f_Y(z-x)=\begin{cases}2(z-x), & 0\le z-x<1\\ 0, & \text{其 他}\end{cases}$

因此 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z e^{-x}2(z-x)dx, & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^z e^{-x}2(z-x)dx, & 1\le z\\ 0, & \text{其 他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2z+2e^{-z}-2, & 0\le z<1\\ 2e^{-z}, & z\ge 1\\ 0, & \text{其 他}\end{cases}$$

五、

解：设 X 表示一只蛋糕的价格。

易求得 $EX=10\times0.3+15\times0.4+20\times0.3=15$

$EX^2=10^2\times0.3+15^2\times0.4+20^2\times0.3=240$

$DX=EX^2-(EX)^2=15$

令 X_i 表示售出的第 i 只蛋糕的价格，则 $EX_i=15, DX_i=15$.

由中心极限定理得

$$\frac{\sum_{i=1}^{375}X_i-375\times15}{\sqrt{375\times15}}=\frac{\sum_{i=1}^{375}X_i-5625}{75}\sim N(0,1)$$

所以有

$$P(\sum_{i=1}^{375}X_i>5775)=P(\frac{\sum_{i=1}^{375}X_i-375\times15}{\sqrt{375\times15}}>\frac{5775-375\times15}{\sqrt{375\times15}})$$

$$=1-\Phi(2)=0.0228$$

六、

1 随机变量 X 和 Y 独立：指对任意的实数 x, y，有

$$P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$$

随机变量 X 和 Y 不相关：X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$.

独立与不相关之间的关系:

若 X 和 Y 独立，则 X 和 Y 不相关；若 X 和 Y 不相关，则 X 和 Y 不一定独立.

解：1 由于 $E(X)=1, D(X)=1$，$E(Y)=E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=1+1^2=2$.

$$E(Y^2)=E(X^4)=\int_{-\infty}^{\infty}x^4e^{-x}\mathrm{d}x=24,$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)^2]=24-2^2=20.$$

$$E(XY)=E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3e^{-x}\mathrm{d}x=6,$$

因此 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=6-1\times 2=4.$

$\boldsymbol{D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)=29}$

七、

解：1. $\mu_1=EX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int\limits_{e}^{+\infty}x\theta e^{\theta}x^{-(\theta+1)}dx=\dfrac{e\theta}{\theta-1}$

解方程得 $\theta=\dfrac{\mu_1}{e-\mu_1}$

用 $\bar{X}$ 代替 μ_1 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{e-\bar{X}}$.

2. 似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta e^{\theta}x_i^{-(\theta+1)}=\theta^n e^{n\theta}\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-(\theta+1)}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

似然方程为

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L=\frac{n}{\theta}+n-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=$$

解方程得 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-1}$ 即最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i-1}$

3. 由于 $EX=\dfrac{e\theta}{\theta-1}$，所以其最大似然估计为 $EX=\dfrac{e}{2-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$

八、

1、（1）第一类错误 （2）第二类错误

2、解：提出假设 H_0: $\mu\le 40$， H_1: $\mu>40$.

选取检验统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{H_0\text{真}}{\sim}N(0,1)$

拒绝域 $z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge z_\alpha$

查表 $z_{\alpha}=z_{0.05}=1.64$,

计算 $z=\dfrac{41-40}{2/\sqrt{16}}=2>1.64$

拒绝 H_0，即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下认为平均钢板厚度有显著提高.