



课程编号: MTH17037 北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

## 2013 级概率与数理统计试题 A 卷

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

(本试卷共 7 页, 八大题, 满分 100 分; 最后一页空白纸为草稿纸)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

附表:  $\sqrt{19} = 4.36$ ,  $\sqrt{15} = 3.873$ ,  $\sqrt{7} = 2.646$ ,  $\sqrt{5} = 2.236$ ,  $\sqrt{3} = 1.732$ , $\Phi(1.26) = 0.8962$ ,  $\Phi(1.376) = 0.9162$ ,  $\Phi(1.645) = 0.95$ ,  $\Phi(1.96) = 0.975$ , $t_{0.05}(9) = 1.8331$ ,  $t_{0.05}(10) = 1.8125$ ,  $t_{0.05}(15) = 1.7531$ ,  $t_{0.05}(16) = 1.7459$ , $t_{0.025}(9) = 2.2622$ ,  $t_{0.025}(10) = 2.2281$ ,  $t_{0.025}(15) = 2.1315$ ,  $t_{0.025}(16) = 2.1199$ , $\chi^2_{0.95}(9) = 3.325$ ,  $\chi^2_{0.05}(9) = 16.919$ ,  $\chi^2_{0.975}(9) = 2.700$ ,  $\chi^2_{0.025}(9) = 19.02$ , $\chi^2_{0.90}(9) = 4.168$ ,  $\chi^2_{0.1}(9) = 14.684$ ,  $\chi^2_{0.90}(10) = 4.865$ ,  $\chi^2_{0.1}(10) = 15.987$ .

- 一、(10 分) 某厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种型号的产品, 其次品率分别为 4%, 3%, 2%, 三个车间的产量各占总产量的 20%、30%、50%, 生产出来的产品存放于同一库房中. (1) 从库房中任取一件此种型号的产品, 求取到的是一件次品的概率;
- (2) 若已知取得的这件产品是次品, 求它来自甲车间的概率.

二、(12 分) 1. 设随机变量  $X$  服从数学期望为  $\lambda$  的指数分布 ( $\lambda > 0$ ) .

(1) 写出  $X$  的概率密度函数; (2) 求  $Y = \sqrt{X}$  的概率密度函数.

2. 设随机变量  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} Ax, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 确定常数  $A$ ; (2) 求  $P\left\{X < \frac{\pi}{2}\right\}$ .

三、(20 分) 1. 设二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x+y), & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 确定常数  $C$ ; (2) 求边缘概率密度函数  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$ , 并判断  $X$  和  $Y$  是否相互独立 (需说明理由).

2. 设二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, \ 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求  $P\left\{Y > \frac{1}{2} \mid X > \frac{1}{2}\right\}$ ; (2) 求  $Z = X+Y$  的概率密度函数  $f_Z(z)$ .

四、(14 分) 1. 设随机变量  $X \sim U(a, b)$ , 且  $E(X) = 4$ ,  $D(X) = 3$ , 求  $X$  的分布函数.

2. 设二维连续型随机变量  $(X, Y)$  在区域  $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$  上服从均匀分布. (1) 求  $X$  的数学期望  $E(X)$  与方差  $D(X)$ ; (2) 求  $X$  与  $Y$  的协方差  $Cov(X, Y)$ .

五、(6分) 一食品店有三种面包出售, 由于售出哪一种面包是随机的, 因而售出一只面包的价格是一个随机变量, 它取 1 元, 2 元, 3 元的概率分别为 0.3, 0.5, 0.2. 若售出 300 只面包, 求售出价格为 1 元的面包多于 100 只的概率.

六、(10分) 1. 设总体  $X \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $Y \sim N(0, \sigma^2)$ , 且两个总体相互独立,  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  是来自总体  $X$  的样本,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$  是来自总体  $Y$  的样本. 求统计量

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2}{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_{10}^2}$$

所服从的分布 (写出分布和自由度, 并说明理由).

2. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$  是来自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ,

令  $Y = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S}$ . 试确定常数  $C$ , 使  $CY$  服从  $t$  分布, 并指出自由度.

七、(16分) 1. 设总体  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \alpha c^\alpha x^{-(\alpha+1)}, & x > c, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中  $c > 0$  为已知,  $\alpha > 1$ ,  $\alpha$  为未知参数.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的样本,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为相应的样本值. (1) 求参数  $\alpha$  的矩估计; (2) 求参数  $\alpha$  和总体均值  $\mu = E(X)$  的最大似然估计.



八、(12 分)设某自动灌装机灌装的瓶装洗涤剂的净含量(单位:克)服从正态分布 $N(\mu, 5^2)$ , 某日从它灌装的洗涤剂中随机地抽取 16 瓶, 测得净含量的观察值, 经计算得样本均值为  $\bar{x} = 197.5$ .

(1) 能否认为这一天洗涤剂净含量的均值为 200, 显著性水平 $\alpha=0.05$ .

(2) 若希望知道洗涤剂净含量的均值是 200 还是不足 200, 给定原假设为净含量的均值是 200, 备择假设为均值不足 200, 针对拒绝域  $W=\{\bar{x} < 197.55\}$ , 问该检验犯第一类错误的概率为多少?

