概率与数理统计练习 4 参考答案

一、填空题

1. $\underline{1/2}$ ； 2. $\underline{\quad 2/3}$; 3. $\underline{0}$; 4. $\underline{\quad 2 \quad}$; 5. $\underline{\quad 2m \quad}$ 6. $\sqrt{2}$,4 7. $(\overline{x} \pm \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}})$.

二

解：设 A 表示工人完成了定额，B 表示该工人参加了培训，则 $\overline{B}$ 表示该工人没有参加培训.

依题意，已知 $P(B)=0.8$， $P(\overline{B})=0.2$， $P(A|B)=0.86$，$P(A|\overline{B})=0.35$

（1） 由全概率公式

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0.8\times0.86+0.2\times0.35=0.7580$$

（2）由贝叶斯公式

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{0.86\times0.8}{0.7580}=0.9077$$

三 1. X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$

易知 $y=e^x$ 为增函数. 且易知：当 $-\infty<x<+\infty$ 时，y>0.

反函数为 $x=lny$， $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$，所以 Y 的密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0\\ 0\ , & \text{其它.}\end{cases}$$

2. （1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，得 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}A\cos xdx=2A$，故 $A=\frac{1}{2}$.

（2）因为 $P(0<X<\frac{\pi}{4})=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\cos xdx=\frac{\sqrt{2}}{4}$

所以 Y 的分布律为

Y	0	1
P	$\sqrt{2}/4$	$1-\sqrt{2}/4$

四

1．解：根据题意， $X\sim Exp(1)$， $Y\sim U(0,1)$，则其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它;}\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它;}\end{cases}$$

因为 X 和 Y 相互独立，则 (X,Y) 的联合密度函数为：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,0<y<1\\ 0, & \text{其它;}\end{cases}$$

2．根据题意，所求概率为

$$P(X\le Y)=\iint\limits_{x\le y}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^1e^{-x}dy=e^{-1},$$

3. $Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^z e^{-x}\mathrm{d}x, & 0<z\le1\\ \int_{z-1}^z e^{-x}\mathrm{d}x, & z>1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z\le1\\ e^{-z}(e-1), & z>1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

五

1. 此命题不正确，X 和 Y 不相关，说明没有线性关系，可能有其他关系，故可能不独立。如：设 X 和 Y 服从圆域上的均匀分布，则两变量不相关，但也不独立。

2 解：由于区域 G 的面积为 2，因此 $(X,\ \ Y)$ 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1/2 & (x,\ \ y)\in G\\ 0 & (x,\ \ y)\notin G\end{cases}$

$$P(U=1)=P(X>Y)=\iint\limits_{x>y}f(x,y)dxdy=\int_0^1dy\int_y^2\frac{1}{2}dx=\frac{3}{4}$$

$$P(U=0)=1-P(U=1)=\frac{1}{4}$$

$$P(V=1)=P(X\le 2Y)=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)dxdy=\int_0^1dy\int_0^{2y}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$$

$$P(V=0)=1-P(V=1)=\frac{1}{2}$$

由 0-1 分布的性质知：$EU=\frac{3}{4}$，$DU=\frac{3}{16}$，$EV=\frac{1}{2}$，$DV=\frac{1}{4}$

$$P(UV=1)=P(U=1,V=1)=P(X>Y,X\le 2Y)=P(Y<X\le 2Y)=\int_0^1dy\int_y^{2y}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{4}$$

$$P(UV=0)=1-P(UV=1)=\frac{3}{4}$$

$$EUV=\frac{1}{4}$$

所以 $\operatorname{cov}(U,V)=EUV-EUEV=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}$

$$\rho_{UV}=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=\frac{-\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{1}{4}}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因为$\rho_{UV}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\neq 0$，所以 U 和 V 相关，所以不独立。

六

解：设 X_i 表示组装第 i 件产品所需要的时间，$i=1,2,\ldots,100$

则 X_i 服从指数分布，$EX_i=\frac{1}{6}$，$DX_i=\frac{1}{36}$

由中心极限定理得

$$\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100\times\frac{1}{6}}{10\times\frac{1}{6}}\text{近似服从 } N(0,1)$$

所以 $$P(15\le\sum_{i=1}^{100}X_i\le 60)=P\left(\frac{15-100\times\frac{1}{6}}{10\times\frac{1}{6}}\le\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100\times\frac{1}{6}}{10\times\frac{1}{6}}\le\frac{20-100\times\frac{1}{6}}{10\times\frac{1}{6}}\right)$$

$$=P\left(-1\le\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100\times\frac{1}{6}}{100\times\frac{1}{36}}\le 2\right)\approx\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)-\Phi(1)+1$$

$$=0.9772+0.8413-1=0.8185$$

七

解：1、$\mu=EX=\int_0^1 x\,(\theta+1)x^{\theta}dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$，

解得 $\theta=\frac{1}{1-\mu}-2=\frac{2\mu-1}{1-\mu}$

用样本均值 $\bar{X}$ 代替总体均值 μ，

得 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\frac{1}{1-\bar{X}}-2=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$ +6

2、似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}$

对数似然函数为 $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

对 θ 求导并令其为零，得 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$

最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$ +6

八

解：1、实际推断原理：在一次试验中，小概率事件（即概率很小的事件）实际上几乎是不发生的。

2、H_0： $\mu = \mu_0 = 1.40$　H_1： $\mu \neq \mu_0 = 1.40$

检验统计量　$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

拒绝域　$|z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$

查表得　$z_{0.025} = 1.96$

本题中　$n = 25, \quad \alpha = 0.05, \quad \overline{x} = 1.39, \quad \sigma = 0.04$

计算得　$|z| = \left|\dfrac{1.39 - 1.40}{0.04/5}\right| = 1.25 < 1.96$

未落入拒绝域

接收 H_0，即在显著性水平$\alpha = 0.05$下，认为该纤维的强力符合要求。