2021 级概率与数理统计试题（A 卷）

（本试卷共 2 页，八个大题，请将每道题的答案写在答题纸对应的位置上，并在答题纸上的对应位置写上序号、姓名、学号等信息，答题纸共 8 页）

附表：$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.64)=0.95$，$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2)=0.9773$，$\Phi(2.33)=0.99$，$\Phi(-2.33)=0.01$，$t_{0.05}(8)=1.8595$，$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.025}(8)=2.3060$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.95}(8)=2.733$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.180$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$

一、（12 分）

1. 已知 A、B、C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{4}$，$P(C)=\dfrac{2}{5}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6}$，求 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$.

2. 甲、乙、丙三人组队参加比赛，由考官随机地挑选出一人来回答问题. 已知甲、乙、丙能正确回答问题的概率分别为 0.6，0.5 和 0.4.

（1）求该团队能正确回答问题的概率；

（2）若已知该团队正确回答了问题，求问题是由甲正确回答出来的概率.

二、（12 分）

1. 已知离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.3, & -1\le x<1\\ 0.5, & 1\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

求（1）X 的分布律；（2）$P\{X>-1|X\neq 1\}$.

2. 设某型号电子元件的寿命 X 服从参数为 1 的指数分布，令 $Y=(X-1)^2$.（1）写出 X 的概率密度函数 $f_X(x)$；（2）求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

三、（14 分）

1. 命题 A：若二维随机变量$(X，Y)$在某区域 D（D 的面积大于 0）上服从二维均匀分布，则 X 和 Y 都服从一维均匀分布.

问：命题 A 是否一定成立？若一定成立，请证明；若不一定成立，请举一个不成立的例子.

2.设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c(x+y)e^{-(x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $c>0$ 为常数，令 $Z=X+Y$.（1）求常数 c 的值；（2）求 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$和 $f_Y(y)$；（3）判断 X 与 Y 是否相互独立？说明理由;（4）求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

四、（14 分）

1. 按季节出售的某种应时商品，每售出一公斤获利润 10 元。如到季末尚有剩余商品，则每公斤净亏损 4 元.设某商店在季度内这种商品的销售量 X (单位：公斤)是一随机变量， 服从均匀分布 U(10000,20000)。为使商店所获得的平均利润最大，问商店应进多少货?

2. 设二维随机变量（X, Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<y<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求 1. $E(X), E(Y), D(X), D(Y)$；2. $E(XY), Cov(X, Y), \rho_{XY}$.

五、（10 分）

1. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立，且都服从参数为 5 的泊松分布 $P(5)$，若当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于常数 a，求 a 的值.

2. 设某生产线上组装每件产品的时间服从指数分布，平均需要 10 分钟，且各件产品的组装时间相互独立，利用中心极限定理求组装 100 件产品需要 15 小时到 20 小时的概率的近似值.

六、（10 分）

1. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自该总体的样本，令 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$. 求 DS^2.

2. 设总体 X 服从正态分布 $N(0,1)$，$X_1, X_2, \ldots, X_5$ 是来自该总体的样本. 若 $\frac{c(X_1+X_2)}{\sqrt{(X_3+X_4+X_5)^2}}$ 服从 t 分布，求 c 的值并指出 t 分布的自由度.

七、（14 分）

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

的总体的样本，$\theta>0$ 为未知参数，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为相应的样本观测值.

（1）求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；（2）求参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；（3）判断 $\hat{\theta}_2$ 是否是参数 θ 的无偏估计？给出证明过程。

八、（14 分）

1. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 1)$，其中 $\mu\in$R未知，$x_1, \ldots, x_n$ 是总体 X 的样本值，对假设检验问题 $H_0:\mu=2, H_1:\mu=3$，取拒绝域 $W=\{\bar{x}\geq 2.6\}$，求使该检验犯第二类错误的概率 $\beta\leq 0.01$ 的最小的 n 的值**.**

2. 某工厂生产一种钢管，钢管内径 X（单位：毫米）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，要求其内径的平均值为 100 毫米。现从生产的一批钢管中随机抽取 9 根，测得其内径的均值为 100.1 毫米，标准差为 0.5 毫米。在显著性水平 α=0.05 下，问这批钢管是否合格？