2011-2012 第一学期概率论与数理统计答案(信二学习部整理)

一.

答　设 A_1 表示甲地区的人，A_2 表示乙地区的人，A_3 表示丙地区的人

B 表示某人感染流行病

$P(A_1)=0.2, P(A_2)=0.5, P(A_3)=0.3$

$P(B|A_1)=0.06, P(B|A_2)=0.04, P(B|A_3)=0.03,$ ---------------------------------2 分

则由全概率公式

$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)$$

$$=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$ -----------------------------------3 分

$$=0.2*0.06+0.5*0.04+0.3*0.03=0.041$$

-------------------------------------2 分

则由贝叶斯公式

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2B)}{P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)}$$

$$=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)}$$ ------------------------------------3 分

$$=\frac{0.5*0.04}{0.2*0.06+0.5*0.04+0.3*0.03}=0.4878$$ --2 分

二、

解：当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$； ……………… 2 分

当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

$$=P\{|X|\le y\}$$

$$=P\{-y\le X\le y\}$$ ……………… 4 分

$$=\Phi\left(\frac{y}{\tau}\right)-\Phi\left(-\frac{y}{\tau}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{y}{\tau}\right)-1$$ ……………… 4 分

故　$Y=|X|$ 的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\tau}\varphi\left(\dfrac{y}{\tau}\right), & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\tau}e^{-\frac{y^2}{2\tau^2}}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$ ……… 4 分

三、

解：（1）

$$P(Y>X)=\iint\limits_{y>x}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^1 2xdy=\frac{1}{3}.$$ …………… 4 分

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$

当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_0^1 2x\,dy=2x.$

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1,\\ 0, 其他.\end{cases}$$ ……………4 分

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 2x\,dx=1, 0<y<1.$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, 0<y<1,\\ 0, 其他.\end{cases}$$ ……………… 4 分

（3）因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y), a.e.$，所以 ***X*** 与 ***Y*** 相互独立. …………… 2 分

（4） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx.$

当$0<z<1$时，$f_Z(z)=\int_0^z 2xdx=z^2,$

当$1<z<2$时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^1 2xdx=2z-z^2.$

$$f_Z(z)=\begin{cases}z^2, & 0<z<1,\\ 2z-z^2, & 1<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ ………………4 分

四.

解： 由题设条件得到 $E(X)=2$, $Var(X)=4$;

…………….2 分

$E(Y)=4$, $Var(Y)=3$;

…………….2 分

$E(Z)=4$, $Var(Z)=3$.

…………….2 分

(1)

$$E(X-2Y+Z)=E(X)-2E(Y)+E(Z)=2-2\times4+4=-2.$$

…………….3 分

(2)

$$\begin{aligned}Var(X-2Y+Z)&=Var(X)+Var(-2Y)+Var(Z)\\&\quad+2\operatorname{cov}(X,-2Y)+2\operatorname{cov}(X,Z)+2\operatorname{cov}(Z,-2Y)\\&=Var(X)+4Var(Y)+Var(Z)\\&\quad-4\operatorname{cov}(X,Y)+2\operatorname{cov}(X,Z)-4\operatorname{cov}(Z,Y)\end{aligned}$$

………………4 分

$$\begin{aligned}&=Var(X)+4Var(Y)+Var(Z)\\&\quad-4\rho_{XY}\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}+2\rho_{XZ}\sqrt{Var(X)\cdot Var(Z)}-4\rho_{ZY}\sqrt{Var(Z)\cdot Var(Y)}\end{aligned}$$

………………5 分

五．　解：设 X 为 50 台电话交换机在 1 分钟内受到的呼叫次数

Xi 每台电话交换机在 1 分钟内受到的呼叫次数 ，　i=1,…50

由题意　$X=\sum_{i=1}^{50}X_i$　………………2 分

$X_1,\cdots X_{50}$相互独立且同分布，$E(X_i)=D(X_i)=2$

E(X)=100, D(X)=100　………………2 分

$\dfrac{X-100}{\sqrt{100}}$ 近似服从$N(0,1)$,

$$P(X\ge120)\ =P(\frac{X-100}{10}\ge2)\ \ \approx1-\Phi(2)=0.0228$$

六．解：(1)由于 $EX=Np, DX=Np(1-p)$

得　　$EX^2=DX+(EX)^2=Np(1-p)+(Np)^2$　………………3 分

令　$\begin{cases}Np=\overline{X}\\Np(1-p)+(Np)^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}$　………………3 分

解得 N 和 p 的矩估计为

$$\hat{N}=\left[\frac{\bar{X}^2}{\bar{X}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right],\quad \hat{p}=1-\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\bar{X}}$$ ……………3 分

(2)总体 X 的分布律为 $P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1$

似然函数为 $$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$ ………3 分

对数似然函数为

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p)$$ …………2 分

对 p 求导并令其为零，得

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{1-p}\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0$$ …………2 分

解得 p 的最大似然估计为 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$ ………………2 分

七. 解：设 $\boldsymbol{H_0:\sigma^2\le 2;\quad H_1:\sigma^2>2}$ ………3 分

选取检验统计量 $\boldsymbol{\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}}$ ………3 分

构造拒绝域： $\boldsymbol{\chi^2\ge\chi_\alpha^2(n-1)}$ ………3 分

n=25，α=0.05，查表得 $\boldsymbol{\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(24)=36.415}$,

$\boldsymbol{\bar{x}=8,\quad s=1.8}$，计算得：$\boldsymbol{\chi^2=\frac{24\times1.8^2}{2}=38.88.>36.415}$ ………2 分

故拒绝 H_0，可以认为成年人的每日睡眠时间的方差超过 2 h^2 .

………1 分