

更多干货请关注公众号【一手课程·封神考研】

高等数学零基础测试

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. 当 $x \rightarrow 1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

- (A) 等于 2. (B) 等于 0.
(C) 为 ∞ . (D) 不存在但不为 ∞ .

2. 曲线 $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$

- (A) 没有渐近线. (B) 仅有水平渐近线.
(C) 仅有铅直渐近线. (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

3. 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} = -1$ ，则在 $x=a$ 处

- (A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a) \neq 0$. (B) $f(x)$ 取得极大值.
(C) $f(x)$ 取得极小值. (D) $f(x)$ 的导数不存在.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义， $x_0 \neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，则

- (A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点. (B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点.
(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小值点. (D) 对一切 x 都有 $f(x) \leq f(x_0)$.

5. 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$ ，则 $f(x)$ 有一个原函数为

- (A) $1 + \sin x$. (B) $1 - \sin x$.
(C) $1 + \cos x$. (D) $1 - \cos x$.

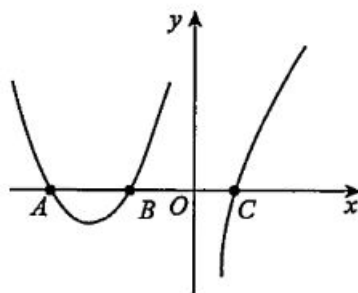
更多干货请关注公众号【一手课程·封神考研】

6. 由曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

- (A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{4}{3}\pi$.
(C) $\frac{2}{3}\pi^2$. (D) $\frac{2}{3}\pi$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 $f(x)$ 有

- (A) 一个极小值点和两个极大值点.
(B) 两个极小值点和一个极大值点.
(C) 两个极小值点和两个极大值点.
(D) 三个极小值点和一个极大值点.



8. 考虑二元函数 $f(x, y)$ 的下面 4 条性质:

- ① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续; ② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续;
③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微; ④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在.

若用 “ $P \Rightarrow Q$ ” 表示可由性质 P 推出性质 Q , 则有

- (A) $② \Rightarrow ③ \Rightarrow ①$. (B) $③ \Rightarrow ② \Rightarrow ①$.
(C) $③ \Rightarrow ④ \Rightarrow ①$. (D) $③ \Rightarrow ① \Rightarrow ④$.

9. 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

- (A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.
(B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.
(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

更多干货请关注公众号【一手课程·封神考研】

10. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$, $(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$.

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$.

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$.

(D) 0.

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 若 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$, 则 $f'(t) =$ _____.

12. 当 $x =$ _____时, 函数 $y = x2^x$ 取得极小值.

13. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) =$ _____.

14. 由曲线 $y = \ln x$ 与两直线 $y = (e+1) - x$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积是_____.

15. 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 $dz =$ _____.

16. 积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值等于_____.

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字

说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln[\cos(x-1)]}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处是否连续? 若不连续, 修改

函数在 $x = 1$ 处的定义, 使之连续.

18. (本小题满分 12 分)

求曲线 $y = \sqrt{x}$ 的一条切线 l , 使该曲线与切线 l 及直线 $x = 0$, $x = 2$ 所围成图形面积最小.

更多干货请关注公众号【一手课程·封神考研】

19. (本小题满分 12 分)

设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$.

20. (本小题满分 12 分)

证明: 方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^x \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

21. (本小题满分 12 分)

设 $f(u, v)$ 具只有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$, 又 $g(x, y) = f\left[xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right]$,

求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

22. (本小题满分 12 分)

计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.