浙江大学 2009-2010 学年春夏学期

《数学分析（甲） II (H) 》课程期末考试试卷

课程号：061R0120 开课学院：理学院

考试试卷：A 卷，考试形式：闭卷

考试日期：2010 年 7 月 2 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪

考生姓名：______ 学号：______ 所属院系：______

题序	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评卷人								

一. （ 20 分）判定下列数项级数的敛散性或函数项级数的一致收敛性，并给出充分的依据：

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sin(3^n)}{n^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\arctan(nx)}{\ln n},\quad x\in(-\infty,+\infty)$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin(nx)}{\sqrt{n+x}},\quad x\in[0,\pi]$

二. （ 10 分）考察函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性、偏导数与可微性。

三. （ 10 分） $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctan\dfrac{y}{x}$ 。试以 u,v 为新变量，变换方程

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

四．（ 10 分） 设参数曲线 L: $x = x(t),\ y = y(t),\ t : \alpha \to \beta$, 起点和终点分别是 $(R, 0)$ 和 $(-R, 0)$ ，无自相交，且满足 $y(t) \geq 0, \quad x^2(t) + y^2(t) > R^2$. L 与上半圆周 $y = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [-R, R]$ 所围的区域 D 的面积为 A 。请借助于 Green 公式计算 $\displaystyle\int_L \frac{x}{x^2+y^2}dx + \left(x + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dy$ 。

五．(10 分) 计算第二型曲面积分：$\displaystyle\iint_S (x^3 z - e^z \cos y)dydz + (y^3 z - e^z \cos x)dzdx + (\frac{3}{4}z^4 - 1)dxdy$ ，其中 S 为上半球面： $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1$ ，并取外侧。

六．（10 分）讨论函数 $F(x,y)=(x+y)f(x)+(x-y)f(ay)$ 在原点 $(0,0)$ 处的极值性，其中设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，a 是给定的参数。

七．（10 分）计算曲线积分：$\oint_L 2xzf(z-x^2-y^2)dx+(x^3+2yz)dy+R(z)dz$, 其中 L 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=2y$ 的交线，从 z 轴看逆时针走向，$R(z)=\int_0^z f(t)dt$，$f(t)$ 连续可微。

八. （ 10 分）

设函数列 $\{\phi_n(x)\}$ 定义在 $[a, b]$ 上，且满足如下单位正交性：

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

f 在 $[a, b]$ 上可积， $a_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx$, $n = 1, 2, \cdots$. 请证明： $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx.$

九．（ 10 分）设 $F(x,y)$ 连续，有连续的一阶偏导数， $F_y>0$ ，且对每个 $x\in(-\infty,+\infty)$ ，有

$$\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=-\infty,\quad \lim_{y\to+\infty}F(x,y)=+\infty.$$

证明：方程 $F(x,y)=0$ 确定一个定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续可微的隐函数 $y=f(x)$.