浙江大学 2010-2011 学年春夏学期

《数学分析（甲）II (H) 》课程期末考试试卷

课程号：061R0120　开课学院：理学院

考试试卷：A 卷 (√)、B 卷

考试形式：闭卷 (√)、开卷，允许带 笔、证件 入场

考试日期：2011 年 6 月 24 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪

请注意：所有题目必须做在答题本上！

做在试卷纸上的一律无效！

请勿将答题本拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：__________ **学号：**__________ **所属院系：**__________

一.（ 20 分）判定下列数项级数的敛散性或函数项级数的一致收敛性，并给出充分的依据：

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{4^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)^2,\ x\in[0,1].$

二.（ 10 分）证明在点 $(0,0)$ 的某个领域内，方程 $\sin y+\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}=x$ 唯一确定一个可导的函数 $y=y(x)$ ，满足 $y(0)=0$ ，并求 $y'(0)$ 的值。

三.（ 10 分）求 $f(x,y)=x^2+y^2-3x$ 在区域 $D=\{(x,y)|\,x^2+y^2\le 9\}$ 上的最大值与最小值。

四.（ 10 分）已知变换 $\begin{cases}\xi=x+ay\\ \eta=x+by\end{cases}$ ，试将方程 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ 化为

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=0,$$

并求 a,b 的值。

五. （ 15 分）计算曲线积分 $\oint_L \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$ ，其中 L 为曲线 $x^2+4y^2=1$ ，取逆时针为正向.

六. （ 15 分）计算第二型曲面积分 $\iint\limits_S x^3 dydz$ ，其中 S 是椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad (a,b,c>0)$$

的下半部分，并取外侧为正向。

七. （ 10 分）证明：若 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ， Σ 是封闭区域 V 的外侧曲面，则有

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS=\iiint\limits_V \Delta u\,dxdydz,$$

其中 $\vec{n}$ 是 V 的单位外法向量。

八. （ 10 分）证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛，但不是某个以 2π 为周期的连续函数的傅里叶级数。