浙江大学 2016–2017 学年 秋冬 学期

《数学分析(乙)I》课程期末考试试卷

课程号：__________，开课学院：__理学院__ 考试试卷：A 卷

考试形式：闭卷 考试日期：2016 年 1 月 15 日,考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：________ 学号：________ 所属院系：________。

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一.(10 分)请用数学语言完整叙述一致连续的概念，并证明 $f(x) = sin\left(\frac{1}{x}\right)$在$(0,1)$不是一致连续的。

二. (24 分) 导数与极限计算：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n)}}{n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[6]{n^6+n^5}-\sqrt[6]{n^6-n^5}\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\sin 2x}$

三. (24 分) 导数与积分计算:

(1) $\int \dfrac{x^2-x}{(x-2)^3}dx$

(2) $\int \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

(3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+sin^2 x} dx$

(4) **设**$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} arcsin\, x$，求$y^{(n)}(0)$.

(5) **求摆线**$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$，当$0 \le t \le 2\pi$绕着 x 轴旋转曲面的表面积。

四.（10 分）利用$\varepsilon-\delta$语言证明函数$f(x)=x^2+x\sin x$ 在$x=1$处是连续的。（6 分）

五.（10 分）设$f_n(x)=sinx+sin^2x+sin^3x+\cdots sin^nx$, 证明：

（1）任意$n\epsilon N$方程$f_n(x)=1$在$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$内有且只有一个根。

（2）设$x_n\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$是方程$f_n(x)=1$的根，则计算$lim_{x\to 0}x_n$

六. (10 分) 设 $f(x)$在$[0,1]$上可导，且

$$\int_0^1 xf(x)dx = f(1).$$

证明$\exists\xi \in (0,1)$ 使得：

$$f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$$

七.（6 分）设$f(x)$与$g(x)$均为定义在 $[a,b]$上的有界函数。证明：若仅在$[a,b]$中有限个点处 $f(x) \neq g(x)$，则当$f(x)$在$[a,b]$上可积时，$g(x)$在$[a,b]$上也可积，且满足：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

.

八.（6 分） 设$f(x)$在$[a,b]$上无界，证明$\exists c\in[a,b]$使得对$\forall\varepsilon>0, f(x)$在$(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\cap[a,b]$上无界.