解答：函数微分与实数完备性

2020 年 12 月 22 日

1. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且满足 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$ 使得 (c).

   (a) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加;

   (b) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少;

   函数在一点处的导数的信息，只反映这点与周围点的函数关系，不反映周围点之间的函数关系。因此不能推断函数在周围的单调性。如果你选了 (a), 建议你扔硬币试一下是否选（b）运气更好。

   (c) $\forall x\in(0,\delta)$, 有 $f(x)>f(0)$;

   (d) $\forall x\in(-\delta,0)$, 有 $f(x)>f(0)$.

   如果你的推断是基于导数的定义，不会选（d）吧?

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则下列命题中，错误的是 (d).

   (a) 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

   这个结论明显正确。分子 = 商 * 分母。居然还有选（a), 好失望啊。

   (b) 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

   如果你认为 (a) 正确，那必须认为 (b) 也正确，因为利用 (a)，这就是在 0 处的导数定义。很遗憾，有 13 人选择（b）, 其中至少有 9 人认为 (a) 正确.

   (c) 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

   推断这个结论正确的依据类似 (a)：$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+f(-x))=0$. 再由 f 连续性，推断 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+f(-x))=f(0)$. 进而得到：$f(0)=0$

   (d) 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

   选择 (d) 是不容易的。但是，想过奇函数么? 如果 f 是一个奇函数，则 $f(x)+f(-x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 这个存在性条件自然满足。为了保证 $f(0)=0$，可以取 $f(x)=xg(x)$，其中 $g(x)$ 是偶函数。此时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)$. 因此，只要 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 不存在, 则 $f'(0)$ 也不存在。你应该有办法取到这样的偶函数 $g(x)$.

3. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+[f'(x)]^2=x, \forall x\in\mathbb{R}$，且 $f'(0)=0$，则 (c).

   (a) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

   (b) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

   相信你已经发现 $f''(0)=0$。这样你失去了根据极值第二充分条件去判定极值的条件。于是，如果你试图利用极值第三充分条件，你得设法计算 $f'''(0)$. 好在这个不困难。由原方程 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 直接得到：$f'''(x)+2f'(x)f''(x)=1$. 于是 $f'''(0)=1$。如果你知道极值第三充分条件，你应该能判定 $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值。

   (c) $x=0$ 是 $f(x)$ 的拐点

   判定 $x=0$ 是否是 $f(x)$ 的拐点，需要检验 $f(x)$ 在 $x=0$ 两侧的凸性变化。相信你想到用 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的两侧相异的保号性来推断。如果你已经推断 $f'''(0)=1$，应该知道在 $x=0$ 的周围有 $f'''(x)>0$。进而推断 $f''(x)$ 严格单调递增。别忘了还有 $f''(0)=0$。所以，你应该可以推断：在 $x=0$ 的左侧，$f''(x)<0$, 在 $x=0$ 的右侧，$f''(x)>0$.

   (d) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$x=0$ 也不是 $f(x)$ 的拐点

   有十几位同学选 (d)，为什么呢?

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(6x)+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$(b).

   (a) 0

   (b) 36

   (c) 6

   (d) ∞

   这一题不应该错，但居然有 47% 的人选了 (a)。别忘了特别强调过：Taylor 展开式在计算极限时，比洛比塔法则更强的作用。如果你有一点敏锐性，对比题中这两个极限形式，你应该会明白用到了 $\sin(6x)$ 的 Taylor 展开式，由于分母是三阶小量，将 $\sin(6x)$ 展开为 $\sin(6x)=6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)$ 足够。于是，

   $$0=\lim_{x\to0}\frac{\sin(6x)+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6x-36x^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36.$$

   现在，你应该知道选哪个了。

5. 设函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，$x=1$ 是 $f(x)$ 的拐点，则下列不一定成立的是 (acd).

   (a) $x=1$ 是导函数 $f'(x)$ 的驻点

   (b) $x=-1$ 是 $-f(-x)$ 的拐点

(c) $x=-1$ 是 $-f(x)$ 的拐点

(d) $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上的凹凸性与其在区间 $(1,+\infty)$ 上的凹凸性相反

要将三项（acd) 都选对，确实不容易。绝大多数都选了这三项中一二项，应该也不错。只有少数几位选了 (b), 这不应该。$-f(-x)$ 是 $f(x)$ 的刚性变换（分别作关于 x 轴和 y 轴对称变换），$x=-1$ 是 $x=1$ 的相应变换点。刚性变换不会改变凸性。所以 (b) 肯定正确。

(acd) 这三项可能不成立的原因是：(a) 中，f' 可能不可导，这样 f' 的驻点可能不存在. (c) 中作的是关于 x 轴的对称变换，不会改变拐点的 x 值。(d) 可能不对的是：拐点只是给出了函数的局部凹凸性，不具有全局性。

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界且可导，则 (b).

(a) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

一个水平波动性变化的函数，如果波动的幅度衰减，函数可以趋于零，但其变化率（导函数）不一定趋于零。你尝试构造这样函数。

(b) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

选择 (b) 应该相对容易。这是因为几何上看，当 x 足够大时，切线具有稳定，如果这个稳定的切线不是水平的，函数应该无界。分析上也容易用反证法说明。

(c) 当 $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0+} f'(x)=0$

(d) 当 $\lim\limits_{x\to0+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0+} f'(x)=0$

(c), (d)，显然不对，随手就可以给个反例，你试试。

7. 下述陈述错误的是（abde ）.

(a) 若 f 在区间 I 内可导，在 x_0 处取极小值，则 $\exists\delta>0$, 使得 f 在 $U_-(x_0,\delta)$ 内单调递减，在 $U_+(x_0,\delta)$ 内单调递增.

极值仅反映极值点与其周围的函数关系，这一点与导数的形态类似。所以不能推断周围的单调性

(b) 若函数 f,g 在区间 I 上一致连续，则 $f+g$, $f\cdot g$ 在区间 I 上均一致连续.

$f+g$ 的一致连续是正确的。如果 I 是有限区间，$f\cdot g$ 在区间 I 上的一致连续性也是对的，这是因为当你用前两个函数在两点上的差，直接表示后面两个函数在两点上的差的时候，涉及到函数的有界性。但是，如果 I 是无限区间，那么 $f\cdot g$ 的一致连续性是没有保证的，例如 $f(x)=g(x)=x$.

(c) 若 f 在区间 I 上存在有界的导函数，则 f 在 I 上一致连续.

显然正确，利用微分中值定理容易说明：$|f(x')-f(x'')| = |f'(\xi)|\,|x'-x''| \le M|x'-x''|$。很奇怪，还有一些同学选择 (c)

(d) 若 f 为可导的凸函数，则函数 $f(x)$ 的稳定点为 $f'(x)$ 的极值点.

有反例, 如 $f(x) = x^2$。

(e) 区间 I 上的严格凹函数只有一个极小值点.

实际上，严格凹函数没有极小值点.

8. 设 $n = 2020$, $f(x) = x^n \arctan(x+1)$, 则 $f^{(n)}(0) =$ (d).

(a) $\dfrac{\pi}{4}$;

(b) $n!$;

(c) $\dfrac{n\pi}{4}$;

(d) $\dfrac{\pi}{4}n!$.

这题无需讲解

9. 假设 $b > a > 0$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，$g'(x) \neq 0$, 且 $ag(b) \neq bg(a)$. 则存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $\frac{af(b)-bf(a)}{ag(b)-bg(a)}$ =(d)

(a) $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

(b) $\dfrac{f(\xi)+f'(\xi)}{g(\xi)+g'(\xi)}$

(c) $\dfrac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{g(\xi)+\xi g'(\xi)}$

(d) $\dfrac{f(\xi)-\xi f'(\xi)}{g(\xi)-\xi g'(\xi)}$

这题也无需讲解

10. 下述命题正确的是（bc ）

(a) 任何无限点集必有聚点

显然错误。例如整数全体

(b) 一个闭区间套序列, 如果其区间长度数列趋于零，那么这些区间必定含有唯一的公共点

这就是区间套定理

(c) 如果一个有界数集的上确界不可达，那么它一定是无限点集，并且其上确界是它的一个聚点

对于有界数集 S 的一个不可达的上确界，根据上确界定义，其任何（左）邻域内必定含有无限多个点。这本身就说明了这个上确界的聚点性。

(d) 函数极限的科西准则是：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，当且仅当 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得当 $|x'-x''|<\delta$ 时，都成立：$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

不要将科西准则与一致连续搞混了。

(e) 如果 $f(x)$ 满足：对任何 $x_0\in(a,b)$, 都存在一个邻域 $U\big(x_0,\delta(x_0)\big)$，使得 $f(x)$ 在其内具有单调性，那么，依据有限开覆盖定理，$f(x)$ 在 (a,b) 上单调.

相信不少人认为这是对的。如果将这个有限开区间 (a,b) 改为有限闭区间 $[a,b]$，恭喜你，答对了。可惜的是，你没有注意到这里是开区间 (a,b)。在有限开区间上，没有"有限开覆盖定理"。