浙江大学 2008－2009 学年秋、冬学期

《数学分析》课程期末考试试卷

开课学院：__理学院__ ，考试形式：闭

考试时间：_____年____月____日, 所需时间：__120__分钟

考生姓名：______________学号：_________专业：____________________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
得分										
评卷人										

一.（1）请用 ε -N 语言写出"函数列 $\{f_n\}$ "在数集 D 上不一致收敛于 f 的定义.

提示：课本第 28 页第 10 行.

（2）判断下列函数列的一致收敛性.

1、 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ **，** $D\in(-\infty,+\infty)$

提示：一致收敛.课本第 35 页第 1 题第 2 小题.

关键步骤：利用均值不等式，有 $\left|\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right|=\dfrac{|x|}{1+n^2|x|^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{|x|}+n^2|x|}\le\dfrac{1}{2n}$.

2、 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ **，** $D\in(-1,1)$

提示：不一致收敛.

关键步骤：把 n 看作常数，对 $f(x)$ 求导数 $f'(x)=\dfrac{n-n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}$，令 $f'(x)=0$ 求出极值点 $x=\dfrac{1}{n}$，用二阶导数判断该点为极大值$\dfrac{1}{2}$.因为 $D\in(-1,1)$，所以无论正整数 n 取何值时都$\exists x=\dfrac{1}{n}\in D$，使 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}\neq 0$，故该函数列不一致收敛.

二.证明：若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nax^{n-1}$ 在$|x|>R$时发散.

提示：课本第 48 页定理 14.7 的后半部分证明.

关键步骤：反证法.

三.构造幂级数求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)}$

提示：构造$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n(2n-1)}x^{2n}$.

关键步骤：对$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n(2n-1)}x^{2n}$ 连续求导两次化为$1-x^2+x^4-\cdots=\dfrac{1}{1+x^2}$，再连续作两次积分求得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n(2n-1)}x^{2n}=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.取 $x=1$即得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n(2n-1)}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$.再乘以2即得原式的值为$\dfrac{\pi}{2}-\ln 2$.

四.证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$ **在点(0,0)处连续且偏导数存在,但偏导数在(0,0)不连续,而** f **在原点(0,0)可微**

提示：课本第 117 页第 7 题.使用偏导数的定义求偏导数.使用 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-dz}{\rho}=0$ 判断函数的连续性.

五.设 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+z=1\end{cases}$ **.从** Oz **轴正向充分大处俯视 L 为逆时针.求** $I=\oint_L zydx-zdy-(x+y)dz$

关键步骤:

解法一：根据 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+z=1\end{cases}$ 配方得 $(\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}})^2+(\dfrac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}})^2=1$，因此写出参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos t\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\\ z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos t\end{cases}$ 代入原式计算，把曲线积分化成了定积分,再计算定积分的值.

解法二:因为曲线积分可以把边界曲线代入简化计算(重积分不可!)，所以把 $x+z=1$ 代入 $I=\oint_L zydx-zdy-(x+y)dz$，得到 $I=\oint_{L_1}(1-x)ydx-(1-x)dy-(x+y)d(1-x)$,注意此处的 L_1 为 L 在 xOy 平面上的投影.整理后再使用格林公式化为二重积分计算很方便.

解法三：也可使用斯托克斯公式直接计算.

六.证明 $\iint\limits_{x^2+y^2\le1} f(3x+4y)dxdy = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,f(5u)du$.

提示：作变换 $\begin{cases} u=\dfrac{3x+4y}{5} \\ v=\dfrac{4x-3y}{5} \end{cases}$.

关键步骤：作变换 $\begin{cases} u=\dfrac{3x+4y}{5} \\ v=\dfrac{4x-3y}{5} \end{cases}$.因为这是一个正交变换，所以 $|J|=1$，且

$x^2+y^2\le1$ 被变换为 $u^2+v^2\le1$.所以有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le1} f(3x+4y)dxdy = \iint\limits_{u^2+v^2\le1} f(5u)dudv$$

$$=\int_{-1}^{1} f(5u)du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} dv$$

$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,f(5u)du$$

七.已知 u=$f(3y,\varphi(2x-y))$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

答案： $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1\bullet0+f_2\varphi'\bullet2=2\varphi' f_2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\varphi''\bullet(-1)f_2+2\varphi'(f_{21}\bullet3+f_{22}\bullet\varphi'\bullet(-1))$$

$$=-2\varphi'' f_2+6\varphi' f_{21}-2(\varphi')^2 f_{22}$$

八.对 $f(x)=1+3\cos 2x-4\sin 5x$ 展开付利叶级数，并求 a_0， a_5， b_2.

提示：三角函数的付利叶级数展开式就是它自身. a_0=2, a_5=-4, b_2=3.

九.求 $\iiint\limits_V (x+y+z)dV$ 的值，其中 $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z^2, 0\le z\le 1\}$.

提示：把三重积分化为先二重再一重的积分计算.

关键步骤：

$$\iiint\limits_V (x+y+z)dV$$

$$=\int_0^1 dz \iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} (x+y+z)dz$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^z (r\cos\theta+r\sin\theta+z)rdr$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi} (\frac{1}{3}z^2\cos\theta+\frac{1}{3}z^2\sin\theta+\frac{1}{2}z^3)d\theta$$

$$=\int_0^1 \pi z^3 dz=\frac{1}{4}\pi$$