

Tobit Kalman 滤波与截断 (Censored) 数据处理

2020 年 3 月 1 日

摘要

Kalman 滤波在现代数字信号处理中获得了广泛的应用,但标准 Kalman 滤波不能处理实际应用中经常出现的数据截断现象。数据截断是由于传感器精度限制或处理能力不足,数据样本出现被截断的现象,导致精度不足和信息缺失。通过引入 Tobit 回归模型, Kalman 滤波器取得了处理截断数据的能力。本文首先实现了 Tobit Kalman 滤波器,并给出仿真实验结果。在此基础上对 Extended Kalman Filter 进行截断数据扩展,得到 Tobit Extended Kalman Filter,对非线性的截断数据从另一个角度进行处理,并给出仿真实验。通过实验,证明 Tobit Extended Kalman Filter 相比于标准 Kalman 滤波器, Extended Kalman Filter, Tobit Kalman Filter 等滤波器对截断数据的处理能力更强,均方误差更小。

目录	1
----	---

目录

1 介绍	2
2 数据截断与 Kalman 滤波器	3
2.1 数据截断	3
2.2 标准 Kalman 滤波器	3
2.3 Extended Kalman 滤波器	4
3 Tobit Kalman 滤波器与 Tobit Extended Kalman 滤波器	5
3.1 问题描述	5
3.2 Tobit Kalmna 滤波器	6
3.3 Tobit Extended Kalman 滤波器	10
4 算法与分析	10
4.1 TKF 算法	10
4.2 TEKF 算法	12
5 数值结果和分析	13
5.1 实验设置	13
5.2 实验结果	13
5.3 结果分析	14
6 结论	16
7 致谢	18

1 介绍

传统的线性 Kalman 滤波器在信号滤波，目标跟踪等方面得到了广泛的应用，取得了良好的效果。传统 Kalman 滤波器对线性模型效果良好，对线性 Kalman 滤波器进行扩展得到 Extended Kalman Filter 或 Unscented Kalman Filter 可以近似处理非线性情况，也取得了良好的效果。但在实际应用中，传感器等硬件精度限制及处理能力的不足经常导致数据被自然或人为截断，而传统 Kalman 滤波器对截断数据无能为力。

Tobin 提出 Tobit 模型 [1]，将数据截断建模为分段线性函数，从而使截断数据的数值处理成为可能，但该模型并没有应用于信号处理等领域。Allik Bethany 首次将 Tobit 模型引入信号处理领域 [2]，得到 Tobit Kalman 滤波器，打开了在数字信号处理、目标追踪等方面处理截断数据的大门。Loumponias 等使用 Tobit Kalman 滤波处理 Kinect 数据进行体态追踪 [3]，通过限制速度防止了异常动作，但也造成了数据截断，引入 Tobit Kalman 滤波很好地处理了截断数据。[4] 则将 Tobit Kalman 滤波器用于通信系统中衰弱信道的信号处理中。在新兴的物联网中有大量的传感器，它们的测量数据很可能由于传感器的阈值而产生截断，Federico Chiariotti 对 Tobit 滤波器进行自适应改良并应用于物联网中 [5]，使其摆脱 Kalman 滤波器对模型的严格限制，可以应用于不同场景中。Tobit Kalman 滤波器的最新进展 [6] 则包括通过截断数据来精确估计协方差矩阵，以及计算隐状态是否被截断的概率。

上述文献都是对传统 Kalman 滤波器和 Tobit Kalman 滤波器进行扩展，但并没有考虑实际应用广泛的 Extended Kalman 滤波器和 Unscented Kalman 滤波器。本文首先实现了自己的截断数据处理系统，即 Tobit Kalman 滤波器。之后将 Tobit 模型引入 Extended Kalman 滤波器中，进行截断数据拓展，并进行实验仿真，证明其最小均方误差性能优于标准 Kalman 滤波器和 Extended Kalman 滤波器。

本文的结构安排如下：第二章介绍数据截断，标准 Kalman 滤波器，Extended Kalman 滤波器，第三章介绍 Tobit Kalman 滤波器以及 Tobit Extended Kalman 滤波器的推导及方法分析，第四章为具体算法介绍和分析，第五章为数值结果和分析，第六章为结论。

2 数据截断与 Kalman 滤波器

本章主要介绍本文的背景知识，包括数据截断的基本建模，Kalman 滤波器和 EKF 的基本原理。

2.1 数据截断

数据截断通常出现在工程、科研和社会科学等实践领域中。Tobit 模型将数据截断建模为一种独特的非线性模型，在这种模型中，非线性模型由分段线性模型组成，但在截断区域输出为常数。最简单的 Tobit 模型如下：

$$y_t = \begin{cases} y_t^*, & y_t^* > \tau \\ \tau, & y_t^* \leq \tau \end{cases} \quad (2.1)$$

$$y_t^* = \beta x_t + u_t \quad (2.2)$$

其中 y_t^* 为依赖于 βx_t 的隐变量， $\beta \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 是常向量， $x_t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 是 t 时刻的输入向量， y_t 是标量输出， u_t 是均值为零方差为 σ_u^2 的高斯随机变量。

Tobit 模型的早起工作总结了五种 Tobit 类型，根据似然函数的相似性划分。本文只关注了最简单的 Tobit 模型。

Kalman 滤波器不能处理截断数据的原因有两点，一是处理截断数据需要所有数据计算统计特征从而进一步处理，不适用于 Kalman 滤波器的迭代计算，二是在截断区域附近测量噪声不是高斯噪声，从而导致 Kalman 滤波器产生有偏估计。

2.2 标准 Kalman 滤波器

Kalman 滤波器首先使用状态方程和量测方程建模，之后根据最小均方误差原则，利用贝叶斯定理，马尔科夫性等，由预测-修正两步迭代完成。其中状态方程为：

$$\mathbf{X}_{n+1} = f(\mathbf{X}_n, \mathbf{V}_n, \mathbf{I}_n) \quad (2.3)$$

量测方程为：

$$\mathbf{Y}_n = g(\mathbf{X}_n, \mathbf{W}_n) \quad (2.4)$$

在线性模型中，状态方程与量测方程为

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_n + \mathbf{V}_n \\ \mathbf{Y}_n = \mathbf{H}\mathbf{X}_n + \mathbf{W}_n \end{cases} \quad (2.5)$$

其中, $E(\mathbf{V}_n) = E(\mathbf{W}_n) = 0$, $E(\mathbf{V}_n \mathbf{W}_n) = 0$, $E(\mathbf{V}_n \mathbf{V}_m^T) = \mathbf{Q}_n \delta_{nm}$,
 $E(\mathbf{W}_n \mathbf{W}_m^T) = \mathbf{R}_n \delta_{nm}$.

Kalman 滤波器首先使用已经得到的隐状态预测下一状态, 再根据当前量测值, 使用 Wiener 滤波器对预测状态进行修正。Kalman 滤波器不仅递推估计值, 还递推误差, 每一次递推都评估滤波器性能。

通过推导, 可以得到 Kalman 滤波器公式为:

$$\mathbf{X}_{n+1|n} = \mathbf{F}_n \mathbf{X}_{n|n} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{X}_{n+1|n+1} = \mathbf{X}_{n+1|n} + \mathbf{K}_{n+1}(\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{H}_{n+1} \mathbf{X}_{n+1|n}) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1|n} \mathbf{H}_{n+1}^T (\mathbf{H}_{n+1} \mathbf{P}_{n+1|n} \mathbf{H}_{n+1}^T + \mathbf{R}_{n+1})^{-1} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{P}_{n+1|n} = \mathbf{F}_n \mathbf{P}_{n|n} \mathbf{F}_n^T + \mathbf{Q}_n \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P}_{n+1|n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}) \mathbf{P}_{n+1|n} \quad (2.10)$$

Kalman 滤波器需确定初值, 但对初值不敏感。Kalman 滤波器最重要的是利用先验知识进行建模, 若模型失配则会导致糟糕的结果。

2.3 Extended Kalman 滤波器

以上的标准 Kalman 滤波器 (Standard Kalman Filter, SKF) 基于线性模型推导, 但实际应用中存在大量的非线性场景。为了将 Kalman 滤波器更广泛地应用于实际场景中, 出现了许多 Kalman 滤波器的变种 [7], 包括 Extended Kalman Filter (EKF), Unscented Kalman Filter (UKF) 等。由于 EKF 是非线性模型中最广泛使用的 Kalman 滤波器变种 [8], 本文主要关注 EKF。

EKF 使用雅可比行列式更新状态和测量协方差, 使用线性函数来近似非线性函数, 从而可以用线性的 SKF 处理非线性问题。但当线性化变换不准确时, EKF 可能不会收敛, 该误差随模型类型和状态位置而变化。EKF 具体公式如下:

$$\mathbf{F}_n = \frac{\partial f}{\partial x} | \mathbf{X}_{n|n} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{H}_{n+1} = \frac{\partial g}{\partial x} | \mathbf{X}_{n+1|n} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{P}_{n+1|n} = \mathbf{F}_n \mathbf{P}_{n|n} \mathbf{F}_n^T + \mathbf{Q}_n \quad (2.13)$$

$$\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1|n} \mathbf{H}_{n+1}^T (\mathbf{H}_{n+1} \mathbf{P}_{n+1|n} \mathbf{H}_{n+1}^T + \mathbf{R}_{n+1})^{-1} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{X}_{n+1|n+1} = \mathbf{X}_{n+1|n} + \mathbf{K}_{n+1}(\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{n+1|n}, \mathbf{0})) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{P}_{n+1|n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{n+1}\mathbf{H}_{n+1})\mathbf{P}_{n+1|n} \quad (2.16)$$

本文中预测方程为线性方程,因此公式2.13 与 SKF 相同。为了使用 EKF 处理数据截断问题,根据定义2.1与定义2.5,在未被截断数据点 ($y_k^* > \tau$) 处, $\mathbf{H}_{n+1} = \frac{\delta g}{\delta x}|\mathbf{X}_{n+1|n} = \mathbf{H}$; 在被截断的数据点 ($y_k^* < \tau$) 处, $\mathbf{H}_{n+1} = \frac{\delta g}{\delta x}|\mathbf{X}_{n+1|n} = \mathbf{0}$; 在阈值 τ 处未定义。

3 Tobit Kalman 滤波器与 Tobit Extended Kalman 滤波器

本章主要对数据截断问题进行具体的公式化描述,介绍 Tobit Kalman 滤波器 (Tobit Kalman Filter, TKF) 的原理,说明本文对 EKF 进行拓展得到的 Tobit Extended Kalman 滤波器 (Tobit Extended Kalman Filter, TEKF) 的基本原理,推导过程及方法分析。

3.1 问题描述

定义一个简单的标量输出状态序列的截断数据问题为:

$$\begin{aligned} x_k &= Ax_{k-1} + Bw_k + w_{k-1} \\ y_k^* &= Cx_k + v_k \\ y_k &= \begin{cases} y_k^*, & y_k^* > \tau \\ \tau, & y_k^* \leq \tau \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$x_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 是状态向量, u_k 是标量输入, y_k 是标量输出, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是状态转移矩阵, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 是输入矩阵, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 是量测向量, w_k 和 v_k 是均值为零, 协方差矩阵分别为 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $R = \sigma^2$ 的高斯随机向量。

正态分布的噪声下, 数据截断的分布是:

$$f(y_k|x_k) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_k - Cx_k}{\sigma}\right) u(y_k - \tau) + \delta(\tau - y_k) \Phi\left(\frac{\tau - Cx_k}{\sigma}\right) \quad (3.2)$$

其中

$$\phi\left(\frac{y_k - Cx_k}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_k - Cx_k)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.3)$$

$$\Phi\left(\frac{y_k - Cx_k}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{y_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_k - Cx_k)^2}{2\sigma^2}} dz_k \quad (3.4)$$

分别是均值为 Cx_k 的高斯随机变量的概率密度函数和累积分布函数, δ 是冲激函数, $u(\alpha)$ 是阶跃函数。

量测值的均值和方差分别为:

$$\begin{aligned} E[y_k|x_{k|k-1}, \sigma] &= P[y_k > \tau|x_{k|k-1}, \sigma]E[y_k|y_k > \tau, x_{k|k-1}, \sigma] \\ &\quad + P[y_k = \tau|x_{k|k-1}, \sigma]E[y_k|y_k = \tau, x_{k|k-1}, \sigma] \\ &= \Phi\left(\frac{Cx_k - \tau}{\sigma}\right)[Cx_k + \sigma\lambda((\tau - Cx_k)/\sigma)] + \Phi\left(\frac{\tau - Cx_k}{\sigma}\right)\tau \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$Var[y_k|y_k > \tau, x_k, \sigma] = \sigma^2[1 - \delta\left(\frac{\tau - Cx_k}{\sigma}\right)] \quad (3.6)$$

其中

$$\delta\left(\frac{\tau - Cx_k}{\sigma}\right) = \lambda\left(\frac{\tau - Cx_k}{\sigma}\right)\left[\lambda\left(\frac{\tau - Cx_k}{\sigma}\right) - \left(\frac{\tau - Cx_k}{\sigma}\right)\right] \quad (3.7)$$

注意到, 由于 $Var[y_k|y_k < \tau, x_k, \sigma] = 0$, 所以

$$Var[y_k|x_k, \sigma] = Var[y_k|y_k > \tau, x_k, \sigma]$$

3.2 Tobit Kalman 滤波器

为了推导 Tobit Kalman 滤波器, 本文使用如下符号:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k^* &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{y}_k &= \begin{cases} \mathbf{y}_k^*, & \mathbf{y}_k^* > \mathcal{T} \\ \mathcal{T}, & \mathbf{y}_k^* \leq \mathcal{T} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是状态转移矩阵, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是量测模型, $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 是阈值向量, 噪声 \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 是均值为零, 协方差矩阵为 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 的高斯白噪声。

与标准 Kalman 滤波器类似, 在预测阶段, $k-1$ 时刻给定量测结果和状态信息的状态误差协方差矩阵是:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{x}_{k|k-1} - \mathbf{x}_k) &= \text{cov}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1|k-1} + \mathbf{w}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}) \\ &= \mathbf{A}\text{Var}(\mathbf{x}_{k-1|k-1})\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \\ &= \mathbf{A}\Psi_{k-1|k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 $\mathbf{x}_{k-1|k-1}$ 是 \mathbf{x}_{k-1} 的估计, \mathbf{Q} 是模型协方差矩阵, $\Psi_{k-1|k-1}$ 是前一时时刻状态误差协方差矩阵的后验估计。

在修正阶段，根据当前观测值修正状态估计：

$$\mathbf{x}_{k|k} = \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{E}(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k-1})) \quad (3.10)$$

其中 $\mathbf{E}(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k-1}) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 在下文中简写为 $\mathbf{E}(\mathbf{y}_k)$ ，该向量中每个标量可在任意时刻被阈值 $\mathcal{T} = [\mathcal{T}(1), \mathcal{T}(2), \dots, \mathcal{T}(m)]$ 截断， $\mathcal{T}(l), \mathbf{y}_k(l)$ 表示 \mathcal{T} 和 \mathbf{y}_k 的第 l 个元素。

公式3.10中 Kalman 增益 K_k 的目标为最小化状态误差协方差矩阵：

$$\begin{aligned} \Psi_{k|k} &= \text{cov}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k}) \\ &= \text{cov}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{E}(\mathbf{y}_k))) \end{aligned} \quad (3.11)$$

为了描述某个量测数据是否被截断，服从 Bernoulli 分布的随机变量 $p_k(l)$ 被引入模型。当数据未被截断时 $p_k(l) = 1$ ，当数据被截断时 $p_k(l) = 0$ ，由此量测模型可表示为：

$$p_k(l) = \begin{cases} 1, & Cx_k(l) + v_k(l) > \mathcal{T}(l) \\ 0, & Cx_k(l) + v_k(l) \leq \mathcal{T}(l) \end{cases} \quad (3.12)$$

任意时刻的量测值可由隐状态 $Cx_k(l) + v_k(l)$ 与概率 $E(p_k(l))$ 表示。在矩阵符号中 Bernoulli 随机矩阵是对角阵 $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ，所以最终量测结果表示为：

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{p}_k(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k) + (\mathbf{I}_{m \times m} - \mathbf{p}_k)\mathcal{T} \quad (3.13)$$

其中 $\mathbf{I}_{m \times m}$ 是单位阵。该公式也是本文拓展 EKF 的基础。将其代入公式3.11，得到：

$$\begin{aligned} \Psi_{k|k} &= \text{cov}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k}) \\ &= \text{cov}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k(\mathbf{p}_k(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k) + \\ &\quad (\mathbf{I}_{m \times m} - \mathbf{p}_k)\mathcal{T} - \mathbf{E}(\mathbf{y}_k))) \end{aligned} \quad (3.14)$$

为了简化符号，定义 Kalman 误差为

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{p}_k(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k) + (\mathbf{I}_{m \times m} - \mathbf{p}_k)\mathcal{T} - \mathbf{E}(\mathbf{y}_k) \quad (3.15)$$

令

$$\Psi_{k|k-1} = \mathbf{E}((\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1})(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1})^T) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}_k} = \mathbf{E}((\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1})\tilde{\mathbf{y}}_k^T) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}_k} = \mathbf{E}(\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T) \quad (3.18)$$

则状态估计的协方差可写为:

$$\begin{aligned} \Psi_{k|k} &= \mathbf{E}((\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k)^T) \\ &= \Psi_{k|k-1} - \mathbf{E}((\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1}) \tilde{\mathbf{y}}_k^T) \mathbf{K}_k^T \\ &\quad - \mathbf{K}_k \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{y}}_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1})^T) + \mathbf{K}_k \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{y}}_k \tilde{\mathbf{y}}_k^T) \mathbf{K}_k^T \\ &= \Psi_{k|k-1} - \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}_k} \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}_k}^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}_k} \mathbf{K}_k^T \end{aligned} \quad (3.19)$$

为了得到使预测协方差最小的 Kalman 增益, 对 $\Psi_{k|k}$ 的迹求导并令其等于 0, 得到:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}_k} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}_k}^{-1} \quad (3.20)$$

接下来需要求 $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}_k}$ 和 $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}_k}$ 的值。将 3.13 代入 3.17, 得:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}_k} &= \mathbf{E}((\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1})((\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k)^T \mathbf{p}_k + \mathcal{T}^T(\mathbf{I}_{m \times m} - \mathbf{p}_k) - \mathbf{E}(\mathbf{y}_k)^T)) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T \mathbf{C}^T \mathbf{p}_k) + \mathbf{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{p}_k) + \mathbf{E}(\mathbf{x}_k \mathcal{T}^T(\mathbf{I}_{m \times m} - \mathbf{p}_k)) \\ &\quad - \mathbf{E}(\mathbf{x}_k) \mathbf{E}(\mathbf{y}_k^T) - \mathbf{E}(\mathbf{x}_{k|k-1} \mathbf{x}_k^T \mathbf{C}^T \mathbf{p}_k) - \mathbf{E}(\mathbf{x}_{k|k-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{p}_k) - \\ &\quad \mathbf{E}(\mathbf{x}_{k|k-1} \mathcal{T}^T(\mathbf{I}_{m \times m} - \mathbf{p}_k)) - \mathbf{E}(\mathbf{x}_{k|k-1}) \mathbf{E}(\mathbf{y}_k)^T \end{aligned} \quad (3.21)$$

量测结果未被截断的概率 $p_k(l, l)$ 是隐变量与阈值间距离的函数, 其期望可写为:

$$E(p_k(l, l)) = \Phi\left(\frac{Cx_k(l) - \mathcal{T}(l)}{\sigma(l)}\right) \quad (3.22)$$

其中 $Cx_k(l)$ 是量测向量的第 l 个元素, $\sigma(l)$ 是隐变量的噪声方差。要准确求出这个概率值需要知道真实的状态值, 但真实状态值难以获得, 因此需要放宽限制简化概率值的求解。在满足下列假设的条件下:

1. 状态预测充分准确

$$E(p_k(l, l)) = \Phi\left(\frac{Cx_k(l) - \mathcal{T}(l)}{\sigma(l)}\right) \approx \Phi\left(\frac{Cx_{k|k-1}(l) - \mathcal{T}(l)}{\sigma(l)}\right)$$

2. 噪声协方差矩阵为对角阵

$$\text{cov}(y_k(d), y_k(l)) = 0 \quad \forall d \neq l$$

截断概率矩阵为:

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}_k) = \text{Diag} \left(\begin{array}{c} \Phi\left(\frac{Cx_{k|k-1}(1) - \mathcal{T}(1)}{\sigma(1)}\right) \\ \Phi\left(\frac{Cx_{k|k-1}(2) - \mathcal{T}(2)}{\sigma(2)}\right) \\ \vdots \\ \Phi\left(\frac{Cx_{k|k-1}(m) - \mathcal{T}(m)}{\sigma(m)}\right) \end{array} \right) \quad (3.23)$$

因为 \mathbf{v}_k 是零均值高斯白噪声, $\mathbf{E}(\mathbf{x}_{k|k-1}\mathbf{v}_k^T) = \mathbf{0}_{n \times n}$, 又因为假设1, 则 $\mathbf{E}(\mathbf{x}_{k|k-1}) = \mathbf{x}_{k|k-1}$, $\mathbf{E}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_{k|k-1}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^T) &= \mathbf{E}((\mathbf{x}_k - \mathbf{E}(\mathbf{x}_{k|k-1}))(\mathbf{x}_k - \mathbf{E}(\mathbf{x}_{k|k-1}))^T) \\ &\quad + \mathbf{E}(\mathbf{x}_k)\mathbf{E}(\mathbf{x}_k)^T \\ &= \Psi_{k|k-1} + \mathbf{x}_{k|k-1}\mathbf{x}_{k|k-1}^T\end{aligned}\quad (3.24)$$

所以 $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}_k}$ 的值为:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}_k} &= (\Psi_{k|k-1} + \mathbf{x}_{k|k-1}\mathbf{x}_{k|k-1}^T)\mathbf{C}^T\mathbf{E}(\mathbf{p}_k) \\ &\quad + \mathbf{x}_{k|k-1}\mathcal{T}^T(\mathbf{I}_{m \times m} - \mathbf{E}(\mathbf{p}_k)) - \mathbf{x}_{k|k-1}\mathbf{E}(\mathbf{y}_k)^T \\ &\quad - \mathbf{x}_{k|k-1}\mathbf{x}_{k|k-1}^T\mathbf{C}^T\mathbf{E}(\mathbf{p}_k) \\ &\quad - \mathbf{x}_{k|k-1}\mathcal{T}^T(\mathbf{I}_{m \times m} - \mathbf{E}(\mathbf{p}_k)) + \mathbf{x}_{k|k-1}\mathbf{E}(\mathbf{y}_k)^T \\ &= \Psi_{k|k-1}\mathbf{C}^T\mathbf{E}(\mathbf{p}_k)\end{aligned}\quad (3.25)$$

同理可得:

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}_k} = \mathbf{E}(\mathbf{p}_k)\mathbf{C}\Psi_{k|k-1}\mathbf{C}^T\mathbf{E}(\mathbf{p}_k) + \mathbf{E}(\mathbf{p}_k\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T\mathbf{p}_k^T) \quad (3.26)$$

其中 $\mathbf{E}(\mathbf{p}_k\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T\mathbf{p}_k^T)$ 是公式3.6中的分析值, 若假设2成立, 该式为对角阵:

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}_k\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T\mathbf{p}_k^T) = \text{Diag} \begin{pmatrix} \text{Var}[y_k(1)|x_{k|k-1}(1), \sigma(1)] \\ \text{Var}[y_k(2)|x_{k|k-1}(2), \sigma(2)] \\ \vdots \\ \text{Var}[y_k(m)|x_{k|k-1}(m), \sigma(m)] \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

式中 $\text{Var}[y_k(i)|x_{k|k-1}(i), \sigma(i)]$ 根据公式3.6计算。将 Kalman 增益公式3.20带入3.19, 得到简化后的协方差修正公式:

$$\Psi_{k|k} = (\mathbf{I}_{m \times m} - \mathbf{E}(\mathbf{p}_k)\mathbf{K}_k\mathbf{C})\Psi_{k|k-1} \quad (3.28)$$

最后, 完整的 TKF 公式为:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k|k-1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1|k-1} \\ \Psi_{k|k-1} &= \mathbf{A}\Psi_{k-1|k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}_k}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}_k}^{-1}\end{aligned}\quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k|k} &= \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{E}(\mathbf{y}_k)) \\ \Psi_{k|k} &= (\mathbf{I}_{m \times m} - \mathbf{E}(\mathbf{p}_k)\mathbf{K}_k\mathbf{C})\Psi_{k|k-1}\end{aligned}\quad (3.30)$$

其中 $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}_k}$ 由公式3.25得到, $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}_k}$ 由公式3.26得到, 在 $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k|k-1}$ 的假设下 $\mathbf{E}(\mathbf{y}_k)$ 的元素由公式3.5得出, $\mathbf{E}(\mathbf{p}_k)$ 的值则由3.23得到。

TKF 的优点是减小了计算量, 且对有截断的数据进行了无偏估计。当量测数据与截断阈值差距较大时 TKF 将收敛为线性 Kalman 滤波器 [9]。

3.3 Tobit Extended Kalman 滤波器

TEKF 使用的模型与 TKF 相同, 但将最终量测结果等效建模为:

$$p_k(l) = u(Cx_k(l) + v_k(l) - \epsilon - \mathcal{T}(l)) \quad (3.31)$$

其中 $u(\alpha)$ 为阶跃函数, ϵ 为一小量。

将3.13带入2.12, 得:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{y}_k}{\partial \mathbf{x}_k} = \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial \mathbf{x}_k} (\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k) + \mathbf{p}_k \mathbf{C} - \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial \mathbf{x}_k} \mathcal{T} \\ &= (\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k)^T \delta(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \epsilon - \mathcal{T}) \mathbf{C} \\ &\quad + u(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \epsilon - \mathcal{T}) \mathbf{C} - \mathcal{T}^T \delta(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \epsilon - \mathcal{T}) \mathbf{C} \quad (3.32) \\ &= (\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathcal{T})^T \delta(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \epsilon - \mathcal{T}) \mathbf{C} \\ &\quad + u(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \epsilon - \mathcal{T}) \mathbf{C} \end{aligned}$$

其中 $\delta(\alpha)$ 为冲击函数。

将3.32 带入 EKF 的公式中, 即可得到 TEKF。

TEKF 通过在 EKF 中引入 Tobit 模型, 从而对截断数据进行统一数学形式的处理, 同时吸收了 TKF 对截断数据无偏估计运算方便和 EKF 便于处理非线性问题的优点。相比于 EKF, 其对数据的处理更加精确, 而不是粗暴地分情况求导; 相比于 TKF, 免除了 Kalman 增益的复杂计算, 进一步减小了计算量。

4 算法与分析

本章主要描述与分析 TKF 与 TEKF 的具体算法, SKF 和 EKF 的算法较为固定, 不再赘述。

4.1 TKF 算法

该算法主要的计算量在于均值、方差等 Kalman 增益相关的计算, 包括计算正态分布概率, 计算积分等。本算法利用广泛使用的 Q 函数, 标准正

算法 1 Tobit Kalman Filter

输入: x_0 初始状态, y 量测值, A 状态转移矩阵, C 量测方程, Q 状态噪声协方差阵, R 量测噪声协方差阵, τ 截断阈值

输出: x 估计状态序列, r 滤波结果

```

1:  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_0$ 
2:  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ 
3: for  $k = 2 \rightarrow \text{length}(\mathbf{y})$  do
4:    $\mathbf{xx} = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1)$ 
5:    $\mathbf{PP} = \mathbf{A} * \mathbf{P} * \mathbf{A}^T + Q$ 
6:    $\mathbf{E} = \text{Diag}(1 - \text{qfunc}((\mathbf{C} * \mathbf{xx} - \tau)/\text{sqrt}(\mathbf{R})))$ 
7:    $\mathbf{R}_{xy} = \mathbf{PP} * \mathbf{C}^T * \mathbf{E}$ 
8:    $\mathbf{yy} = (\tau - \mathbf{C} * \mathbf{xx})/\text{sqrt}(\mathbf{R})$ 
9:    $\lambda = \text{normpdf}(\mathbf{yy})/\text{qfunc}(\mathbf{yy})$ 
10:   $\mathbf{Var} = \mathbf{R} * (1 - (\lambda * (\lambda - \mathbf{yy})))$ 
11:   $\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{E} * \mathbf{C} * \mathbf{PP} * \mathbf{C}^T * \mathbf{E} + \text{Diag}(\mathbf{Var})$ 
12:   $\mathbf{K} = \mathbf{R}_{xy}/\mathbf{R}_{yy}$ 
13:   $\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{E}) * \mathbf{K} * \mathbf{C} * \mathbf{PP}$ 
14:   $\mathbf{E}_y = \mathbf{E} * (\mathbf{C} * \mathbf{xx} + \text{sqrt}(\mathbf{R}) * \lambda) + (1 + \text{qfunc}((\tau - \mathbf{C} * \mathbf{xx})/\text{sqrt}(\mathbf{R}))) * \tau$ 
15:   $\mathbf{x}(k) = \mathbf{xx} + \mathbf{K} * (\mathbf{y}(k) - \mathbf{E}_y)$ 
16: end for
17:  $\mathbf{r} = \mathbf{C} * \mathbf{x}$ 
18: return  $\mathbf{x}, \mathbf{r}$ 

```

态分布等，用查表代替复杂的积分和概率计算，减小了运算量。总体的算法复杂度为 $O(n)$ 。

4.2 TEKF 算法

算法 2 Tobit Extended Kalman Filter

输入: x_0 初始状态, y 量测值, A 状态转移矩阵, C 量测方程, Q 状态噪声协方差阵, R 量测噪声协方差阵, τ 截断阈值

输出: x 估计状态序列, r 滤波结果

```

1:  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_0$ 
2:  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ 
3: for  $k = 2 \rightarrow \text{length}(\mathbf{y})$  do
4:    $\mathbf{xx} = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1)$ 
5:    $\mathbf{PP} = \mathbf{A} * \mathbf{P} * \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}$ 
6:    $\mathbf{yy} = \mathbf{C} * \mathbf{xx}$ 
7:   if  $\mathbf{yy} == \epsilon + \tau$  then
8:      $\mathbf{H} = (\mathbf{yy} - \text{tau}) * \mathbf{C} + \text{stepfun}(\mathbf{yy}, \tau + \epsilon) * \mathbf{C}$ 
9:   else
10:     $\mathbf{H} = \text{stepfun}(\mathbf{yy}, \tau + \epsilon) * \mathbf{C}$ 
11:   end if
12:    $\mathbf{K} = \mathbf{PP} * \mathbf{H}^T / (\mathbf{H} * \mathbf{PP} * \mathbf{H}^T + \mathbf{R})$ 
13:    $\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{K} * \mathbf{H}) * \mathbf{PP}$ 
14:    $\mathbf{x}(k) = \mathbf{xx} + \mathbf{K} * (\mathbf{y}(k) - \mathbf{yy})$ 
15: end for
16:  $\mathbf{r} = \mathbf{C} * \mathbf{x}$ 
17: return  $\mathbf{x}, \mathbf{r}$ 

```

本算法中由于避免了 Kalman 增益中期望方差等运算，将冲击函数用判断语句实现，TEKF 的运算量比 TKF 小。由于本文是简单的线性模型，所以滤波器构造较简单，实际运算量与 SKF 相似。本算法复杂度也为 $O(n)$ 。

5 数值结果和分析

本章介绍 TKF 与 TEKF 的仿真实验结果。本文通过简单的被截断的正弦信号证明 TKF 与 TEKF 在处理截断数据方面的能力。SKF 与 EKF 作为对照, SKF 不能区分截断数据与未截断数据, EKF 则对截断数据分情况处理。

5.1 实验设置

由于本文的仿真实验使用正弦信号, 该模型状态转移矩阵和量测方程是:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \alpha \begin{bmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

本例中 $\alpha = 1$, $\omega = 0.02\pi$, 初始状态为 $\mathbf{x}_0 = [5, 0]^T$, $\Psi_0 = \mathbf{I}_{2 \times 2}$, 采样周期为 $T = 1$, 隐状态噪声为 $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, $\mathbf{Q} = 0.01 \times \mathbf{I}_{2 \times 2}$, 量测噪声为 $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, R)$, $R = 1$ 的高斯白噪声。

该模型可以展示 TKF 和 TEKF 在已知模型和隐状态分布有噪声的情形下较鲁棒的目标追踪能力, 或是在模型已知, 而噪声未知情形下的信号处理能力。

5.2 实验结果

实验结果如图所示。其中图1展示了 SKF, EKF, TKF 和 TEKF 四种滤波器在处理正弦信号的阶段数据时对隐状态进行预测的表现; 图2展示了四种滤波器与真实隐状态误差的平方; 图3展示了四种滤波器隐状态的均方误差; 图4展示了四种滤波器对信号进行滤波后的输出与实际量测值的对比。表1是四种滤波器预测隐状态的均方误差。

表 1: SKF, EKF, TKF, TEKF 状态 MSE

滤波器	SKF	EKF	TKF	TEKF
x(1)	6.9081	0.4432	0.9474	0.3516
x(2)	10.4610	0.6648	1.1430	0.4995

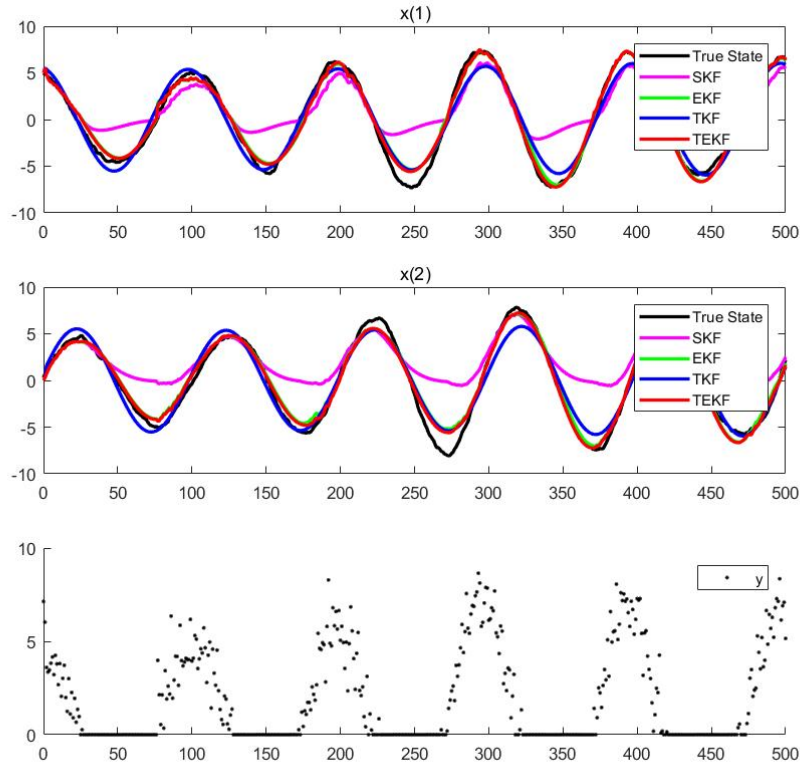


图 1: SKF, EKF, TKF, TEKF 处理截断正弦数据的隐状态效果

5.3 结果分析

从图1可以看出, SKF 并没有区分截断数据与未截断数据, 而是统一处理, 所以预测的隐状态与真实隐状态偏差最大; EKF 对截断数据与未截断数据分别处理, 未截断部分与 SKF 相似, 阶段部分也有一定效果; TKF 是所有滤波器中最稳定的一种方法, 其预测的隐状态受噪声影响最小, 非常平滑, 但与真实隐状态有一定偏差, 同时有一定明的时间偏移; TEKF 吸收了 EKF 与 TKF 的优点, 一方面对隐状态的拟合较好, 在未被截断的部分与隐状态基本一致, 截断部分预测平滑, 也更接近隐状态。直观来看, 在处理截断数据方面, 四种 Kalman 滤波器中 TEKF 对隐状态的预测效果最好。

从图2可以看出, SKF 的隐状态误差最大。由于 SKF 没有区分截断数据与未截断数据, 所以在截断数据部分其预测的隐状态与实际隐状态差距很大, SKF 不适于处理截断数据, 但未截断部分差距较少。EKF 对截断数

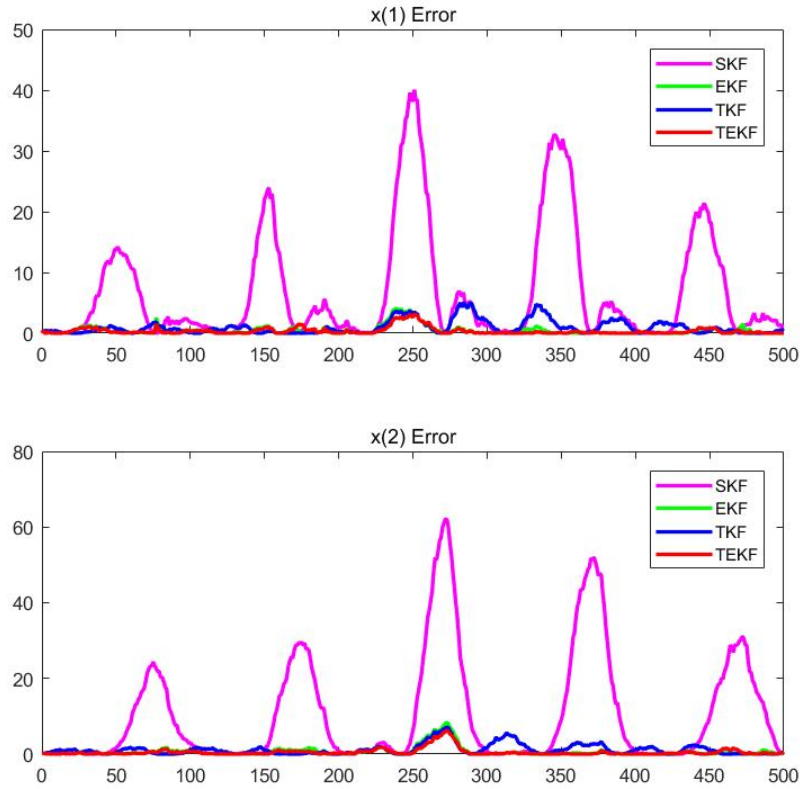


图 2: SKF, EKF, TKF, TEKF 处理截断正弦数据每一时刻的误差平方对比

据和未截断数据进行简单区分，因此在未截断部分与 SKF 类似，误差较小；截断部分也取得了较好的效果。由于 TKF 的状态预测受噪声影响较小，兼顾了截断部分和未截断部分，在截断部分和未截断部分的处理结果连续且平滑，所以在未截断部分误差较小，但相比其余三种 Kalman 滤波器有较大的误差；在截断部分误差比 SKF 小，但相比 EKF 和 TEKF 较大。TEKF 综合了 TKF 与 EKF 的优点，综合表现最好，不论是截断部分还是未截断部分，都是四种滤波器中误差最小的。

从图3及表1中可以明显看出，两个隐状态中 SKF 的均方误差最大，EKF, TKF 与 TEKF 的均方误差都较小，其中 TEKF 均方误差最小，EKF 的均方误差比 TEKF 大但比 TKF 小，TKF 的均方误差是三种滤波器中最大的，但仍只有 1 左右。结果表明数据截断对 SKF 影响很大，标准 Kalman 滤波器不能用来处理有数据截断的情形，模型简单时 EKF, TKF 与 TEKF 都

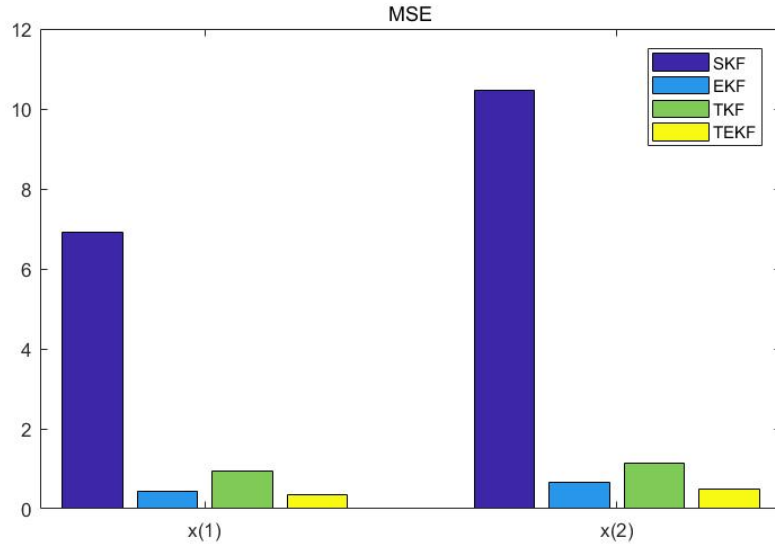


图 3: SKF, EKF, TKF, TEKF 处理截断正弦数据的均方误差对比

可以处理截断数据，其中 TEKF 效果最好。

从图4中可以看出，截断数据完全破坏了 SKF 的数据处理能力，SKF 不能区分截断数据与未截断数据，导致两部分数据的滤波互相产生不利影响，导致整个滤波过程效果最差，数据的滤波结果很不理想。EKF 在数据未截断时表现为标准的 Kalman 滤波，在数据截断时则根据截断前的状态和状态方程预测隐状态，避免了一定数据截断的影响，但简单的分情况处理导致数据截断部分预测的状态与未截断部分出现一定失配，对滤波结果产生了一定影响。TKF 的滤波结果保证了未截断部分与截断部分滤波结果的连续性，受噪声影响小，但没能体现 Kalman 滤波迭代计算进行自适应的效果，同时有一定时间偏移，滤波结果直观理想，但不一定实用。TEKF 统筹考虑截断部分与未截断部分数据的关联和区别，取得了最好的效果，截断部分的预测平稳且偏差不大，未截断部分体现了 Kalman 滤波的优势，同时在截断部分与未截断部分的交界处转换快速自然，避免了 EKF 的失配跳变问题。

6 结论

本文介绍了截断数据处理的学科概念、基本原理和基本方法，展示了用于处理截断数据的 Tobit Kalman 滤波器推导过程，并实现了基于 Extended Kalman 滤波器和 Tobit Kalman 滤波器的截断数据信号处理系统。本文在

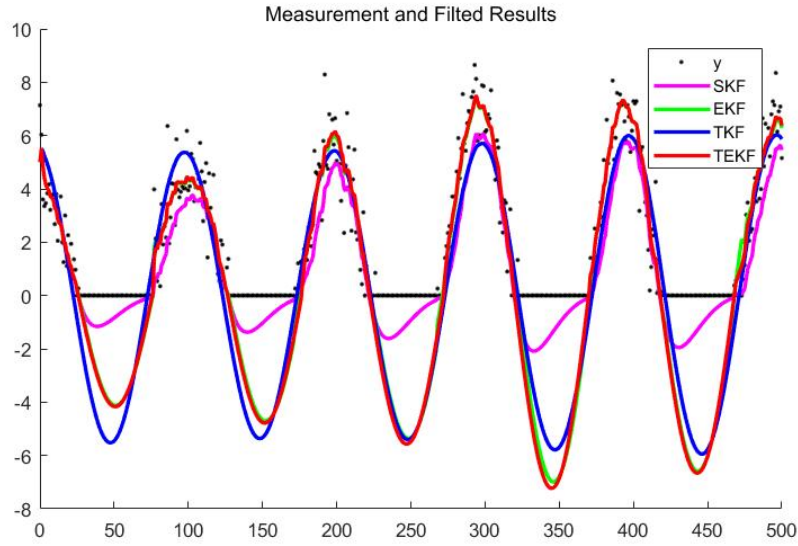


图 4: SKF, EKF, TKF, TEKF 处理截断正弦数据的滤波效果对比

Extended Kalman 滤波器和 Tobit Kalman 滤波器的基础上, 将 Tobit 模型引入 Extended Kalman 滤波器中, 对 Extended Kalman 滤波器进行截断数据扩展, 推导出自己的 Tobit Extended Kalman 滤波器, 并完成了实现。

通过仿真实验, 本文证明标准 Kalman 滤波器不能处理截断数据, 而 Extended Kalman 滤波器和 Tobit Kalman 滤波器都可处理截断数据。但两种滤波器都有一定问题, Extended Kalman 滤波器对截断数据处理过于简单, 导致截断阈值附近预测出现较大偏差, 而 Tobit Kalman 滤波器过于重视保持截断数据与未截断数据的一致性, 没有充分发挥 Kalman 滤波器优点。

通过仿真实验, 本文证明本文实现的 Tobit Extended Kalman 滤波器不仅可以处理截断数据, 并且兼具 Extended Kalman 滤波器和 Tobit Kalman 滤波器的优点, 从而具有比 Extended Kalman 滤波器和 Tobit Kalman 滤波器更好的性能, 避免了 Extended Kalman 滤波器在截断阈值附近的不稳定和 Tobit Kalman 滤波器没能充分体现 Kalman 滤波器优势的弱点, 在预测隐状态方面拥有最小的均方误差性能。

7 致谢

首先要感谢老师一个学期勤勤恳恳兢兢业业的教学和安排的作业，让我学到了很多知识，更学到了科研的态度和方法。本次大作业在寒假进行，我要感谢父母为我提供的良好学习条件，这是我能够按时完成作业的保障。这个寒假是一个特殊的寒假，我国爆发了新型冠状病毒的疫情，感谢党和政府的领导和指挥动员全国开展了积极措施防止疫情蔓延，感谢在前线奋战的医护人员保障我们的生命健康安全，也要感谢在我们身边维持社会正常运转和秩序的各自工作人员，使我们能较为安心地在家休养。祝愿我们能顺利打赢这场阻击战。

参考文献

- [1] James Tobin. Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables. *Econometrica*, 26(1):24, January 1958.
- [2] Bethany Allik. *The tobit kalman filter: An estimator for censored data*. PhD Thesis, University of Delaware, 2014.
- [3] K. Loumponias, N. Vretos, P. Daras, and G. Tsaklidis. Using kalman filter and tobit kalman filter in order to improve the motion recorded by kinect sensor ii. In *Proceedings of the 29th Panhellenic Statistics Conference*, volume 1, page 2, 2016.
- [4] Hang Geng, Zidong Wang, Yan Liang, Yuhua Cheng, and Fuad E. Alsaadi. Tobit Kalman filter with fading measurements. *Signal Processing*, 140:60–68, November 2017.
- [5] Federico Chiariotti. The Adaptive Tobit Kalman Filter: Tracking Position with Censored Measurements in the IoT. *arXiv:1909.05603 [eess]*, September 2019. arXiv: 1909.05603.
- [6] Kostas Loumponias, Nicholas Vretos, George Tsaklidis, and Petros Daras. An Improved Tobit Kalman Filter with Adaptive Censoring Limits. *arXiv:1911.06190 [cs, eess, math, stat]*, November 2019. arXiv: 1911.06190.
- [7] D. Simon. Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms. *IET Control Theory & Applications*, 4(8):1303–1318, August 2010.
- [8] Bethany Allik, Mark Ilg, and Ryan Zurakowski. Ballistic roll estimation using EKF frequency tracking and adaptive noise cancellation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 49(4):2546–2553, 2013.
- [9] Bethany Allik, Cory Miller, Michael J. Piovoso, and Ryan Zurakowski. Nonlinear estimators for censored data: A comparison of the EKF, the UKF and the Tobit Kalman filter. In *2015 American Control Conference (ACC)*, pages 5146–5151, Chicago, IL, USA, July 2015. IEEE.