第二节 基本定义

本节介绍Petri网的基本概念，把上节的概念形式化：

1．网：简单网，单纯网，逆网(F换方向)，对偶网(S和T互换)，有限网，连通网，互补库所，伴随库所
2．网系统：容量函数，标识，权函数，网系统，外延，发生权，变迁规则
3．网系统分类：基本网系统（EN系统），库所/变迁网（P/T网），库所/变迁系统（P/T系统）

一、网

定义 1.1
三元组N=(S，T；F)为有向网(简称网)

- $S\cup T\neq\Phi$ ←N至少含一个元素
- $S\cap T=\Phi$ ←二类不同的元素
- $F\subseteq S\times T\cup T\times S$ ←有序偶集合，决定资源流动关系
- ； ←F由 S 和 T 构造
- $dom(F)\cup cod(F)=S\cup T$ ←N不能有孤立元素

X=S∪T称为N的元素集

$dom(F)=\{x|\exists y:(x,y)\in F\}$
$cod(F)=\{y|\exists x:(x,y)\in F\}$

或

$Net(S,T;F):\Leftrightarrow S\cup T\neq\Phi\wedge S\cap T=\Phi\wedge F\subseteq S\times T\cup T\times S\wedge dom(F)\cup cod(F)=S\cup T$

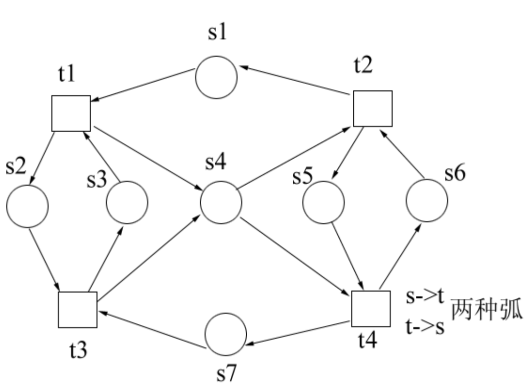
：⇔表示‘定义为’

例：

S={s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7}
T={t1, t2, t3, t4}

F={(s1, t1), (t1, s2), (s2, t3), (t1, s4), (s3, t1), (t3, s3), (t3, s4), (s7, t3), (t2, s1), (t2, s5), (s4, t2), (s6, t2), (t4, s6), (t4, s7), (s5, t4), (s4, t4)}

通常用圆圈或椭圆表示库所，用方框或粗杠表示变迁，用箭头表示流关系。



定义1.2

设x∈X为网N=(S, T; F)任一元素

$^{\bullet}x=\{y|(y,x)\in F\}$　x的前集(输入集)
$x^{\bullet}=\{y|(x,y)\in F\}$　x的后集(输出集)

见上例

定义1.3

N=(S, T; F)

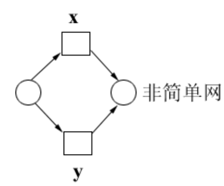
- 简单网
- 单纯网(纯网)
- 对偶网
- 逆网

简单网

$\forall x, y \in X: ({}^{\bullet}x = {}^{\bullet}y \wedge x^{\bullet} = y^{\bullet}) \Rightarrow x = y$

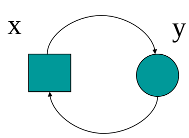
无论从结构上还是行为上， **x** 和 **y** 都无法区分，把不含这种元素的网称为简单网

非简单网示例：



单纯网(纯网)

$\forall x \in X \Rightarrow {}^{\bullet}x \cap x^{\bullet} = \Phi$ 　 ${}^{\bullet}x = \{y\}$ 　 $x^{\bullet} = \{y\}$



任何元素不能同时是另一元素的输入和输出

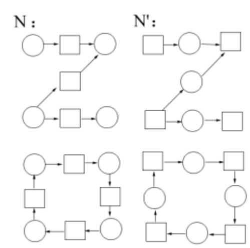
因为$t \in {}^{\bullet}s \cap s^{\bullet} \Rightarrow s \in {}^{\bullet}t \cap t^{\bullet}$，反之亦成立，所以 单纯网还可以如下定义：

不存在库所s和变迁t，使得$s \in {}^{\bullet}t \cap t^{\bullet}$

不存在库所s和变迁t，使得$t \in {}^{\bullet}s \cap s^{\bullet}$

对偶网

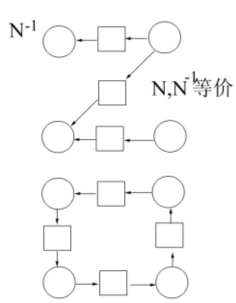
N′=(T, S; F)为N的对偶网，也是网(可以证明)



逆网

$N^{-1}=(S, T; F^{-1}) \Rightarrow$显然是网

$F^{-1}=\{(x, y)|(y, x) \in F\}$



定义1.4

- **|X|<∞, N**称为有限网　我们主要讨论有限网
- 若**(X, F)**是个连通图，则**N**称为连通网
  ↓
  表示**N=(S, T; F)**相应的有向图

定义1.5

N=(S, T; F)

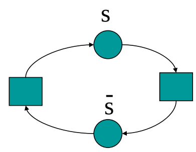
设$s\in S$, 若有$s'\in S$, 使得

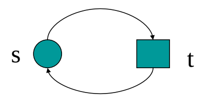
1. ${}^{\bullet}s'={s}^{\bullet}$ 并且 $s'^{\bullet}={}^{\bullet}s$, 则$s'$和$s$是互补库所。常用$\bar{s}$ 表示s的互补库所

   s的前集作后集，后集作前集，就能得到s的补库所$\bar{s}$

2. $\exists t\in T$, 使$t\in {}^{\bullet}s\cap s^{\bullet}$, 则s是t的伴随库所

单纯网⇔不含伴随库所的网





二、网系统

定义1.6 **N=(S, T; F)**为网

1．容量函数 **K:** $S\to N^{+}\cup\{\omega\}$
   (N^{+}是自然数集，ω是无穷)

2．函数**M:** $S\to N_0$为一个标识的充要条件
   $\forall s\in S$ 有$M(s)\le K(s)$ (N_0非负整数集)

3．权函数 **W:** $F\to N^{+}$ 用**W(x, y)**表示值
   权函数规定每个变迁发生一次引起的有关资源数量上的变化

说明

- K, M, W可直接在网图上表示出来， 缺省时, $K(s)=\infty$, $W(x, y)=1$, $M(s)=0$
- 网论尊重资源有限的事实，所以代表资源分布的标识M只能为每个库所指定有限多个资源。
- 库所的容量也是有限的，虽然定义允许某些库所的容量为无穷，但这只表明这些库所的容量不会对系统的行为构成限制。
- 注意M(s)的图表示不用数字, 而用托肯(token, 黑点), 因为库所中的资源属同一类, 对网系统来说, 同一库所中的所有资源都是完全等价的个体
- 对于一个N, K和W是唯一确定的, 但M的变化表示状态变化

定义1.7

六元组$\Sigma=(S, T; F, K, W, M_0)$是一个网系统的充分必要条件:

- N=(S, T; F)是个网, 称为Σ的基网
- K, W, M分别为N上的容量函数, 权函数和标识， M_0称为Σ的初始标识

静态结构→ 动态行为

定义1.8

Σ为网系统, M为标识

1．对$t\in T$, ${}^{\bullet}t\cup t^{\bullet}$ 称为t的外延

2．t在M有发生权的条件为
   $\forall s\in {}^{\bullet}t\Rightarrow M(s)\ge W(s, t))\wedge$
   $\forall s\in t^{\bullet}\Rightarrow M(s)+W(t, s)\ \le\ K(s))$
   此时也说M授权t发生, 记作 M[t>

3．若t在M有发生权, 则t可以发生, 发生的结果是：由M产生新的标识M′，$\forall s\in S$

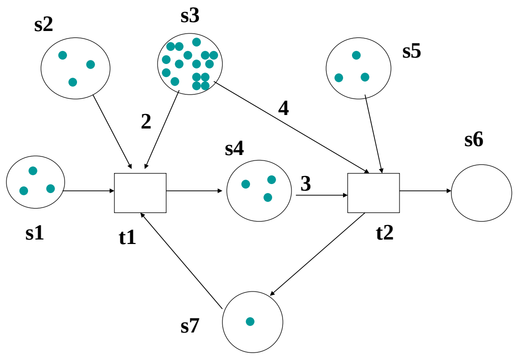
变迁规则

$$M'(s)=\begin{cases} M(s)-W(s,t) & 若s\in {}^{\bullet}t-t^{\bullet} \\ M(s)+W(t,s) & 若s\in t^{\bullet}-{}^{\bullet}t \\ M(s)-W(s,t)+W(t,s) & 若s\in {}^{\bullet}t\cap t^{\bullet} \\ M(s) & 若s\notin {}^{\bullet}t\cup t^{\bullet} \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} 若s\in {}^{\bullet}t-t^{\bullet} \\ 若s\in t^{\bullet}-{}^{\bullet}t \\ 若s\in {}^{\bullet}t\cap t^{\bullet} \end{array}\right\} {}^{\bullet}t\cup t^{\bullet}$

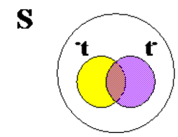
记M[t>M′ 或 $M \xrightarrow{t} M'$， M′称为**M**的后继标识

理解M′



理解 M′

局部变化→ 外延→ $^{\cdot}t \cup t^{\cdot}$



当 $s \notin {}^{\cdot}t \cup t^{\cdot}$ 时，
$M'(s)=M(s)$

考虑 $^{\cdot}t \cup t^{\cdot}$ 为三个集合

- $^{\cdot}t - t^{\cdot}$
- $t^{\cdot} - {}^{\cdot}t$
- $^{\cdot}t \cap t^{\cdot}$

虽然变迁的发生权是用作为全局资源分布的标识M来定义的，但实际上变迁的发生仅与其外延有关，也就是说网系统的全局状态不是变迁的控制因素

M'是标识吗？即$\forall s \in S$ 有$0 \leq M'(s) \leq K(s)$

若$s \in {}^{\cdot}t - t^{\cdot}$
- $K(s) \geq M'(s) = M(s) - W(s,t) \geq 0$ ←由$M(s) \geq W(s,t)$保证

若$s \in t^{\cdot} - {}^{\cdot}t$
- $K(s) \geq M'(s) = M(s) + W(t,s) \geq 0$ ←由$M(s)+W(t,s) \leq K(s)$保证

若$s \in {}^{\cdot}t \cap t^{\cdot}$
- $K(s) \geq M'(s) = M(s) - W(s,t) + W(t,s) \geq 0$ ←由$K(s) \geq M(s)+W(t,s)$ 和 $M(s) \geq W(s,t)$保证
- 若$s \notin {}^{\cdot}t \cup t^{\cdot}$
  $M'(s)=M(s)$

1．当$^{\cdot}t \cap t^{\cdot} = \Phi$时 （纯网）

$$M' = \begin{cases} M(s) - W(s,t) & 当 s \in {}^{\cdot}t \\ M(s) + W(t,s) & 当 s \in t^{\cdot} \\ M(s) & 当 s \notin {}^{\cdot}t \cup t^{\cdot} \end{cases}$$

2．当 $W \equiv 1$ 时

$$M' = \begin{cases} M(s) - 1 & 当 s \in {}^{\cdot}t - t^{\cdot} \\ M(s) + 1 & 当 s \in t^{\cdot} - {}^{\cdot}t \\ M(s) & 当 s \notin {}^{\cdot}t \cup t^{\cdot} \vee s \in {}^{\cdot}t \cap t^{\cdot} \end{cases}$$

3. 当 $W \equiv 1$和$K \equiv 1$时

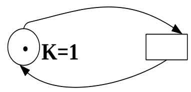
$$M' = \begin{cases} M(s) - 1 & 当 s \in {}^{\cdot}t \\ M(s) + 1 & 当 s \in t^{\cdot} \\ M(s) & 当 s \notin {}^{\cdot}t \cup t^{\cdot} \end{cases}$$

4. 当$\forall s \in S, K(s) = \infty$时，只要考虑第一个条件

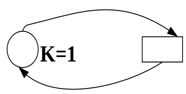
说明

- 变迁规则与变迁的应用有关，同一个网系统在不同的应用领域可以有不同的解释，解释的合理性体现为确保变迁规则的成立
- 变迁的可实现性
  - 每个变迁代表一个物理的或化学的变化，系统设计者有责任确保变迁规则的成立，即每当变迁的外延使变迁t有发生权时，t确实能够发生，而且发生的结果也如定义那样只影响其外延

考虑下面变迁的是否能够发生

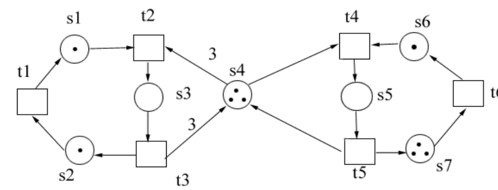


s∈t˙ M(s)+W(t,s) =2> K(s)=1



s∈˙t M(s)=0<W(s,t)=1

例：



$M_0=(1,1,0,3,0,1,3) \xrightarrow{t2} (0,1,1,0,0,1,3) \xrightarrow{t3} (0,2,0,3,0,1,3)$

$\xrightarrow{t4} (0,2,0,2,1,0,3) \to \ldots\ldots$

三、网系统分类

根据K及W分成三类：

1．基本网系统(elementary net system--EN系统)

2．库所/变迁网(place/transition -P/T网)

3．库所/变迁系统(P/T系统)

1.基本网系统(E/N系统)

K≡1, W≡1

$M(s) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ 两种状态,即有无托肯

库所 ⇒条件： 真或假　　B表示条件集
变迁 ⇒事件　　　　　　E表示事件集

说明

说明

- 由于库所为条件，即M(s)= 0 或 1，可以不用向量表示 M，而用B的子集表示，
  c={b∈B|M(b)=1}　　　称为情态
  c_{in}={b∈B|M_0(b)=1}　称为初始情态
- 于是，基本网系统是个四元组　　(B, E; F, c_{in})　　K, W 略去
- 四季系统，救火队伍
- EN系统中流动的是信息，与流动着物质资源的其他系统当然是不同类的。

2.库所/变迁网（P/T网）

K≡∞ , W≡1

Σ=(S, T; F, M_0)

这是传统上称为Petri网的网系统，有称为 P/T网 (place/transaction net) 。
C.A.Petri 1962使用的就是这种模型。

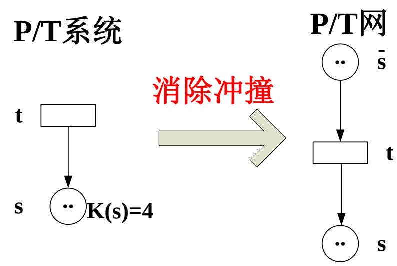
便于理论研究与分析

3.库所/变迁系统（P/T系统）

Σ =(S, T; F, K, W, M_0) K, W为任意容量及权函数

- 便于实际应用
- P/T网和P/T系统中流动的是物质资源，与EN系统有质的区别，自然是不同的类
- P/T网和P/T系统是否也有质的区别呢？
- （有限） P/T网与P/T系统是等价的。（行为等价）
- EN系统及P/T网是P/T系统的特例
- 由P/T系统直接构造出P/T网

先看个例子



命题

权函数为1的P/T系统中两互补库所中的托肯总数永远是一个常量。

- 常量为$M_0(s)+M_0(\bar{s})$
- 即不会增加新的托肯（当网系统动态变化，即t发生后）

证明

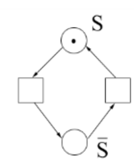
证明

证：${}^{\cdot}s=\bar{s}^{\cdot} \wedge s^{\cdot}={}^{\cdot}\bar{s}$

$\Rightarrow t\in {}^{\cdot}s \Leftrightarrow t\in \bar{s}^{\cdot} \wedge t\in s^{\cdot} \Leftrightarrow t\in {}^{\cdot}\bar{s}$

$\Rightarrow$s获得一个托肯，则$\bar{s}$失去一个托肯

s失去一个托肯，则$\bar{s}$获得一个托肯



s—资源数 $\bar{s}$—可用空间数

$M_0(s)+M_0(\bar{s})$不变

改造方法：

添加互补库所：为每个s求得（寻找或添加）相应的补$\bar{s}$

初始标识M_0就确定了每个s的容量

$M_0(s)+M_0(\bar{s})=K(s)$

结论：

- 容量K的考虑是多余的， 即K可认为是无限ω
- 行为等价 如何理解？
- 任意的权函数也可以改造成W=1的情况
- P/T系统和P/T没有本质的区别：库所中的托肯代表同一类的物质资源