第七章 同步论

同步距离 → 刻画系统的动态行为

↓

定义：二组事件间相对关系的一种定量描述

- 卫星和地球同步：相对位变置不变 → sd(同步距离)=0
- 行人二腿同步：二腿交替向前 → sd=1
- 生产线上的同步：生产n个零件后再生产另一种1个 → sd=n

一、同步距离

定义7.1 同步距离

C/E系统中，若$E_1, E_2 \subseteq E$，则E_1, E_2间的同步距离定义为：

$$\sigma(E_1, E_2)=\begin{cases} \max\limits_{p\in\pi}\{|O_{CC}(E_1,p)-O_{CC}(E_2,p)|\} & \text{若存在极大值} \\ \infty & \text{否则} \end{cases}$$

挠进程

p—挠进程(包括向前进程，又包括向后进程)

要给出挠进程的形式化定义，要先定义能记录事件反向发生的出现网。

本章用事件发生序列来表示，我们只关心进程中事件发生的次数，不关心它们是否并行。

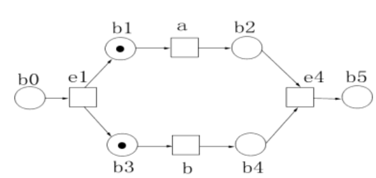
π—C/E系统Σ的进程集(包括挠进程)

$O_{CC}(E_i,p)$

$O_{CC}(E_i, p)$ $(i=1,2)$——E_i中事件在进程p中发生（出现）次数

- 正向发生一次 ——+1
- 反向发生一次 ——-1
- 不发生（出现）——0

例如：



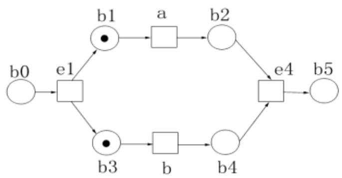
挠进程p_0 : $\{b_1, b_4\} \rightarrow \{b_2, b_3\}$

若$E_1=\{a\}$, $E_2=\{b\}$

$O_{cc}(a, p_0)=1$, $O_{cc}(b, p_0)=-1$

$|O_{cc}(a, p_0)-O_{cc}(b, p_0)|=2$

又例如：



上图完全情态集为：

$C=\{\{b_0\},\{b_1,b_3\},\{b_1,b_4\},\{b_2,b_3\},\{b_2,b_4\},\{b_5\}\}$

e1: $\{b_0\}\rightarrow\{b_1,b_3\}$

p1: $\{b_1,b_3\}\rightarrow\{b_1,b_4\}$

p2: $\{b_1,b_3\}\rightarrow\{b_2,b_3\}$

p3: $\{b_1,b_3\}\rightarrow\{b_2,b_4\}$

e4: $\{b_2,b_4\}\rightarrow\{b_5\}$

$|O_{cc}(a,p_1)-O_{cc}(b,p_1)|=|0-1|=1$

$|O_{cc}(a,p_2)-O_{cc}(b,p_2)|=|1-0|=1$

$|O_{cc}(a,p_3)-O_{cc}(b,p_3)|=|1-1|=0$

对于其他可能进程p′，可求出

$|O_{cc}(a,p')-O_{cc}(b,p')|\leqslant 2$

特别对于p_0进程，由前面已知：

$|O_{cc}(a,p_0)-O_{cc}(b,p_0)|=|1-(-1)|=2$

$\therefore \max\limits_{p\in\pi}\{|O_{cc}(a,p)-O_{cc}(b,p)|\}=2$

所以，$\sigma(a,b)=2$

特别库所

由S-完备知：对$E_1,E_2\subseteq E$，存在s：$^{\bullet}s=E_1$，$s^{\bullet}=E_2$

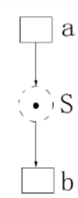
即一对事件集(E_1,E_2)表示一个库所s（非条件）

在上图中加 s

通过 s 可以

看到(E_1,E_2)中事件的发生，

反映到s为托肯个数的变化



托肯涨落

a正向发生：s得到一个托肯

b反向发生：s得到一个托肯

原现托肯差数= 2

a反向发生：s失去一个托肯

b正向发生：s失去一个托肯

$|Occ(a,p_0)-Occ(b,p_0)|$

观察窗口

s尤如观察窗口 —— 记录E1和E2中事件的发生次数

E_1中事件（正向）发生一次 $\Rightarrow$ s中增加一个托肯

E_2中事件（正向）发生一次 $\Rightarrow$ s中减少一个托肯

结论：s中托肯数涨落的最大差额=$\sigma(E_1,E_2)$

挠进程假设

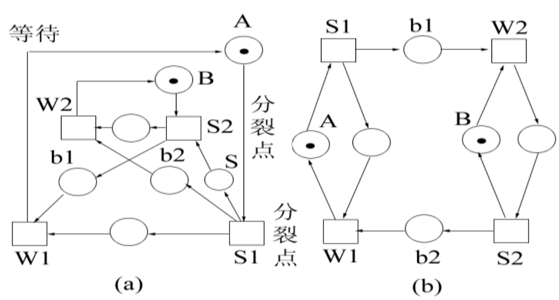
设∂_1，∂_2… ∂_n是事件的正向或反向发生，$c_0,c_1…c_n$是情态，使得$c_0\partial_1 c_1\partial_2 c_2… \partial_n c_n$，序列$\partial_1$，$\partial_2$… ∂_n为挠进程的条件是：

1. ∂_1，∂_2… ∂_n中既有事件正向发生也有反向发生
2. 若有i, j，$0<=i<j<=n$，使$c_i=c_j$,则要么从c_i到c_j的子序列$\partial_{i+1}… \partial_j$中所有事件发生都是同方向的，否则$c_j$就必须是$c_n$，即j=n

14

举例应用以上结论

信号A和B的同步问题
P 121



16

求同步距离σ

(a)图：发生序列：$S_1\to S_2\to W_2\to W_1\to S_2\to$……

库所S托肯 1 1-1 1-1-1=-1

在序列$S_2\to W_2\to W_1\to S_2$中，S_1和S_2发生次数差为2

在所有序列中，最大差值为2

$\therefore \sigma(S_1, S_2)=2$

事实上, S_1, S_2并发 $\Rightarrow$ $\sigma(S_1, S_2)>1$（见后定理）

(b)图：S_1, S_2交错发生(分裂, 等待同步),

所以，可求得$\sigma(S_1, S_2)=1$

17

定理7.1 同步距离性质

C/E系统中, a, b, c, d $\subseteq$ E为事件集, 则

1. $\sigma(a, b)\geqslant 0$
2. $\sigma(a, b)=0 \Leftrightarrow a=b$
3. $\sigma(a, b)=\sigma(b, a)$
4. $\sigma(a, b)+\sigma(b, c)\geqslant\sigma(a, c)$
5. $\sigma(a, b)=\sigma(a-b, b-a)$
6. $\sigma(a\cup b, c\cup d)\leqslant\sigma(a, c)+\sigma(b, d)$
$+\sigma(a\cap b, c\cap d)$

证明

1. ∵绝对值 ∴$\geqslant 0$
2. a中事件与b中事件同时发生, 即以对方存在为前提 ⇒ 认为一致 a=b（如a是左手击右手；b是右手击左手）
3. $|0_{cc}(a, p)-0_{cc}(b, p)|=|0_{cc}(b, p)-0_{cc}(a, p)|$
4. $|0_{cc}(a, p)-0_{cc}(c, p)|$
$=|0_{cc}(a, p)-0_{cc}(b, p)+0_{cc}(b, p)-0_{cc}(c, p)|$
$\leq|0_{cc}(a, p)-0_{cc}(b, p)|+|0_{cc}(b, p)-0_{cc}(c, p)|$
$\leq \sigma(a, b)+\sigma(b, c)$

证明

5. $a \cap b$为同时发生或不发生的事件
$|0_{cc}(a, p)-0_{cc}(b, p)|$结果与$a \cap b$中事件的发与否无关
（∵同时减(若发生)）
$=|0_{cc}(a-b, p)-0_{cc}(b-a, p)|$

6. 作业

二、同步距离与系统行为

$E_1, E_2 \subseteq E$

$\sigma(E_1, E_2)=\infty \Rightarrow E_1$中事件可以比$E_2$中事件多(或少)发生任意次 $\Rightarrow$ 异步

$\sigma(E_1, E_2)<\infty \Rightarrow E_1$中事件最多比$E_2$中事件多(或少)发生$\sigma(E_1, E_2)$次

由同步距离性质，我们已知

$\sigma(E_1, E_2)=0 \Rightarrow E_1=E_2$

$\sigma(E_1, E_2)=1 \Rightarrow E_1, E_2$中事件只能交替发生。同步距离为1的两组事件对应着系统中的一个条件，这些条件对研究系统性质有重要意义。

定义7.2 基本集合

C/E系统Σ

$B_1 :\Leftrightarrow \{(a, b) | a, b \in 2^E \wedge \sigma(a, b)=1 \wedge a \cap b=\phi\}$

称为Σ的基本集合

(a, b)可以视为一个库所s $(\cdot s=a,\ s\cdot=b)$

∴B_1是一个库所集合

我们说$B \subseteq B_1$，即B中每个条件$\in B_1$

证明：对于任意$b \in B$

$\cdot b \cap b \cdot = \phi$　(C/E系统基网为纯网)

$\sigma(\cdot b, b \cdot)=1$（因为C/E系统中，条件b都有机会成真(1)成假(0)）

所以，　$b \in B_1$

反过来，若B_1-B非空，即B是B_1的真子集

则B_1-B的b元素可以看成一个条件,称为隐含条件

B_1-B中的b元素 $\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\cdot b, b\cdot)=1,\text{表明} \\ b\text{至多可以获得} \\ \text{一个托肯} \end{array} \right\}$ ➡ 符合C/E的条件要求(有机会成真/成假)

(有托肯，无托肯)

于是

$$B_1 = \begin{cases} B & \text{—— 直接条件} \\ B_1-B & \text{—— 隐含条件} \end{cases}$$

例子 (P126(a)图)

四季系统→C/E系统

p1 $\boxed{a}$ p2 $\boxed{b}$ p3 $\boxed{c}$ p4 $\boxed{d}$ p1 $\boxed{a}$

把条件表示成基本集合**B1**中的有序偶对,则有

p1=(d, a), p2=(a, b), p3=(b, c), p4=(c, d)

下面求B_1-B

求隐含条件

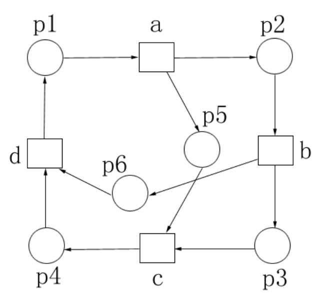
有否? 有　交替

看发生序列　a, b, c, d, a, b, c, d

∵σ(a, c)=σ(b, d)=1

(a, c)⇒p_5　(b, d)⇒p_6

另外, σ(d, a)=σ(a, b)=σ(b, c)=σ(c, d)≡1



确定系统结构

如果我们不知道四季系统的结构，而只知道事件的同步距离，是否可以确定四季系统的结构以及系统行为呢？

∵σ(a, b)=1, σ(a, c)=1, σ(a, d)=1

∴a与事件b, c, d交替发生

又∵σ(b, a)=1, σ(b, c)=1, σ(b, d)=1

∴b与事件a, c, d交替发生

所以，c与事件a, b, d交替发生

d与事件a, b, c交替发生

a, b, c, d必定依照某一固定顺序交替发生

30

顺序不定

⇩

a $\boxed{b, c, d}$ a $\boxed{b, c, d}$ a $\boxed{b, c, d}$ a ………

b $\boxed{a, c, d}$ b $\boxed{a, c, d}$ b $\boxed{a, c, d}$ b ………

c $\boxed{a, b, d}$ c $\boxed{a, b, d}$ c $\boxed{a, b, d}$ c ………

d $\boxed{a, b, c}$ d $\boxed{a, b, c}$ d $\boxed{a, b, c}$ d ………

{a, b, c, d}以何种顺序 —— 未知

排列4!=24,这其中的任何一种顺序都满足上面的六个同步距离。

知道六个同步距离 —— 不够

四季系统的基本集合是否还有别的元素呢？

也就是说，需要求所有的隐含条件，即B_1-B的所有元素

现问$\sigma(A,B)=1$?　$A,B\subseteq\{a,b,c,d\}$
显然$|A|,|B|$至少一个≥ 2
($\because A,B$只包含一个条件的情况已都是距离为1,即p_1 — p_6)
我们说$|A|=|B|$
(否则,每循环一圈A或B中事件就会多或少发生,则任意多次循环($\sigma(A,B)=\infty$))

假定$A\cap B=\phi$,否则用A-B, B-A代替A及B
($\because$ 定理7.1(5) $\sigma(A-B,B-A)=\sigma(A,B)$)
满足以上条件集合A, B
$A_1=\{a,b\}, B_1=\{c,d\}$　或$A_1=\{c,d\}, B_1=\{a,b\}$
$A_2=\{a,c\}, B_2=\{b,d\}$　即$A_1\leftrightarrow B_1$互换
$A_3=\{a,d\}, B_3=\{b,c\}$

a, b, c, d, a, b, c, d……
$\sigma(A_1,B_1)=2$
$\sigma(A_2,B_2)=1\Rightarrow$ a, c与b, d交替发生
a, b, c, d, a, b, c, d……
$\sigma(A_3,B_3)=2$

24种排列
只有两种

顺序为abcd或dcba
$\because\sigma$的对称性
$\therefore\sigma$不能判别方向

$(\{a,c\},\{b,d\})\Rightarrow p_7$

结论

1. 由a, b, c, d四个事件构成的C/E 系统，若已知7个同步关系 $\Rightarrow$ 顺序abcd或dcba
2. 循环系统

P117图7.7(a)或其逆系统(流方向相反)

B_1扩大到所有σ(同步距离,比B_1更大概念)

(E,σ)确定的系统结构为同步结构
(见下定义)

定义7.3 同步结构

C/E系统: $\sigma: 2^E\times 2^E\rightarrow N_0\cup\{\infty\}$
为Σ的同步距离函数,
则(E,σ)称为Σ的同步结构

对Σ进行S-完备化,任意$E_1,E_2\subseteq B$
有s: $\cdot s=E_1$, $s\cdot=E_2$
当$E_1\cap E_2=\phi\Rightarrow$s非伴随库所(单纯S-元素)
按$\sigma(E_1,E_2)$值(1, 2, 3…)对所有单纯S-元素分类

定义7.4 Si 定义

$S=\{s\,|\,({}^{\cdot}s=E_1 \wedge s^{\cdot}=E_2) \wedge E_1 \cap E_2=\phi \wedge E_1, E_2 \subseteq B\}$

定义$S_i=\{s\,|\,s \in S \wedge s=(E_1, E_2) \wedge \sigma(E_1, E_2)=i\}$

$i=1, 2, \ldots\ldots \infty$

显然 $S=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$

定理7.2

在C/E系统中，若存在$c \in C$，使事件$e_1, e_2 \in E$并发或冲突，则$\sigma(e_1, e_2) \geqslant 2$

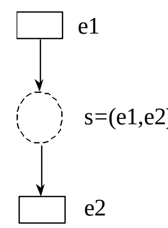
证明:

e_1, e_2各自有发生权

若e_2发生，$s=(e_1, e_2)$失去一个托肯

若e_1发生，$s=(e_1, e_2)$获得一个托肯

托肯总数差额至少为2

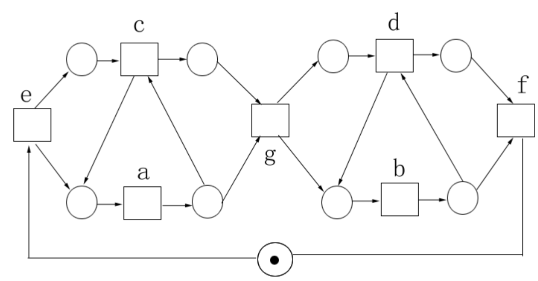


逆定理不成立

$\sigma(e_1, e_2) \geqslant 2$

也可能e_1, e_2是顺序关系

在下图所示网系统中，$\sigma(a, b)=2$



eacagbdbf…… $\sigma(a, b)=2$，a, b是顺序关系

不能孤立的从一个个同步距离来判断系统行为，应该把同步结构作为整体来研究它和系统行为的关系

三、同步距离的计算

(以前)同步距离定义

决定

系统结构+C → 系统行为 → 同步距离

试:计算公式

先证二个结论

定理7.3

p为C/E系统Σ的任一循环进程，

$E_1, E_2 \subseteq E \wedge E_1 \cap E_2=\phi$

则$\sigma(E_1, E_2)<\infty \;\Rightarrow\; 0_{cc}(E_1, p)=0_{cc}(E_2, p)$

证: $c1 \overset{p}{\ldots\ldots} c1$

若$0_{cc}(E_1, p) \neq 0_{cc}(E_2, p)$

则其差额随着循环可任意大

$\Rightarrow \sigma(E_1, E_2)=\infty$ 矛盾！

定理7.4

1. 若存在循环进程p，使
$O_{cc}(E_1,p) \neq O_{cc}(E_2,p)$，则$\sigma(E_1,E_2)=\infty$

2. $\forall$p循环进程，均有$O_{cc}(E_1,p)=O_{cc}(E_2,p)$，
则$\sigma(E_1,E_2)$的计算只要考虑不含完整循环过程的进程

证明

1. 是前一定理直接结果。

(n个循环可用归纳法)

2. p_1是包含一个循环进程p的任意进程
p_2是p_1中删除p的一个进程

$p_1=p+p_2$

循环 非循环

目标:

$Occ(E_1,p_1)-Occ(E_2,p_1) \longrightarrow Occ(E_2,p)+Occ(E_2,p_2)$

$=Occ(E_1,p_2)-Occ(E_2,p_2)$

$Occ(E_1,p)+Occ(E_1,p_2)$

已知条件

$Occ(E_2,p)$

相同

证毕

例子

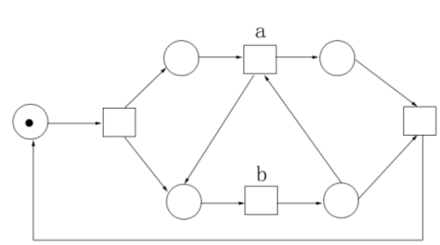
P130图7.10的C/E系统：进程可用
xu{xyz}*
(没有包含xx^{-1}形式，发生次数为0，x^{-1}表示向后)

在图6.10 只有一个循环进程{xyz}*，且x,y,z在循环中各出现一次，出现次数相同，所以，按上定理第2点，在计算事件x,y,z间的同步距离时，只需考虑非循环进程
xu,xux,xuxy三个进程。

例如计算O_{cc} (x,y)=2， O_{cc} (y,z)=1

由于u不在循环进程{xyz}*中，所以涉及u时，只会有无穷的同步距离。如
O_{cc} (x,u)= ∞

例子（类似P111图7-2(b)）



显然$\sigma(a,b)=\infty$

因为 $O_{cc}(a,p)\neq O_{cc}(b,p)$ 及循环系统

1 2

尽管$\sigma(a,b)=\infty$,但a,b出现次数总是1:2规律

加权同步距离定义(P119)

$\underset{2}{\boxed{\ }}\,O_{cc}(a,p)=\underset{1}{\boxed{\ }}\,O_{cc}(b,p)$

1 2

$\sigma(E_1,E_2)$的计算

$\Sigma=(B,E;F,C)$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$,

$m=|E|$, B_1基本集合

$S=\{(E_1,E_2)\mid E_1,E_2\subseteq E\wedge E_1\cap E_2=\phi\wedge E_1\cup E_2\neq\phi\}$

(考虑所有可能的单纯S-元素)

$s=(E_1,E_2)$ $\cdot s=E_1\wedge s\cdot=E_2$

∵ $E_1\cap E_2=\phi$

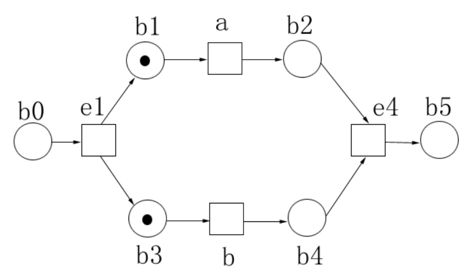
∴ $s=(E_1,E_2)$可用m维向量

$\alpha(s)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$表示

$$\alpha_i=\begin{cases}1 & e_i\in E_1\\ -1 & e_i\in E_2\\ 0 & e_i\notin E_1\cup E_2\end{cases}$$

∵ $E_1\cup E_2\neq\phi$, ∴$\alpha(s)$非零向量

所以,$(E_1,E_2)\rightarrow\alpha(s)$ 一对一



用e_2,e_3替代a,b

$b_1=(1,-1,0,0)$

$b_2=(0,1,0,-1)$

$b_3=(1,0,-1,0)$

$b_4=(0,0,1,-1)$

补
$$\begin{cases}\overline{b_1}=(-1,1,0,0)=-b_1\\ \overline{b_2}=(0,-1,0,1)=-b_2\\ \overline{b_3}=(-1,0,1,0)=-b_3\\ \overline{b_4}=(0,0,-1,1)=-b_4\end{cases}$$

$s=(a,b)=(e_2,e_3)=(0,1,-1,0)$

以看出: $s=(a,b)=b_2+\overline{b_4}$

固有关系,静态关系(由系统结构决定)

$c_0=\{b_0\}$, $c_1=\{b_1,b_3\}$, $c_2=\{b_1,b_4\}$, $c_3=\{b_2,b_3\}$, $c_4=\{b_2,b_4\}$, $c_5=\{b_5\}$

添加$\overline{b_1},\overline{b_2},\overline{b_3},\overline{b_4}$

$c_0'=\{b_0,\overline{b_1},\overline{b_2},\overline{b_3},\overline{b_4}\}$, $c_1'=\{b_1,\overline{b_2},b_3,\overline{b_4}\}$,

$c_2'=\{b_1,\overline{b_2},\overline{b_3},b_4\}$, $c_3'=\{\overline{b_1},b_2,b_3,\overline{b_4}\}$,

$c_4'=\{\overline{b_1},b_2,\overline{b_3},b_4\}$, $c_5'=\{\overline{b_1},\overline{b_2},\overline{b_3},\overline{b_4},b_5\}$

我们求：

$$\max_{0\leqslant i\leqslant 5}\{|c_i'\cap\{\overset{s}{\downarrow}b_2,\overline{b}_4\}|\}=|c_3'\cap\{b_2,\overline{b}_4\}|=2$$

$$\min_{0\leqslant i\leqslant 5}\{|c_i'\cap\{b_2,\overline{b}_4\}|\}=|c_2'\cap\{b_2,\overline{b}_4\}|=0$$

- 2 – 0 = 2 恰好为σ(e2, e3)=σ(a, b)
- 且Max对应c_3'
  Min对应c_2'
  也可以将(a, b)=s表示为
  s=$\overline{b}_1+b_3$，同样得到Max和Min的差为2，
  Max和Min同样对应c_3', c_2'
- 非偶然现象，实际上同步距离的计算正是上面结果的推广
- 首先必须把隐含的条件加到情态中

定理7.5

设c ∈ C为Σ的任一情态，b ∈B_1-B为Σ隐含给出的条件，则b在情态c下是否成真是唯一确定的。

证明：

设E_1= ·b，E_2 =b·，由于b是条件，所以$E_1 \cap E_2$= ϕ

若存在e ∈ $E_1 \cup E_2$在c有发生权，那么，b在c的成真与否与事件的发生权一致：

若e ∈ E_1， 则b为假

若e ∈ E_2 ， 则b为真

- 若任给e ∈ $E_1 \cup E_2$在c均无发生权。

由C/E系统定义知，必有c' ∈ C, 使e有发生权，并且有从c到c'的进程。

  - 若此进程中没有$E_1 \cup E_2$中的事件发生，那么b的成真与否在c和c'是一样的，而b在c'的值是唯一确定的，所以在c也唯一确定。
  - 若此进程中有$E_1 \cup E_2$中的事件发生，则对使$E_1 \cup E_2$中的事件发生的第一个情态重复上面的分析，b在c的值也是唯一确定。

定义7.5 扩充情态

Σ为有限无冲撞C/E系统

情态c∈C对应的扩充情态c′定义为

c′=c∪{b|b∈B_1-B ∧ b在c成真}

隐含条件

由P131定理7.5
保证b在c成真，
或成假

扩充情态集C′为所有c′

定理7.6求σ(E1,E2)公式

设s=(E_1, E_2)为Σ的任一单纯S-元素

满足$\alpha_0\cdot s=\alpha_1\cdot b_1+\alpha_2\cdot b_2+\ldots+\alpha_k\cdot b_k$

α_i(i=0, 1, …, k)非零正整数

b_i(i=1, …k)∈B_1

则$\alpha_0\cdot\sigma(E_1,E_2)=\max\limits_{c'\in C'}\{\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot A(c',b_i)\}-\min\limits_{c'\in C'}\{\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot A(c',b_i)\}$

C'是扩充情态集，c'扩充情态

$$A(c', b_i)=\begin{cases} 1 & b_i \in c' \\ 0 & b_i \notin c' \end{cases}$$

例子

图7.10 P130

四个事件　x, y, z, u

$b_1=(-1, 0, 1, 1)$，$b_2=(1, -1, 0, -1)$

$E_1=\{u\}$, $E_2=\{\ \}$, $(E_1, E_2)=(0, 0, 0, 1)\Rightarrow b_5$

$(E_2, E_1)=(0, 0, 0, -1)\Rightarrow \overline{b_5}$

$\sigma(E_1, E_2)=1$（∵u是一个进程，只发生一次）

$\therefore b_5, \overline{b_5} \in B_1$

$(\{x\}, \{y\})=(1, -1, 0, 0) \Rightarrow s$

可以得到$s=b_2+b_5$

在情态$\{b_1, \overline{b_4}, \overline{b_5}\} \cap \{b2, b5\}=\phi$

$\therefore \mathop{Min}\limits_{c' \in C'}\{......\}=0$

在情态$\{b_2, b_4, b_5\} \cap \{b_2, b_5\}=\{b_2, b_5\}$

$\therefore \mathop{Max}\limits_{c' \in C'}\{......\}=2$

根据计算公式，得到$\sigma(x, y)=2$

实际上

$\{b_1, \overline{b_4}, \overline{b_5}\} \xrightarrow{x} \{b_2, \overline{b_4}, \overline{b_5}\} \xrightarrow{u} \{b_1, b_5, b_4\} \xrightarrow{x} \{b_2, b_5, b_4\}$

所以，$\{b_2, b_4, b_5\}$对应进程xux

推论

若$\sigma(E_1, E_2)=\infty$

则s的向量表示与基本集B_1中的条件的向量表示线性无关

其中$\cdot s=E_1$, $s\cdot=E_2$

证明：

线性相关 $\Rightarrow$ 由定理得$\sigma(E_1, E_2)<\infty$

$\Downarrow$

公式是一个有限值