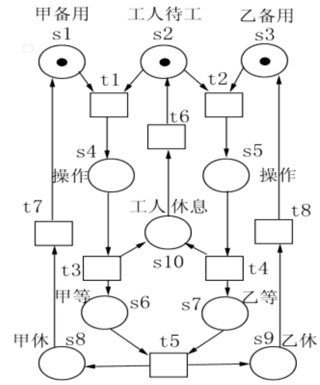
# 第四章 高级网系统

- 高级网系统应用广泛，直接可以用来作为应用系统模型（因为节点少）

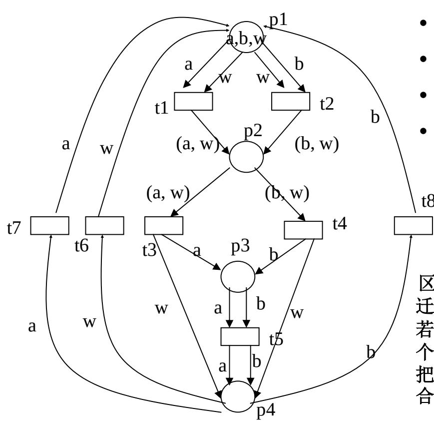
- 高级网系统中
  库所 ： 可以放多种资源
  变迁 ： 代表因资源不同而不同的变化




三个个体：
两台机器，
一个工人

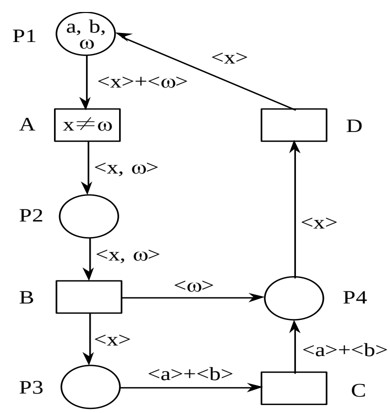
四种状态：

- 就绪
- 工作
- 等待
- 休息




- {t1,t2}
- {t3,t4}
- {t5}
- {t6,t7,t8}

区别是参与变迁的个体不同 。若用变量取代个体名，可以把同类的变迁合并为一类。

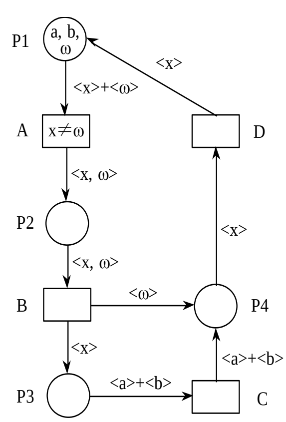



- 当x=a时，变迁A的发生就是t1的发生；当x=b时，就是t2
- 当x=w时，A不能发生

# 一、谓词/变迁系统的定义

Σ4四个状态：就绪，工作，
等待（工人无等待）， 休息（检修）

- 三个个体{ a, b, ω }
- 四种状态　　RD， WK， WT， RT
  ↑　↑　↑　↑
- 合并库所，只用P1, P2, P3, P4
  （库所“存放”处于各自状态的个体）
- 变迁有四类：A={t1, t2}，
  B={t3, t4}, C={t5}, D={t6, t7, t8}




- 合并同类变迁
- <x>+<ω>表示二个独立个体
  <x, ω>表示由二个个体结合而成的一个组合
- P1中由初始值
  a, b, ω —— 托肯
- 变迁A出现标记x≠ω
- 弧上有标记<x>,
  <x>+<ω>,
  <x, ω>, <a>+<b>
- 设D为个体集（又称为论域）

$M_0$（初始标识）:对于每个库所p，$M_0(p)$为D的一个子集

$M_0(p1)=\{a, b, \omega\}$，

$M_0(p2)= M_0(p3)=M_0(p4)=\{\ \}$

注意：每个个体只有一种状态

## 谓词

通常：谓词⇔论域子集（等同于D中使谓词P成真的那些元素所构成的子集）

$\{x_1, x_2 \ldots x_n \mid P(x_1, x_2 \ldots x_n)=ture \wedge x_1, x_2 \ldots x_n \in D\}$

替换（∑1）：

$A(x \leftarrow a)$关于A的替换—可行替换，在$M_0$有发生权(∑4中t1)

$A(x \leftarrow b)$关于A的替换—可行替换，在$M_0$有发生权(∑4中t2)

$A(x \leftarrow \omega)$没有发生权（∵$\omega \neq \omega$不成立）

不能脱离变量替换来讨论变迁的发生权及后继，变迁的发生是由变迁输入输出弧上的标记和替换计算出来的。

谓词P的外延：P所等同(对应)的D上子集（见下表）

这个子集：

— 固定 — 静态谓词（$P=\{a, b\}$）

— 可变 — 动态谓词（库所P1:$\{a, b, \omega\} \Rightarrow \{b\}$）

$A\{x \leftarrow a\}$

谓词/变迁系统的标识就是为系统中的每个谓词指明其外延

| 标识 | P1 Ready | P2 Working | P3 Waiting | P4 Resting | 当前可行替换 |
|---|---|---|---|---|---|
| M0 | $\{a, b, \omega\}$ | | | | $A\{x \leftarrow a\}$ |
| M1 | $\{b\}$ | $\{(a, \omega)\}$ | | | $B\{x \leftarrow a\}$ |
| M2 | $\{b\}$ | | $\{a\}$ | $\{\omega\}$ | $D\{x \leftarrow \omega\}$ |
| M3 | $\{b, \omega\}$ | | $\{a\}$ | | $A\{x \leftarrow b\}$ |
| M4 | | $\{(b, \omega)\}$ | $\{a\}$ | | $B\{x \leftarrow b\}$ |
| M5 | | | $\{a, b\}$ | $\{\omega\}$ | C |
| M6 | | | | $\{a, b, \omega\}$ | $D\{x \leftarrow a\}$<br>$D\{x \leftarrow b\}$<br>$D\{x \leftarrow \omega\}$ |
| M7 | $\{a, b, \omega\}$ | | | | |

## 结论

- 一个个体集——论域（逻辑中称法）
- 每个库所——谓词（可变），用个体集或个体多元组集来表示
- 每个变迁——公式（静态谓词）
- 每条弧——多元组符号和，同一弧上多元组长度相同
- 标识$M_0$及M是个体集的一个分配（横向见表）

## 定义 4.1 变量、项、元组、符号和、公式

设D为非空有限集，V为非空有限符号集

1 变量：V中符号均代表D中元素， V中符号称为D上变量；

2 项：D中的元素和D上的变量均为D上的项，若$f^{(n)}$是D上的n元运算符，$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$是D的项，则$f^{(n)}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$也是D的项。此外，没有其他类的项；

3 n元组：以D的项为分量的n元向量
$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$称为D上的n元组，$n \geqslant 1$；

4 符号和：由D的有限多个n元组用“+”连接起来组成的形式和称为n元符号和，$n \geqslant 1$时称为多元符号和；

5 公式：D上公式四种形式，没有其他形式

$v_1 = v_2$，其中$v_1$，$v_2$为D的项；

$\neg P$，其中P为D上的公式；

$p \vee q$，其中p，q为D上的公式；

$(\exists x)p$，其中x是D上的变量，p是D的公式。

($\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$等均可用$\neg, \vee, \exists$表示，可以出现)

## 定义4.2 外延和静动态谓词

设D为非空有限集，p为n元谓词，即p的主体为D上的n元组

1. $p(D)=\{\langle d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle \mid p(d_1, d_2, \ldots, d_n)\}$
   p的外延
2. p(D)—固定——p为静态谓词
   (如$x \neq \omega \Rightarrow \{a, b\}$)
3. p(D)—可变——p为动态（可变）谓词
   (Ready外延$\{a, b, \omega\} \xrightarrow{A\{x \leftarrow a\}} \{b\}$)

谓词变迁系统中的谓词指⇒动态谓词

## 定义 4.3 谓词/变迁网系统

九元组$\Sigma=(P, T; F, D, V, A_P, A_T, A_F, M_0)$是$P_r/T$系统的条件是：

1. (P, T; F) ∑的基网
2. D个体集(D上的运算集为Ω)
3. V为D上的变量集
4. $A_P: P \rightarrow \pi$(可变谓词集) π为D上的可变谓词集 $A_P(p)$是n元谓词
5. $A_T: T \rightarrow f_D$(D的公式集) $A_T(t)$是静态谓词加Ω上的运算符
6. $A_F: F \rightarrow f_S$(D的符号和集)
   $A_F(t, p)$或$A_F(p, t)$n元符号和且$A_T(t)$与$A_F(t, p)$, $A_F(p, t)$的自由变量相同
   有向弧上的标记用符号和表示，为了便于判断变量替换是否可行。
7. $M_0: P \rightarrow f_s$ $M_0(p)$是n元符号和
   作为系统状态的标识可以看成是为每个谓词指明其等同的个体子集。为了便于给出变迁规则，定义中用符号和来表示子集。

## $M_0$的要求

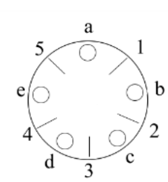
- $M_0(p)$是符号和(与弧上标记一致)

定义附加要求

- $M_0$必须是个体集D在库所集P上的一个分布
- 变迁t个体守恒：
  t的输入弧上的个体总数
  =t的输出弧上的个体总数

## 五个哲学家问题

- 二个状态：吃饭(进餐)，没吃(思考)
  π ={working  waiting}  二个谓词
- D={a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5}
- 5a1/1b2/2c3/3d4/4e5 …… working (三元谓词)
  其他 …… waiting
- 需要D上的三元运算来固定哲学家和叉子的搭配关系
  f(a, 1, 5)=f(b, 1, 2)=f(c, 2, 3)
  =f(d, 3, 4)=f(e, 4, 5)=ture
  f(x, y, z)=false  其他
- x, y, z是自由变量
- 见P90图∑2，B可省去true



## 定义 4.4

对D上不含自由变量的n元符号和f，令f(D)为出现在f中的所有n元组集合，则两个不含自由变量的n元符号和$f_1$与 $f_2$的关系如下：

(1) 若$f_1$ (D) $=f_2$(D)，则$f_1= f_2$

(2) 若$f_1$ (D) 包含于$f_2$(D)，则$f_1 <= f_2$

(3) 若$f_1 <= f_2$ 且$f_1$不等于$f_2$，则$f_1 < f_2$

(4) $f_1$交 $f_2$ 恒等于$f_1$ (D) 交$f_2$(D)

## 定义 4.5 标识

M: $P \to f_s$为Σ上的一个标识，iff

1. $p \in P$，M(p)是不含自由变量的n元符号和

2. D中每个元素都恰好出现在某个符号和中（即M是D在P上的一个分布）

## 定义4.6 可行替换

令E为D上公式，f为D上的符号和

自由变量 ↓ ↓ ∈D

1. E的实例E($x_1 \leftarrow d_1$, $x_2 \leftarrow d_2$, ……, $x_n \leftarrow d_n$)

↑公式 ↑替换

2. f的实例f($y_1 \leftarrow d_1$, $y_2 \leftarrow d_2$, ……, $y_m \leftarrow d_m$)

↑符号和 ↑自由变量

3. t在M的一个可行替换 iff

t($z_1 \leftarrow d_1$, $z_2 \leftarrow d_2$, ……, $z_l \leftarrow d_l$)

↑变迁 ↑变迁t输入输出弧及公式$A_T$(t)中出现的自由变量

- $A_T(t)(z_1 \leftarrow d_1, z_2 \leftarrow d_2, \ldots, z_l \leftarrow d_l)=$true
- $\forall p \in {}^{\cdot}t, A_F(p,t)(z_1 \leftarrow d_1, z_2 \leftarrow d_2, \ldots, z_l \leftarrow d_l) \leq M(p)$
- $\forall p \in t^{\cdot}, A_F(t,p)(z_1 \leftarrow d_1, z_2 \leftarrow d_2, \ldots, z_l \leftarrow d_l) \cap M(p)=\Phi$

## 定义4.7 发生权和变迁规则

M为Σ的标识

1. t在M有发生权 iff ∃M下的可行替换t($z_1 \leftarrow d_1$, $z_2 \leftarrow d_2$, …, $z_l \leftarrow d_l$) （$z_i$是变迁t输入输出弧及公式$A_T$(t)中出现的自由变量）

2. 当t在M有发生权，若t按以上可行替换发生，则M′为 $\forall p \in P$:

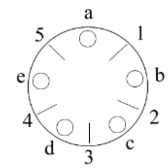
$$M'(p)=M(p)-A_F(p,t)(z_1 \leftarrow d_1, z_2 \leftarrow d_2, \ldots, z_l \leftarrow d_l)+A_F(t,p)(z_1 \leftarrow d_1, z_2 \leftarrow d_2, \ldots, z_l \leftarrow d_l)$$

（当$\overline{p \in {}^{\cdot}t}$，$A_F(p,t)=\Phi$，当$\overline{p \in t^{\cdot}}$，$A_F(t,p)=\Phi$）

记作: $M[t(z_1 \leftarrow d_1, z_2 \leftarrow d_2, \ldots, z_1 \leftarrow d_1) > M'$

变迁t发生及M'与 $\begin{cases} \text{托肯}(\cdot t\text{及}t\cdot)\text{及弧上的权(符号和)} \\ A_T(t)\text{及替换} \end{cases}$

## 例子




1. $A(x \leftarrow a, y \leftarrow 1, z \leftarrow 5)$ 在 $M_0$ 是可行替换, 因为

- $f(a, 1, 5)$=true
- $A_F(p_1, A)(x \leftarrow a, y \leftarrow 1, z \leftarrow 5) = \langle a\rangle + \langle 1\rangle + \langle 5\rangle \leqslant M_0(p_1) \leqslant \langle a\rangle + \langle b\rangle + \ldots + \langle 1\rangle + \ldots + \langle 5\rangle$
- $A_F(A, p_2)(x \leftarrow a, y \leftarrow 1, z \leftarrow 5) = \langle a, 1, 5\rangle \cap (M_0(p_2) = \Phi) = \Phi$

2. $M'(p_1) = M_0(p_1) - A_F(p_1, A)(x \leftarrow a, y \leftarrow 1, z \leftarrow 5) + A_F(A, p_1)(x \leftarrow a, y \leftarrow 1, z \leftarrow 5)$
$= \langle a\rangle + \langle b\rangle + \ldots + \langle 1\rangle + \ldots + \langle 5\rangle - (\langle a\rangle + \langle 1\rangle + \langle 5\rangle) + 0$
$= \langle b\rangle + \langle c\rangle + \langle d\rangle + \langle e\rangle + \langle 2\rangle + \langle 3\rangle + \langle 4\rangle$

$M'(p_2) = M_0(p_2) - A_F(p_2, A)(x \leftarrow a, y \leftarrow 1, z \leftarrow 5) + A_F(A, p_2)(x \leftarrow a, y \leftarrow 1, z \leftarrow 5)$
$= 0 - 0 + \langle a, 1, 5\rangle = \langle a, 1, 5\rangle$

## 二、Pr/T系统的行为

从P/T系统看Pr/T系统的特点:

- 二个变迁间的关系⇒二个可行替换间的关系 ……顺序, 并发, 冲突等事件间关系, 可以类似定义、分析
- $M_0$ 是D在P上的一个分配
- 每个变迁都是个体守恒
- 无冲撞系统 (∵上两点原因)
- 可达树中不含"ω" (有限多个个体在有限多个谓词中的分布有限), 但有"等价标识" (后解释)

## 命题

M是Σ的一个可达标识, 可行替换序列

$t_1:\alpha_1,\ t_2:\alpha_2, \ldots\ t_i:\alpha_i, \ldots,\ t_n:\alpha_n$

是从 $M_0$ 到M的变迁发生序列

$[t_i:\alpha_i = t_i(x_{1i} \leftarrow d_{1i}, \ldots\ldots, x_{1i} \leftarrow d_{1i})]$

则M是D中个体在P上的一种分布。

## 证

∵ $M_0$ 是D中个体在P上的一种分布

又∵每个变迁都是个体守恒的

∴ $M_0$ 的后继M'也是P上的一种分布

∴有归纳得知M也是一种分布

## 解释不含“ω”

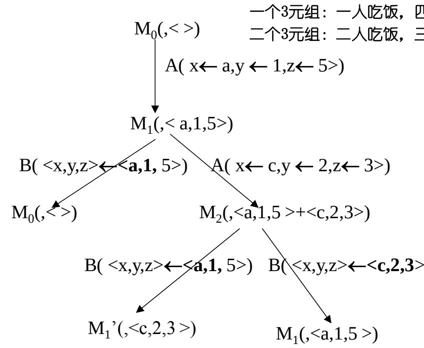
由上章可达树算法(c)(2)

$$My(s)=\begin{cases}\omega & r\text{到}y\text{路径上有节点}z\text{，使得}M_z<M'\text{且在}s\text{成立}\\ M'(s) & \text{其余}\end{cases}$$

对于Pr/T系统，因为M是D中个体在P上的一种分布，所以不可能出现此种情况(ω)

## 等价标识

谓词Working的外延决定了等价：
空和 ：无人吃饭，全部思考
一个3元组：一人吃饭，四人思考
二个3元组：二人吃饭，三人思考




## 定义4.8 关联矩阵

C是Σ的关联矩阵 iff

$C(i,j)=-A_F(p_i,t_j)+A_F(t_j,p_i)$

若$p_i$不属于$\cdot t_j$，$A_F(p_i,t_j)=\langle\rangle$

$p_i$不属于$\in t_j^{\cdot}$，$A_F(t_j,p_i)=\langle\rangle$ →符号和（有一元的，也有多元的）→ 求解不变量困难

C的阶为|P|×|T|

在整个Pr/T系统中，独立出现的个体与在多元组中出现的个体无区别

<a, b, c>与<a>, <b>, <c>都表示三个个体a, b, c

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| p1 | -<x>-<w> | < > | < > | <x> |
| p2 | < x, w> | -< x, w> | < > | < > |
| p3 | < > | <x > | -<a >-<b> | < > |
| p4 | < > | <w> | <a >+<b> | -<x > |

## 定义4.9 分解运算

分解运算 R $\xrightarrow{\text{转化为}}$ 1元符号和

**D***为以**D**的元素为分量的多元组所组成的所有符号和的集合，**D1**为一元符号号和集合

$R: D^* \rightarrow D^1$定义如下：

1. $R(\langle d_1, d_2, \ldots, d_n\rangle)=\langle d_1\rangle+\langle d_2\rangle+\ldots+\langle d_n\rangle$
2. $R(\langle d_1^1, d_2^1, \ldots, d_n^1\rangle+\langle d_1^2, d_2^2, \ldots, d_n^2\rangle+\langle d_1^m, d_2^m, \ldots, d_n^m\rangle)$
   $=R(\langle d_1^1, d_2^1, \ldots, d_n^1\rangle)+R(\langle d_1^2, d_2^2, \ldots, d_n^2\rangle)+R(\langle d_1^m, d_2^m, \ldots, d_n^m\rangle)$
3. $R(\langle\ \rangle)=\langle\ \rangle$，第一个为n元符号和。第二个为一元符号和

## 定义4.9-1 1元符号和相等

不含变量的二个1元符号和相等

iff

$f_1(D)=f_2(D)$

## 定义4.10 S-不变量

非零行向量$V=(v_1, v_2, \ldots, v_m)$是S-不变量iff

1. $v_i\,(i=1, \ldots\ldots, m)=0$或1
2. 对任一M，都有$\sum_{i=1}^{m} v_i R(M(p_i))=\sum_{i=1}^{m} v_i R(M_0(p_i))$

(P/T系统定义是由C来定义，但不变量的含义一致)

行向量

$$\overset{\downarrow}{V}\cdot R(M)=V\cdot \underset{\uparrow}{R}(M_0)$$

列向量

## 命题4.1 前命题的直接推论

m维向量(1, 1, ……, 1)是Σ的S-不变量

证：$\sum_{i=1}^{m} R(M_0(p_i))=\sum_{d\in D}\langle d\rangle$

$\sum_{i=1}^{m} R(M(p_i))=\sum_{d\in D}\langle d\rangle$

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| p1 | -<x>-<w> | < > | < > | <x> |
| p2 | < x, w> | -< x, w> | < > | < > |
| p3 | < > | <x > | -<a >-<b> | < > |
| p4 | < > | <w> | <a >+<b> | -<x > |

由于关联矩阵中含有变量名，分解运算R无法运用，不能克服求解和解释S-不变量的困难

解决办法：只计算个体个数

(在个数定义上考虑)

## 定义4.11 整关联矩阵

Σ的整关联矩阵IC(m×n阶)，m=|P|，n=|T|

IC(i, j)为

$C(i, j)\,(=-\ A_F(p_i, t_j)+\ A_F(t_j, p_i))$

中所含个体的个数(包含变量在内)

- 注意正负号

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| p1 | -<x>-<w> | < > | < > | <x> |
| p2 | < x, w> | -< x, w> | < > | < > |
| p3 | < > | <x > | -<a >-<b> | < > |
| p4 | < > | <w> | <a >+<b> | -<x > |

| | | | |
|---|---|---|---|
| -2 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | -2 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | -2 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | -1 |

因此，关于S-不变量有：

## 定理4.1

$V=(v_1, v_2, \ldots, v_m)$是Σ的S-不变量，则

行

$$\overset{\downarrow}{V}\cdot \underset{\uparrow}{IC}=\theta_{1\times n} \qquad (1\times m)\cdot(m\times n)=(1\times n)$$

矩阵乘

## 证明

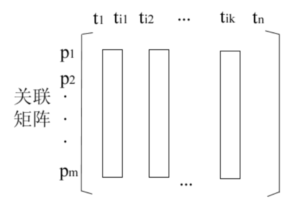
$M_1, M_2$二个标识

$M_1 \rightarrow M_2 \exists$ k个不同的变迁序列(可以选择$M_2$):

$t_{i1}:\alpha_{i1}, t_{i2}:\alpha_{i2}, ..., t_{ik}:\alpha_{ik} \Rightarrow T_i$(集合)

设U为n=|T|阶列向量

$$\mu_j = \begin{cases} 1 & t_j \in T_i \\ 0 & t_j \overline{\in} T_i \end{cases}$$




$\Rightarrow$

$C:t_{i-1}(\alpha_{i-1})...t_{ik}(\alpha_{ik})$

$\Downarrow$

其中变量依次用$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{ik}$替换

根据定义4.7中后继标识M′的定义

$M'(p)=M(p)- A_F(p,t)+ A_F(t,p)$ (省去可行替换)

$M_1+[C:t_{i1}(\alpha_{i1}),t_{i2}(\alpha_{i2})...,t_{ik}(\alpha_{ik})]\bullet U=M_2$

作用R运算

$R(M_1)+R([C:t_{i1}(\alpha_{i1}),t_{i2}(\alpha_{i2})...,t_{ik}(\alpha_{ik})]\bullet U)=R(M_2)$

二边乘V向量

$V\bullet R(M_1)+V\bullet R([C:t_{i1}(\alpha_{i1}),t_{i2}(\alpha_{i2})...,t_{ik}(\alpha_{ik})]\bullet U)$

$=V\bullet R(M_2)$

∵V是S-不变量,有$V\bullet R(M_0)=V\bullet R(M_1)=V\bullet R(M_2)$

∴$V\bullet R([C: \quad ]\bullet U)=0$ 数(符号和)

$V\bullet R([C: \quad ])\bullet U=0$

即所有个体前的系数均为0。当然，把所有的个体看成一样的，也就是说只考虑个体的个数，自然也为0。V•IC • U=0

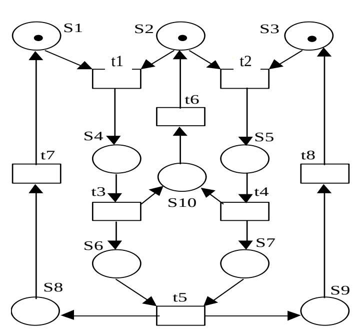
所以由于U的任意性,

V•IC =0

- 可以按X•IC=0求S-不变量,但只有分量为0或1的X才可能是(再按定义检查)
- 例如:(1,1,1,1),(1,1)分别是Σ1和Σ2的唯一S-不变量

(X•IC=0的其他解分别出现非0或非1)

- S不变量本意是寻找(部分)资源的踪迹
- 在P/T系统中反映三个个体各自活动踪迹
- 在Pr/T系统，变成共同的踪迹
- 高级系统在减少节点的同时也失去了细节描述能力




分别为s1，s3，s2中个体的活动范围，每个活动范围即是一个不变量

| | s1 | s2 | s3 | s4 | s5 | s6 | s7 | s8 | s9 | s10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I=( | 0, | 1, | 0, | 1, | 0, | 1, | 0, | 1, | 0, | 0) |
| I=( | 0, | 0, | 1, | 0, | 1, | 0, | 1, | 0, | 1, | 0) |
| I=( | 1, | 0, | 0, | 1, | 1, | 0, | 0, | 0, | 0, | 1) |

## 定义4.12 T-不变量

n=|T|阶列向量U为T-不变量 iff

1. U非零，$u_j$为0或正整数
2. ∃M和从M出发的变迁可行替换序列
   $t_{i1}:\alpha_{i1}, t_{i2}:\alpha_{i2}, \ldots, t_{ik}:\alpha_{ik}$
   使得$t_j$在其中恰出现$u_j$次(j=1, …, n)，且这一序列的发生使系统回到M

## 定理4.2

U为Σ的T-不变量，则

$IC \bullet U = \theta_{m\times 1}$　　$(m\times n)\bullet(n\times 1)=(m\times 1)$

证明：用关联矩阵C计算后继标识时，需根据变迁的可行变换先替换C中相应变迁列的变量，由于同一变迁的不同替换可导致C中同一变迁列不同的变量替换，因此需将U中代表变迁tj发生次数的uj分解为若干个1。

对U分解为$u_1+u_2+\ldots\ldots u_k$

$u_j$(j=1, ……k)是列向量，分量为0或1

## U分解示例

$$U=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\end{pmatrix} \Rightarrow U=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$M+\ C_1\bullet u_1+C_2\bullet u_2+\ldots\ldots C_k\bullet u_k=M$

从个数定义上为IC

$C_1\bullet u_1+C_2\bullet u_2+\ldots\ldots C_k\bullet u_k=0$

$IC\bullet(u_1+u_2+\ldots\ldots u_k)=0$

$IC\bullet U=0$

## 例子

Σ1的T-不变量

$$\begin{pmatrix}2\\2\\1\\4\end{pmatrix}\qquad \begin{array}{c}\left.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\ t1,2\\ \left.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\ t3,4\\ 1\ \ t5\\ \left.\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\ t6,7,8\end{array}$$

Σ2的T-不变量

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

## 三、有色网系统

- P/T系统：　不同个性的资源在不同库所
  同一库所的资源个性相同
  (全部相同)
- Pr/T系统：　每个个体都有区别于其他个体的名字，以备变量替换使用。
- 有色网系统：不同名字的个体有时起到同样的作用，没有必要用不同的名字区分，只要能表明他们属于一类即可。同类个体染上同一种颜色，不同类的以不同颜色区分。

52

## 定义4.13 多重集

同类个体可能不只一个，由他们组成的已不是集合，而是多重集。

多重集：$S\rightarrow N_0$上的函数

($S$:非空集合，$N_0$:非负整数集)

$S=\{a, b, c\}$

则$f(a)=1, f(b)=3, f(c)=0$称$f$是一个多重集

实际上:$S=\{a, b, c\}\Rightarrow\{a, b, b, b\}$为$f$

与集合的区别：允许同一元素出现多次

$S_{MS}$表示$S$上所有有限多重集之集合（$f$只在有限个元素上值不为0）

53

## 线性式表示多重集

设$b\in S_{MS}$为$S$上任一多重集，由定义任何$s\in S$，$b(s)$是一个非负整数， $b$由下面的一次式唯一确定

$$b=\Sigma \underset{\substack{\uparrow \\ \text{重数}}}{b(s)}\, s \quad b(s)\in N_0,$$

$\{a, b, b, b\} \Rightarrow 1\cdot a+3\cdot b+0\cdot c=a+3b$

54

## 多重集的加、减、乘等运算

- $b_1=\Sigma b_1(s)\cdot s,\quad b_2=\Sigma b_2(s)\cdot s$
- $b_1+b_2=\Sigma(b_1(s)+b_2(s))\cdot s$
- $b_1\leqslant b_2\Leftrightarrow\forall s\in S:b_1(s)\leqslant b_2(s)$
- $n\times b=\Sigma(n\times b(s))\cdot s$
- $b_2-b_1=\Sigma(b_2(s)-b_1(s))\cdot s$ （若$b_1\leqslant b_2$）

55

## 定义4.14 有色网系统

设$D$为已知的颜色集（应用领域的资源类）

七元组$\Sigma=(P, T; F, C, I_-, I_+, M_0)$是一个有色网系统 iff

1. $(P, T; F)$是$\Sigma$的基网
2. $C$: $P\cup T\rightarrow\xi(D)$为$D$的幂集，使得

$\forall p\in P, C(p)$为$p$中所有可能的托肯色（资源类）集合——托肯色集

$\forall t\in T, C(t)$为$t$上的出现色（发生色）集合——出现色集

56

线性函数

所有线性函数之集

3. $\forall(p, t)\in P\times T$:

出现函数

负函数
$$\begin{cases} I_-(p, t)\in[C(t)_{MS}\rightarrow C(p)_{MS}]_L & (p, t)\in F \\ I_-(p, t)=0 & (p, t)\notin F \end{cases}$$

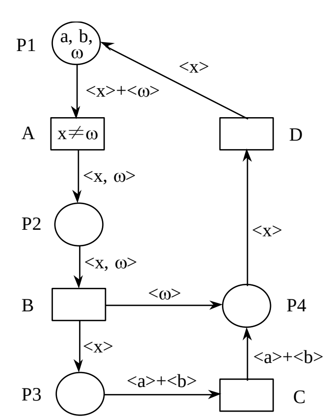
正函数
$$\begin{cases} I_+(p, t)\in[C(t)_{MS}\rightarrow C(p)_{MS}]_L & (t, p)\in F \\ I_+(p, t)=0 & (t, p)\notin F \end{cases}$$

在确定变迁的发生方式（发生步X决定）后，用于计算资源个数的。

4. $M_0$为$\Sigma$的初始标识 iff

$\forall p\in P$: $M_0(p)\in C(p)_{MS}$ $M_0(p)$:$p$的托肯色集上的多重集，即各类资源各有几个。

57




58

## 举例$\sum_1$

定义

C($p_1$)={m, ω}, C($p_2$)={<m, ω> },

C($p_3$)={m}, C($p_4$)={m, ω}

其中ω色表示ω，m色表示a, b

C(A)={<m, ω>}, C(B)={<m, ω> }, C(C)={m},

复合色↵ C(D)={m, ω}



## 说明

- 每个p及t分别对应一个颜色集 谓词/公式

  **p:**托肯色集 **t:**出现色集
- 每条弧为线性函数 符号和

  （出现色集上的多重集→托肯色集上的多重集）

  t的输入弧上为$I_-$, 输出弧上为$I_+$
- $M_0$(p)是p的托肯色上的多重集 谓词的外延
- $M_0$(p)可以包含多个同色的托肯 每个个体出现一次

  ↑ 同色托肯无区别 ↑ 每个个体有区别



## $\sum_1$’

- $I_-$及$I_+$定义见下表$\Sigma_1'$
- $\Sigma_1'$以关联矩阵形式给出
- 因为$\Sigma_1$纯网，则唯一确定$I_-$及$I_+$

- ID是恒等映射 ID(x)=x
- Pr1及Pr2是投影 Pr1(x, y)=x, Pr2(x, y)=y
- 空白处为零映射



| | | A | B | C | D | M0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | {<m,w>} | {<m,w>} | {m} | {m,w} | |
| p1 | {m,w} | -($p_{r1}$+$p_{r2}$) | | | ID | 2m+w |
| p2 | {<m,w>} | ID | -ID | | | 0 |
| p3 | {m} | | $p_{r1}$ | -2ID | | 0 |
| p4 | {m,w} | | $p_{r2}$ | 2ID | -ID | 0 |

**ID是恒等映射 ID(x)=x**

**Pr1及Pr2是投影 Pr1(x,y)=x，Pr2(x,y)=y**

空白处为零映射



## $\sum_1$’’

$\sum_1$’把托肯色和出现色尽可能的保持完整，与$P_r$/T中每个可达标识都是个体集D的一种分布一致。

如不坚持这一原则，可以得到另一个有色网系统（$p_2$的托肯色和B的出现色都为{m}

| $\Sigma_1'$ | | A | B | C | D | $M_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | {<m, ω>} | {m} | {m} | {m, ω} | |
| P1 | {m, ω} | —(Pr1+Pr2) | | | ID | 2m+ω |
| P2 | {m} | Pr1 | —ID | | | 0 |
| P3 | {m} | | ID | —2 • ID | | 0 |
| P4 | {m, ω} | | W | 2 • ID | —ID | 0 |

## 定义4.15 标识

- M: P -〉 $D_{ms}$有色网系统Σ的标识 iff
  $\forall p \in P$: $M(p) \in C(p)_{MS}$

就是为每个库所p指定它的托肯色C(p)上的一个多重集，即各类资源各有几个。

- X:T->$D_{ms}$为Σ在M下的一步 iff
  $\forall t \in T$: 使得$X(t) \in C(t)_{MS}$, 有
  $\forall p \in P$: $\sum_{t \in T} I_-(p,t)(X(t)) \leqslant M(p)$

- 步就是为每个变迁指明各个出现色出现的次数

见$\Sigma_1'$的二个X



- 定义在$M_0$的X
  $M_0(p_1)=2m+\omega$, $M_0(p_2)=M(p_3)=M_0(p_4)=0$
  $X(A)=\langle m,\omega\rangle$, $X(B)=X(C)=X(D)=0$
  $\sum_{t\in T} I_-(p_1,t)X(t)=I_-(p_1,A)X(A)$
  $=(Pr1+Pr2)(\langle m,\omega\rangle)$
  $=m+\omega \leqslant M(p)=2m+\omega$
  对于$p_2, p_3, p_4$
  $\sum_{t\in T} I_-(p_i,t)X(t)=0 \leqslant M_0(p_i)=0$

- 定义在M的X
  若: $M(p_1)=M(p_2)=M(p_3)=0$, $M(p_4)=2m+\omega$
  设: $X(A)=X(B)=X(C)=0$, $X(D)=2m+\omega$
  $\sum I_-(p_i,t)X(t)=0$　对于$p_1, p_2, p_3$
  $\sum I_-(p_4,t)X(t)=I_-(p_4,D)X(D)$
  $=ID(2m+\omega)$
  $=2m+\omega \leqslant M(p_4)$
  2m+ω 表示 二台机器，一个工人
- 变迁D按出现色m发生2次，按出现色ω发生一次，可以一步完成。



## Pr/T系统与有色网之比较

- 基网要求一致
- 库所——个体间有严格区别（谓词）
  由颜色区别托肯的个性（有色网）
- 变迁——公式/托肯色C(t)，可行替换/X(t)
- 弧——$A_F(t,p)$或$A_F(p,t)$/出现函数$I_-$，$I_+$直接操作颜色及数量
- 变迁守恒（谓词）
  非变迁守恒（有色网）


| $\Sigma_1'$ | | A | B | C | D | $M_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | {<m, ω>} | {m} | {m} | {m, ω} | |
| P1 | {m, ω} | —(Pr1+Pr2) | | | ID | 2m+ω |
| P2 | {m} | Pr1 | —ID | | | 0 |
| P3 | {m} | | ID | —2 • ID | | 0 |
| P4 | {m, ω} | | W | 2 • ID | —ID | 0 |


在$\Sigma_1'$中，变迁B只有一个输入(m色)，却有二个输出(m和ω色)（1个$I_-$函数ID，2个$I_+$函数ID和W）

## 定义4.16 变迁规则

X是Σ在M下有发生权的一步，则$\forall p \in P$

$$M'(p)=M(p)+\sum_{t\in T} I_+(p,t)X(t)-\sum_{t\in T} I_-(p,t)X(t)$$

多重集运算

记 $M[X>M'$

## 定义4.17 S-不变量

$(f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n)$为Σ一个S-不变量，$n=|P|$
iff

1. $\forall i, f_i \in [C(p_i)_{MS} \to D_{MS}]_L$ D是单色托肯色集
2. $(f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n) * I_- = (f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, {}_n) * I_+$
   $I_-$及$I_+$为$|P|\times|T|$阶矩阵，*为矩阵乘

负矩阵
（由$I_-(p_i, t_j)$构成）

正矩阵
（由$I_+(p_i, t_j)$构成）



## 说明

- S-不变量表明若干库所中单颜色的托肯数量，不随变迁发生而改变
- $(f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n)$将复合色分解为单色托肯
- $(f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n)*I_-$变迁发生时各库所托肯的减少；　$(f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n)*I_+$增加，两者相等，总数自然不变。
- 与P/T系统和$P_r$/T中定义有点不同
  - 状态
    - $I^T{}_I$ . M= $I^T{}_I$ . $M_0$
    - $\Sigma v_i R(M(p_i))=\Sigma v_i R(M_0(p_i))$
  - 输入/输出矩阵

| | | A | B | C | D | M0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\{\langle m,w\rangle\}$ | $\{\langle m,w\rangle\}$ | {m} | {m,w} | |
| p1 | {m,w} | $-(p_{r1}+p_{r2})$ | | | ID | 2m+w |
| p2 | $\{\langle m,w\rangle\}$ | ID | -ID | | | 0 |
| p3 | {m} | | $p_{r1}$ | -2ID | | 0 |
| p4 | {m,w} | | $p_{r2}$ | 2ID | -ID | 0 |

**(ID,Pr1+Pr2,ID,ID)是Σ1′的S-不变量**
**(1,1,1,1) S-不变量(谓词变迁网Σ1）**
**Pr1+Pr2就是对库所p2复合色的分解函数**

$$\text{(ID,Pr1+Pr2,ID,ID)}*\begin{pmatrix} pr1+pr2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ID & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2ID & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ID \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pr1+pr2 \\ Pr1+pr2 \\ 2ID \\ ID \end{pmatrix}$$

I-

## 定理4.3

$(f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n)$为Σ的S-不变量，M为Σ的任一可达标识，则
$(f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n)*(M(p_1), M(p_2), \ldots, M(p_n))^T=$
$(f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n)*(M_0(p_1), M_0(p_2), \ldots, M_0(p_n))^T$

$f_i(M(p_i))$是把$p_i$中的多重集分解为单色托肯的多重集合
$(f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n)*(M(p_1), M(p_2), \ldots, M(p_n))^T=\Sigma f_i(M(p_i))$
任何可达标识下，单色托肯的表达式是相等的。



## 证明

设$M_0[X>M$，　（只证一步可达的标识M）

$$(M(p_1), M(p_2), \ldots, M(p_n))^T=(M_0(p_1), M_0(p_2), \ldots, M_0(p_n))^T$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{m} I_+(p_1,t_j)X(t_j)+\sum_{j=1}^{m} I_+(p_2,t_j)X(t_j)+\sum_{j=1}^{m} I_+(p_n,t_j)X(t)\right)^T-(\Sigma I_- + \Sigma I_- + \ldots + \Sigma I_-)^T$$

$$=(M_0(p_1), M_0(p_2), \ldots, M_0(p_n))^T+I_+*(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m))^T-I_-*(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m))^T$$

两端同乘$(f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n)$，有

$(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)*(M(p_1), M(p_2), \ldots, M(p_n))^T$

$=(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)*(M_0(p_1), M_0(p_2), \ldots, M_0(p_n))^T$

$+(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)*I_+*(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m))^T$

$-(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)*I_-*(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m))^T$

(+,-两项相等，因为不变量)

$=(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)*(M_0(p_1), M_0(p_2), \ldots, M_0(p_n))^T$



## 定义4.18 T-不变量

$V=(v_1, v_2, \ldots, v_m)^T$是$\Sigma$的T-不变量$(m=|T|)$

iff

1. $\forall j, v_j \in C(t_j)_{MS}$

2. $I_-*(v_1, v_2, \ldots, v_m)^T=I_+*(v_1, v_2, \ldots, v_m)^T$

$V_j$ 变迁$t_j$发生方式的多重集，各出现色前的正整数就是他按此种出现色出现的次数。

## 定理4.4

设$X_1, X_2, \ldots X_l$为$\Sigma$从M出发的序列，使得最终回到标识M，则

$$\left(\sum_{i=1}^{l} X_i(t_1),\ \sum_{i=1}^{l} X_i(t_2), \ldots,\ \sum_{i=1}^{l} X_i(t_m)\right)^T$$

是T-不变量



## 证明

$M[X_1>M_1[X_2>M_2\ldots\ldots[X_l>M_l,\quad M=M_l$

$\forall k$:根据M′

$$M_l(p_k)=M(p_k)+\sum_{j=1}^{m} I_+(p_k, t_j)\left(\sum_{i=1}^{l} X_i(t_j)\right)-\sum_{j=1}^{m} I_-(p_k, t_j)\left(\sum_{i=1}^{l} X_i(t_j)\right)$$

$\because M_l=M$

$\therefore \Sigma I_-(\Sigma)=\Sigma I_+(\Sigma)$

$I_-*(\Sigma X(t_1),\ \Sigma X(t_2), \ldots,\ \Sigma X(t_m))^T$

$=I_+*(\Sigma X(t_1),\ \Sigma X(t_2), \ldots,\ \Sigma X(t_m))^T$

$\therefore (\Sigma X_i(t_1),\ \Sigma X_i(t_2), \ldots,\ \Sigma X_i(t_m))^T$

是T-不变量



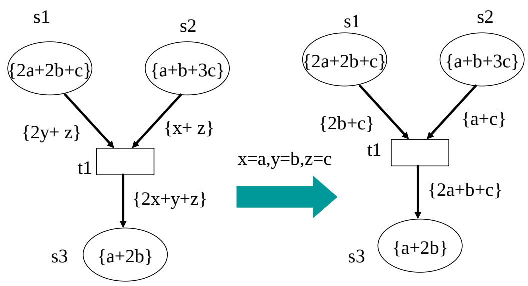
## 例子

复合色

- $(2\langle m, \omega\rangle, 2\langle m, \omega\rangle, m, 2m+2\omega)^T$ 是$\Sigma_1'$的T-不变量
  $(2, 2, 1, 4)$是$\Sigma_1$的T-不变量

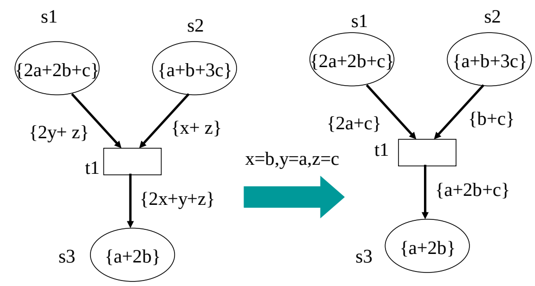
- 逆定理不成立

## Pr/T与有色网




85

## Pr/T与有色网




86