第一章

- **全局状态**

> Petri承认系统全局状态的存在，也认识到全局状态的不可实时可知性。因而依自然界各自为政的方式描述系统中的变化。Petri网的变迁规则用局部确定的方式明确指出变化发生的局部条件，也明确指出变化引起的局部变化。

- **全局时间**

> Petri网里面没有全局时间，只有变化及变化间的依赖关系。依赖关系产生先后次序。

第二章

- **有向网定义**

  三元组$N(S,T;F)$称为有向网, 满足以下条件

  - $S \cap T = \emptyset$
  - $S \cup T \neq \emptyset$
  - $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
  - $dom(F) \cup cod(F) = S \cup T, dom(F) = \{x | \exists\, y : (x,y) \in F\}$

    $cod(F) = \{y | \exists\, x : (x,y) \in F\}$

  其中S,T分别是库所集和变迁集,又称为S_-元素和T_-元素，F称为流关系，最后一个条件规定网中不能有孤立元素(孤立的$S_{-元素}$和T_-元素)

- **网系统定义**

  六元组$\sum = (S,T;F,K,W,M_0)$构成网系统的条件是：

  - $N = (S,T;F)_{构成有向网，称为}\sum$的基网。
  - K,W,M_0依次为容量函数，权函数和标识。M_0称为$\sum$初始标识

  $\eta_0 = \{0,1,2,\dots\}, \eta = \{1,2,3,..\}, w$代表无穷

  - $K: S \to \eta \cup w$, 称为N的容量函数
  - $M: M \to \eta_0$,称为N的一个标识，$\forall s \in S: M(s) \leqslant K(s)$
  - $W: F \to \eta$,$(x,y) \in F$, $W(x,y) = W((x,y))$称为(x,y)上的权

- **发送权**

  - ${}^*t^* = {}^*t \cup t^*$, 称为t的外延
  - t在M上有发生权的条件是：

    $$\forall s \in {}^*t : M(s) \geqslant W(s,t) \wedge \forall s \in t^* : M(s) + W(t,s) \leqslant K(s)$$

    称为$M[t>$, M授权发生t

- **变迁规则**

变迁规则

$$M'(s)=\begin{cases} M(s)-W(s,t) & 若 s\in {}^{\cdot}t-t^{\cdot} \\ M(s)+W(t,s) & 若 s\in t^{\cdot}-{}^{\cdot}t \\ M(s)-W(s,t)+W(t,s) & 若 s\in {}^{\cdot}t\cap t^{\cdot} \\ M(s) & 若 s\notin {}^{\cdot}t\cup t^{\cdot} \end{cases}$$

记$M[t>M'$ 或 $M \xrightarrow{t} M'$，M'称为M的后继标识

理解M′

- **网分类系统**
  - 基本网系统(E/N系统)

    $K \equiv 1, W \equiv 1, M(s) = 0\ or\ 1$
  - 库所/变迁网(P/T网)

    $K \equiv \infty, W \equiv 1, \sum(S, T; F, M_0)$
  - 库所/变迁系统(P/T系统)

    $\sum = (S, T; F, K, W, M_0)$

    EN系统，P/T网是P/T系统的特例

第三章

- **基本网系统的定义**
  - (B, E, F)是一个基本网系统，B称为条件，E称为事件
  - c称为网上的一个条件丛
  - 事件$e \in E$在网上有发生权的条件是$^*e \subseteq c \wedge e^* \cap c = \emptyset$,称为$c[e >$
  - $c[e > c^{'}$,e在c发生的结果是将c变为其后继丛$c^{'}$,$c^{'} = (c -^* e) \cup e^*$

e在c有发生权 $\Leftrightarrow {}^{\bullet}e \subseteq c \wedge e^{\bullet} \cap c = \Phi$

所有$s \in {}^{\bullet}e$ 所有$s \in e^{\bullet}$

$M(s) \geq W(s,e) \wedge M(s)+W(e,s) \leq K(s)$

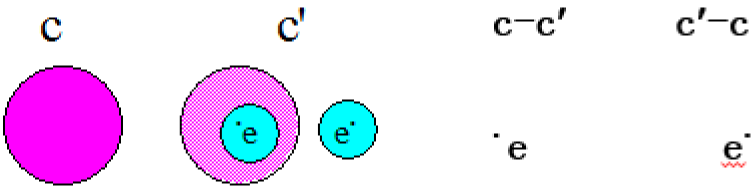
$$ {}^{\bullet}e \subseteq c \Downarrow M(s)=1 \qquad e^{\bullet} \cap c = \Phi \Downarrow M(s)=0 $$

$$ M'(s)=\begin{cases} M(s)-W(s,e) & s \in {}^{\bullet}e \quad 1-1=0 \\ M(s)+W(e,s) & s \in e^{\bullet} \quad 0+1=1 \\ M(s) & s \notin {}^{\bullet}e \cup e^{\bullet} \quad M(s) \end{cases} $$

- 四元组$N=(B,E;F,c_{in})$为基本网系统的条件是:$(B,E;F)$为条件和事件构成的有向网，c_{in}为网上的条件丛，$c_{in} \subseteq B$.基本网系统也称为EN_{-}系统

- **局部确定性**

$$ c_1[e\rangle c_1' \wedge c_2[e\rangle c_2' $$
$$ \Rightarrow c_1-c_1'=c_2-c_2' \wedge c_1'-c_1=c_2'-c_2 $$



  - 变迁的能否发生只依赖它的外延，与全局状态无关。变迁发生的外延是恒定的。即

    e在c有发生权是取决于$^*e$以及e^*

- **事件的基本关系(顺序，并发，冲突，冲撞)**
  - **顺序**

    如果$c[e_1>$,但是$\neg c[e_2>$,而$c'[e_2>$,其中$c[e_1>c'$,就说e_1和e_2有顺序关系
  - **冲突**

    如果$c[e_1> \wedge c[e_2>$,但是$\neg c[\{e_1,e_2\}>$,则e_1,e_2在c上互相冲突
  - **冲撞**

    若有$b \in B, c \in C, e \in E$,使得$^*e \subseteq c$,而且$b \in c \cap e^*$,则说在情态$c$条件$b$处有冲撞
  - **并发**(无冲撞的条件下)

    e_1和e_2在情态c并发的充分必要条件是$^*e_1 \cap ^* e_2=\emptyset \wedge ^* e_1 \cup ^* e_2 \subseteq c$

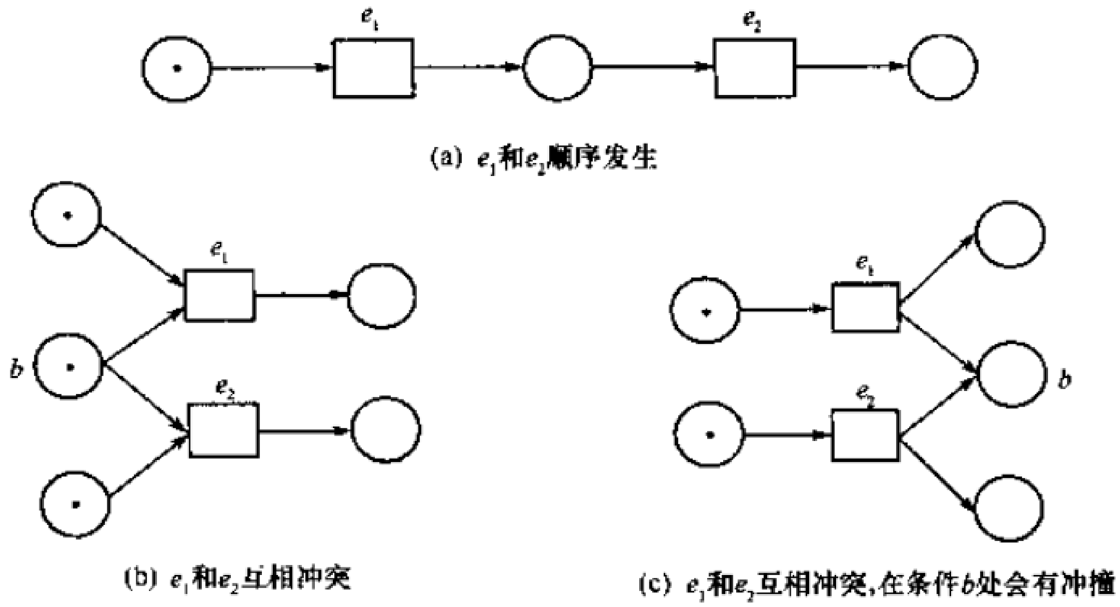


图 3-3 事件基本关系示例

- **T图，S图**

T图、S图和活性定理

定义 2.12 设N=(S,T;F)为有向网

1. 若任给t∈T: |·t|<=1且|t·|<=1,则N称为S网
2. 若任给t∈T: |·t|=|t·|=1,则N称为S图
3. 若任给s∈S: |·s|<=1且|s·|<=1,则N称为T网
4. 若任给s∈S: |·s|=|s·|=1,则N称为T图

S图又称为状态机 (state machine)

T图又称为同步图 (synchronic graph)或表识图

- **活性定理**

定义 2.14

有向网L=(S',T';F')称为N=(S,T;F)的简单有向圈，简称有向圈的条件是：

1. L为N的子网
2. L既是S图又是T图
3. L是连通的

定理 2. 8

若N的基网为T图，则N为活的基本网系统的充分必要条件为：

1. 任给e ∈E, ∃l ∈L：e∈l，即每个事件至少属于一个简单有向圈
2. 任给l ∈L, ∃b∈B：$b \in l \cap c_{in}$，即在初始情态c_{in}下，每个简单有向圈至少有一个托肯（一个条件为真）

- 哲学家就餐问题

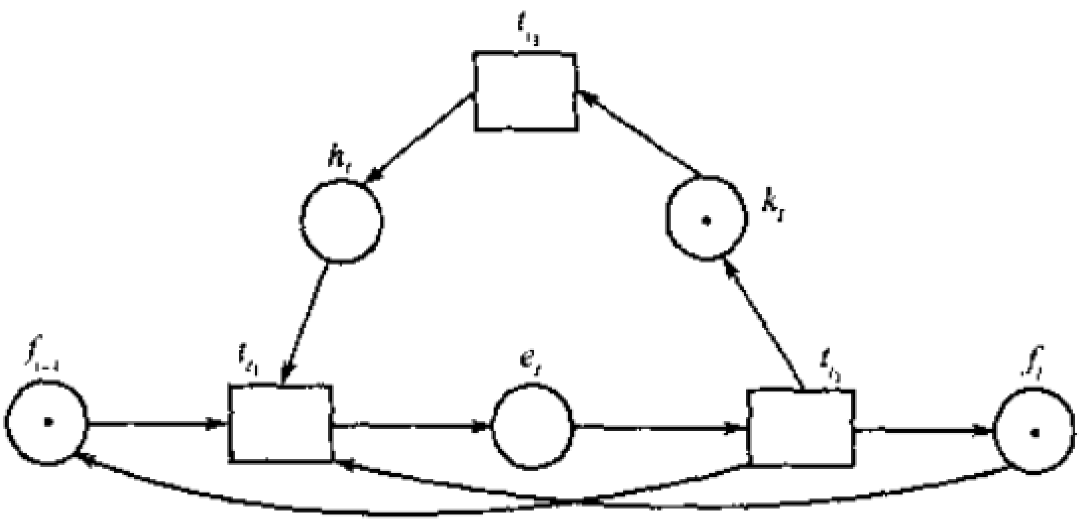
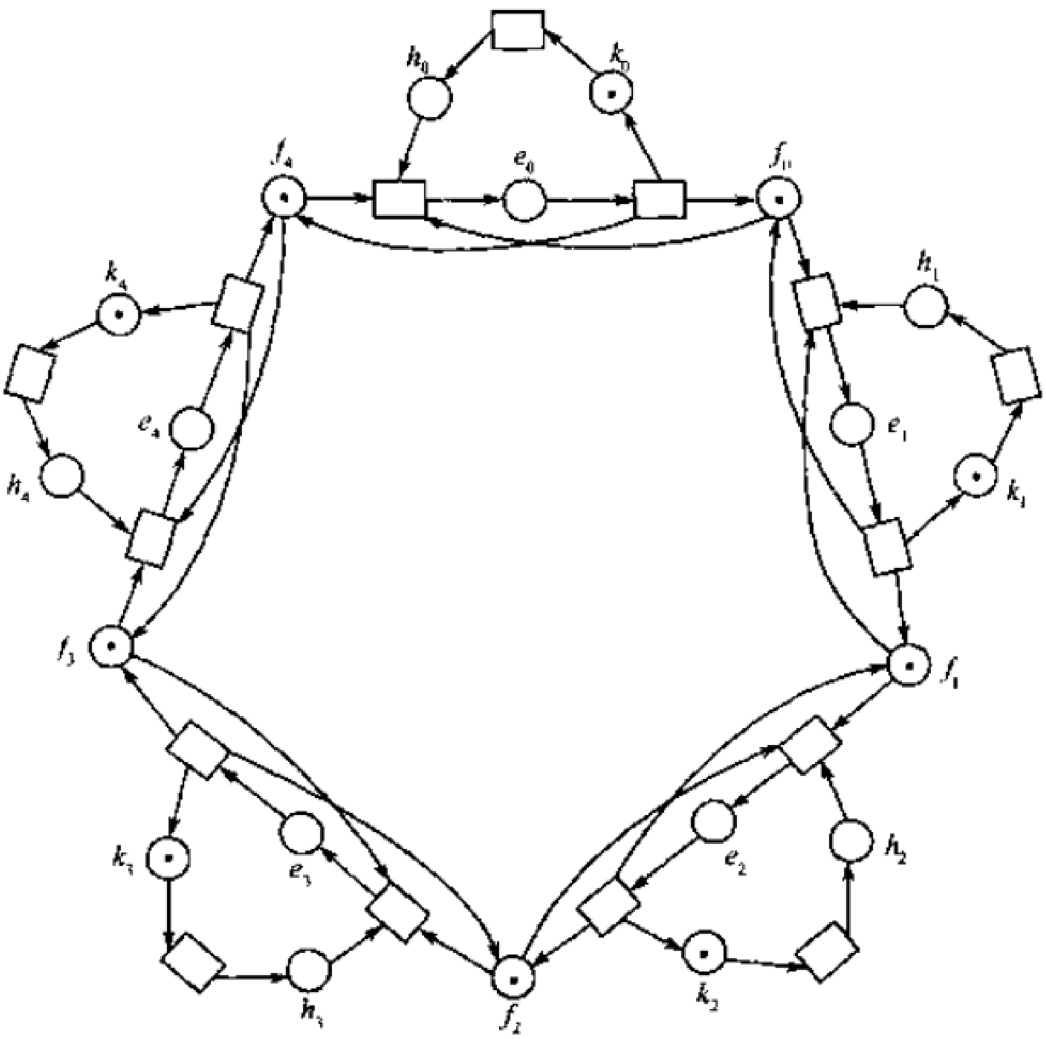


图 3-9　哲学家 p_i的行为



第四章

- **可达标识集**

  P/T_-系统$\sum=(S,T;F,K,W,M_0)$的可达标识集$[M_0>$是满足下列条件的最小集合

  - $M_0 \in [M_0>$
  - 若有$M^{'} \in [M_0>, t \in T$，使$M^{'}[t>M$, 则$M \in [M_0>$

- **有界，活性**

  - 若对于所有$M \in [M_0>$，存在正整数k,使得对所有$s \in S, M(s) \leqslant k$,就说$\sum$是有界$P/T_-$系统，或以$k$为界的$P/T_-$系统。$k=1$时称$\sum$为安全系统
  - 对$t \in T$,若对任一可达标识$M \in [M_0>$,均有从M可达的标识$M^{'} \in [M>$,使得$M^{'}[t>$就说变迁t是活的。
  - 若所有$t \in T$是活的，则说$\sum$是活的。

- **覆盖**

  设M和$M^{'}$为P/T_-系统$\sum$基网$(S,T;F)$上的两个标识

  - 若$\forall s \in S: M(s) \leqslant M^{'}(s)$,就说$M$被$M^{'}$覆盖，记作$M \leqslant M^{'}$

- 若$M \leqslant M'$,且$M \neq M'$,则说M小于M'，记作$M < M'$
- 若$M < M'$,且$M(s) < M'(s)$,就说$M < M'$在库所$s \in S$成立

- **可达树**

  - **可达树构造算法**

    每个节点都有一个标记M_x,$M_x : S \to \{0,1,2,...\} \cup \{w\}$

    - $T(\sum)$的初值只有根节点r,$M_r = M_0$,即M_r以初始标识标记
    - 令x为$T(\sum)$的叶节点，若$t \in T$在标识x下均无发生权，则x为真叶节点

      若从根节点r到x的路径上有另一节点$y, y \neq x$,但是$M(x) == M(y)$则x也是真叶节点

      若所有的叶节点均为真叶节点，则算法终止，否则执行下一步
    - 若x是$T(\sum)$的叶节点，但不是真叶节点，则在M_x上至少有一个变迁有发生权

      对M_x授权发生的每个变迁$t \in T$,在$T(\sum)$上添加一个新节点y, y是x的子节点，

      从x到y的有向弧用变迁t标记，节点y的标记M_y是如下定义的：首先计算出M_x的后继

      M',然后计算M_y,对所有$s \in S$,

      $M_y(s) = w$, 若从r到y的路径上有节点z,使得$M_z < M'$且$M_z(s) < M'(s)$

      $M_y(s) = M'(s)$ 否则
    - 回到第二步骤

  - **可达树性质**

    - 只要$\sum$是有限无冲撞的，$T(\sum)$必为有限树
    - 令$M \in [M_0 >$为任一可达标识，则在覆盖树$T(\sum)$上必有节点x,使得$M \leqslant M_x$,

      其中M_x是x的标记，若w不出现在M_x中，$M = M_x$
    - 设x为$T(\sum)$的节点， M_x是它的标记

      若w不是M_x的分量，则$M_x \in [M_0 >$

      若w是M_x的分量，则存在可达标识序列$M_1 M_2 ... M_i ..$,使$\forall i \ M_i \in [M_0 >$

      且对所有$s \in S$：

      $M_i(s) = M_x(s)$若 $M_x(s) \neq w$

      $M_i(s) \geqslant i$ 若 $M_x(s) = w$

- **可达图**

  - **可达图的构造算法：**如果存在从$T(\sum)$到G的满映射h,$T(\sum) \to G$使得

    - x为$T(\sum)$的节点，则$h(x)$为G的节点，且$h(x)$以x在$T(\sum)$中的标记M_x为标记
    - (x,y)为$T(\sum)$上以变迁t为标记的有向弧，则$(h(x),h(y))$为G上以t为标记的有向弧
    - $x \neq y$为$T(\sum)$的不同节点，则当且仅当$M_x = M_y$且x和y同在从$T(\sum)$根节点r出发

      的同一条路径时，才有$h(x) = h(y)$

  - **可达图的性质**

    - 若$G(\sum)$有末端节点，则$\sum$的任何变迁都不是活的
    - 若$\sum$的变迁t是活的，则$G(\sum)$的每个节点之下都含有以t为标记的有向弧的基本圈
    - 若$\sum$是活的，则对任何$t \in T$, $G(\sum)$的每个节点之下都含有以t标记的有向弧的基本圈

- **出现网**

$Net(B,E;F) \wedge \forall b \in B: (|{}^*b| \leqslant 1 \wedge |b^*| \leqslant 1) \wedge F^+ \cap ((F^{-1})^+ = \emptyset)$

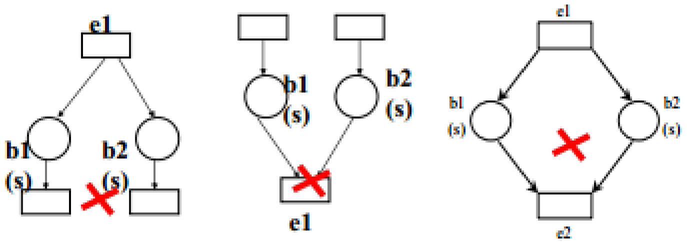
第二个条件是，最多有一个输入一个输出，最后一个条件是不包含环

- **进程**

定义　进程

设N=(B,E;F')为出现网，Σ=(S,T;F,M_0)为P/T网。若∃映射ρ（标记）:N→Σ　满足以下条件，称(N,ρ)是Σ的一个进程

1. $\rho(B)\subseteq S \wedge \rho(E)\subseteq T \wedge \forall(x,y)\in F'$: $\rho(x,y)=(\rho(x),\rho(y))\in F$
   库所只能用库所标记，变迁只能用变迁标记，有向弧只能由其两头元素的标记所决定
2. $\forall e\in E$: $\rho({}^{\cdot}e)={}^{\cdot}\rho(e) \wedge \rho(e^{\cdot})=\rho(e)^{\cdot}$
   N的每个变迁的前后集标记为该变迁标记的前后集
   即e必须确实是ρ(e) 发生的记录
3. $\forall b_1,b_2\in B$: $b_1 \neq b_2 \wedge \rho(b_1)=\rho(b_2) \Rightarrow {}^{\cdot}b_1 \neq {}^{\cdot}b_2 \wedge b_1^{\cdot} \neq b_2^{\cdot}$
   N的每个变迁的前(后)集中库所须用Σ中不同的元素来标记。因为w=1，每个变迁只能消耗（和产生）同类资源中的一个



4. $\forall s\in S$: $|\{ b \mid {}^{\cdot}b=\Phi \wedge \rho(b)=s \}| \leq M_0(s)$
   N中无前集的库所代表的资源必须是初始状态M_0所指明的

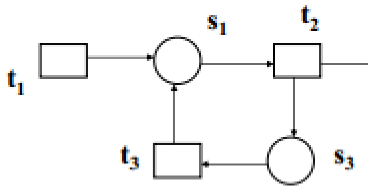
- **线和切**

定义3.13 偏序关系

N=(B,E;F)出现网，X=B∪E，$F^*=F^0\cup F^+$传递闭包，其中$F^0=\{(x,x)\mid x\in X\}$

1. $x\leq y :\Leftrightarrow (x,y)\in F^*$, $x<y \Leftrightarrow x\leq y \wedge x\neq y$
2. l⊆X是N上的一个线集 iff
   $\forall x,y\in l$: $x<y \vee y<x$
3. l⊆X是N上的一条线 iff l为最大线集(l是线集，再加一个X-l中的元素就非线集)
   即∀x不属于l ∃y∈l: $\neg(x < y \vee y<x)$
4. μ ⊆ X为一个切集 iff $\forall x,y\in\mu$:
   $\neg(x<y \vee y<x)$
5. N的切集μ是最大切集，称为N的一个切，
   即$\forall x\in\mu\ \exists y\in\mu$: $(x<y \vee y<x)$
6. 若μ是N的切，且μ ⊆ B，就说μ是N的一个B-切或片

- **状态方程**，S_-，T_-**不变量**



$$M_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$M0+C.X=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

记为M, M满足状态方程。然而，M并不是petri网的一个可达状态。

如果S_I为S-不变量，则

$I^T_I \cdot M = I^T_I \cdot M_0$ 即$I^T_I\,(M_0+C\cdot X) = I^T_I \cdot M_0$

化简后得：$I^T_I \cdot C\cdot X = 0$

由于U可以是任意变迁序列对应的列向量，

所以 $C^T\cdot I_I = \theta_T$，θ_T为分量全为0的T-向量

S-不变量的特征向量I_I即为方程组

$C^T\cdot X = \theta_T$的解

当然，方程组的解并一定都是上述物理意义上的S-不变量，但我们统称这些整数解为S-不变量

定义3.16 S-不变量

I为Σ的一个S-向量，C是关联矩阵，C^T是C的转置，θ是零向量

1. $C^T\cdot I=\theta_t \Rightarrow$ I为Σ的S-不变量
   $P_I=\{s\in S \mid I(s)\neq 0\}$为I的支撑集
2. 若$I>\theta_s \Rightarrow$非负S-不变量
3. 若不∃非负S-不变量I′，使$\theta_s<I'<I$，就说I是最小非负S-不变量
4. θ_s也是S-不变量，但若θ_s是唯一的S-不变量，则说Σ无S-不变量

S-不变量的意义

- 不是所有S-不变量都能表示出Σ中有意义的性质（因为现已成为一个代数问题）
- $C^T\cdot I = \theta_t$给出了求S-不变量的方法（解齐次线性方程组，有整数解）
  无解、零解、非整数解：没有S-不变量
  一个非零整数解：唯一S-不变量
  多个非整数解：不唯一，可能有最小\S-不变量
- S-不变量只涉及其支撑集的部分库所——局部性质 （上例正好是全局性质，∵ $P_I=\{s_1, s_2\ldots s_{10}\}=S$ ）

定义3.17 T-不变量

令J为Σ的一个T-向量，θ是零向量

1. $C\cdot J=\theta_s \Rightarrow$ J是T-不变量
2. 若$J>\theta_t \Rightarrow$ J是非负T-不变量
3. $P_J=\{t\in T \mid J(t)\neq 0\} \Rightarrow$ J的支撑集
4. 若不∃非负T-不变量J′，使$\theta_t<J'<J \Rightarrow$ J是最小非负T-不变量
5. θ_t可以是一个T-不变量