第三章 库所/变迁系统

介绍P/T系统的各种分析技术：可达标识集、变迁序列、进程及不变量等

$\Sigma=(S,T;F,K,W,M_0)$

- $F\subseteq S\times T\cup T\times S$
- $K:S\rightarrow N^{+}\cup\{\omega\}$
- $W:F\rightarrow N^{+}$
- $M_0:S\rightarrow N_0$

其中$N^{+}=\{1,2,......\}$，$N_0=\{0,1,2,......\}$

- 为方便起见，将W定义在笛卡儿空间

$W:\ S\times T\cup T\times S\rightarrow N_0$ (非N^{+})

规定：$W(x,y)\neq 0$ iff $(x,y)\in F$

- Σ, $t\in T$, M是Σ一个标识

1 . $M[t>$ iff
$\forall s\in S:\ W(s,t)\le M(s)\le K(s)-W(t,s)$
原来(P16变迁规则)
$\forall s\in{}^{\bullet}t:\ M(s)\ge W(s,t)$
$s\in{}^{\bullet}t\ \ W(s,t)\le M(s)$
$s\notin{}^{\bullet}t\ \ 0\le M(s)$ ✓
$\forall s\in t^{\bullet}:\ M(s)+W(t,s)\le K(s)$
$s\in t^{\bullet}\ \ M(s)\le K(s)-W(t,s)$
$s\notin t^{\bullet}\ \ M(s)\le K(s)$ ✓

2 . 若$M[t>$, t可以发生, 则M′为
对$\forall s\in S$，$M'(s)=M(s)-W(s,t)+W(t,s)$
记$M[t>M'$

理解:可视每对节点都有两条方向相反的弧, 但认为假弧上的W为0

原来:

$$M'(s)=\left\{\begin{array}{l} M(s)-W(s,t)\\ M(s)+W(t,s)\\ M(s)-W(s,t)+W(t,s)\\ M(s)\end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 若s\in{}^{\bullet}t-t^{\bullet}\\ 若s\in t^{\bullet}-{}^{\bullet}t\\ 若s\in{}^{\bullet}t\cap t^{\bullet}\end{array}\right\}{}^{\bullet}t\cup t^{\bullet}\\ 若s\notin{}^{\bullet}t\cup t^{\bullet}\end{array}$$

$0\quad s\in{}^{\bullet}t-t^{\bullet}$

$M(s)-W(s,t)+W(t,s)\qquad M(s)-0+0$

$0\quad s\in t^{\bullet}-{}^{\bullet}t\qquad s\notin{}^{\bullet}t\cup t^{\bullet}$

冲撞、并发、冲突

1 . $s_0\in S$在M下冲撞iff
$\exists t\in T$, 使$\forall s\in S:W(s,t)\le M(s)$
但$M(s_0)>K(s_0)-W(t,s_0)$
若Σ在任何M下无冲撞$\Rightarrow\Sigma$为无冲撞系统
同样，可以通过增加补库所来消除冲撞

2 . $t_1,t_2\in T$和M，$\forall s\in S$，有
$W(s,t_1)+W(s,t_2)\le M(s)\le K(s)-W(t_1,s)-W(t_2,s)$称
t_1,t_2在M有并发权

3 . t_1,t_2在M都有发生权，但无并发权
$\Rightarrow t_1$和t_2在M互相冲突

一、可到达标识集

（相当于EN系统的情态集C_N）

- 可达标识集

一、可到达标识集

Σ可到达标识集$[M_0>$是满足以下条件最小集合：

1. $M_0 \in [M_0>$
2. 若$M \in [M_0>$，且有$t \in T$，使$M[t>M'$，则$M' \in [M_0>$
3. 除1，2以外，没有其他$M \in [M_0>$

- 对照EN系统的情态集C_N的定义（P27）
- 这儿每一步只考虑一个变迁，因为有类似定理（P27）的结论作保证
- $[M_0>$中的元素称为可到达标识，或可达标识

定义3.2 有界性

$\forall\ M \in [M_0>$，$\exists$正整数k，

使得$\forall s \in S$ 有$M(s) \leq k$

$\Rightarrow$Σ是有界的，或k-有界的（k-安全的）

k=1时，称Σ是安全的，k称为系统Σ的界

- EN系统都是安全的

定义3.3 活性

1. $t \in T$为活的，iff

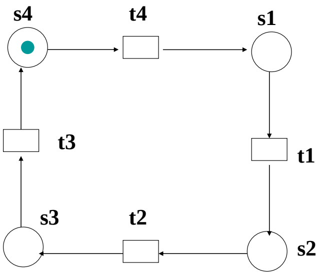
   $\forall M \in [M_0>$，$\exists$ $M' \in [M>$，使得$M'[t>$

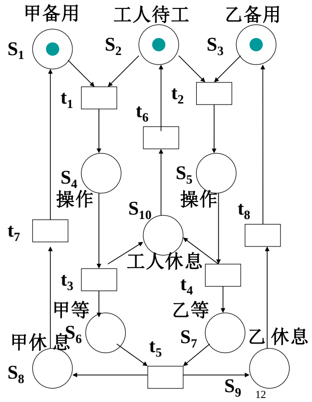
可达标识集

↑

存在从M可以到达的$M' \in [M>$

$\forall$ t $\in$ T都是活的，就说Σ是活的。





2. $M\in[M_0\rangle$为活的，iff $\forall t\in T$, $\exists M'\in[M\rangle$,
使得$M'[t\rangle$

例如:

四季系统Σ

一个工人操作两台机器Σ_4

若所有t都是活的，就说系统是活的

复盖性

∵ $|X|<\infty$, 即有限网系统 ⇒ s有限

∴令$s=\{s_1, s_2, \dots, s_n\}\Rightarrow M$, 可用向量

$(M(s_1), M(s_2), \dots, M(s_n))$表示

定义3.4 复盖性

$M, M'\in[M_0\rangle$

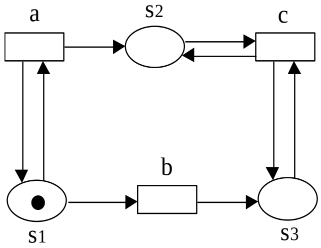
1. $\forall s\in S$: $M(s)\leq M'(s)\Rightarrow$ M被M′复盖，
   记为$M \leq M'$
2. $M \leq M'$且$M \neq M'$ ⇒ M小于M′, 记$M < M'$
   (即∃ $s\in S$: 使得$M(s)<M'(s)$)
3. $M \leq M'$且$M(s)<M'(s)\Rightarrow M < M'$ 在s成立

可达标识树

P/T系统的一些性质，如可达性、有界性、活性可以通过可达标识树来判断，尤其是对有界P/T系统，可达标识树是一个很好的分析工具。

P/T网

($K\equiv\infty$, $W\equiv1$)



前被后覆盖(无限多的不同标识)

$$\begin{tikzcd}
(1,0,0) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & (0,0,1) \\
(1,1,0) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & (0,1,1) \arrow[r, "c"] & (0,1,1) \arrow[r, "c"] & (0,1,1) \arrow[r, "c"] & \dots \\
(1,2,0) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & (0,2,1) \arrow[r, "c"] & (0,2,1) \arrow[r, "c"] & (0,2,1) \arrow[r, "c"] & \dots \\
(1,3,0) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & (0,3,1) \arrow[r, "c"] & (0,3,1) \arrow[r, "c"] & (0,3,1) \arrow[r, "c"] & \dots \\
\vdots
\end{tikzcd}$$

←死标识

仅有变迁c发生
(有限的不同标识)

三方面处理:

1. 有限不动（死标识）
2. $(0,1,1)\xrightarrow{c}(0,1,1)$, $(0,2,1)\xrightarrow{c}(0,2,1)$,
   $(0,3,1)\xrightarrow{c}(0,3,1)$, ……
   保留所有不同的, 用重复体现无限
3. $(1,0,0)\xrightarrow{a}(1,1,0)\xrightarrow{a}(1,2,0)\xrightarrow{a}(1,3,0)\xrightarrow{a}$
   …… $\rightarrow(1,\omega,0)$

$\omega= \omega+1= \omega-1= \omega+ \omega$

$$\begin{tikzcd}
(1,0,0) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & (0,0,1) & \\
(1,\omega,0) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & (0,\omega,1) \arrow[r, "c"] & (0,\omega,1) \\
(1,\omega,0) & &
\end{tikzcd}$$

称为　可（到）达树(覆盖树)

定义3.5 可达树T(Σ)算法

T(Σ)上的节点x的标记M_x为S的函数

M_x : $S \to N_0 \cup \{\omega\}$

T(Σ)的弧由T中元素标记

T(Σ)递归构造如下:

(a) T(Σ)的根节点r的标记为 $M_r=M_0$

(b) 若T(Σ)的叶节点均为真叶节点，即:

(1) M_x是死标识(对于任何变迁, 在M_x均无发生权)，x是T(Σ)的真叶节点或者

(2) 从r到x有另一节点y, y≠x, 但$M_y=M_x$, x也为真叶节点

则构造结束

(c) 对T(Σ)中所有非真叶节点x

$\forall t \in \{t \mid t \in T \wedge M_x[t>\}$: 引入x的一个子节点y,

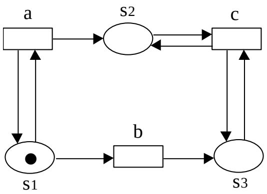
(x, y)弧上用t标记, 节点y的标记M_y, 如下定义:

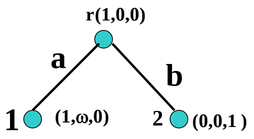
首先计算M_x 的后继M′， $M'(s)= M_x(s)-W(s,t)+W(t,s))$, 然后计算 M_y:

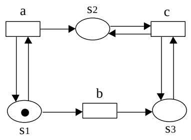
$$M_y(s)=\begin{cases} \omega & \text{从r至y路径上有节点z, 使} \\ & (M_z<M') \wedge (M_z(s)<M'(s)) \\ M'(s) & \text{其余s} \end{cases}$$

(d) 回到b

$$\begin{tikzcd}
(1,0,0) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & (0,0,1) & \\
(1,\omega,0) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & (0,\omega,1) \arrow[r, "c"] & (0,\omega,1) \\
(1,\omega,0) & &
\end{tikzcd}$$







计算$M_{y=1}$分2步:

A: $M'(s)= M_{x=r}(s)-W(s,t)+W(t,s))$
$=(1,1,0)$

B: 因为从r到节点y(y=1)有z(z=r)使得

$Mz<M' \wedge Mz(s)<M'(s)$即： $(1,0,0\ )<(1,1,0\ )$

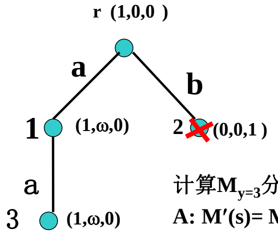
$M1=(1,\omega,0)$

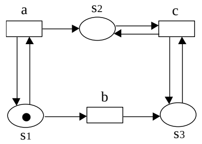
计算$M_{y=2}$分2步:

A: $M'(s)= M_{x=r}(s)-W(s,t)+W(t,s))$
$=(0,0,1)$

B: 因为从r到节点y(y=2)没有z使得

$Mz<M' \wedge Mz(s)<M'(s$





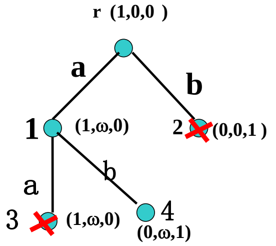
计算$M_{y=3}$分2步：

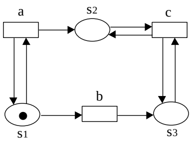
A: $M'(s)= M_{x=1}(s)-W(s,t)+W(t,s))$

$=(1,\omega,0)$

B: 因为从r到节点y(y=3)没有z使得

$Mz<M' \wedge Mz(s)<M'(s)$





计算$M_{y=4}$分2步：

A: $M'(s)= M_{x=1}(s)-W(s,t)+W(t,s))$

$=(0,\omega,1)$

B: 因为从r到节点y(y=4)没有z使得

$Mz<M' \wedge Mz(s)<M'(s)$

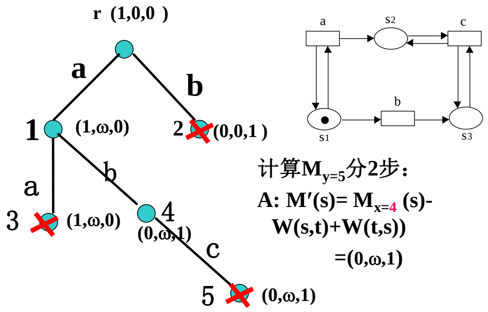
判断节点3是否为真叶节点：

因为从r到节点x(=3)有另一节点

y(=1) ,y≠x,但My=Mx,

所以3为真叶节点，变迁c可以发生

所以4为非真叶节点



计算$M_{y=5}$分2步：

A: $M'(s)= M_{x=4}(s)-W(s,t)+W(t,s))$

$=(0,\omega,1)$

B: 因为从r到节点y(y=3)没有z使得

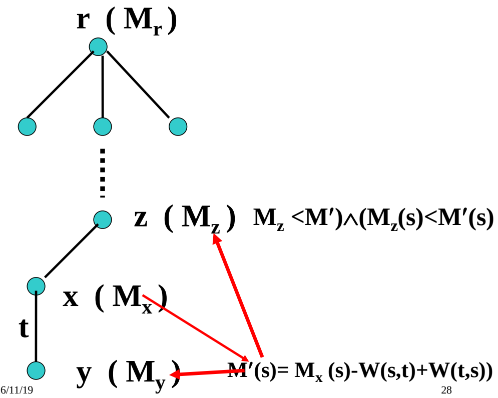
$Mz<M' \wedge Mz(s)<M'(s)$

判断节点5是否为真叶节点：

因为从r到节点x(=5)有另一节点

y(=4) ,y≠x,但My=Mx,

所以5为真叶节点



T(Σ)的有限问题

- 如果Σ的$[M_0>$是有限集，则T(Σ)在有限步构造出，所以T(Σ)有限
- 如果Σ的$[M_0>$是无限集，T(Σ)能在有限步构造出吗？

定理3.1

若Σ是有限无冲撞P/T系统，则T(Σ)是有限树。

引理

令$\tau=M_1M_2\ldots$为N_0上的n维向量之无穷序列，且只要$i\neq j$，$M_i \neq M_j$，则存在τ的子序列$\tau'=M_{i1}M_{i2}\ldots$，使$M_{i_j}<M_{i_{j+1}}$，对所有$j=1,2\ldots$成立。

证明引理

对向量维数n进行归纳：

K=1，由于对于任何i，j（且$i \neq j$）有$Mi\neq Mj$，已证得：有一个严格增加的子序列（数学分析）

设$K \leq n-1$引理成立

证$K = n$ 引理也成立

证定理3.1

若Σ是有限无冲撞P/T系统，则T(Σ)是有限树。

先证：根节点到叶节点的路径有限

反证：若无限⇒算法知：该路径上所有M_x均不相同

$\overset{引理}{\Rightarrow}$有一严格递增的无穷子序列

⇒根据标记计算公式，严格递增一次就至少有一个分量ω

另一方面

|s|<∞ ⇒ 最多改|s|次所有分量为ω

⇒出现相同标记的节点

⇒ 一个真叶节点⇒有限路径 与假设矛盾

再证：又∵|T|<∞

∴每个节点只有有限个子节点 ⇒ 整个T(Σ)有限

唯一性

算法没有定义子节点的排序顺序

- T(Σ)在同构意义上唯一
- 深度优先/广度优先
- 每步只计算叶节点的一个子节点

不关心T(Σ)的结构，关心的是T(Σ)和$[M_0\rangle$的关系，计算T(Σ)的目的是了解$[M_0\rangle$，并进一步了解Σ的动态行为。

定理3.2

$M\in[M_0\rangle\Rightarrow\exists x$为T(Σ)上的节点，使$M\leq M_x$；

当ω不是M_x的分量，则 $M=M_x$，其中，M_x是x的标记.

证明

∵$M\in[M_0\rangle$, $\alpha=t_0t_1\ldots t_k$,

使得$M_0\xrightarrow{t_0}M_1\xrightarrow{t_1}\ldots\xrightarrow{t_k}M_{k+1}=M$

对α的长度 l 归纳

$l=0$, $M=M_0\Rightarrow M=M_0=M_r$, 即$\exists r$, 使$M=M_r$

$l<k$, 归纳假设成立, 即$M_0\xrightarrow{t_0}M_1\xrightarrow{t_1}\ldots\xrightarrow{t_{k-1}}M_k$

$\exists y$, 使$M_k\leq M_y$

考虑$l=k$，即证$l=k$时定理结论成立（即$M\leq M_x$）

∵ $M_k\xrightarrow{t_k}M_{k+1}=M$, 即$t_k$在$M_k$有发生权

∴ $W(s,t_k)\leq M_k(s)\leq M_y(s)$（归纳假设$M_k\leq M_y$）

∵Σ是无冲撞的（先天假设）

∴不需考虑$M_y(s)\leq K(s)-W(t_k,s)$

∴ t_k在M_y有发生权, 令$M_y[t_k\rangle M'$

∵ $M_k\leq M_y$， 又$M_k[t_k\rangle M_{k+1}=M$

$\Rightarrow M\leq M'$

根据T(Σ)的构造算法

节点y有子节点x, 且$M_y\xrightarrow{t_k}M_x$

而M_x由M′计算得来, 由公式知 $M'\leq M_x$

∴ $M\leq M'\leq M_x$

若Mx不以ω为分量⇒M_y也不含ω, 且$M_x=M'$

由归纳假设 $M_k=M_y$（当不含ω）

∴ $M_k[t_k\rangle M_{k+1}=M=M_y[t_k\rangle Mx$ 成立

$$\begin{tikzcd}
M_k \arrow[d, "t_k"'] \arrow[r, phantom, "\leq"] & M_y \arrow[d, "t_k"'] \arrow[dr, "t_k"] & \\
M \arrow[r, phantom, "\leq"] & M' \arrow[r, phantom, "\leq"] & M_x \text{ 节点x的标记}
\end{tikzcd}$$

定理3.3

M_x为T(Σ)上节点x的标记, 则

1．若M_x的分量均不为ω, 则$M_x\in[M_0\rangle$

2．若M_x以ω为分量, 则$\exists M_1, M_2\ldots, M_i\ldots\in[M_0\rangle$,
使得$\forall s\in S$:

$$M_i(s)\begin{cases} = M_x(s) & M_x(s)\neq\omega \\ \geq i & M_x(s)=\omega \end{cases}$$

- 结论1显然
- 结论2直观理解, M<M′ 严格递增（∵有分量为ω）

推论3.4

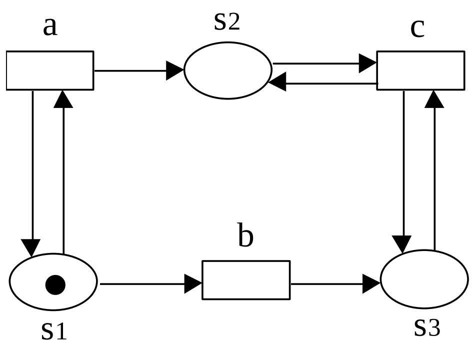
若T(Σ)不出现ω，则[M_0>就是T(Σ)的节点标记集合。

T(Σ)来判断Σ的性质

1．ω出现在 T(Σ)，则Σ无界；
2．ω不出现，则Σ有界，Σ的最小界就是T(Σ)之节点标记所含最大分量；
3．T(Σ)的叶节点x的标记M_x只出现在从r根到x的路径上一次，则M_x代表一个或多个无穷多个死标识（ ω出现为无穷多个）；
4．Σ的标识M或标识集{M_i}能被[M_0>复盖iff M或{M_i}能被T(Σ)复盖。

可达树局限性

- 冲突和并发混淆
  t_1, t_2在M都有发生权，T(Σ)中对应着二个节点，与t_1, t_2是否冲突并发无关。
- 死标识和非死标识不醒目　可达图
- 有限序列与无限序列分不清　变迁序列



$$
\begin{array}{l}
(1,0,0)\xrightarrow{b}(0,0,1)\\
\quad a\downarrow\\
(1,1,0)\xrightarrow{b}(0,1,1)\xrightarrow{c}(0,1,1)\xrightarrow{c}(0,1,1)\xrightarrow{c}\ldots\\
\quad a\downarrow\\
(1,2,0)\xrightarrow{b}(0,2,1)\xrightarrow{c}(0,2,1)\xrightarrow{c}(0,2,1)\xrightarrow{c}\ldots\\
\quad a\downarrow\\
(1,3,0)\xrightarrow{b}(0,3,1)\xrightarrow{c}(0,3,1)\xrightarrow{c}(0,3,1)\xrightarrow{c}\ldots\\
\quad a\downarrow\\
\quad\ \vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(1,0,0)\xrightarrow{b}(0,0,1)\\
\quad a\downarrow\\
(1,\omega,0)\xrightarrow{b}(0,\omega,1)\xrightarrow{c}(0,\omega,1)\\
\quad a\downarrow\\
(1,\omega,0)
\end{array}
$$

死节点和活节点

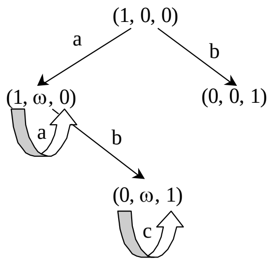
- 根据T(Σ)算法，真叶节点有两类：

  其标记不能使任何变迁发生的一类；　　死节点

  其标记能使某些变迁发生的一类；　　活节点

  死节点和活节点在T(Σ)都是叶节点，因而两种节点不易从图上区分。
- 活节点：从根r到叶节点x路径上出现与M_x相同标记M_y
- 在T(Σ)上重迭这种节点x和节点y（M_x=M_y），得到一个圈；如果重迭所有这种x, y节点，得到可达图G(Σ)
- 可达图中死活节点一目了然

$$\begin{tikzcd}
(1,0,0) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & (0,0,1) & \\
(1,\omega,0) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & (0,\omega,1) \arrow[r, "c"] & (0,\omega,1) \\
(1,\omega,0) & &
\end{tikzcd}$$



定义3.6(可达图定义)

设Σ为有限无冲撞P/T系统，T(Σ)为其可达树，有向图G是Σ的可达图 iff

∃满映射 h: T(Σ)→G, 使得

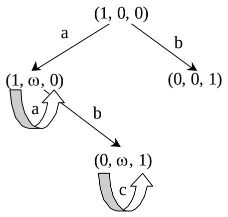
1. x为T(Σ)的节点，则h(x)为G的节点，且h(x)以x在T(Σ)中的标记M_x为标记；
2. (x, y)为T(Σ)上以变迁t为标记的有向弧，则(h(x), h(y))为G上以t为标记的有向弧；
3. x≠y为T(Σ)的不同节点，则当且仅当 M_x=M_y且x和y同在从T(Σ)根节点r出发的同一条路径时，才有h(x)=h(y)。

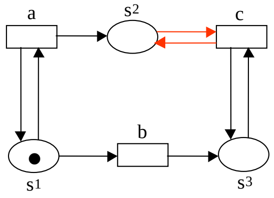
定义3.7

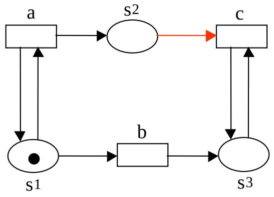
1. 若x是T(Σ)的死节点，则h(x)称为G(Σ)的末端节点；
2. 若x是T(Σ)的活节点，y是路径(r→x)上与x标记相同的中间节点，则h(x)=h(y)，且路径(y→x)在h下映射为G(Σ)的简单有向圈，记作l(x)。这种对应于T(Σ)上有向路径的圈称为G(Σ)的基本圈，h(x)称为l(x)的起点；
3. 对G(Σ)的节点a，若G(Σ)上有从a出发到基本圈l(x)的起点h(x)的有向路径，就说l(x)是a之下的基本圈。

定理3.8

1. 若G(Σ)有末端节点,则Σ的任何变迁都不是活的；
2. 若Σ的变迁t是活的，则G(Σ)的每个节点之下都含有以t为标记的有向弧的基本圈；
3. 若Σ是活的，则对任何t∈T，G(Σ)的每个节点之下都含有以t为标记的有向弧的基本圈。

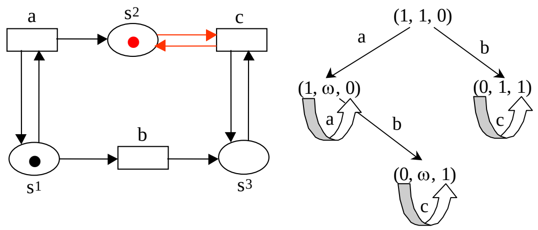




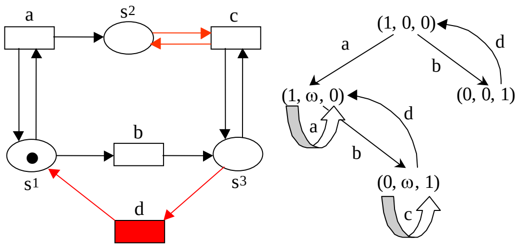


根据定理3.8第1点，**(0, 0, 1)** 是末端节点，右边两个**P/T**网均无活变迁。

2016/11/19



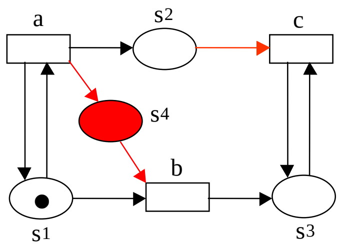
不难看出，变迁c满足定理3.8第2点，
事实上 c是唯一的活变迁。



这是一个活系统，它的可达图
具有定理3.8第3点性质。

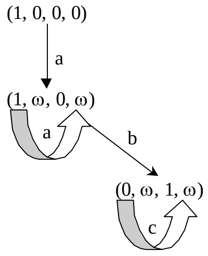
对于有界Petri网，定理3.8是一个充要条件，对于无界Petri网是一个必要条件，非充分条件

对于无界Petri网，G(Σ)的每个节点之下都
有含以变迁t为标记的有向弧的基本圈，但
有可能Σ的这个t不是活的。



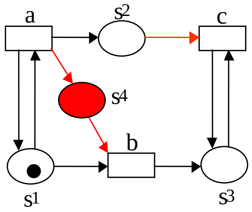
1. **b**仅能发生一次；当**b**发生后，**a**也失去发生权；因此，**a, b**均不是活的。

2. **c**在消耗完**s2**中的**a**产生的托肯以后也就不能再发生，**c**也不是活的。

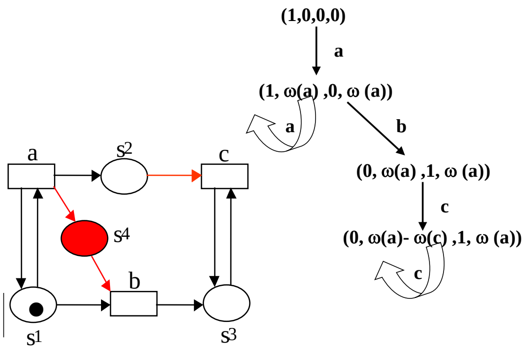


但对于变迁c来讲，可达图中的每个节点之下都
含以c标记之有向弧的基本圈。

问题在哪呢？



- 当a发生时，按算法，把（1,0,0,0）→(1,1,0,1)改为（1,0,0,0）→（1, ω ,0, ω ）。
- ω并非真正的无穷，只是个任意大的整数，我们用ω(a)来代表(1, ω(a), 0, ω(a))



总　结

- 可达树和可达图能够反映一个网系统的动态行为和一些特征
- 对于一个有界网，是准确的刻画
- 对于无界网，只能部分刻画

二、变迁序列

定义3.8

设Σ =（S，T；F，K，W，M_0）为有限无冲撞P/T系统。

- σ=$M_0t_1M_1t_2…t_nM_n$为Σ的一个有限出现序列 iff $M_{i-1}[t_i>M_i$(i=1, 2, …, n) n称为σ的长度
- σ=$M_0t_1M_1t_2…$为Σ的一个无限出现序列 iff $M_{i-1}[t_i>M_i$(i=1, 2, …,)
- $t_1t_2t_3…$称为Σ的变迁序列 iff ∃Σ的出现序列$M_0t_1M_1t_2……$

  变迁序列是上世纪70年代网论研究主要内容之一。当时提出的Petri网语言就是变迁序列的一个应用实力.

下面定理给出了变迁序列和可达图的关系。

定理3.9

Σ的每一变迁序列（有限或无限）都是可达图G(Σ)上一条h(r)出发的有向路径上有向弧的标记序列

该定理的逆不成立。因为ω的引入会在G(Σ)上产生一些可以无限延伸的路径，而在Σ上，相应的变迁序列却不能无限延伸。

系统Σ的一些性质可以用变迁序列来定义

定义3.9 公平性、循环系统、冻结托肯

1. 变迁集$T_1, T_2⊆T, T_1∩T_2=ϕ$, 若存在σ=$M_0t_1M_1t_2…$

   (无限长出现序列)

   使得#(σ, T_1)=∞, 且#(σ, T_2)<∞, 称Σ对T_1, T_2是不公平的

   (#(σ, T_i)表示T_i中变迁中出现的次数)

   #(σ, T_1)=∞, 且#(σ, T_2)<∞, 称T_2处在饥饿状态
2. Σ对任意二个不交的变迁集都不是不公平的，称Σ是公平系统

请看

$\#(\sigma, T_1)=\infty$, 且$\#(\sigma, T_2)<\infty$ ·不公平

·T2处在饥饿状态

$\#(\sigma, T_1)<\infty$, 且$\#(\sigma, T_2)=\infty$ ·不公平

·T1处在饥饿状态

$\#(\sigma, T_1)=\infty$, 且$\#(\sigma, T_2)=\infty$ ·公平

·无饥饿

$\#(\sigma, T_1)<\infty$, 且$\#(\sigma, T_2)<\infty$ ·公平

·无饥饿

- 公平性的引入在于讨论网系统中两个变迁的发生之间的关系，这种关系反映的是被模拟系统的各个部分在资源竞争中的无饥饿性问题
- 若不存在无限长出现序列，则这样的网系统总是公平性的
- 变迁间的公平关系是一种等价关系
- Petri网是公平网的充分必要条件是在可达图的每个有向回路上，每个变迁都至少是回路中的一个标记

---

3. 若对于Σ的任一有限出现序列σ，都存在 Σ的出现序列(有限)

   $\sigma'=M_0t_1M_1t_2\ldots t_nM_n$, 使得

- σ是σ′的前缀
- $T=\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, 且$M_0 \leq M_n$

  ⇒Σ是循环系统

循环系统是一种特别的活系统

a. 每个变迁都是活的

b. 任何可达标识, 都能恢复到能复盖M_0的状态。即$\forall M\in[M_0\rangle$ 都有$M_0\in[M\rangle$ 或者 $\exists M'\in[M\rangle$ 使得$M'\geq M_0$

变迁序列

——也不能区分系统中的并发和顺序现象

——系统进程引入

三、进程

把网系统中变迁的发生过程如实地记录

——系统的进程,是用出现网表示的一个Petri网的一种可能的运行轨迹

↑

与观察和时间无关

出现网

↓

系统中，每个资源的自身发展构成一条线，在时间上全序。2个资源的2条轨迹线是2个时间系统。只有他们相交时，即2个资源参共同参与同一变化时，2个时间系统是同时的。

定义3.11 出现网

N=(B, E;F)是个出现网(仅是个基网, 非EN系统)

iff

S元素至多一个输入, 一个输出

↓

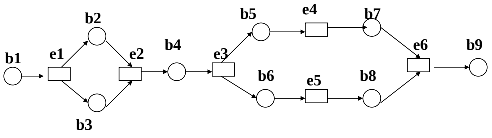
$Net(B, E;F)\wedge\forall b\in B:(|{}^{\cdot}b|\leq 1\wedge|b^{\cdot}|\leq 1)\wedge$

$(F^{+}\cap(F^{-1})^{+}=\Phi)$ ←不包含环

$F^1=F$, $F^n=F^{n-1}.F$

$F^{+}=F^1\cup F^2\cup \ldots F^i\cup \ldots$

$F^{-1}=\{(y, x)\mid(x, y)\in F\}$

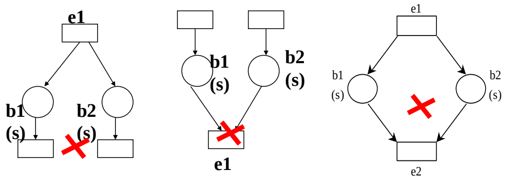


定义 进程

设N=(B, E; F’)为出现网, $\Sigma=(S, T; F, M_0)$为P/T网。若∃映射ρ（标记）: $N\rightarrow\Sigma$ 满足以下条件, 称(N, ρ)是Σ的一个进程

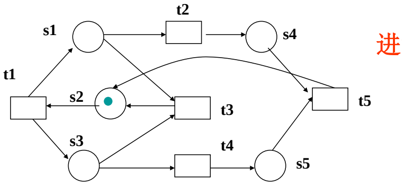
1. $\rho(B)\subseteq S \wedge \rho(E)\subseteq T \wedge \forall(x, y)\in F': \rho(x, y)=(\rho(x), \rho(y))\in F$
   库所只能用库所标记，变迁只能用变迁标记，有向弧只能由其两头元素的标记所决定
2. $\forall e\in E: \rho({}^{\cdot}e)={}^{\cdot}\rho(e) \wedge \rho(e^{\cdot})=\rho(e)^{\cdot}$
   N的每个变迁的前后集标记为该变迁标记的前后集
   即e必须确实是ρ(e) 发生的记录

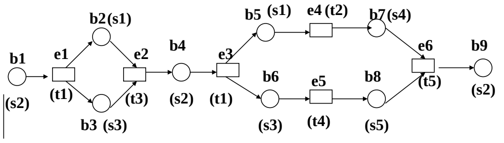
3. $\forall b_1, b_2\in B: b_1 \neq b_2 \wedge \rho(b_1)=\rho(b_2) \Rightarrow {}^{\cdot}b_1 \neq {}^{\cdot}b_2 \wedge b_1^{\cdot} \neq b_2^{\cdot}$
   N的每个变迁的前(后)集中库所须用Σ中不同的元素来标记。因为w=1，每个变迁只能消耗（和产生）同类资源中的一个



4. $\forall s\in S: |\{ b | {}^{\cdot}b=\Phi \wedge \rho(b)=s \}| \leq M_0(s)$
   N中无前集的库所代表的资源必须是初始状态M_0所指明的

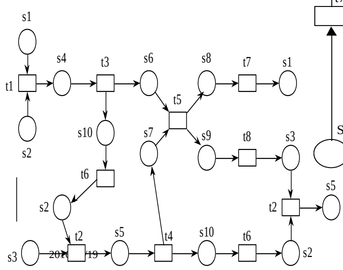
进程例子

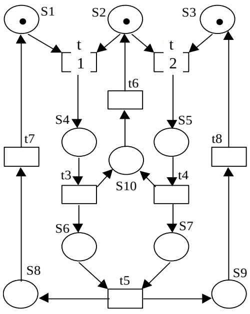




进程例子

映射ρ: N→Σ4





- 圆圈方框代表相应的元素, 其标记可以出现多次, 如s_1, s_2, s_3, t_2, t_6（非出现网本身的元素）
- 方框表示观察到的t的一次发生或出现圆圈表示观察到s的一个资源(P/T系统)或一次成真(EN系统)
- 观察记录包括一个出现网和出现网元素与被观察系统中元素的对应关系（标记）
- 网论把观察记录称为被观察系统的进程
- 出现网的元素构成一个偏序集。若把有向弧的方向看成时间流动方向，那么出现网给出的是偏序时间或分枝时间。偏序集中没有顺序关系的两个元素是并发。偏序集中每个最大全序子集代表某一资源的活动轨迹，两条轨迹的交点代表两个资源在通常意义上的同时。
- 进程——出现网N+N上的标记

- 以出现网为工具，如实记录网系统中所发生一切的观察记录
- 进程概念适用于无冲撞系统
- 进程是对冲突（如果有的话）消解方式的一种记录
- 一个进程非一个系统的整个行为
- 一个进程是系统行为的一次记录
- Σ的进程之集P(Σ)描述整个行为
- 优点:直观、真实地反映顺序关系和并发关系

进程反映的顺序和并发的有关概念

- 出现网中用线来刻划顺序和并发关系
  在一条线上—顺序　不在一条线上—并发（在时间上，不能比较先后）
- 每个资源的自身发展构成一条线（一个时间系统）
- 两条线的交点代表两个资源共同参与的同一个变化

定义3.13 偏序关系

N=(B,E;F)出现网，$X=B\cup E$，$F^*=F^0\cup F^+$传递闭包，其中$F^0=\{(x,x)|x\in X\}$

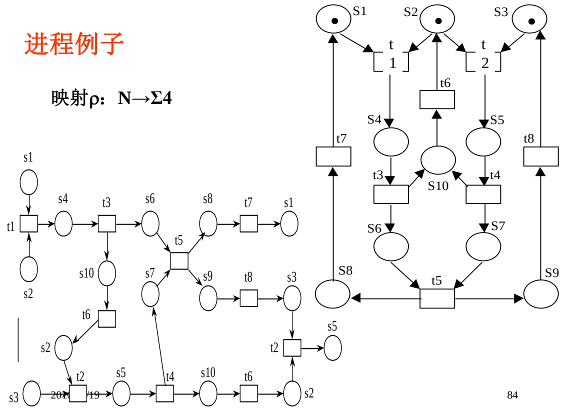
1. $x\leq y:\Leftrightarrow(x,y)\in F^*$, $x<y\Leftrightarrow x\leq y\wedge x\neq y$
2. $l\subseteq X$是N上的一个线集 iff
   $\forall x,y\in l$: $x<y \vee y<x$
3. $l\subseteq X$是N上的一条线 iff l为最大线集(l是线集,再加一个X-l中的元素就非线集)
   即∀x不属于l $\exists y\in l$: $\neg(x < y \vee y<x)$
4. $\mu\subseteq X$为一个切集 iff $\forall x,y\in\mu$:
   $\neg(x<y \vee y<x)$
5. N的切集μ是最大切集,称为N的一个切,
   即$\forall x\in\mu$ $\exists y\in\mu$: $(x<y \vee y<x)$
6. 若μ是N的切,且$\mu\subseteq B$,就说μ是N的一个B-切或片

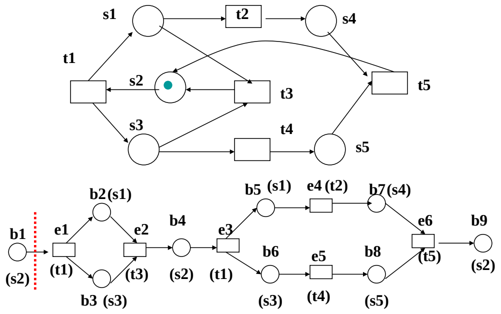
一个偏序关系

- 最大全序子集 —— 线 —— 资源在进程中的痕迹，它描述该资源在进程中的各种状态及这些状态间的先后顺序
- 最大无序子集 ——切（S-元素组成的切为片）—— 进程断面，它描述的是不同资源及变化“同时”或并发
- 对切所代表的“同时”而言，没有传递性，这种不传递性是并发关系的本质特性之一，只有用网作模型才能准确的把它揭示出来。

进程例子

映射ρ：N→Σ4





左边第一个切是一个B-切，记为u_0 并且其映像恰好为初始标识M_0

称满足 $\forall s \in S: \left|\{b \in u_0 | \rho(b) = s\}\right| = M_0(s)$的**petri**网进程为满进程

满进程

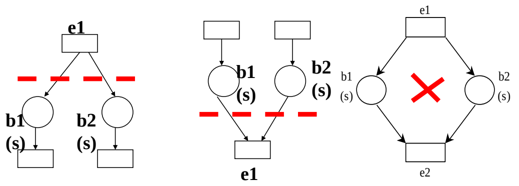
设Σ=(S,T;F,M_0)为P/T网， N=(B,E;F’)为出现网,若映射ρ:N→Σ满足以下条件,称(N,ρ)是Σ的一个满进程

1. $\rho(B) \subseteq S \wedge \rho(E) \subseteq T \wedge \forall (x,y) \in F': \rho(x,y)=(\rho(x),\rho(y)) \in F$

2. $\forall e \in E: \rho({}^{\cdot}e)={}^{\cdot}\rho(e) \wedge \rho(e^{\cdot})=\rho(e)^{\cdot}$

3. $\forall b1,b2 \in B$:
   $\rho(b1)= \rho(b2) \to ({}^{\cdot}b1 \neq {}^{\cdot}b2 \vee {}^{\cdot}b1 = {}^{\cdot}b2= \Phi) \wedge (b1^{\cdot} \neq b2^{\cdot} \vee b1^{\cdot} = b2^{\cdot} = \Phi)$

4. $\forall s \in S: \left|\{b | \rho(b)=s \wedge {}^{\cdot}b= \Phi \}\right|=M_0(s)$



定理：

设Σ=(S,T;F,M_0)为P/T网， N=(B,E;F’)为出现网,若(N,ρ)是Σ的一个满进程,则对N的任一个B-切u，都存在M∈[M_0>使得

$\left|\{b | b \in u 并且 \rho(b)=s \}\right|=M(s)$

- 由于满进程中每个B-切对应着网的一个可达标识，所以借助进程来研究网的运行比研究网的变迁序列更适于对并发系统的描述和分析。
- 一个进程只能描述网的一种运行可能，一个网往往 有许多（甚至无限）个进程。
- Petri网进程表达式

迹

每个进程对应的变迁序列（不涉及库所元素）

- 迹略去了系统非本质的东西
- 如果二个系统的迹集合一样，认为行为等价，即保持变迁之间的顺序、并发和冲突关系
- 应用时，为了刻画主要事件间的关系，要引入辅助库所和变迁，两个系统只要保证主要变迁之间有相同的依赖关系，就认为行为等价。

定义3.14 等价性

Σ, Σ′为二个P/T网

f: T→T′是个内映射

(T中不同元素在f下象也不同)

则，若Σ′按f模拟Σ的充要条件:

∃一个满射β: [M_0′>→[M_0>

([M_0>中每个可达表识都有原像,原像可以不唯一)

1. $M_0=\beta(M_0')$ （初态对应）
2. 当$M_1=\beta(M_1')$，其中$M_1'\in[M_0'>$， $M_1\in[M_0>$，
   (a) 只要$M_1[t>M_2$成立（ M_1 、$M_2\in[M_0>$），其中$t\in T$，， 就有$M_2'\in\beta^{-1}(M_2)$ （因为β是满射）和$\sigma\in T'^*$， 使得$M_1'[\sigma>M_2'$， 且$f^{-1}(\sigma)=t$；
   (b) 只要$M_1'[\sigma>M_2'$ （ M_1' 、$M_2'\in[M_0'>$），其中$\sigma\in T'^*$，， 就有$M_1[f^{-1}(\sigma)>\beta(M_2')$；
3. $\forall M\in[M_0>:|\beta^{-1}(M)|<\infty$

解释

1. 初始标识一致
2. σ是Σ'中的变迁序列，$f^{-1}(\sigma)=t$是说忽略掉σ中的辅助变迁序列得到t，所以Σ和Σ'出现序列相互对应
3. 每个标识只允许辅助变迁及辅助库所产生有限的内部变异

- Σ'模拟Σ性质
- Σ', Σ同时有界无界
- Σ', Σ保持活性

四、不变量

可达树、可达图、变迁序列、进程、迹

—— 刻画系统的全局性质

S-不变量、 T-不变量

——反映的是系统的结构性质（基网及权函数的性质），与初始状态无关

——描述系统的局部性质 — 代数方法

代数方法主要是以关联矩阵的形式刻画网系统的结构，然后建立状态可达的线性系统关系。优点是可以借助线性代数的有关结果。一般来说，对可达性的刻画只是一个必要条件而非充分条件，只有针对一些没有冲突的子类才是充要的。

$\Sigma=(S,T,F,K,W,M_0)$有限P/T系统，基网为单纯

$S=\{s_1, s_2\ldots\ldots s_m\}, T=\{t_1, t_2\ldots\ldots t_n\}$ 排成顺序的

定义3.15 关联矩阵

1. S-向量：列向量V： $S\to Z$（Z是整数之集） m
2. T-向量：列向量U： $T\to Z$ n
3. 关联矩阵：矩阵C： $S\times T\to Z$ m×n

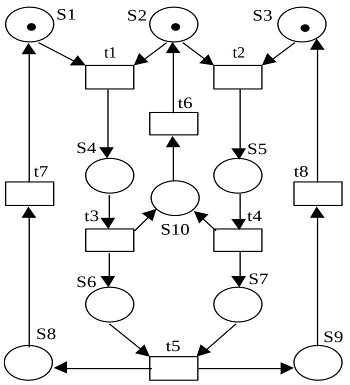
$C(s_i,t_j)=W(t_j,s_i)-W(s_i,t_j)$

由于为单纯网， $W(t_j,s_i)$和$W(s_i,t_j)$必有至少有一个为0，所以，关联矩阵是对基网的准确刻画；若不是单纯网，那么$W(t_j,s_i)$和$W(s_i,t_j)$就有可能不全为0，其差值是t发生后的最终结果，而非对输入/输出的准确刻画。

$M\to M'$： $M'(s)=M(s)-W(s,t)+W(t,s)$

$M_0[\alpha>M$： $M_0+C\cdot X=M$

- α变迁序列，X是T-向量，$U(t_i)$为t_i 在α中出现的次数
- M_0 ，M是状态的S-向量表示
- $m\times 1 + m\times n\cdot n\times 1 = m\times 1$



Σ4：S-10个，T-8个 可以验证$M_0+C\cdot X=M$

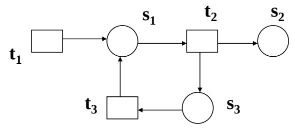
$$M_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0&1&0\\-1&-1&0&0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0&0&0&1\\1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0\\0&0&1&0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&1&0&0&-1\\0&0&1&1&0&-1&0&0\end{pmatrix}\quad U=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{c}1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}\right)&\begin{array}{l}t_1\\ \\t_3\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}\quad M=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{c}0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\end{array}\right)&\begin{array}{l}\\ \\s_3\\ \\ \\s_6\\ \\ \\ \\s_{10}\end{array}\end{array}$$

$\alpha=t_1t_3$

MO+C.X=M 称为Σ的状态方程

定理：$\Sigma=(S,T;F,W,M_0)$，C为Σ的关联矩阵，若M$\in[M_0>$，则存在非负整数的n维向量X，使得$M_0+C\cdot X=M$

定理给出的是M从M_0可达的必要条件。一般的，它不是一个充分条件。



$$M_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\qquad X=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\text{MO+C.X=}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

记为**M, M**满足状态方程。然而，**M**并不是**petri**网的一个可达状态。

S不变量和T不变量

如果网中有几个库所 包含的托肯总的个数在任何可达标识下都是常数，即为M_0下的之和，那么，这几个库所就是一个S-不变量。

计算方法：

令S_I为一库所子集，列向量

$$I_I(s_i)=\begin{cases}1 & 如果s_i\in S_I;\\0 & 否则\end{cases}$$

称为S_I的特征向量，行向量$I^T{}_I$为I_I的转置。在标识M下S_I中所含托肯总数为$I^T{}_I\,.\,M$

如果S_I为S-不变量，则

$I^T{}_I\,.\,M=I^T{}_I\,.\,M_。$即$I^T{}_I\,(M_0+C\cdot X)=I^T{}_I\,.\,M_。$

化简后得：$I^T{}_I\cdot C\cdot X=0$

由于U可以是任意变迁序列对应的列向量，

所以 $C^T\cdot I_I=\theta_T$，θ_T为分量全为0的T-向量

S -不变量的特征向量I_I即为方程组

$C^T\cdot X=\theta_T$的解

当然，方程组的解并一定都是上述物理意义上的S -不变量，但我们统称这些整数解为S -不变量

定义3.16 S-不变量

I为Σ的一个S-向量，C是关联矩阵，C^T是C的转置，θ是零向量

1. $C^{T}\cdot I=\theta_t\Rightarrow I$为$\Sigma$的S-不变量
   $P_I=\{s\in S\,|\,I(s)\neq0\}$为I的支撑集
2. 若$I>\theta_s\Rightarrow$非负S-不变量
3. 若不$\exists$非负S-不变量I′，使$\theta_s<I'<I$，就说I是最小非负S-不变量
4. θ_s也是S-不变量，但若θ_s是唯一的S-不变量，则说Σ无S-不变量

性质

S-不变量的整系数线形组合仍然是S-不变量

$$C^{T}\cdot(k_1I_1+k_2I_2\ldots\ldots+k_1I_1)$$
$$=k_1C^TI_1+k_2C^TI_2\ldots\ldots+k_1C^TI_1$$
$$=\theta_t+\theta_t\ \ldots\ldots+\theta_t=\theta_t$$

定理3.11

I是Σ的S-不变量，$M\in[M_0>$，
则$I^T\cdot M=I^T\cdot M_0$（数）

当S-不变量I不为0时，支撑集P_I 构成一个有实际意义的S-不变量：把**si** ∈ **S**中的每个托肯计算成I **(si)**时，则支撑集P_I 中所有库所在任何可达表识之下的托肯总数是个常数。

证明

设$M_0[\alpha>M$，$\therefore M=M_0+C\cdot U$

（U是相应t在α出现次数）

同乘I^T

$$I^{T}\cdot M=I^{T}\cdot M_0+I^{T}\cdot C\cdot U$$
$$=I^{T}\cdot M_0+\underset{\uparrow\ \theta_t^{T}}{(C^{T}\cdot I)}{}^{T}\cdot U$$
$$=I^{T}\cdot M_0+0\text{（数）}$$

例 Σ4

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad C^{T}\cdot I=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

非负S-不变

$I^{T}\cdot M_0=3$

⇓

若把s_4, s_5中每个托肯视为二个，则Σ4在任何可达标识中总保持三个托肯

S-不变量的意义

- 不是所有S-不变量都能表示出Σ中有意义的性质（因为现已成为一个代数问题）
- $C^{T}\cdot I=\theta_t$给出了求S-不变量的方法
  （解齐次线性方程组，有整数解）
  无解、零解、非整数解：没有S-不变量
  一个非零整数解：唯一S-不变量
  多个非整数解：不唯一，可能有最小S-不变量
- S-不变量只涉及其支撑集的部分库所
  ——局部性质 （上例正好是全局性质，∵ $P_I=\{s_1, s_2\ldots s_{10}\}=S$ ）

定义3.17 T-不变量

令J为Σ的一个T-向量，θ是零向量

1. $C\cdot J=\theta_s\Rightarrow$J是T-不变量
2. 若$J>\theta_t\Rightarrow$J是非负T-不变量
3. $P_J=\{t\in T\,|\,J(t)\neq 0\}\Rightarrow$J的支撑集
4. 若不∃非负T-不变量J′，使$\theta_t<J'<J\ \Rightarrow$J是最小非负T-不变量
5. θ_t可以是一个T-不变量

性质及T-不变量的意义

- T-不变量的整系数线形组合仍是T-不变量
- 当J是T-不变量，则 M+C ·J=M
- J只要对应α(t在α中出现次数等于J(t)，但J和α的这种对应关系不总是存在（因为J(t)可能为负）)，则经过α重新回到M
- 反之，若α使M→M，则由α生成的J一定是非负T-不变量；即循环子系统对应有非负T-不变量（反定理不成立）

可以证明：对于Σ4,

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

是Σ4唯一的T-不变量

唯一可达向量网系统与状态方程求解

- M_0+C· X=M
- 对于一个Petri网Σ=(S，T；F，M_0)，如果要用状态方程求解作为其可达性判定的基本方法，那么要分两步：
  - 对于给定的一个状态M，求出状态方程的整数解。若果没有非负整数解，那么不可达。否则
  - 对于每个非负整数解，检查是否存在变迁序列σ使得M_0[σ> M
- 工作量太大，有一种Petri网，若其状态方程有解，则有唯一解。称这种网为唯一可达向量网系统。

- 在此讨论找出这类**Petri**网的特征，即一个**Petri**网为唯一可达向量网系统的条件，以及对这类网系统求解状态方程的一般方法。
- 另一方面，对于一个不是唯一可达向量网系统的**Petri**网，说明怎样构造一个与之行为等价的唯一可达向量网系统，通过对其可达性判定，最终实现对原有**Petri**网的可达性判定。

层次模拟

- 根据S元，把网系统分成三类
  - S元代表资源个体状态的基本网系统（节点多）
  - S元代表同类资源状态的P/T系统（节点少些）
  - S元代表不同类资源（但作用类似）的个性托肯系统（高级网系统）（节点更少）
- 把同一个应用问题，从使用基本网系统，到使用P/T系统，再到使用高级网系统，称为层次模拟
- 层次模拟（折叠）可以减少节点