

第二章 基本网系统

$K=1, W=1$

S元素 \rightarrow 条件B

$\Rightarrow (B, E; F)$

T元素 \rightarrow 事件E

(B, E; F) 上的一个状态体现为有些条件成真, 有些条件不成真, 因而可以用成真的条件组成的B的子集表示状态, 通常用小写C表示。

研究基本网系统的目的是因为他是构造其他各级网系统的基础, 是研究系统中的基本现象及相关理论的工具, 很少用他们直接模拟应用系统。

一、定义及变迁规则

定义2.1 设c为B的一个子集

1. c称为网 (B, E; F) 的一个丛 (或条件丛)
2. $e \in E$ 在c有发生权 $\Leftrightarrow e \subseteq c \wedge e' \cap c = \Phi$
记作 $c[e]$, 也说c授权e发生
3. 若e在c有发生权, 则e可以发生, 结果为 e 中的条件为假, e' 中的条件为真
 $c' = (c - e) \cup e'$ 后继丛

这个变迁规则实际上是上章变迁规则在 $K=1, W=1$ 的特殊情况, 只不过现在是用B的子集来表示标识, 而不是映射。

e 在c有发生权 $\Leftrightarrow e \subseteq c \wedge e' \cap c = \Phi$

所有 $s \in e$

所有 $s \in e'$

$M(s) \geq W(s, e) \wedge M(s) + W(e, s) \leq K(s)$

$e \subseteq c$

\downarrow

$M(s)=1$

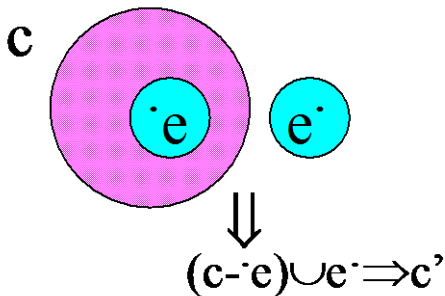
$e' \cap c = \Phi$

\downarrow

$M(s)=0$

$$M'(s) = \begin{cases} M(s) - W(s, e) & s \in e & 1-1=0 \\ M(s) + W(e, s) & s \in e' & 0+1=1 \\ M(s) & s \notin e \cup e' & M(s) \end{cases}$$

图



定理2.1 三种等价说法

- (B, E; F) 是个单纯网 ($x \cap x' = \Phi, \forall x \in X$)
不存在库所s和变迁t, 使得 $s \in t \cap t'$
不存在库所s和变迁t, 使得 $t \in s \cap s'$
- (B, E; F) 没有伴随条件
- 对任一 $e \in E$, 有 $c \subseteq B$ 使 e 在c有发生权, 即 $\forall e \in E, \exists c \subseteq B: c[e]$

证明

1 \Leftrightarrow 2 (已知)

2 \Rightarrow 3

$\forall e \in E$ 由2知无伴随条件 $\therefore \cdot e \cap e' = \Phi$

$\therefore \cdot e \subseteq e \wedge \cdot e \cap e' = \Phi$

若设 $c = e$, 则 $\cdot e \subseteq c \wedge e' \cap c = \Phi$

找到了一个 $c = e$, 有 $c[e]$

3 \Rightarrow 2

$\forall e \in E$ 由3知存在 c 使得 $c[e]$ $\therefore \cdot e \subseteq c \wedge e' \cap c = \Phi \Rightarrow \cdot e \cap e' = \Phi$

即无伴随条件

推论

1. 若有 $b \in \cdot e \cap e' \Rightarrow e$ 永无发生权

这说明事件不是不可分的原子事件, 因而不属于基本网系统。这种事件必定还有内部结构和内部行为。化学变化中的催化剂。

2. $c = \cdot e$ 是一个使 e 发生的丛, 即一个系统状态, 一般使 e 发生的丛可以有多个。

网系统中变迁的固有特性是: 它的作用范围(外延)是固定的。变迁能否发生只依赖它的外延, 与全局状态无关。

定理2.2 (局部确定性)

$$c_1[e > c_1'] \wedge c_2[e > c_2'] \\ \Rightarrow c_1 - c_1' = c_2 - c_2' \wedge c_1' - c_1 = c_2' - c_2$$



结论: 变迁能否发生只依赖它的外延, 与全局状态无关。

变迁发生的外延是衡定的(不管用哪个 c), 即 e 在 c 有发生权是取决于 $\cdot e$ 及 e'

定义2.2

四元组 $N = (B, E; F, c_{in})$ 为 EN 系统

iff:

- $(B, E; F)$ 是一个条件事件网
- $c_{in} \subseteq B$ 是一个丛, 即初始情态

定义2.3

设 $A \subseteq B \cup E$ 为网 $(B, E; F)$ 的一个元素集

$$\begin{aligned} \cdot A &= \{x \mid \exists y \in A: x \in \cdot y\} & A \text{ 中元素的前集的并} \\ A' &= \{x \mid \exists y \in A: x \in y'\} & A \text{ 中元素的后集的并} \end{aligned}$$

定义2.4

设 $\mu \subseteq E$ 为 $(B, E; F)$ 的一个事件集合, $c \subseteq B$ 为它的一个条件丛

- 1 $\text{Ind}(\mu)$ (μ 是个独立事件集)
iff
 $\forall e_1, e_2 \in \mu \wedge e_1 \neq e_2 \Rightarrow (e_1 \cup e_1') \cap (e_2 \cup e_2') = \Phi$
(只关心外延, 没有规定 $e \cap e'$ 是否为空集)
- 2 μ 中的事件在 c 有一步发生权的条件是
 $\text{Ind}(\mu) \wedge \mu \subseteq c \wedge c \cap \mu' = \Phi \quad (\Rightarrow \mu \cap \mu' = \Phi)$
记 $c[\mu]$

- 3 若 μ 在 c 有一步发生权, 则

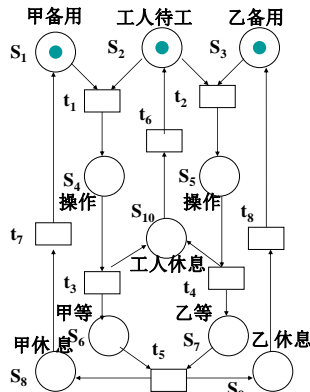
$$c' = (c - \mu) \cup \mu'$$

记作 $c[\mu] > c'$ 或 $c \rightarrow c'$, 并说 c' 是从 c 一步可达的

- 4 若 μ 中事件在 c 有一步发生权, 这些事件在 c 是并发的

- $c[\{e\}] > \Rightarrow c[e]$ (μ 中一个元素(事件))
- $c = \{s_6, s_7, s_{10}\}$ 是 $\Sigma 4$ (下图)的一个情态, $\{t_6\}, \{t_5, t_6\}$ 在 c 有一步发生权

- $c = \{s_6, s_7, s_{10}\}$ 是 Σ 的一个情态
- $\{t_6\}, \{t_5, t_6\}$ 在 c 有一步发生权



定义2.5

EN系统 $N = (B, E; F, c_{in})$ 的情态集 C_N 是满足下列条件的集合:

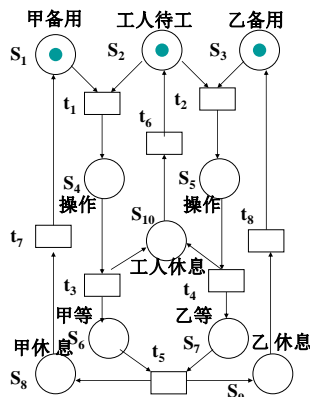
- 1 $c_{in} \in C_N$
- 2 若 $\exists c \in C_N \wedge \mu \subseteq E \wedge c' \subseteq B$ 使得 $c[\mu] > c'$, 则 $c' \in C_N$
- 3 仅以1, 2步得到的 c 才属于 C_N
 C_N 中的丛为 N 的情态

- 不是所有丛都是情态
- 不同的 c_{in} 得到的情态集可能不同
- 已知 $c = \{s_6, s_7, s_{10}\} \in C_N$

$$\{s_6, s_7, s_{10}\} \xrightarrow{\{t_5\}} \{s_8, s_9, s_{10}\} \in C_N$$

$$\{s_6, s_7, s_{10}\} \xrightarrow{\{t_5, t_6\}} \{s_8, s_9, s_2\} \in C_N$$

$$\{s_6, s_7, s_{10}\} \xrightarrow{\{t_6\}} \{s_6, s_7, s_2\} \in C_N$$



- $\mu = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 在 c 有一步发生权, 则 μ 的任何子集在 c 都有一步发生权 (由定义第2点直接得出)
- 非空子集 $2^n - 1$ 在 c 发生 $\Rightarrow 2^n - 1$ 个 c'
是否有那么多不同的情态? 否

如何求出所有情态?

- 只需考虑 $\{e_1\}, \{e_2\}, \dots, \{e_n\}$ 这样 n 个子集

定理2.3

$c[\mu > c' \wedge (\mu_1 \neq \Phi, \mu_2 \neq \Phi, \mu_1 \cap \mu_2 = \Phi, \mu_1 \cup \mu_2 = \mu)$
 (即 μ 的一个分割)
 $\Rightarrow \exists c''$, 使得 $c[\mu_1 > c'' \wedge c''[\mu_2 > c']$
 合写为 $c[\mu_1 > c''[\mu_2 > c']$

证明

$\because (\mu_1 \cup \mu_1) \cap (\mu_2 \cup \mu_2) = \Phi$
 $\therefore \mu_1 \cap \mu_2 = \Phi, \mu_1 \cup \mu_2 = \mu$
 $\mu = \mu_1 \cup \mu_2, \mu' = \mu_1 \cup \mu_2$ (根据定义)
 $\because \mu_1$ 是 μ 的子集 $\therefore \mu_1$ 在 c 有发生权
 $c[\mu_1 > ((c - \mu_1) \cup \mu_1) \Rightarrow c''$

现要证 $c''[\mu_2 > c']$

- μ_2 是独立事件集 ($\mu_2 \subseteq \mu$)
- $\mu_1 \cup \mu_2 = \mu \subseteq c \Rightarrow \mu_2 \subseteq c - \mu_1 \subseteq c'' = c - \mu_1 \cup \mu_1$
- $c \cap \mu' = \Phi \Rightarrow c \cap (\mu_1 \cup \mu_2) = \Phi$
 $c'' \cap \mu_2 = ((c - \mu_1) \cup \mu_1) \cap \mu_2 \subseteq (c \cup \mu_1) \cap \mu_2$
 $= (c \cap \mu_2) \cup (\mu_1 \cap \mu_2) = \Phi$
 $\therefore \mu_2$ 在 c'' 有发生权

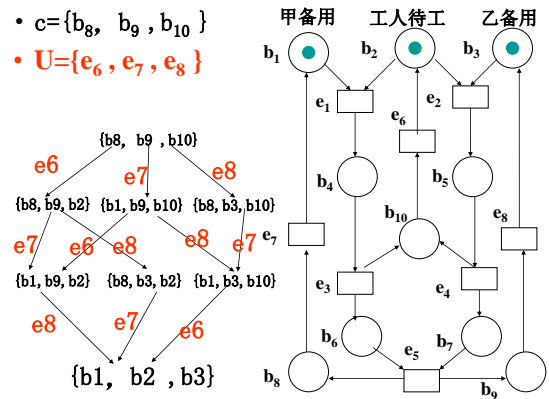
现要证 $(c'' - \mu_2) \cup \mu_2 = c'$

$$\begin{aligned} (c'' - \mu_2) \cup \mu_2 &= ((c - \mu_1) \cup \mu_1 - \mu_2) \cup \mu_2 \\ &\downarrow \\ &[(c - \mu_1) - \mu_2] \cup \mu_1 \\ &\downarrow \\ &[(c - (\mu_1 \cup \mu_2))] \cup \mu_1 \\ &= [(c - (\mu_1 \cup \mu_2))] \cup \mu_1 \cup \mu_2 \\ &= (c - \mu) \cup \mu = c' \\ &\therefore c''[\mu_2 > c'] \end{aligned}$$

推论

为求得情态集 C_N , 每一步只需考虑单事件集

- $c = \{b_8, b_9, b_{10}\}$
- $U = \{e_6, e_7, e_8\}$



二、事件间的基本关系

设 $N=(B, E; F, c_{in})$,

$c \in C$ (即 C_N), $e_1, e_2 \in E, b \in B, e \in E$

• 顺序关系

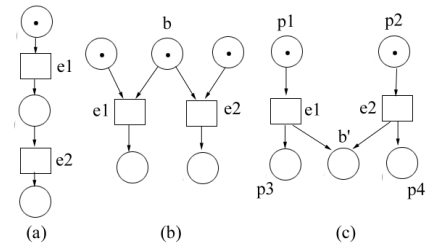
$c[e_1] \wedge \neg c[e_2] \wedge c[e_1]c' \wedge c'[e_2]$

e_1 和 e_2 在 c 有顺序关系

• 冲突关系

$c[e_1] \wedge c[e_2] \wedge \neg c[\{e_1, e_2\}]$

e_1 和 e_2 在 c 互相冲突 (选择)



(b) (c) 冲突

(b) 理解为资源共享

(c) 理解为资源重迭

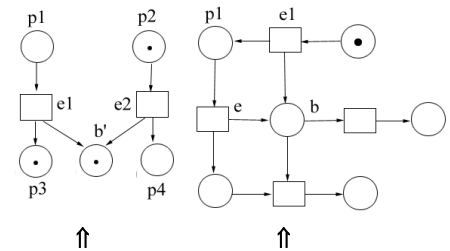
系统的非确定性 (人为加以控制之处)

• 冲撞

若有 $b \in B, c \in C, e \in E$ 使得 $e \subseteq c \wedge b \in e \cap c$

则说在情态 c 在条件 b 处有冲撞

$\Rightarrow e$ 在 c 无发生权



(c) 中 $c = \{p2, p3, b'\}$

在有 b' 冲撞

$e2 = \{p2\} \subset c$

$e2 = \{b', p4\} \cap c = \{b'\}$

在 b 处将有冲撞

$c = \{p1, b\}$

定义2.6

若在任何情态下任何条件处都没有冲撞, 就说基本系统 N 是无冲撞系统 (冲撞称为不安全)

• 冲撞是由于容量有限引起

添加互补库所可以解决容量问题。

定理2.4

设 $N=(B, E; F, c_{in})$, 则

对于任何 $b \in B$, 若 b 的互补库所 $\bar{b} \in B$,

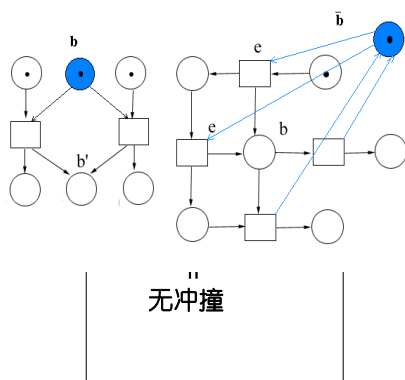
且 $\{\bar{b}, b\} \cap c_{in} \neq \emptyset$, 但 $\{\bar{b}, b\} \not\subseteq c_{in}$,

则在任何情态下 b 处无冲撞。

可写为:

$b \in B \wedge \bar{b} \in B \wedge \{\bar{b}, b\} \cap c_{in} \neq \emptyset \wedge \{\bar{b}, b\} \not\subseteq c_{in}$

$\Rightarrow \forall c \in C_N, \forall e \in E, \text{若 } e \subseteq c \text{ 则 } b \notin e \cap c$



证明

因为 $b \in B \wedge \bar{b} \in B \wedge \{b, \bar{b}\} \cap c_{in} \neq \emptyset \wedge \{b, \bar{b}\} \not\subseteq c_{in}$, 所以对于任何 $c \in C_N$, 要么 $b \in c$ 要么 $\bar{b} \in c$

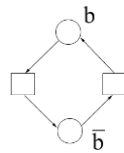
反证: 若 c 在 b 处有冲突, 则 $\exists e \in E$

使 $e \subseteq c \wedge b \in e \cap c$ ($\Rightarrow b \in c$)

$\therefore b \in e \Rightarrow \bar{b} \in e \subseteq c \Rightarrow \bar{b} \in c$ 与 $b \in c$

得到矛盾

互补库所定义



结论

- 冲突反映的是潜在危险
- 在无冲突系统中, $c[e] > \text{iff } e \subseteq c$
(因为 $e \cap c = \emptyset$)
- 添加互补条件(库所)使冲突消失并不影响系统中事件的发生权, 从而不改变系统的动态行为及事件间的关系(顺序, 并发, 冲突)
- 无冲突系统的最大好处是可以用进程准确地描述事件发生之间的顺序和并发关系, 而有冲突系统的进程则有可能把实际上是顺序关系的事件描述为并发。
- 以下可以假定 $N = (B, E; F, c_{in})$ 无冲突系统
(因为我们有改造手段)

并发关系 (concurrent relation)

$e_1 e_2$ 在情态 c 并发的充要条件是:

$e_1 \cap e_2 = \emptyset \wedge e_1 \cup e_2 \subseteq c$ (注意只考虑前集)

(此定义是上节定义的特殊情况, 只涉及两个事件)

证明: 只正充分性

1 $(e_1 \cup e_1') \cap (e_2 \cup e_2')$

$= e_1 \cap e_2 \cup e_1 \cap e_2' \cup e_1' \cap e_2 \cup e_1' \cap e_2'$

\uparrow

Φ

条件

\uparrow

Φ

无冲突

\uparrow

Φ

无冲突

假设 $e_1' \cap e_2'$ 不为空集, 不妨设为 b , 令 $c[e_1] > c'$, 则 $e_2 \subseteq c'$ 且 $b \in e_2' \cap c'$, 在 b 处有冲突, 这与无冲突系统矛盾。所以 $e_1 e_2$ 为独立事件

2 $e_1 \cup e_2 \subseteq c, (e_1' \cup e_2') \cap c = \emptyset$

- 顺序关系
- 冲突关系
- 冲突关系
- 并发关系

从基本网系统引入的上述基本概念, P/T网和P/T系统也存在, 而且含义基本相同, 但由于不同的网系统的变迁发生规则有所不同, 因此, 有些概念在不同的网系统中表现也略有区别。

三、S-补和T-补

- 添加互补库所, 使该库所容量为无穷
- 添加互补条件, 清除该条件处的冲突

S-补

定义2.9

- $B_1 = \{b \in B \mid \exists \bar{b} \in B: \cdot b = \bar{b} \wedge b \cdot = \bar{b}\} \subseteq B$
为N的自补条件集; 若 $B_1 = B$, 就说N是自补的
- $E_1 = \{e \in E \mid \exists \bar{e} \in E: \cdot e = \bar{e} \wedge e \cdot = \bar{e}\} \subseteq E$
为N的自逆事件集; 若 \bar{e}, e 满足 $\cdot e = \bar{e} \wedge e \cdot = \bar{e}$
 \Rightarrow 互逆事件, \bar{e} 是 e 的逆事件
若 $E_1 = E$, 就说N是自逆的

- B_2 是没有补元素的条件集合
- B_2 是为添加的补元素命名
- F' 保证 $b = f^{-1}(\bar{b})$ 与 \bar{b} 为互补
- c_{in}' 保证 $b = f^{-1}(\bar{b})$ 与 \bar{b} 恰有一个 $\in c_{in}'$
- B_1 中的 b 及 \bar{b} 不一定恰有一个属于 c_{in}
—— 可以假定 $\{b, \bar{b}\}$ 中一个 $\in c_{in}$, 因为

$$\left. \begin{array}{l} \{b, \bar{b}\} \subseteq c_{in} \quad \text{永真} \\ \{b, \bar{b}\} \cap c_{in} = \Phi \quad \text{永假} \end{array} \right\} \text{不变化, 舍去}$$

4. N' 是个无冲撞系统
5. N 是个简单系统, 则 N' 也是; 若 N 是单纯的, 则 N' 也是
6. 将 $c \in C_N$ 和 $c' = c \cup f(B_2 - c) \in C_{N'}$ 对应起来, 则 N' 和 N 行为等价

定义2.10

令 $B_2 = B - B_1$ 设 $\bar{B}_2 \cap (B \cup E) = \Phi$
 $|\bar{B}_2| = |B_2|$. 设 $f: B_2 \rightarrow \bar{B}_2$ 一一对一 ($f^{-1}: \bar{B}_2 \rightarrow B_2$)
 $N' = (B', E'; F', c_{in}')$ 叫N的S-补 iff

1. $B' = B \cup \bar{B}_2$
2. $E' = E$
3. $F' = F \cup \{(e, \bar{b}) \mid e \in E \wedge \bar{b} \in \bar{B}_2 \wedge (f^{-1}(\bar{b}), e) \in F\} \cup \{(\bar{b}, e) \mid e \in E \wedge \bar{b} \in \bar{B}_2 \wedge (e, f^{-1}(\bar{b})) \in F\}$
4. $c_{in}' = c_{in} \cup \{\bar{b} \mid f^{-1}(\bar{b}) \notin c_{in}\}$

定理2.5

若 $N' = (B', E'; F', c_{in}')$ 是N的S-补, 则

1. N' 是个自补的EN系统
2. N' 的情态集 $C_{N'} = \{c \cup f(B_2 - c) \mid c \in C_N\}$
其中 $f(B_2 - c) = \{f(b) \mid b \in B_2 - c\}$
 $= \{\bar{b} \mid b \in B_2 - c\}$
3. 对于任何 $u \subseteq E$ 及 $c_1, c_2 \in C_N$
 $c_1[u > c_2] \Leftrightarrow c_1'[u > c_2']$
 其中 $c_1' = c_1 \cup f(B_2 - c_1)$, $c_2' = c_2 \cup f(B_2 - c_2)$,

结论

- S-补的目的是消除冲撞
- S-补是从已知网系统构造出来的行为等价的自补网系统
- 自补EN系统的S-补与原系统相等

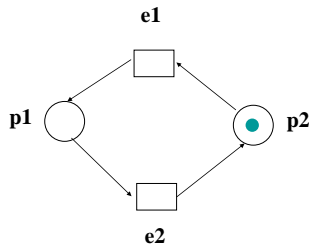
T-补

定理2.6

若 $e_1, e_2 \in E$ 为互逆事件, 即 $\cdot e_1 = e_2 \cdot \wedge e_1 \cdot = e_2$
 $\Rightarrow c_1[e_1 > c_2] \Leftrightarrow c_2[e_2 > c_1]$

例

$c_1 = \{p_2\}$
 $c_2 = \{p_1\}$
 $c_1[e_1 > c_2]$
 $c_2[e_2 > c_1]$



1. $B' = B$
 2. $E' = E \cup \bar{E}_2$
 3. $F' = F \cup \{(b, \bar{e}) \mid b \in B \wedge \bar{e} \in \bar{E}_2 \wedge (f^{-1}(\bar{e}), b) \in F\} \cup \{(\bar{e}, b) \mid b \in B \wedge \bar{e} \in \bar{E}_2 \wedge (b, f^{-1}(\bar{e})) \in F\}$
 4. $c_{in}' = c_{in}$
- F' 保证了 \bar{e} 与 $f^{-1}(\bar{e})$ 为互逆事件。

证明

$\because c_1[e_1 > c_2]$
 $\therefore c_2 = (c_1 - \cdot e_1) \cup e_1 \cdot$ 和 $e_1 \cdot \cap c_1 = \Phi, \cdot e_1 \subseteq c_1$
 用 $\cdot e_2, e_2 \cdot$ 分别代替 $e_1 \cdot, \cdot e_1$
 $\therefore c_2 = (c_1 - e_2 \cdot) \cup \cdot e_2$ 和 $e_2 \cdot \cap c_1 = \Phi, e_2 \cdot \subseteq c_1$
 由以上三个条件, 得到
 $\cdot e_2 \subseteq c_2, e_2 \cdot \cap c_2 = \Phi$ 且 $c_1 = (c_2 - \cdot e_2) \cup e_2 \cdot$
 $\therefore c_2[e_2 > c_1]$

定义2.11

设 E_1 是 EN 系统 $N = (B, E; F, c_{in})$ 的自逆事件集
 $E_2 = E - E_1$
 设 $\bar{E}_2, \bar{E}_2 \cap (B \cup E) = \Phi$ 且 $|\bar{E}_2| = |E_2|$
 设 $f: E_2 \rightarrow \bar{E}_2$ 一对一 ($f^{-1}: \bar{E}_2 \rightarrow E_2$)
 $N' = (B', E'; F', c_{in}')$ 叫 N 对于 (\bar{E}_2, f) 的 T-补
 (简称 N 的 T-补)

定理2.7

若 $N' = (B', E'; F', c_{in}')$ 是 $N = (B, E; F, c_{in})$ 的 T-补
 则:

- N' 是个自逆基本网系统;
- 对 N' 进行 T-补得到的仍是 N' ;
- 在自逆网系统中, 沿 F 方向流动出去的托肯, 还可以流回来;
- 自逆网系统, 不仅能分析系统的未来, 还能分析系统的过去, 是通用网论的基础, 第六章介绍。

T图、S图和活性定理

见P40例子(S-补及T-补)

- (b) 是 (a) S-补
- (c) 是 (a) T-补
- (d) 是 (a) S-补及T-补

• EN系统S-补及T-补与先后顺序无关

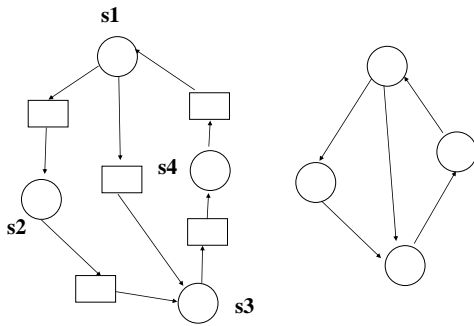
定义 2.12 设 $N=(S, T; F)$ 为有向网

1. 若任给 $t \in T$: $|\cdot t| \leq 1$ 且 $|t \cdot| \leq 1$, 则N称为S网
2. 若任给 $t \in T$: $|\cdot t| = |t \cdot| = 1$, 则N称为S图
3. 若任给 $s \in S$: $|\cdot s| \leq 1$ 且 $|s \cdot| \leq 1$, 则N称为T网
4. 若任给 $s \in S$: $|\cdot s| = |s \cdot| = 1$, 则N称为T图

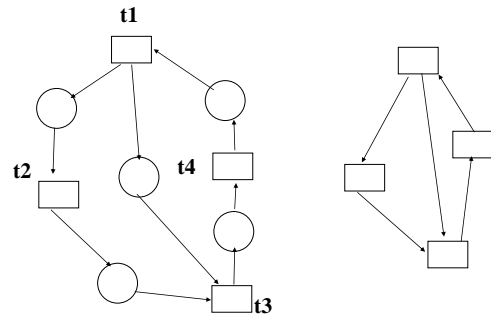
S图又称为状态机 (state machine)

T图又称为同步图 (synchronic graph) 或表识图

S 图



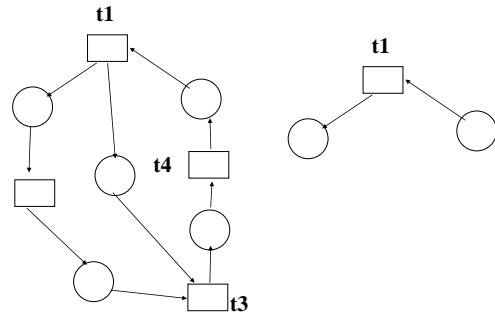
T图



定义 2.13

有向网 $N'=(S', T'; F')$ 若满足下列条件就称为 $N(S, T; F)$ 的子网:

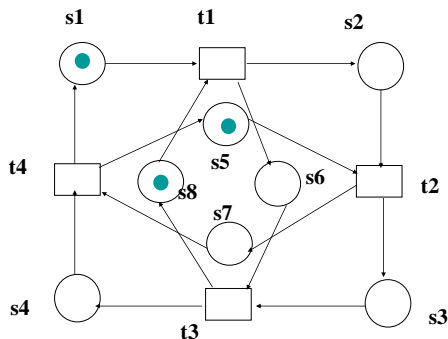
$S' \subseteq S$ 且 $T' \subseteq T$ 且 $F'=F|S' \times T' \cup T' \times S'$ 其中 F' 是 F 在 $S' \times T' \cup T' \times S'$ 的限制:
 $F'=\{ (x, y) | (x, y) \in F \text{ 且 } (x, y) \in S' \times T' \cup T' \times S' \}$ 即 F' 是 F 在 $S' \cup T'$ 上的投影。



定义 2.14

有向网 $L=(S',T';F')$ 称为 $N=(S,T;F)$ 的简单有向圈，简称有向圈的条件是：

1. L 为 N 的子网
2. L 既是 S 图又是 T 图
3. L 是连通的



设 $N=(B,E;F)$ 为有限无冲撞基本网系统， C 是它的情态集合， L 是其基网的所有简单有向圈的集合

定义 2.14

1. 令 $r=\{(c,c')|c,c'\in C \text{ 且 } \exists e\in E: c[e>c']\}$ 则称 r^* 为 N 的情态间的可达关系，其中 $r^*=r^0\cup r^1\cup r^2\cup\dots$ 为 r 的传递闭包
2. 若任给 $c\in C$ 任给 $e\in E$, $\exists c'\in C: c r^* c'$ 且 $c'[e>$, 则 N 是活的(live)

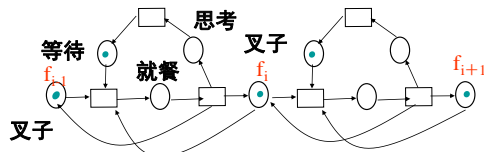
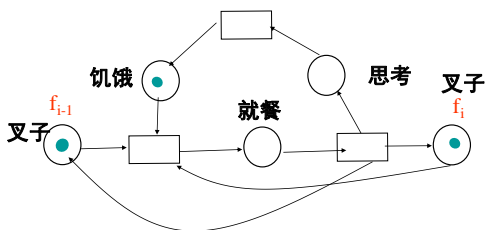
定理 2.8

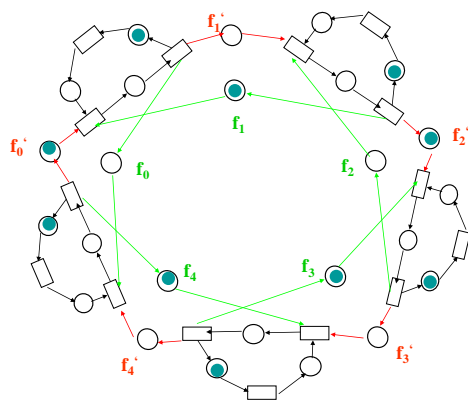
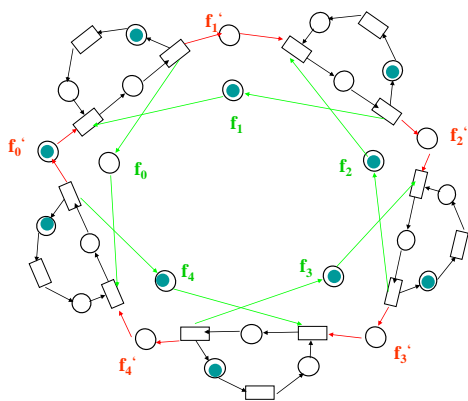
若 N 的基网为 T 图，则 N 为活的基本网系统的充分必要条件为：

1. 任给 $e\in E$, $\exists l\in L: e\in l$, 即每个事件至少属于一个简单有向圈
2. 任给 $l\in L$, $\exists b\in B: b\in l\cap c_{in}$, 即在初始情态 c_{in} 下，每个简单有向圈至少有一个托肯（一个条件为真）

哲学家就餐问题

问题：哲学家 p_i 围桌而坐， p_i 要占用相邻的两把叉子 f_i 和 f_{i+1} 才能就餐。





进程间的通信协议

