# 第十一章 并发论

## 并行与并发

并行(parallel)：

ab与ba有相同的后果 则a和b并行。

但什么是后果呢？

中间状态和最终结果同等重要

a和b可以同时进行=>并行的传递性？

并发（concurrent）：不相依赖

## 研究的对象

以出现网为背景研究并发现象的结果，提出并发现象**应该**遵循的若干公里

出现网：系统进程的忠实记录。

T元—代表事件的出现或发生

S元—某个具体资源的历史：它的产生和被消耗。如果把资源的共存看成并发，把资源存在于事件发生之前、之中、之后看成资源和事件并发，那么，出现网是研究并发性质最合适的对象。

## 并发的定义：

设X为出现网中包含所有元素的集合，元素之间的因果关系及由因果关系产生的顺序用“<”

严格偏序集(X,<)：

$$(<\subseteq X\times X)\wedge(<\cap Id=\Phi)\wedge(<^2\subseteq<)$$

对严格偏序集可以定义无序关系。并发关系就是出现网元素之间由<产生的无序关系。

定义 $x\ co\ y \Leftrightarrow x,y\in X \wedge \neg(x<y)\wedge\neg(y<x)$

即：$co = \overline{<\cup>}$

## A0~A2

| | | |
|---|---|---|
| $(A0)$ | $\lvert X\rvert>1$ | 非平凡 |
| $(A1)$ | $Id\subseteq co$ | 自返性 |
| $(A2)$ | $co=co^{-1}$ | 对称性 |

## li关系

定义11-2: $li = <\cup Id\cup>$ 称为由偏序关系<产生的有序关系。

$Id\subseteq li$ $\qquad li\cap co=Id$

$li=li^{-1}$ $\qquad li\cup co=X\times X$

并发关系是否有传递性？若有就是一个等价关系，从而把X分解为等价类，等价类内的元素并发，等价类由(X, >)确定了完全的顺序。如果出现网是一个信号留下的轨迹，X退化为一条线，并发才可能是传递的。系统进程一般不会只有一个信号，几个信号也不会互不相关，因此，一般而言，并发是不传递的。

令 $Co(x)=\{y\,|\,(x,y)\in co\}$，若x不等于y，但是Co(x)=Co(y),那么，对关系并发而言，x和y虽然不同确是无法区分的。我们把x和y的这种关系记为$\tilde{co}$

$x\,\tilde{co}\,y :\Leftrightarrow Co(x)=Co(y)$ 称 为co的传递核。在研究并发时我们不关心不能用并发关系区分的元素。即要求x $\tilde{co}$ y→x=y。

## (A3)~(A5)

$(A3)\qquad \tilde{co}=Id$

$(A4)\qquad \tilde{li}=Id$

$(A5)\qquad \tilde{co}=\tilde{li}$ 不可化简公理

**A3,A4说明并发论研究的对象至少包含两条线的结构。假设X只有一条线，即∀x ∈ X: Li(x) = X，由A4知，X应化简为一个元素，但公里A0要求|X|＞1**
**A(3)~A(5)不是独立的。**
**如果（X, co）只包含几条互不相交的线，那么由A4知，这几条线应各自简化为一个点，再由A3知，这几个点应化简为一个点。所以，在cobegin 和coend之间的几个并发顺序程序若互不通信的话，按网论的并发公理，应作为一个点处理。**

## (A6)~(A8)

定义 $co^*=co^0\cup co^1\cup co^2\cup\cdots=\bigcup_{n=0}^{\infty}co^n$ 为co关系的传递闭包。

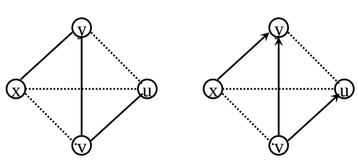
$(A6)\qquad co^*=X\times X$

$(A7)\qquad li^*=X\times X$

$(A8)\qquad co^*=li^*$ 相干公理

A7说明任意两点都由信号连接，A6说明任意两点间可以经过觉察不到的有限步抵达。

## 满足A0~A8的最小结构




只要指定左图中任意一个li关系的顺序，则li中的所有顺序都确定了，这种关系称为自然顺序。

$(A9)\qquad (X, co)$为自然非序

$(A9)\qquad (X, co)$为自然非序

换眼之只要指定左图中任意一个li关系的顺序，则li中的所有顺序都确定了，这种关系称为自然顺序。

## 切和线

设r是X上的二元关系，$a\subseteq X$,Ken(a,r)定义为：

$$(\forall x,y\in a:(x,y)\in r\cup r^{-1}\cup Id)\wedge(\forall x\notin a\exists y\in a:(x,y)\notin r\cup r^{-1}\cup Id)$$

即，a是X中两两具有关系r的极大集合。

定义11-3: $cut(c):\Leftrightarrow Ken(c,co)$

$line(l):\Leftrightarrow Ken(l,li)$

线是一个信号在进程中的痕迹，切是进程的瞬像，要求每个信号都在进程上留下痕迹是合理的。因此要求：

## K_稠密性及（A10）

$$cut(c)\wedge line(l)\rightarrow c\cap l\neq\Phi$$

这是co关系的一种稠密性，K_稠密定义为：

定义11-4: Kdense(X,co)为

$$Ken(c,co)\wedge Ken(l,li)\rightarrow c\cap l\neq\Phi$$

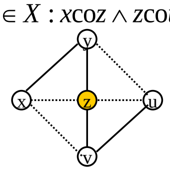
$$(A10)\qquad Kdense(X,co)$$

## Ndense 及(A11)

定义11-5: $Ndense(X,co):\forall x,y,u,v\in X:$

$(x\,li\,y\wedge y\,li\,v\wedge v\,li\,u\wedge x\,co\,u\wedge x\,co\,v\wedge y\,co\,u)$

$\rightarrow(\exists z\in X:x\,co\,z\wedge z\,co\,u\wedge y\,li\,z\wedge v\,li\,z)$




$$(A11)\qquad Ndense(X,co)$$

## (A12)(A13)

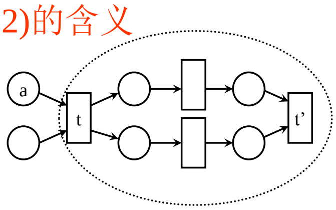
定义11-6: $P:=Cl-Id\quad G:=P\cup P^{-1}$

其中 $x\ Cl\ y:\Leftrightarrow x,y\in X\wedge Li(x)\subseteq Li(y)$ x称为y的聚点; $Cl(a)=\{y\mid\exists x\in a:x\ cl\ y\}$ a的闭包。

$$(A12)\qquad P^2=\Phi$$

$$(A13)\qquad G^*=X\times X$$

## (A12)的含义




由P的含义知：G为互邻关系

a Cl t,t Cl t’。但上述结构不是不可化简的。

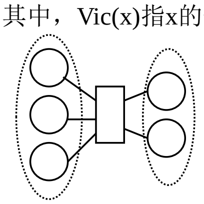
根据A(3-5)一条线上的任意两个相邻的点必有一个分支点，任意两个分支点是不完全相同的线的汇聚。 $dom(P)\cap cod(P)=\Phi$

## (A14)(A15)

$(A14)$ 对所有$x\in X$, 在Vic(x) 中$co^2\subseteq co$

$(A15)$ 对所有$x\in X$, 在Vic(x) 中$\overline{co}^2\neq\Phi\wedge\overline{co}^2\subseteq co$

其中，Vic(x)指x的邻点集合。



$co^2$下的两个等价类

$\overline{co}^2$同时也是的等价类

(A15)给出了局部可定向性

## (A16)~(A18)

与用Li定义聚点类似，可以用Co定义聚点：

$$x\,\mathrm{Cl}'\,y \Leftrightarrow Co(x) \subseteq Co(y)$$

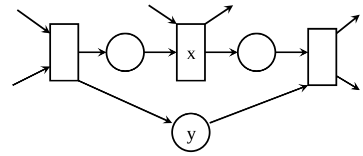
定义11-7：$\mathrm{D} := \mathrm{Cl}' - \mathrm{Id},\ \mathrm{H} = \mathrm{D} \cup \mathrm{D}^{-1}$

$$(A16) \qquad D^2 = \Phi$$

$$(A17) \qquad D^2 = P^2$$

$$(A18) \qquad H^* = X \times X$$

## (A16~18)的含义




Co(y)包含了Co(x)，满足xCl'y的x必然是信号的汇聚点，y是信号。x是y的细节。A18表明一个元素要么有细节，要么是其它某个元素的细节。

## (A19)锥形相交性质

前锥：所有小于或等于x的点集合称为x的前锥。

后锥：所有大于或等于x的点集合称为x的后锥。

$$(A19) \quad \forall x, y \in X:$$

$$x \parallel y \rightarrow \exists u, v : u < x < v \wedge u < y < v$$

## (A20)(A21)

(A20) (X,<)是具有K稠密性的严格组合偏序，无跳也无G1型沟。

(A21) (X,<)是具有K稠密性的严格组合偏序，无跳也无G2型沟。