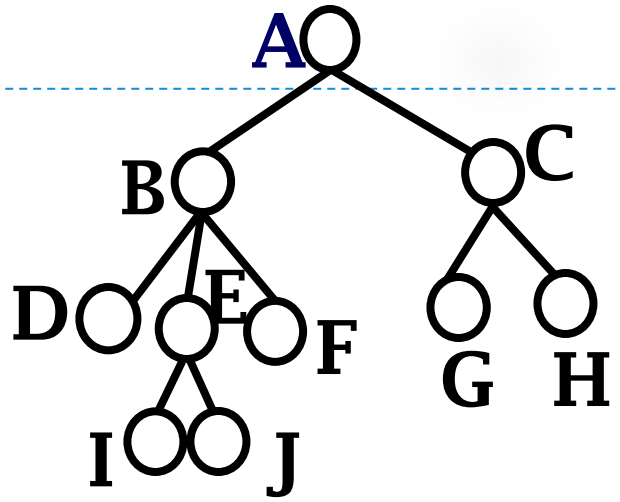
# 数据结构与算法（六）

张铭 主讲

采用教材：张铭，王腾蛟，赵海燕 编写
高等教育出版社，2008. 6（“十一五”国家级规划教材）

http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg

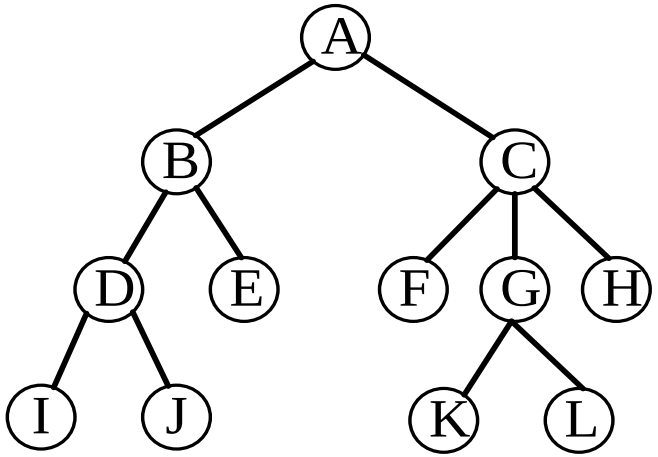
# 第6章　树




- 树的定义和基本术语
- **树的链式存储结构**
  - “子结点表”表示方法
  - 静态“左孩子/右兄弟”表示法
  - 动态表示法
  - 动态“左孩子/右兄弟”表示法
  - **父指针表示法及其在并查集中的应用**
- 树的顺序存储结构
- K叉树

# 父指针表示法

- 只需要知道父结点的应用
- 只需要保存一个指向其父结点的指针域，称为 父指针(parent pointer)表示法
- 用数组存储树结点，同时在每个结点中附设一个指针指示其父结点的位置




| 结点索引 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 值 | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
| 父结点索引 | ＼ | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 6 | 6 |

# 父指针表示法：算法

- 查询结点的根
  - 从一个结点出发找出一条向上延伸到达根的祖先路径
    - O(k)，k为树高
- 判断两个结点是否在同一棵树
  - 两个结点根结点相同，它们一定在同一棵树中
  - 如果其根结点不同，那么两个结点就不在同一棵树中

# 并查集

**并查集** 是一种特殊的集合，由一些不相交子集构成，合并查集的基本操作是：

- Find： 查询结点所在集合
- Union： 归并两个集合

- 并查集是重要的抽象数据类型
  - 应用于求解等价类等等问题

# 等价关系

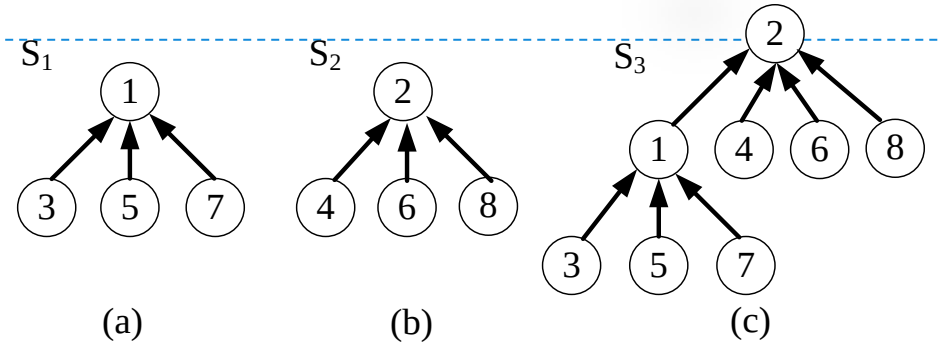
- 一个具有 n 个元素的集合 S，另有一个定义在集合 S 上的 r 个关系的关系集合 R。x，y，z表示集合中的元素
- 若关系 R 是一个 **等价关系**，当且仅当如下条件为真时成立：
  - （a）对于所有的 x，有 (x，x)∈R（即关系是**自反**的）
  - （b）当且仅当 (x，y)∈R 时 (y，x)∈R（即关系是**对称**的）
  - （c）若 (x，y)∈R 且 (y，z)∈R，则有 (x，z)∈R（即关系是**传递**的）
- 如果(x，y)∈R，则元素x和y是等价的

# 等价类(equivalence classes)

- 等价类是指相互等价的元素所组成的最大集合。所谓最大，就是指不存在类以外的元素，与类内部的元素等价
- 由$x \in S$生成的一个R等价类
  - $[x]_R = \{y \mid y \in S \wedge xRy\}$
  - R将S划分成为r个不相交的划分$S_1$，$S_2$，…$S_r$，这些集合的并为S

## 6.2 树的链式存储结构

# 用树来表示等价类的并查



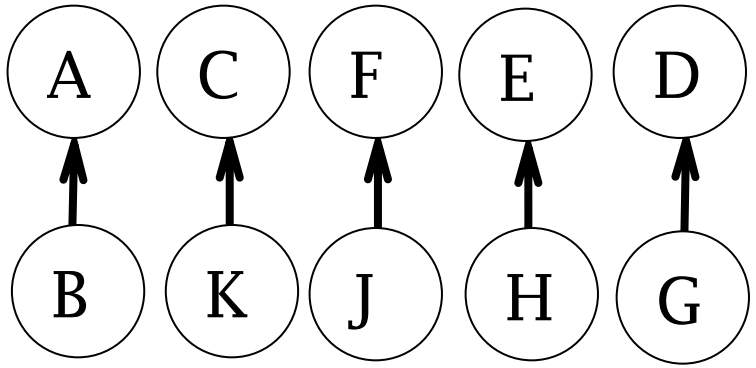

- 用一棵树代表一个集合
  - 集合用父结点代替
  - 若两个结点在同一棵树中，则它们处于同一个集合
- 树的实现
  - 存储在静态指针数组中
  - 结点中仅需保存父指针信息

# UNION/FIND算法示例(1)

对这5个等价对进行处理 (A,B)、(C,K) 、(J,F) 、(H,E) 、(D,G)

| | 0 | | 2 | | | | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | K | D | E | F | G | H | J |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

(A,B)(C,K)(J,F)(E,H)(D,G)

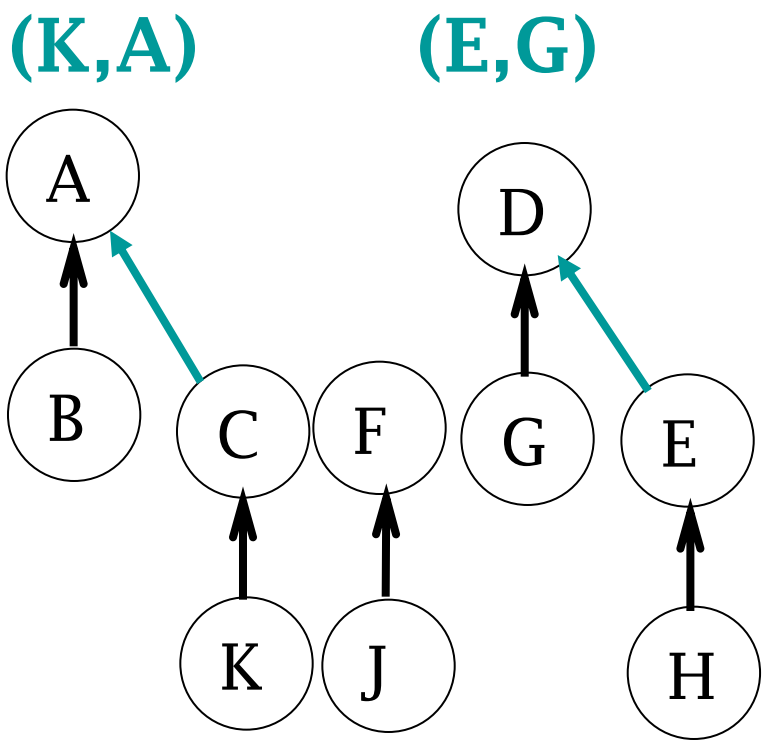


# UNION/FIND算法示例(1)

然后对两个等价对（K，A）和（E，G）进行处理

K所在树的根为C，A自己是根结点，A！=C,所以两棵树要合并

| | 0 | 0 | 2 | | 4 | | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | K | D | E | F | G | H | J |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |



# 树的父指针表示与Union/Find算法实现

```
template<class T>
class ParTreeNode  {                                  //树结点定义
private:
  Tvalue;                                             //结点的值
  ParTreeNode<T>* parent;                             //父结点指针
  int nCount;                                         //集合中总结点个数
public:
  ParTreeNode();                                      //构造函数
  virtual ~ParTreeNode(){};                           //析构函数
  TgetValue();                                        //返回结点的值
  void  setValue(const T& val);                       //设置结点的值
  ParTreeNode<T>*  getParent();                       //返回父结点指针
  void  setParent(ParTreeNode<T>* par);               //设置父指针
  int  getCount();                                    //返回结点数目
  void  setCount(const int count);                    //设置结点数目
};
```

# 树的父指针表示与Union/Find算法实现

```
template<class T>
class ParTree  {                                  // 树定义
public:
  ParTreeNode<T>* array;                          // 存储树结点的数组
  int Size;                                       // 数组大小
  ParTreeNode<T>*
  Find(ParTreeNode<T>* node) const;               // 查找node结点的根结点
  ParTree(const int size);                        // 构造函数
  virtual ~ParTree();                             // 析构函数
  void Union(int i,int j);                        // 把下标为i，j的结点合并成一棵子树
  bool Different(int i,int j);                    // 判定下标为i，j的结点是否在一棵树中
};
```

# 树的父指针表示与Union/Find算法实现

```
template <class T>
ParTreeNode<T>*
ParTree<T>::Find(ParTreeNode<T>* node) const
{
  ParTreeNode<T>* pointer=node;
  while ( pointer->getParent() != NULL )
    pointer=pointer->getParent();
  return pointer;
}
```

# 树的父指针表示与Union/Find算法实现

```
template<class T>
void ParTree<T>::Union(int i,int j) {
ParTreeNode<T>* pointeri = Find(&array[i]);      //找到结点i的根
ParTreeNode<T>* pointerj = Find(&array[j]);      //找到结点j的根
if (pointeri != pointerj) {
  if(pointeri->getCount() >= pointerj->getCount()) {
        pointerj->setParent(pointeri);
        pointeri->setCount(pointeri->getCount() +
                           pointerj->getCount());
  }
  else {
        pointeri->setParent(pointerj);
        pointerj->setCount(pointeri->getCount() +
                           pointerj->getCount());
   }
} }
```

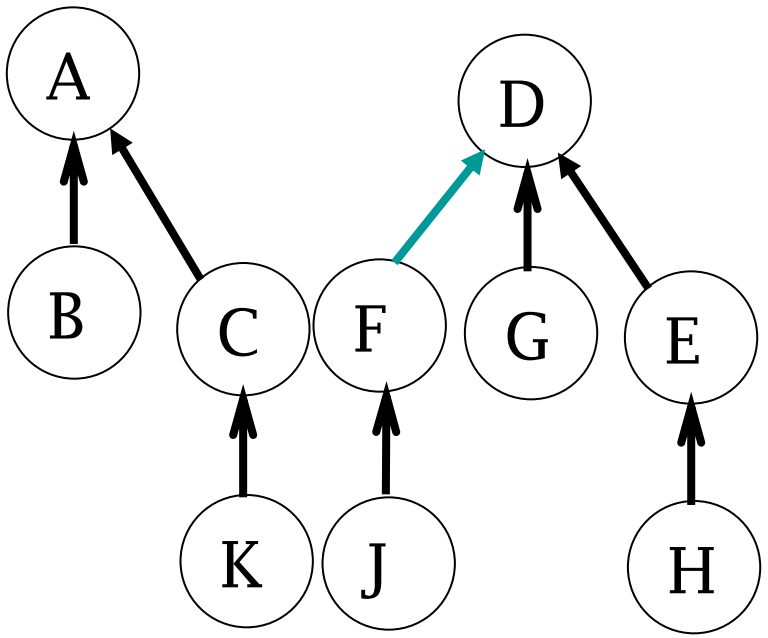
# UNION/FIND算法示例(2)

## 最后使用加权合并规则处理等价对（H,J）

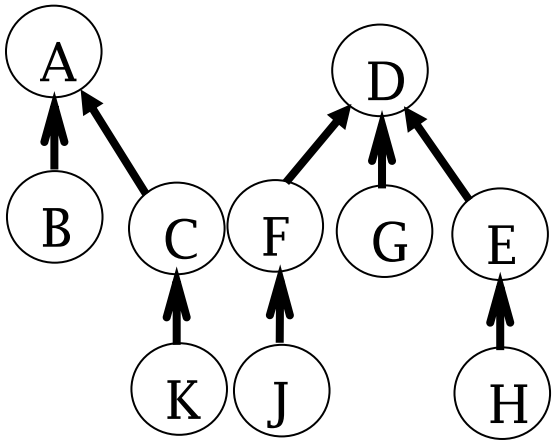
(H,J)

依据加权合并规则，以F为根的树结点个数少，故将F指向D

| | 0 | 0 | 2 | | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | K | D | E | F | G | H | J |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |



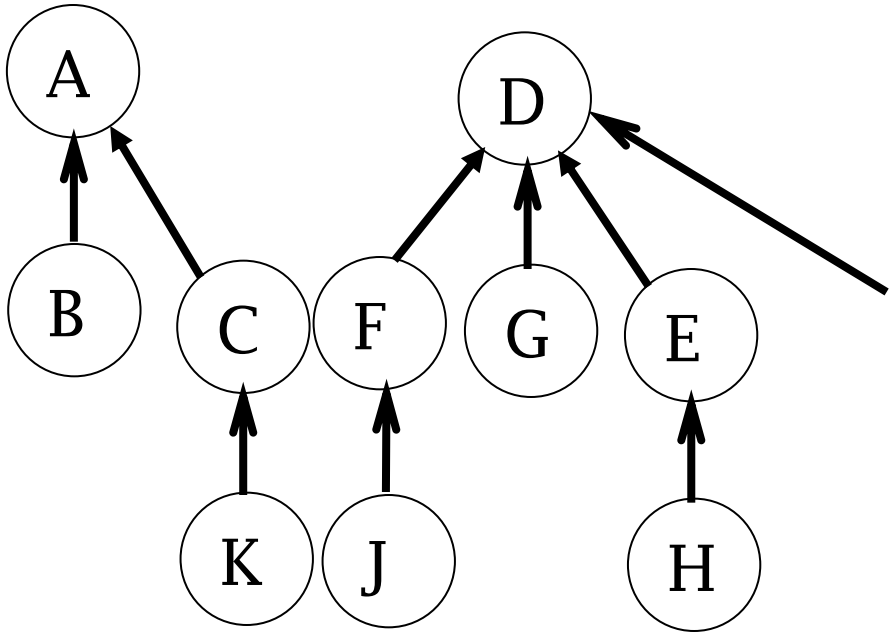
# 路径压缩




- 查找X
  - 设X最终到达根R
  - 顺着由X到R的路径把每个结点的父指针域均设置为直接指向R
- 产生极浅树

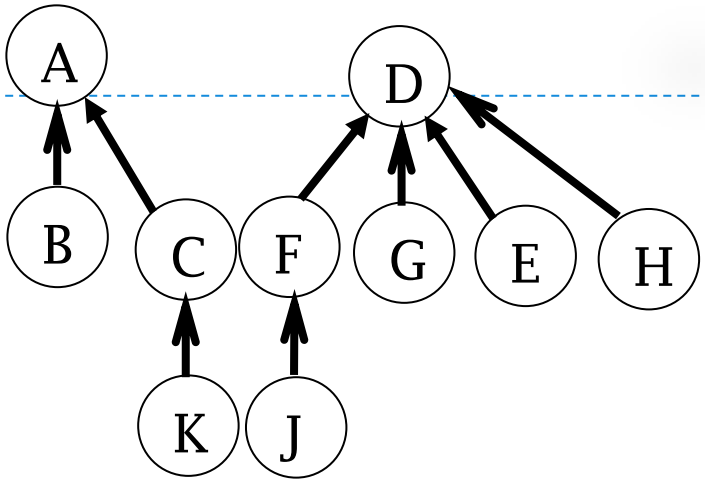
# UNION/FIND算法示例(3)

## 使用路径压缩规则处理Find(H)




| | 0 | 0 | 2 | | 4 | 4 | 4 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | K | D | E | F | G | H | J |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

# 路径压缩




```
template <class T>
ParTreeNode<T>*
ParTree<T>::FindPC(ParTreeNode<T>* node) const
{
  if (node->getParent() == NULL)
    return node;
  node->setParent(FindPC(node->getParent()));
  return node->getParent();
}
```

# 路径压缩使Find开销接近于常数

- 权重 + 路径压缩
- 对n个结点进行n次Find操作的开销为O(nα(n))，约为Θ(nlog*n)
  - α(n)是单变量Ackermann函数的逆，它是一个增长速度比logn慢得多但又不是常数的函数
  - log*n 是在 n = logn ≤ 1 之前要进行的对 n 取对数操作的次数
  - log*65536 = 4（4次log操作）
- Find至多需要一系列n个Find操作的开销非常接近于Θ(n)
  - 在实际应用中，α(n)往往小于4

# 思考

- 可否使用动态指针方式实现父指针表示法？
- 查阅各种并查集权重和路径压缩优化方法，并讨论各种方法的异同和优劣

# 数据结构与算法

## 谢谢聆听

国家精品课“数据结构与算法”
http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg/

**张铭，王腾蛟，赵海燕**
**高等教育出版社，2008. 6。“十一五”国家级规划教材**