4. Potenzreihen

Sei (c_n) eine Folge mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$(c_n) \text{ beschränkt} \quad \Leftrightarrow \quad (c_n) \text{ nach oben beschränkt}$$

Es treten die folgenden Fälle auf

(i) (c_n) ist beschränkt, dann existiert $\limsup c_n \in [0, \infty)$.

(ii) (c_n) ist nicht beschränkt.

Lemma 4.1. Sei (c_n) eine Folge mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist (c_n) beschränkt, so gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_n \to 0$$

Beweis:

„$\Leftarrow$“ klar, da $\mathrm{HW}(c_n) = \{0\}$ (dann ist 0 auch größter Häufungswert).

„$\Rightarrow$“ Sei $\varepsilon > 0$. Nach obigem Lemma gilt:

$$0 \leq c_n \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

d.h.

$$c_n \in U_\varepsilon(0) \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

$\square$

Ist (c_n) eine Folge mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gibt es genau eine der folgenden Möglichkeiten:

(i) (c_n) ist unbeschränkt

(ii) (c_n) ist beschränkt und $\limsup c_n > 0$

(iii) (c_n) ist beschränkt und $\limsup c_n = 0$

Definition 4.2. Sei (a_n) eine Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Eine Reihe der Form

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots}$$

heißt eine *Potenzreihe*.

(2) Sei $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}, n \in \mathbb{N}$.

Setze

$$r := \begin{cases} 0 & \text{falls } (c_n) \text{ unbeschränkt} \\ \infty & \text{falls } c_n \to 0 \\ \frac{1}{\limsup c_n} & \text{falls } c_n \text{ beschränkt und } \limsup c_n > 0 \end{cases}$$

Dann heißt r *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Im folgenden betrachten wir Potenzreihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

d.h. solche Potenzreihen, bei denen $x_0 = 0$. Der allgemeine Fall $x_0 \in \mathbb{R}$ lässt sich durch die Transformation $y = x - x_0$ auf diesen Spezialfall zurückführen.

Satz 4.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sei eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r.

(1) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = 0$.

(2) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(3) Ist $r \in (0, \infty)$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für $|x| < r$ und sie divergiert für $|x| > r$.

Für $|x| = r$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}, b_n := a_n x^n, n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: $\sqrt[n]{|b_n|} = (|a_n| \cdot |x^n|)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = c_n \cdot |x|\ , \quad n \in \mathbb{N}$.

(1) $r = 0 \quad \Rightarrow \quad (c_n)$ ist unbeschränkt.

$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{|b_n|}$ unbeschränkt für $x \neq 0$.

$\overset{3.14}{\Rightarrow} \quad \sum b_n$ divergiert für $x \neq 0$.

Also: $\sum b_n$ konvergiert nur für $x = 0$.

(2) $r = \infty \quad \Rightarrow \quad c_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{|b_n|} \to 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

$\overset{3.14}{\Rightarrow} \quad \sum b_n$ konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(3) Sei $r \in (0, \infty)$ und $\delta := \limsup c_n$, also $r = \frac{1}{\delta}$.

Dann gilt:

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \delta \cdot |x| = \frac{|x|}{r} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < r$$

oder

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > r$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Wurzelkriterium 3.14.

□

Beispiel 4.4.

(1) Bekannt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Also: $r = \infty$ nach 4.3.

Es ist $a_n = \frac{1}{n!}$, also $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n!}\right)^{-1} = 0.$

(2) Bekannt: die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ (hier: $a_n = 1$) konvergiert absolut für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| \geq 1$.

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $r = 1$, $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

(3) Betrachte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (hier: $a_0 = 0\,,\ \ a_n = n^{-1}$).

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

$$\Rightarrow \quad \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{Konvergenzradius} \ \ r = \frac{1}{1} = 1$$

Die Potenzreihe konvergiert also für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

Für $|x| = 1$:

1. Fall $x = 1$: $\sum \frac{1}{n}$ divergiert $\Rightarrow$ die Potenzreihe divergiert.

2. Fall $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium.

$\Rightarrow$ die Potenzreihe konvergiert (aber nicht absolut).

(4) Betrachte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (hier: $a_0 = 0\,,\ \ a_n = \frac{1}{n^2}(n > 0)$).

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to 1 \quad \text{also} \quad \limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{Konvergenzradius} \ \ r = \frac{1}{1} = 1$$

Die Potenzreihe konvergiert also absolut für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

Für $|x| = 1$:

1. Fall $x = 1$: $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert absolut $\Rightarrow$ die Potenzreihe konvergiert absolut.

2. Fall $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergiert absolut $\Rightarrow$ die Potenzreihe konvergiert absolut.

(5) Betrachte $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ (hier: $a_n = n^n$).

$$c_n := \sqrt[n]{|a_n|} = n \quad \Rightarrow \quad (c_n) \ \text{ist unbeschränkt}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Konvergenzradius} \ \ r = 0$$

Die Potenzreihe konvergiert also nur für $x = 0$.