25. 证明 S_n 可由 $\{(12),(13),\cdots,(1n)\}$ 生成，也可由 $\{(12),(23),\cdots,(n-1\ \ n)\}$ 生成.

记 $A=\langle\{(1\,2),(1\,3),\cdots,(1\,n)\}\rangle$,

$B=\langle\{(1\,2),(2,3),\cdots,(n\text{-}1\ \ n)\}\rangle$

显然 $B\subseteq S_n$, 下证 $S_n\subseteq A$ 和 $A\subseteq B$

i) ① 若 $\exists j$ s.t. $i_j=1$, 则

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)=(i_j\ i_{j+1}\cdots j_k\ i_1\cdots i_{j-1})$$

$$=(1\ \ i_{j+1}\cdots i_k,\ i_1\cdots i_{j-1})$$

$$=(1\ \ i_{j-1})(1\ \ i_{j-2})\cdots(1\ \ i_{j+1})\in A$$

② 若 $(i_1\ i_2\cdots i_k)$ 中不含 1

$$(i_1\ i_2\cdots i_k)=(1\ i_2)(1\ i_2\cdots i_k)(1\ i_1)$$

$$=(1\ i_2)(1\ i_k)(1\ i_{k-1})\cdots(1\ i_2)(1\ i_1)$$
$$\in A$$

$\Rightarrow\ S_n\subseteq A$

ii) $n=1,2$ 时显然 $A\subseteq B$,

$n=k$ 时若 $A\subseteq B$, 则 $n=k+1$ 时,

$$(1\ 2)(2\ 3)\cdots(k\text{-}1\ \ k)(k\ \ k+1)=(1\ \ k)(k\ \ k+1)$$

$$=(1\ \ k+1)$$

$\Rightarrow\ (1\ \ k+1)=(1\ \ 2)(2\ 3)\cdots(k\ \ k+1)\in B$

$\Rightarrow\ A\subseteq B$

$\Rightarrow\ S_n=A=B$

27. 在 S_4 中取子群 $H=\langle(1234)\rangle$，写出 H 在 S_4 中的全部右陪集.

$H=\{(1),(1\,2\,3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4\,3\,2)\}$

$H(1)=H(1\,2\,3\,4)=H(1\,3)(2\,4)=H(1\,4\,3\,2)=H$

$H(1\,2)=H(1\,3\,4)=H(1\,4\,2\,3)=H(2\,4\,3)=\{(1\,2),(1\,3\,4),(1\,4\,2\,3),(2\,4\,3)\}$

$H(1\,3)=H(1\,4)(2\,3)=H(2\,4)=H(1\,2)(3\,4)=\{(1\,3),(1\,4)(2\,3),(2\,4),(1\,2)(3\,4)\}$

$H(1\,4)=H(2\,3\,4)=H(1\,2\,3\,4)=H(1\,3\,2)=\{(1\,4),(2\,3\,4),(1\,2\,4\,3),(1\,3\,2)\}$

$H(2\,3)=H(1\,2\,4)=H(1\,3\,4\,2)=H(1\,4\,3)=\{(2\,3),(1\,2\,4),(1\,3\,4\,2),(1\,4\,3)\}$

$H(3\,4)=H(1\,2\,3)=H(1\,3\,2\,4)=H(1\,4\,2)=\{(3\,4),(1\,2\,3),(1\,3\,2\,4),(1\,4\,2)\}$

28. 设 $G=\left\{\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| r,s\in Q, r\neq 0\right\}$，$G$ 关于矩阵乘法构成一个群. $H=\left\{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| t\in Q\right\}$ 是 G 的子群. 求 H 在 G 中的全部左陪集.

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & rt+s \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\left\{\begin{pmatrix} r & rt+s \\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| t\in \mathbb{Q}\right\} \middle| r,s\in\mathbb{Q}, r\neq 0\right\}$$

$$=\left\{\left\{\begin{pmatrix} r & t \\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| t\in \mathbb{Q}\right\} \middle| r\in\mathbb{Q}, r\neq 0\right\}$$

31. 设 p 是素数，m 是正整数. 证明 p^m 阶群必有 p 阶子群.

对 m 归纳，$m=1$ 时其本身就是 p 阶子群

若 $m<k$ 时成立，$m=k$ 时，$p^m>1 \Rightarrow$ 有非单位元 a

若 $|a|=p^k$ 则 G 为循环群，有 p 阶子群

若 $|a|<p^k$ 则 $|\langle a\rangle|=|a|=p^t \Rightarrow \langle a\rangle$ 有 p 阶子群

$\Rightarrow G$ 有 p 阶子群

故原命题成立

32. 设 G 是有限群，K 是 G 的子群，H 是 K 的子群. 证明

$$[G:H]=[G:K][K:H].$$

$$[G:H]=\frac{|G|}{|H|}=\frac{[G:K]|K|}{|K|/[K:H]}$$

$$=[G:K][K:H]$$

34. 证明 S_n 中同一共轭类的元素都具有相同的轮换指数.

设 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t$ 是不相交轮换分解式

$$\tau\sigma\tau^{-1}=\tau\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t\tau^{-1}$$

$$=\tau\sigma_1\tau^{-1}\tau\sigma_2\tau^{-1}\cdots\tau\sigma_t\tau^{-1}$$

$$=\sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_t'$$

τ 是一一映射且 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t$ 不相交

$\Rightarrow$ $\sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_t'$ 是不相交轮换分解式

$$\tau\sigma\tau^{-1}(x)=(\tau(i_1)\tau(i_2)\cdots\tau(i_k))(x)$$

$\Rightarrow$ $\tau\sigma\tau^{-1}$ 与 σ 有相同的轮换指数

38. 设 G 是 4 阶群，
(1) 若 G 为循环群 $\langle a\rangle$，求 G 的所有共轭类；
(2) 若 G 为 Klein 四元群，求 G 的所有共轭类.

(1) $\bar{e}=\{e\}$, $\bar{a}=\{a\}$, $\overline{a^2}=\{a^2\}$, $\overline{a^3}=\{a^3\}$

(2) $\bar{e}=\{e\}$, $\bar{a}=\{a\}$, $\bar{b}=\{b\}$, $\bar{c}=\{c\}$

42. 证明循环群的任何子群都是正规子群.

循环群可交换，$\forall g\in G$, $\forall x\in gH$, $\exists h\in H$

s.t. $x=gh\Rightarrow x=hg\in Hg\Rightarrow gH\subseteq Hg$

同理：$Hg\subseteq gH\Rightarrow Hg=gH$

即为正规子群