32. 计算 $\begin{bmatrix} 7 \\ n \end{bmatrix}$，其中 $n = 1,2,3,4,5,6,7$.

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

n=1	1						
n=2	1	1					
n=3	2	3	1				
n=4	6	11	6	1			
n=5	24	50	35	10	1		
n=6	120	274	225	85	15	1	
n=7	720	1764	1624	735	175	21	1
	r=1	r=2	r=3	r=4	r=5	r=6	r=7

$$\begin{bmatrix} 7 \\ n \end{bmatrix} = \{720, 1764, 1624, 735, 175, 21, 1\}$$

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

34. 用恰好 k 种可能的颜色做旗子，使得每面旗子由 n 条彩带构成（$n \geqslant k$），且相邻的两条彩带的颜色都不相同，证明不同的旗子数是 $k!\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$.

$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}$. n个球放到r个盒子里，没有空盒

$$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{Bmatrix} + r\begin{Bmatrix} n-1 \\ r \end{Bmatrix} \quad (*)$$

最后一条不与相邻颜色一致

$$f(n,k) = \underbrace{f(n-1,k)}_{\text{前n-1条彩带有k种颜色}} \cdot \underline{(k-1)} + \underbrace{f(n-1,k-1)}_{\substack{\text{前n-1条有k-1种颜色} \\ \text{最后一条可选k种颜色}}} \cdot k$$

要证：$k!\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} = k!\begin{Bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{Bmatrix} \cdot (k-1) + (k-1)!\begin{Bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{Bmatrix} \cdot k$

由(*): $k!\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} = k!\left[\left\{ {n-2 \atop k-2} \right\} + (k-1)\left\{ {n-2 \atop k-1} \right\}\right]$

即 $f(n,k) = k!\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ 满足题意

由归纳法可得:

$$f(n,k) = k!\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

4. 确定 $S = \{\infty \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$ 的 10- 组合数.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1 \geq 0,\ 0 \leq x_2 \leq 3,\ 0 \leq x_3 \leq 5,\ 0 \leq x_4 \leq 7$$

$$G_a(t) = 1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t}$$

$$G_b(t) = 1 + t + t^2 + t^3$$

$$G_c(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5$$

$$G_d(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^7$$

$$G(t) = G_a(t) \cdot G_b(t) \cdot G_c(t) \cdot G_d(t)$$

$$[t^{10}]\, G(t) = \binom{13}{3} - \binom{9}{3} - \binom{7}{3} - \binom{5}{3} + \binom{3}{3}$$

$$= 286 - 84 - 35 - 10 + 1 = 158$$

5. (1) 确定方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ 的不超过 8 的非负整数解的个数;
(2) 确定方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ 的不超过 8 的正整数解的个数.

(1) 非负整数解个数: $\binom{14+3-1}{3-1} = \binom{16}{2} = 120$

有且仅有1个 $x_i \geq 9$ 的个数:

$3 \times \binom{14-9+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} \times 3 = 21 \times 3 = 63$

有且仅有2个 $x_i \geq 9$ 的个数: $9+9 \geq 14 \Rightarrow$ 无解

同理：3个数 ≥ 9 的个数为 0

$\Rightarrow N = 120 - 63 = 57$

(2) 所有正整数解个数：$\binom{13}{2} = 78$

有且仅有 1 个 $x_i \geq 9$ 的个数：

$$3 \times \binom{14-8-1}{3-1} = 3 \times \binom{5}{2} = 30$$

$\Rightarrow N = 78 - 30 = 48$

10. 求多重集 $S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 2 \cdot c\}$ 的排列数，使得在这些排列中同类字母的全体不能相邻(例如不允许 *abbbbccaa*，但允许 *aabbbacbc*)。

全部排列数：$\frac{(3+4+2)!}{3!\,4!\,2!} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1260$

A：a 全部相邻

$$|A| = \frac{(1+4+2)!}{4!\,2!} = 105$$

同理：$|B| = \frac{(3+1+2)!}{3!\,2!} = 60$

$$|C| = \frac{(3+4+1)!}{3!\,4!} = 280$$

$$|A \cap B| = \frac{(1+1+2)!}{2!} = 12$$

$$|A \cap C| = \frac{(1+4+1)!}{4!} = 30$$

$$|B \cap C| = \frac{(3+1+1)!}{3!} = 20$$

$$|A \cap B \cap C| = 3! = 6$$

$\Rightarrow N = 1260 - (105 + 60 + 280) + (12 + 30 + 20) - 6 = 871$

14. 计算 $R(\boxplus)$.

$$R(\boxplus) = xR(\boxplus) + R(\boxplus)$$

$$= x\left(xR(\square) + R(\square\square)\right) + x\left(xR(\square\square) + R(\boxplus)\right)$$

$$= x\left(x(1+x) + (1+2x)\right) + x\left(x(1+2x) + x\left(xR(\square) + R(\boxplus)\right)\right)$$

$$= x(x^2+3x+1) + x\left(x+2x^2 + x\left(x(1+x) + (1+3x+x^2)\right)\right)$$

$$= x^3+3x^2+x + x\left(x+2x^2 + x(2x^2+4x+1)\right)$$

$$= x^3+3x^2+x + x(2x^3+6x^2+2x)$$

$$= 2x^4+7x^3+5x^2+x$$

15. 有4个人，分别记作 x_1、x_2、x_3 和 x_4。有5项工作，分别记作 y_1、y_2、y_3、y_4 和 y_5。已知 x_1 可以承担 y_1 或 y_4，x_2 可以承担 y_2 或 y_5，x_3 可以承担 y_2 或 y_4，x_4 可以承担 y_3。要使每个人承担一项工作且每个人的工作都不相同，问有多少种分配方案？

x_1 : y_1, y_4

x_2 : y_2, y_5

x_3 : y_2, y_4

x_4 : y_3

$\underline{y_1}\ \underline{y_2}\ \underline{\quad}\ \underline{y_3}$

(y_1, y_2, y_4, y_3)

(y_1, y_5, y_2, y_3)

(y_1, y_5, y_4, y_3)

(y_4, y_5, y_2, y_3)

4种

18. (1) 在1和1 000 000之间(包括1的1 000 000在内)有多少个整数包含了数字1,2,3和4?
(2) 在1和1 000 000之间(包括1和1 000 000在内)有多少个整数只由数字1,2,3或4构成?

(1) 1和1000000之间共有1000000个数

i) 不包含1,2,3,4中的1个的有

$$C_4^1 \times \underbrace{8}_{\text{首位}} \times (\underbrace{9^5+9^4+\cdots+1}_{\text{其他位}}) = 8\times\frac{9^6-1}{9-1}\times 4 = 4(9^6-1)$$

ii) 不包含 1,2,3,4 中的2个的有

$$C_4^2 \times 7 \times (8^5+8^4+\cdots+1) = 7\times\frac{8^6-1}{8-1}\times 6 = 6(8^6-1)$$

iii) 不包含 1,2,3,4 中的3个的有

$$C_4^3 \times 6 \times (7^5+7^4+\cdots+1) = 4\times\frac{7^6-1}{7-1}\times 6 = 4(7^6-1)$$

iv) 不包含 1,2,3,4 的有

$$5\times(6^5+6^4+\cdots+1) = 5\times\frac{6^6-1}{6-1} = 6^6-1$$

$$\Rightarrow N = 10^6 - 4(9^6-1) + 6(8^6-1) - 4(7^6-1) + 6^6-1$$

$$= 10^6 - 4\times 9^6 + 6\times 8^6 - 4\times 7^6 + 6^6 - 2$$

$$= 23158$$

(2) 不包含其他数字的有

$$4^6+4^5+\cdots+4 = \frac{4^6-1}{4-1}\times 4 = 5460$$

i) 不包含 1,2,3,4 中1个的有

$$3^6+3^5+\cdots+3 = \frac{3^6-1}{3-1}\times 3 = 1092$$

ii) 不包含 1,2,3,4 中2个的有

$$2^6+2^5+\cdots+2 = \frac{2^6-1}{2-1}\times 2 = 126$$

iii) 不包含 1,2,3,4 中3个的有

$$6$$

$$\Rightarrow N = 5460 - 1092 + 126 - 6 = 4488$$