26.（1）设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，$G$ 是 $N$ 上的置换群，如果 $G=S_n$，那么用 $m$ 处颜色涂色 $N$ 中数字的不同的涂色方案应该有多少种？

（2）试用方程非负整数解的组合计数模型重新求解这一问题，并证明两种求解方法的结果是一样的.

(1) $$\frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} m^{c(g)} = \binom{n+m-1}{n}$$

(2) 非负整数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，$x_i$ 代表颜色 $i$ 被使用的次数

$$x_1+x_2+\cdots+x_m=n$$

解的个数为 $$\binom{n+m-1}{m-1}=\binom{n+m-1}{n}$$

29. 如图 23.11，$T$ 是一棵七个结点的树，我们用黑白两色对 $T$ 的结点着色. 如果交换 $T$ 的某个左子树与右子树以后，一种着色方案 $f_1$ 就变成另一种着色方案 $f_2$，则认为 $f_1$ 和 $f_2$ 是同样的着色方案. 问不同的着色方案有多少种？

图 23.11

$$\sum_{g\in G} \mathrm{Fix}(g) = 2^7+2^4+2^6+2^4+2^4+2^5+2^3$$

$$=344$$

$$N=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Fix}(g) = \frac{1}{8}\times 344 = 43$$

31. 用 $m$ 种颜色对一根 8 尺长的均匀木棍着色，每尺着一种颜色，如果相邻的两尺不能着同色，问有多少种着色方案？

$$f(n)=f(n-1)\times(m-1),\quad f(1)=m$$

$$\Rightarrow f(n)=m(m-1)^{n-1},\quad f(8)=m(m-1)^7$$

$$\mathrm{Fix}(e)=m(m-1)^7,\quad \mathrm{Fix}(r)=m(m-1)^3$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{Fix}(e)+\mathrm{Fix}(r)\right)=\frac{1}{2}m\left[(m-1)^7+(m-1)^3\right]$$

4. 构造四个两两正交的 5 阶拉丁方.

$$L_1=\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\1&2&3&4&0\\2&3&4&0&1\\3&4&0&1&2\\4&0&1&2&3\end{bmatrix},\ L_2=\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\2&3&4&0&1\\4&0&1&2&3\\1&2&3&4&0\\3&4&0&1&2\end{bmatrix},\ L_3=\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\3&4&0&1&2\\1&2&3&4&0\\4&0&1&2&3\\2&3&4&0&1\end{bmatrix},\ L_4=\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\4&0&1&2&3\\3&4&0&1&2\\2&3&4&0&1\\1&2&3&4&0\end{bmatrix}$$