7. 设 $V=\langle S,*\rangle$ 是可交换半群，若 $a,b\in S$ 是 V 中的幂等元，证明 $a*b$ 也是 V 中的幂等元.

$$
\begin{aligned}
(a*b)*(a*b) &= a*b*a*b \\
&= (a*a)*(b*b) \\
&= a*b
\end{aligned}
$$

11. $V=\langle A,*\rangle$ 是半群，其中 $A=\{a,b,c,d\}$，$*$ 运算由表 16.4 给定，$\sim$ 为 A 上的同余关系，且同余类是

$$[a]=[c],\quad [b]=[d].$$

试给出商代数 $V/\sim$ 的运算表.

表 16.4

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\bar{*}$	[a]	[b]
[a]	[a]	[b]
[b]	[b]	[a]

12. $V=\langle S,\circ\rangle$ 是半群，I 是 S 的非空子集，且满足 $IS\subseteq I$ 和 $SI\subseteq I$，其中 $IS=\{a\circ x\mid a\in I\wedge x\in S\}$，$SI=\{x\circ a\mid x\in S\wedge a\in I\}$. 称 I 是 V 的理想. 在 S 上定义二元关系 R，

$$xRy \Longleftrightarrow x=y \vee (x\in I\wedge y\in I).$$

(1) 证明 R 是 V 上的同余的关系；

(2) 描述商代数 $\langle S/R,\bar{\circ}\rangle$.

(1) $\forall x,y\in S$, $xRy \Longleftrightarrow x=y \vee (x\in I\wedge y\in I)$

$x_1Ry_1,\ x_2Ry_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=y_1 \vee (x_1\in I\wedge y_1\in I) \\ x_2=y_2 \vee (x_2\in I\wedge y_2\in I) \end{cases}$

① $x_1=y_1$, $x_2=y_2$ 时，显然 $x_1\circ x_2=y_1\circ y_2$，即 $(x_1\circ x_2)R(y_1\circ y_2)$

② $x_2\in I\wedge y_2\in I$ 时，

$\left.\begin{aligned} x_1\circ x_2 &\in SI\subseteq I \\ y_1\circ y_2 &\in SI\subseteq I \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_1\circ x_2)R(y_1\circ y_2)$

③ $x_1\in I\wedge x_2\in I$ 时，

$\left.\begin{aligned} x_1\circ x_2 &\in IS\subseteq I \\ y_1\circ y_2 &\in IS\subseteq I \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_1\circ x_2)R(y_1\circ y_2)$

即 R 是 V 上的同余关系

(2) I中所有元素构成一个等价类，S-I中每个元素自身为一个等价类

若 $x_i \in I$, $y_i \notin I$，则有 $x_1 \cdot x_2 \in I$，$x_1 \cdot y_1 \in IS \subseteq I$

$$[x] \bar{\circ} [x] = [x_1 \circ x_2] = [x]$$

$$[x] \bar{\circ} [y] = [x_1 \circ y_1] = [x]$$

同理：$[y] \bar{\circ} [x] = [y_1 \circ x_1] = [x]$

$$[y_1] \bar{\circ} [y_2] = [y_1 \circ y_2]$$

综上，$S/R = \{I\} \cup \{\{y\} \mid y \in S-I\}$

$$x \bar{\circ} y = \begin{cases} I, & x = I \vee y = I \\ \{x' \circ y'\}, & x = \{x'\} \neq I \wedge y = \{y'\} \neq I \end{cases}$$

6. 设 G 是群，$a, b \in G$，且 $(ab)^2 = a^2b^2$，证明 $ab = ba$.

$$(ab)^2 = abab = aabb$$

左乘 a^{-1}，右乘 b^{-1} 有：$a^{-1}ababb^{-1} = a^{-1}aabb^{-1}$

$$\Rightarrow ba = ab$$

9. 设 G 是群，$a, b, c \in G$，证明

(1) $|b^{-1}ab| = |a|$；

(2) $|ab| = |ba|$；

(3) $|abc| = |bca| = |cab|$；

(2) 设 $|ab| = r \Rightarrow (ab)^r = ab\overbrace{ab \cdots ab}^{2r-2} = e$

$(ba)^r = baba \cdots ba = a^{-1} \cdot a \cdot (\underbrace{baba \cdots}_{2r-2} ba) = a^{-1} e \cdot a = e$

则 $r \mid |ba|$

同理：$|ba| \mid r \Rightarrow |ab| = |ba|$

(3) 由(2)：$|abc| = |a(bc)| = |(bc)a| = |bca|$

同理：$|abc| = |bca| = |cab|$

11. 设 G 是非交换群，则 G 中存在着非单位元 a 和 b，$a \neq b$ 且 $ab = ba$.

若 $\forall a \neq b \in G$，$a, b \neq e$，有 $ab \neq ba$

则 $\forall a \in G$，$a^2 = a$ （$a^2 \cdot a = a \cdot a^2$）

由消去律：$a = e$，$G = \{e\}$，矛盾，

故 $\exists a \neq b \in G$，$a, b \neq e$ s.t. $ab = ba$