62. 设 $G=\langle a\rangle$ 是 n 阶循环群，t 是正整数. 定义

$$\varphi_t: a^i \mapsto (a^t)^i,\ i=0,1,\cdots,n-1.$$

证明

(1) φ_t 是 G 的自同态；

(2) φ_t 是 G 的自同构当且仅当 $(n,t)=1$.

(1) 由于 $\forall n,t\in\mathbb{Z}^*$，$n \mid nt$

由习题 17.52，φ 是自同态

(2) 充分性：若 $(n,t)=1$，则 $\exists p,q\in\mathbb{Z}$ s.t.

$pn+qt=1$，于是 $\forall a^i\in G$ 有

$a^i=a^{i-ipn}=a^{iqt}=\varphi(a^{iq})\in\varphi(G)$

$\Rightarrow \varphi$ 是满自同态 $\Rightarrow \varphi$ 是同构

必要性：若 φ 是自同构，则为满射.

$\exists q\in\mathbb{Z}$ s.t. $\varphi(a^q)=a^{qt}=a$

$\Rightarrow qt-1 \mid n \Rightarrow qt-1=kn$

$qt-kn=1 \Rightarrow (n,t)=1$

68. 设 H 和 K 是 G 的正规子群，且 $H\cap K=\{e\}$. 证明 G 与 $G/H\times G/K$ 的一个子群同构.

令 $\varphi: G\to G/H\times G/K$，$\forall g\in G$，$\varphi(g)=\langle Hg, Kg\rangle$

φ 是同态. 下证 φ 是单射.

$\forall a,b\in G$

$\varphi(a)=\varphi(b) \Rightarrow Ha=Hb \wedge Ka=Kb$

$\Rightarrow ab^{-1}\in H \wedge ab^{-1}\in K$

$\Rightarrow ab^{-1}\in H\cap K=\{e\}$

$\Rightarrow a=b$

于是 φ 是双射，为同构

$\Rightarrow \varphi(G)\cong G$ 为 $G/H\times G/K$ 的子群