9. 设 $*$ 为有理数集 $Q$ 上的二元运算，$\forall x, y \in Q$ 有 $x * y = x + y - xy$，说明 $*$ 运算是否适交换律、结合律和幂等律，并求出 $Q$ 中关于 $*$ 运算的单位元、零元及所有可逆元素的逆元.

i) 交换: $y * x = y + x - yx = x * y$

ii) 结合: $(x*y)*z = (x+y-xy)*z$

$$= x+y-xy+z-(x+y-xy)z$$

$$= x+y+z-xy-xz-yz+xyz$$

$$= x*(y*z)$$

iii) 幂等: $x*x = 2x - x^2 \neq x$

iv) 单位元: $\forall x$, $x*e = x+e-xe = x$

$$\Rightarrow e(1-x)=0 \Rightarrow e=0$$

v) 零元: $\forall x$, $x*\theta = x+\theta-x\theta = \theta$

$$\Rightarrow x(1-\theta)=0 \Rightarrow \theta=1$$

vi) 逆元: $x*x^{-1} = x+x^{-1}-x\cdot x^{-1} = e = 0$

$$x^{-1}(x-1) = x \Rightarrow x^{-1} = \frac{x}{x-1}, \quad x \neq 1$$

综上，有交换律、结合律，无幂等律

单位元为 0，零元为 1，逆元 $x^{-1} = \frac{x}{x-1}$，$x \neq 1$

16. 代数系统 $V_1 = \langle Z_3, \oplus_3 \rangle$，$V_2 = \langle Z_2, \oplus_2 \rangle$，其中 $\oplus_3$ 和 $\oplus_2$ 分别为模 3 和模 2 加法.

(1) 给出积代数 $V_1 \times V_2$ 的运算表；　(2) 求出积代数 $V_1 \times V_2$ 的单位元和每个可逆元素的逆元.

(1)

| $\oplus$ | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $2,1\rangle$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ |
| $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ |
| $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ |
| $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ |
| $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ |
| $\langle\ ,1\rangle$ | $\langle 2,1\rangle$ | $\langle 2,0\rangle$ | $\langle 0,1\rangle$ | $\langle 0,0\rangle$ | $\langle 1,1\rangle$ | $\langle 1,0\rangle$ |

(2) 单位元 $\langle 0,0\rangle$

逆元 $\langle x_1, x_2\rangle \oplus \langle y_1, y_2\rangle$

$$= \langle (x_1+y_1) \bmod 3, (x_2+y_2) \bmod 3\rangle$$

$$= \langle 0, 0\rangle$$

$$\langle x_1, x_2\rangle^{-1} = \langle -x_1 \pmod 3, -x_2 \pmod 3\rangle$$

$\langle 0,0\rangle^{-1} = \langle 0,0\rangle$，$\langle 1,0\rangle$ 与 $\langle 2,0\rangle$ 互逆

$\langle 0,1\rangle^{-1} = \langle 0,1\rangle$，$\langle 1,1\rangle$ 与 $\langle 2,1\rangle$ 互逆

18. 设 $V_1$ 是复数集 $C$ 关于复数加法和复数乘法构成的代数系统，$V_2=\langle B,+,\cdot\rangle$，其中

$$B=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in R\right\},$$

$+$ 和 $\cdot$ 分别为矩阵加法和乘法. 证明 $V_1$ 同构于 $V_2$.

$V_1=\langle \mathbb{C},+,\cdot\rangle$

令 $f: V_1\to V_2$，$f(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}$，$\forall a,b\in\mathbb{R}$

i) 下证 $f$ 为双射：

① 单射：若 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2\end{pmatrix}$ 则 $\begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2\end{cases}$

即 $a_1+b_1i=a_2+b_2i$

② 满射：$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\in B$，$\exists\ a+bi$ s.t. $f(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}$

即 $f$ 为双射.

ii) 下证 $f$ 为同态映射：

$$f(c_1+c_2)=f(a_1+b_1i+a_2+b_2i)=f((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i)$$

$$=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2\end{pmatrix}=f(c_1)+f(c_2)$$

$$f(c_1\cdot c_2)=f((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i)$$

$$=\begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & a_1b_2+a_2b_1 \\ -(a_1b_2+a_2b_1) & a_1a_2-b_1b_2\end{pmatrix}=f(c_1)\cdot f(c_2)$$

故存在 $V_1$ 到 $V_2$ 的双射同态映射，即 $V_1\cong V_2$

24. 设 $V_1=\langle C,\cdot\rangle$，$V_2=\langle R,\cdot\rangle$ 是代数系统，$\cdot$ 为普通乘法. 下面哪个函数 $\varphi$ 是 $V_1$ 到 $V_2$ 的同态？如果 $\varphi$ 是同态，求出 $V_1$ 在 $\varphi$ 下的同态像.

(1) $\varphi: C\to R$, $\varphi(z)=|z|+1$, $\forall z\in C$;

(2) $\varphi: C\to R$, $\varphi(z)=|z|$, $\forall z\in C$;

(3) $\varphi: C\to R$, $\varphi(z)=0$, $\forall z\in C$;

(4) $\varphi: C\to R$, $\varphi(z)=2$, $\forall z\in C$.

(2) $\varphi(c_1\cdot c_2)=|c_1\cdot c_2|=|(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i|$

$$=\sqrt{(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2}=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}$$

$$\varphi(c_1)\cdot\varphi(c_2)=|c_1|\cdot|c_2|=\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

$\Rightarrow \varphi(c_1 \cdot c_2) = \varphi(c_1) \cdot \varphi(c_2)$，是同态，同态像为 $R-R^-$

(4) $\varphi(c_1 \cdot c_2) = 2 \neq \varphi(c_1) \cdot \varphi(c_2) = 4$，不是同态

27. 设 $V = \langle Z, +\rangle$，判断下面给出的二元关系 $R$ 是否为 $V$ 上的同余关系，并说明理由.

(1) $\forall x, y \in Z$，$xRy \Longleftrightarrow x$ 与 $y$ 同号或 $x = y = 0$；(2) $\forall x, y \in Z$，$xRy \Longleftrightarrow |x - y| < 5$；

(3) $\forall x, y \in Z$，$xRy \Longleftrightarrow x = y = 0$ 或 $x \neq 0, y \neq 0$；(4) $\forall x, y \in Z$，$xRy \Longleftrightarrow x \geqslant y$.

(2) 令 $x_1 R x_2$，$y_1 R y_2$，则

$(x_1+y_1) R (x_2+y_2) \Longleftrightarrow |(x_1-x_2)+(y_1-y_2)| < 5$

取 $x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = 4$，且 $|4+4| < 5$ 不成立，

故不是同余关系

(4) R不是等价关系，故不是同余关系

29. 设 $V_1 = \langle Z, \triangle\rangle$，$V_2 = \langle Z_2, \bar{\triangle}\rangle$ 是含有一元运算的代数系统，其中 $\triangle$ 和 $\bar{\triangle}$ 分别定义如下：

$$\triangle x = x + 1, \forall x \in Z, \quad \bar{\triangle} y = (y+1) \bmod 2, \forall y \in Z_2.$$

令

$$\varphi: Z \to Z_2,\ \varphi(a) = (a) \bmod 2,\ \forall a \in Z.$$

(1) 证明 $\varphi$ 是 $V_1$ 到 $V_2$ 的同态；(2) 给出 $\varphi$ 在 $V_1$ 上导出的划分.

(1) $\varphi(\triangle x) = (x+1) \bmod 2 = (x \bmod 2 + 1) \bmod 2$

$= \bar{\triangle}(x \bmod 2) = \bar{\triangle}(\varphi(x))$

即 $\varphi$ 是 $V_1$ 到 $V_2$ 的同态

(2) $\varphi(x) = \varphi(y) \Longleftrightarrow x \bmod 2 = y \bmod 2 \Longleftrightarrow x = y + 2k, k \in \mathbb{Z}$

将 $\mathbb{Z}$ 划分为 $\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

30. 设 $V_1 = \langle A_k, +\rangle$，$V_2 = \langle A_m, +\rangle$，其中

$$A_j = \{x \mid x \in Z \text{ 且 } x \geqslant j\},\quad j, k, m, n \in N,\quad nk \geqslant m,$$

$+$ 为普通加法. 令 $\varphi: A_k \to A_m$，$\varphi(x) = nx$，$\forall x \in A_k$.

(1) 证明 $\varphi$ 是 $V_1$ 到 $V_2$ 的同态；

(2) 令 $\sim$ 表示由 $\varphi$ 导出的 $V_1$ 上的同余关系，试描述商代数 $V_1/\sim$（给出集合和运算表）.

(1) $\forall a_1, a_2 \in A_k$, $na_1 \geqslant nk \geqslant m$, $na_i = \varphi(a_i) \in A_m$

$\varphi(a_1 + a_2) = n(a_1 + a_2) = na_1 + na_2 = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$

即 $\varphi$ 是 $V_1$ 到 $V_2$ 的同态

(2) $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow nx = ny$

i) 当 $n = 0$ 时，同余关系为全域关系，$V_1/\sim = \langle \{[0]\}, + \rangle$

| $+$ | $[0]$ |
|---|---|
| $[0]$ | $[0]$ |

ii) 当 $n \neq 0$ 时，$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow x = y$，同余关系为恒等关系

$V_1/\sim = \{A_k, +\}$

| $+$ | $k$ | $k+1$ | $k+2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $k$ | $2k$ | $2k+1$ | $2k+2$ | $\cdots$ |
| $k+1$ | $2k+1$ | $2k+2$ | $2k+3$ | $\cdots$ |
| $k+2$ | $2k+2$ | $2k+3$ | $2k+4$ | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |