

# 2022 年代数结构与组合数学 期末回忆版

EndTalker

2022 年 6 月 30 日

本学期的课程为曹永知老师和张昕老师合开, 期中期末考试均为统考, 最终成绩为 25% 作业 + 25% 期中 + 50% 期末构成, 老师在期末考完后会调整三者的比例但不调分.

## 1 填空题

20 个空, 每个 3 分, 总共 60 分, 题目多为作业题和往年题, 部分题目如下 (给出了备选项的题目需要填入一个最合适的):

1. 对于 (1) 有理数加法 (2) 有理数乘法 (3)  $(\{true, false\}, \wedge)$  (4) 非零有理数除法, 其中构成群的有\_\_\_\_\_.

2. 设  $G = \langle a \rangle$  为 15 阶循环群, 则  $G$  的生成元有\_\_\_\_\_,  $G$  的子群\_\_\_\_\_有.

3.  $(\mathbb{Z}_7, \oplus, \otimes)$  的全部零因子构成的集合为\_\_\_\_\_.

4.  $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$  的子环有\_\_\_\_\_.

5.  $M_2(\mathbb{R})$  为全体二阶实矩阵构成的集合, 则集合  $D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$  为  $M_2(\mathbb{R})$  的\_\_\_\_\_. (理想/左理想/右理想)

6.  $L$  为格,  $\forall a, b, c \in L$ , 有  $a \vee (b \wedge c) \_\_\_\_\_\_ (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ . ( $\leq$ / $\geq$ / $=$ )

7.  $L_1, L_2$  为格,  $f$  为  $L_1$  到  $L_2$  的同构当且仅当  $\forall a, b \in L_1, a \leq b \_\_\_\_\_\_ f(a) \leq f(b)$ . ( $\Leftarrow$ / $\Rightarrow$ / $\Leftrightarrow$ )

8. 将  $m$  个球放入  $n$  个盒子里, 若  $m < \frac{n(n-1)}{2}$ , 则至少存在\_\_\_\_\_个盒子有相同数目的球.

9. 把  $r$  只相同的球放到  $n$  个不同的盒子里 ( $nq \leq r$ ), 每个盒子至少包含  $q$  个球, 则有\_\_\_\_\_种放法.

10.  $(3x - 2y)^{18}$  的展开式中  $x^8 y^{10}$  的系数是\_\_\_\_\_.

11. 一个教室有两排座位, 每排 8 个. 有 14 个学生, 其中的 5 个人总坐在前一排, 另外 4 个人总坐在后一排. 有\_\_\_\_\_种排法.

12.  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} =$ \_\_\_\_\_.

13. 设数列  $\{a_n\}$  的生成函数为  $A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ , 则  $a_n =$ \_\_\_\_\_.

14. 若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n - 3a_{n-1} + 9a_{n-2} = 3^n$ ,  $a_0 = 0, a_1 = 1$ , 则  $a_n =$ \_\_\_\_\_.

15. 方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$  且  $1 \leq x_1 \leq 5, -2 \leq x_2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 5, 3 \leq x_4 \leq 9$  的整数解的数目为\_\_\_\_\_.

16.  $n$  个括号组成匹配的括号序列的方案数是\_\_\_\_\_.(写出具体形式)

17. 用恰好  $k$  种可能的颜色做旗子, 使得每面旗子由  $n$  条彩带构成 ( $n \geq k$ ), 且相邻的两条彩带的颜色都不相同, 则不同的旗子数是\_\_\_\_\_.

18. 棋盘多项式  $R \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) =$ \_\_\_\_\_

(现在看来基本还是能回忆全的, 只有一道题不记得了, 主要是作业题占的比重相当大.)

## 2 解答题

共 3 题, 一题涉及到群, 剩下两题都是组合计数相关.

### 2.1 (16 分)

设  $R$  为全体实数及其加法构成的群,  $\forall \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in R \times R, \langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$ , 令  $N = \{\langle 0, b \rangle | b \in R\}$ , 证明  $N$  为  $R \times R$  的正规子群且  $(R \times R)/N \cong R$ .

### 2.2 (16 分)

用  $1 \times 1$  与  $1 \times 2$  的骨牌铺满  $2 \times n$  的地板, 骨牌不得重叠,  $1 \times 2$  的骨牌既可横放又可竖放, 求方案数  $\{a_n\}$  的生成函数  $G(x)$ .

**提示:**  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 7, a_3 = 22$ , 考虑记  $b_n$  为用同样的骨牌铺满  $2 \times n$  且右上角多出一块的地板的方案数作为辅助.(此提示为原卷上已有的)

### 2.3 (8 分)

用 9 种颜色给  $3 \times 3$  的方格染色, 每个方格的颜色互不相同, 两种方案相同当且仅当一种方案在经过旋转和翻转后可以得到另一种方案. 求不同的染色方案种数.