3. 证明对任意的正整数 N 存在着 N 的一个倍数，使得它仅由数字 0 和 7 组成(例如 $N=3$，我们有 $3\times 259=777$；$N=4$，有 $4\times 1925=7700$；$N=5$，有 $5\times 14=70$，…)．

下证存在一个形如 $77\cdots700\cdots0$ 的数能被 N 整除

设 $S_i=\underbrace{7\cdots77}_{i\text{个}7}$，$i=1,2,\cdots,N,N+1$

$r_i=S_i \bmod N$

根据鸽巢原理 $\exists\ i>j$, s.t. $r_i=r_j$

$\Rightarrow\ r_i-r_j=(S_i-S_j)\bmod N=0$

$\Rightarrow\ N\mid(S_i-S_j)$，其中 S_i-S_j 为 $\underbrace{77\cdots7}_{(i-j)\text{个}7}\underbrace{0\cdots0}_{j\text{个}0}$

$\Rightarrow$ 原命题得证

6. 证明任何一组人中都存在两个人，他们在组内认识的人数恰好相等．

设一组人有 N 个人，分别认识 S_i 个人（$i=1,2,\cdots,N$）

$S_i=0,1,\cdots,N-1$

假设 $\forall\ i\neq j$, $S_i\neq S_j$

则 $\{S_i\}=\{0,1,\cdots,N-1\}$

此时，不妨设 $S_i=i-1$，即 $S_1=0$，$S_2=1$，$\cdots$，$S_N=N-1$

则 1 认识 0 个人，N 认识其余所有人，矛盾

故假设不成立，即 $\exists\ i\neq j$ s.t. $S_i=S_j$，原命题成立

9. 将 m 个球放入 n 个盒子里，证明若 $m<\frac{n(n-1)}{2}$，则至少有两个盒子里有相同数目的球．

设盒子里有 a_i 个球（$i=1,2,\cdots,n$），$\sum_{i=1}^{n}a_i=m$

假设 $\forall\ i\neq j$, $a_i\neq a_j$，则 $\sum_{i=1}^{n}a_i\geq\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{n(n-1)}{2}>m$，矛盾

故假设不成立，即 $\exists\ i\neq j$ s.t. $a_i=a_j$，原命题成立

10. 把一个圆盘分成36个相等的扇形，然后把1,2,⋯,36这些数任意填入36个扇形中.证明存在三个连接的扇形，其中的数字之和至少是56.

设扇形为 C_i $(i=0,1,\cdots,35)$

$$\sum_{i=0}^{35}\left(C_i+C_{(i+1)\bmod 36}+C_{(i+2)\bmod 36}\right)=3\times(1+2+\cdots+36)$$

$$=3\times\frac{37\times36}{2}=3\times37\times18$$

平均值 $\dfrac{\sum_{i=0}^{35}\left(C_i+C_{(i+1)\bmod 36}+C_{(i+2)\bmod 36}\right)}{36}=\dfrac{3\times37\times18}{36}=\dfrac{3\times37}{2}=55.5$

$\Rightarrow\ \exists\ i$ s.t. $C_i+C_{(i+1)\bmod 36}+C_{(i+2)\bmod 36}\geqslant 56$

原命题得证

30. $2n$个点均匀分布在一个圆周上，若用n条不相交的弦将这$2n$个点配成n对，证明不同的配对方法数是第$n+1$个Catalan数$\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$. 例如图22.9就给出了8个点的一种配对方案.

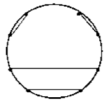

图 22.9

设与1配对的点为2k，否则弦会相交，$k=1,2,\cdots,n$

弦$(1,2k)$右侧有$2(k-1)$个点，左侧有$2(n-k)$个点，分别配对

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k-1)\cdot f(n-k)$$

$$f(1)=1$$

因为 $C_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_k\cdot C_{n-1-k}$

$\Rightarrow\ f(n)=C_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$