13. 设 G 是 $M_n(R)$ 上的加法群，$n \geqslant 2$，判断下列子集是否构成子群.

(1) 全体对称矩阵；

(2) 全体对角矩阵；

(3) 全体行列式 $\geqslant 0$ 的矩阵；

(4) 全体上(下)三角矩阵.

(1) 构成　(2) 构成　(3) 不构成　(4) 构成

15. 找出满足以下条件的群 G：

(1) 只有一个子群；

(2) 只有两个子群；

(3) 只有三个子群；

(1) $G=\{e\}$　(2) $\mathbb{Z}_2, \oplus_2$　(3) $\mathbb{Z}_4, \oplus_4$

16. 设 H_1, H_2 是 G 的子群. 证明 H_1H_2 是 G 的子群的充要条件是 $H_1H_2 = H_2H_1$，其中

$$H_1H_2 = \{h_1h_2 \mid h_1 \in H_1 \wedge h_2 \in H_2\},$$

$$H_2H_1 = \{h_2h_1 \mid h_2 \in H_2 \wedge h_1 \in H_1\}.$$

i) 充分性：$H_1H_2 = H_2H_1 \Rightarrow \forall\, h_1h_2 \in H_1H_2$，$\exists\, h_1'h_2' \in H_2H_1$

s.t. $h_1h_2 = h_2'h_1'$

显然 G 中单位元 $e = e \cdot e \in H_1H_2$

$(h_1h_2)(g_1g_2) = h_1(h_2g_1)g_2 = h_1(h_2'g_1')g_2$，$h_2'g_1' \in H_1H_2$

$= (h_1h_2')(g_1'g_2) \in H_1H_2$

$(h_1h_2)^{-1} = h_2^{-1}h_1^{-1} = (h_2^{-1})'(h_1^{-1})' \in H_1H_2$

由判定一：$H_1H_2 \leq G$

ii) 必要性：$H_1H_2 \leq G \Rightarrow \forall\, h_1h_2 \in H_1H_2$，

$(h_1h_2)^{-1} = h_2^{-1}h_1^{-1} \in H_1H_2$

$\forall\, g_2g_1 \in H_2H_1$，$\exists\, h_1 = g_1^{-1}$，$h_2 = g_2^{-1}$ s.t.

$(h_1h_2)^{-1} = g_2g_1 \in H_1H_2 \Rightarrow H_2H_1 \subseteq H_1H_2$

同理：$H_1H_2 \subseteq H_2H_1$

$\Rightarrow H_1H_2 = H_2H_1$

19. 设 $G=\langle a\rangle$ 是 15 阶循环群.
(1) 找出 G 的全部生成元;
(2) 找出 G 的全部子群并画出 G 的子群格.

(1) $r=1,2,4,7,8,11,13,14$

全部的生成元为 $a, a^2, a^4, a^7, a^8, a^{11}, a^{13}, a^{14}$

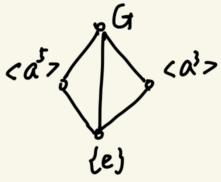
(2) $15=1\times3\times5$

1阶子群: $\{e\}$

3阶子群: $\langle a^5\rangle=\{e, a^5, a^{10}\}$

5阶子群: $\langle a^3\rangle=\{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}\}$

15阶子群: G



20. 设 G 是群, $a,b\in G$, $|a|=p$, p 为素数, 若 $a\notin\langle b\rangle$, 证明
$$\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}.$$

显然 $e\in\langle a\rangle$ 且 $e\in\langle b\rangle \Rightarrow e\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle$

假设 $\exists\ x\neq e$, $x\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle$

$\Rightarrow x=a^s=b^t$, 设 $|b|=m$

$x^p=a^{sp}=b^{tp}=e \Rightarrow m\mid tp \Rightarrow m\mid t$

$\Rightarrow t=km \Rightarrow x=b^{km}=e^k=e$ 矛盾

故 不存在 $x\neq e$ 且 $x\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle$

即 $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$

21. 设 G 是 rs 阶循环群, $(r,s)=1$, H_1 和 H_2 分别为 G 的 r,s 阶子群. 证明
$$G=H_1H_2.$$

i) 证 $H_1H_2\subseteq G$, 设 $G=\langle a\rangle$, $|a|=rs$

则 $H_1=\langle a^s\rangle$, $H_2=\langle a^r\rangle$

$\forall\ h_1h_2\in H_1H_2$, $h_1h_2=(a^s)^m\cdot(a^r)^n=a^{sm+rn}\in G$

ii) 证 $G\subseteq H_1H_2$, 因为 $(r,s)=1 \Rightarrow \exists\ u,v\in\mathbb{Z}^+$ s.t $ur+sv=1$

$\forall\ a^t\in G$, $a^t=(a^{ur+sv})^t=(a^r)^{ut}\cdot(a^s)^{vt}\in H_1H_2$

故 $G=H_1H_2$ 得证

23. 证明任何无限群有无穷多个子群.

反证：假设无限群 G 有 k 个子群 $H_1, H_2, \cdots, H_k$

$G \supseteq \{a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}\}$

$H_i = \langle a_i \rangle$

i) H_i 两两不同，若 $\langle a_i \rangle = \langle a_j \rangle$ 则

$\forall\ a_i^s, \exists\ t\ s.t.\ a_i^s = a_j^t \Rightarrow a_i = a_j^m$

同理：$a_j = a_i^n \Rightarrow a_i = a_j \Rightarrow i = j$

ii) 考虑 $H_{k+1} = \langle a_{k+1} \rangle$，是第 $k+1$ 个子群，矛盾

故无限群有无穷多个子群