46. 设 G 是全体 $n \times n$ 实可逆矩阵关于矩阵乘法构成的群，H 是 G 中全体行列式大于 0 的矩阵集合.

(1) 证明 $H \trianglelefteq G$；

(2) 计算 $[G:H]$.

(1) $\forall g \in G, h \in H$，$|g| \neq 0$，$|h| > 0$

若 $|g| > 0$ 则 $|g^{-1}| > 0 \Rightarrow |ghg^{-1}| > 0$，$ghg^{-1} \in H$

故 $H \trianglelefteq G$

(2) 令 $a = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$，$|a| = -1$，$a^2 = E$

$\forall h \in H$，$|ah| = -|h| < 0 \Rightarrow ah \notin H$，$aH \neq H$

$\forall g \in G$，若 $g \in H$ 则 $gH = H$

若 $g \notin H$. 则 $|g| < 0$，$g = a(ag)$

$|ag| = -|g| > 0 \Rightarrow ag \in H \Rightarrow gH = aH$

$\Rightarrow$ G 有且仅有 H 和 aH 为陪集，$[G:H] = 2$

47. 设

$$G_1 = \{A \mid A \in M_n(Q) \wedge |A| \neq 0\},$$

其中 $M_n(Q)$ 是有理数域上的 n 阶矩阵集合($n \geqslant 2$). G_1 关于矩阵乘法构成群. φ 是 G_1 到 $G_2 = \langle R^*, \cdot \rangle$ 的映射，$\varphi(A) = |A|$，$\forall A \in M_n(Q)$，其中 $\cdot$ 为普通乘法.

(1) 证明 φ 是 G_1 到 G_2 的同态映射；

(2) 求出 $\varphi(G_1)$ 和 $\ker\varphi$.

(1) $\forall a, b \in G_1$，$\varphi(ab) = |ab| = |a||b| = \varphi(a)\varphi(b)$

$\Rightarrow$ φ 是 $G_1 \to G_2$ 的同态

(2) $\varphi(G_1) \subseteq \mathbb{Q}$，$\forall x \in \mathbb{Q}$，令 $A = \begin{pmatrix} x & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$，

则有 $A \in M_n(\mathbb{Q})$，$x = \varphi(A) \in \varphi(G_1)$

$\Rightarrow \varphi(G_1) = \mathbb{Q}$，$\ker\varphi = SL_n(\mathbb{Q}) = \{A \mid A \in M_n(\mathbb{Q}) \wedge |A| = 1\}$

48. 证明除零同态以外，不存在 $\langle Q,+\rangle$ 到 $\langle Z,+\rangle$ 的同态映射.

设 $\varphi: \mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$ 为 $\langle\mathbb{Q},+\rangle$ 到 $\langle\mathbb{Z},+\rangle$ 的同态映射，

若 $\exists x\in\mathbb{Q}$ s.t. $\varphi(x)=n\neq 0$，则令 $m=\varphi(\frac{x}{2n})\in\mathbb{Z}$

则有 $n=\varphi(x)=\varphi(\frac{x}{2n}+\frac{x}{2n}+\cdots+\frac{x}{2n})$

$=\varphi(\frac{x}{2n})+\varphi(\frac{x}{2n})+\cdots+\varphi(\frac{x}{2n})$

$=2nm$

$\Rightarrow m=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$，矛盾

故原命题得证

51. 设 φ 是群 G_1 到 G_2 的同态映射，证明

(1) 若 H 是 G_2 的子群，则 $\varphi^{-1}(H)$ 是 G_1 的子群；

(2) 若 H 是 G_2 的正规子群，则 $\varphi^{-1}(H)$ 是 G_1 的正规子群.

(1) H 是群 $\Rightarrow e_1\in\varphi^{-1}(e_2)\subseteq\varphi^{-1}(H)\Rightarrow\varphi^{-1}(H)$ 非空

$\forall a,b\in\varphi^{-1}(H)$，$\varphi(a),\varphi(b)\in H$

$\Rightarrow\varphi(ab^{-1})=\varphi(a)\varphi(b^{-1})=\varphi(a)\varphi(b)^{-1}\in H$

$\Rightarrow ab^{-1}\in\varphi^{-1}(H)\Rightarrow\varphi^{-1}(H)\leq G_1$

(2) $\varphi^{-1}(H)$ 为群 $\Rightarrow\forall g\in G_1, h\in\varphi^{-1}(H)$，

$\varphi(ghg^{-1})=\varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1})\in H$

则有 $ghg^{-1}\in\varphi^{-1}(H)\Rightarrow\varphi^{-1}(H)\trianglelefteq G_1$

53. 设 φ 是群 G_1 到 G_2 的满同态映射，H 是 G_1 的子群. 若 $|H|$ 与 $|G_2|$ 互素，证明 $H\subseteq\ker\varphi$.

$\varphi(H)\leq G_2\Rightarrow|\varphi(H)|\mid|G_2|$

设 $\varphi|H: H\to\varphi(H)$ 则 $\varphi|H$ 也是同态，且为满射

$\Rightarrow H/\ker(\varphi|H)\cong\varphi(H)\Rightarrow|\varphi(H)|=|H/\ker(\varphi|H)|=[H:\ker\varphi]\,/\,|H|$

$\Rightarrow |\varphi(H)| \mid \gcd(|H|, |G_2|) = 1$

$\Rightarrow \varphi(H) = \{e_2\} \Rightarrow H \subseteq \ker\varphi$

60. 设 φ 是群 G 的满自同态，若 G 只有有限个子群，证明 φ 是 G 的自同构.

G 为有限群 $\Rightarrow$ 设 $|G| = n$，$\varphi(G) = G$

$\Rightarrow G/\ker\varphi \cong G$，$|\ker\varphi| = \dfrac{|G|}{[G:\ker\varphi]} = 1$

$\Rightarrow \ker\varphi = \{e\} \Rightarrow \varphi$ 是单同态 $\Rightarrow \varphi$ 是同构